УДК 681.518.22

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОМЕХОЗАЩИЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАТОРЫ

С.В. Гуляев, А.М. Шубладзе, С.И. Кузнецов, А.В. Кротов, В.Р. Ольшванг, В.А. Малахов

Предложен способ получения оценки производной гауссовского стационарного сигнала, близкой к оптимальной в среднеквадратическом смысле, когда спектральные плотности полезного сигнала и помехи известны с точностью до уровня. Рассмотрена его реализация с помощью специальным образом организованных нелинейных динамических систем. Дано сравнение с известными способами.

Ключевые слова: дифференцирование, адаптация, оптимальность, гауссовский шум.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из задач, возникающих при синтезе современных высокоэффективных систем управления динамическими объектами, заключается в получении информации о фазовом состоянии этих объектов. Ее решение может быть достигнуто путем разработки устройств, позволяющих получать близкую к оптимальной информацию о производной выходного сигнала объекта как в отсутствии, так и при наличии помех.

При решении подобных задач под оптимальностью часто понимают минимум среднеквадратической ошибки дифференцирования. Достаточно полно такая задача решена в теории винеровской фильтрации, когда полезный сигнал и помеха представляют собой гауссовские сигналы с известными дробно-рациональными спектральными плотностями. Оптимальное решение в этом случае представляет собой линейный оператор с дробно-рациональной передаточной функцией.

Согласно этой теории передаточная функция дифференциатора стремится к идеальному оператору дифференцирования, когда уровень спектральной плотности помехи стремится к нулю. В том случае, когда спектральная плотность помехи неограниченно возрастает, значительно превышая спектральную плотность полезного сигнала, модуль передаточной функции оптимального дифференциатора на всех частотах стремится к нулю.

Формально высказанное утверждение выглядит следующим образом. Пусть наблюдаемый сигнал имеет вид

$$z(t) = x(t) + \varphi(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — полезный стационарный гауссовский сигнал, $\varphi(t)$ — стационарная гауссовская помеха, некоррелированная с сигналом $x(t)$.

Спектральная плотность полезного сигнала $x(t)$

$$f_x(Q, \omega) = \frac{Q\left(\sum\limits_{j=1}^{m-p} b_j\omega^{2j} + 1\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\omega^{2j} + 1}, \qquad (2)$$

где $m < n$, $m - p > 0$, m, p, n, b_j и a_j — известные параметры, $Q > 0$ — неизвестный параметр. Спектральная плотность помехи $\varphi(t)$

$$f_\varphi(R, \omega) = \frac{R\sum\limits_{l=1}^{e} d_l\omega^{2l}}{\sum\limits_{l=1}^{d} c_l\omega^{2l} + 1}, \qquad (3)$$

где $d < n$, e, d_l, d и c_l — известные параметры, $R > 0$ — неизвестный параметр.

Как следует из работ [1, 2], в этом случае для спектров (2) и (3) передаточная функция оптимального в среднеквадратическом смысле дифференциатора

$$W_{\text{o}.q}(i\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(i\omega)}\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\omega)^q f_x(\omega)}{\psi^*(i\omega)}e^{i\omega t}d\omega, \qquad (4)$$

где q — порядок дифференцирования оптимального фильтра, функции $\psi(i\omega)$ и $\psi^*(i\omega)$ находятся из уравнения

$$\psi(i\omega)\psi^*(i\omega) = \psi(i\omega)\psi(-i\omega) = f_x(\omega) + f_\varphi(\omega) = f_z(\omega) \qquad (5)$$

или из уравнения [2],

$$\psi(i\omega) = \sqrt{R}\,F(Q/R, i\omega),$$
$$\psi^*(i\omega) = \sqrt{R}\,F(Q/R, -i\omega) \qquad (6)$$

где F — дробно-рациональная функция введенных в выражениях (2) и (3) параметров, а сама передаточная функция (4) с учетом выражений (5), (6) преобразуется к виду

$$W_{oq}(Q/R,\,p) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{q} k_{чj}(Q/R)(p)^j}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dot{k}_{зj}(Q/R)(p)^j + (p)^n}, \qquad (7)$$

где $p = i\omega$, q — порядок дифференцирования, n — порядок полинома в знаменателе спектральной плотности (2) полезного сигнала, $k_{чj}$ и $k_{зj}$ — коэффициенты полиномов числителя и знаменателя. Из формулы (7) следует, что параметры полиномов в передаточной функции оптимального дифференциатора являются функциями отношения Q/R, поэтому каждому значению отношения Q/R в постановке (1)—(3) соответствует своя передаточная функция (7).

Из той же теории оптимальной фильтрации следует, что среднеквадратическая ошибка дифференцирования любого дифференциатора с передаточной функцией $W_д(p)$ при $p = i\omega$ определяется выражением

$$\sigma_д^2 = \sigma_{о.д}^2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |W_д(i\omega) - W_{о.д}(i\omega)|^2 f_z(Q,\,R)d\omega, \quad (8)$$

где

$$\sigma_{о.д}^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|(i\omega)^q|^2 f_x(Q,\,\omega) - $$
$$- |W_{о.д}(i\omega)|^2 f_z(Q,\,R,\,\omega))d\omega \qquad (9)$$

— среднеквадратическая ошибка дифференцирования q-й производной оптимального винеровского дифференциатора.

Таким образом, при линейном способе дифференцирования произвольным линейным дифференциатором среднеквадратическая ошибка может быть только больше ошибки (9) и настолько, насколько больше несовпадение спектральных плотностей их операторов. Далее на основе этого утверждения будет предложен способ синтеза нелинейного дифференциатора, оценивающего первую производную сигнала в постановке (1)—(3), эквивалентная передаточная функция которого при различных значениях отношения Q/R близка к передаточным функциям совокупности оптимальных при тех же значениях Q/R дифференциаторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается практически важная задача близкого к оптимальному в среднеквадратическом смысле дифференцирования гауссовского сигнала со спектральной плотностью полезного сигнала

$$f_x(Q,\,\omega) = \frac{Q}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}, \qquad (10)$$

наблюдаемого на фоне гауссовской аддитивной помехи со спектральной плотностью вида

$$f_\varphi(R,\,\omega) = R. \qquad (11)$$

Выражения (10) и (11) представляют собой частный случай выражений (2)—(3), поэтому все сделанные во Введении утверждения остаются справедливы и для спектров (10), (11).

Требуется синтезировать нелинейное дифференцирующее устройство, эквивалентная линеаризованная передаточная функция которого при любом значении Q/R была бы близка к передаточной функции оптимального дифференциатора (7), рассчитанного для того же значения Q/R.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Воспользуемся приведенной в работе [2] связью между параметрами спектральных плотностей (10), (11) и передаточной функцией (7) оптимального в среднеквадратическом смысле дифференциатора. Эта передаточная функция в рассматриваемой задаче имеет вид

$$W_{о.д}(Q/R,\,p) = [(Q/R)p(\sqrt[4]{1 + Q/R} + 1 - \sqrt{2}]/[(1 + $$
$$+ \sqrt{1 + Q/R})(1 + \sqrt[4]{Q/R + 1}) \times$$
$$\times (\sqrt{1 + Q/R} + p\sqrt[4]{1 + Q/R}\sqrt{2} + p^2)]. \qquad (12)$$

В рассматриваемом частном случае (10), (11) отсюда следует справедливость сделанных ранее утверждений, что порядок передаточной функции оптимального дифференциатора определяется порядком полинома в знаменателе спектральной плотности (10), а ее коэффициенты являются функцией отношения Q/R.

Приблизим передаточную функцию (12) близкой к ней передаточной функцией вида

$$W_{н.д}(\hat{Q}/\hat{R},\,i\omega) = [i\omega(\sqrt{\hat{Q}/\hat{R} + 2} - \sqrt{2})]/[\sqrt{\hat{Q}/\hat{R} + 2} +$$
$$+ 1 - \sqrt{2} + i\omega(\sqrt[4]{\hat{Q}/\hat{R} + 2} + 1 - \sqrt[4]{2}) - \omega^2], \qquad (13)$$

зависящей от отношения оценок уровня спектра полезного сигнала $\hat{Q}$ и уровня спектра помехи $\hat{R}$.

На рис. 1 изображена структурная схема нелинейного помехозащищенного дифференциатора, где $\hat{x}(t)$ — оценка полезной низкочастотной составляющей дифференцируемого сигнала, $\hat{\varphi}(t)$ — оценка высокочастотной помехи, эквивалентная передаточная функция которого определяется выражением (13).

Оценка $\hat{Q}$ уровня спектра сигнала производится с помощью линейного низкочастотного фильтра $W_{н.ф}(p) = \dfrac{k_{н.ф}}{(T_{н.ф}p + 1)^2}$, а оценка $\hat{R}$ уровня спектра

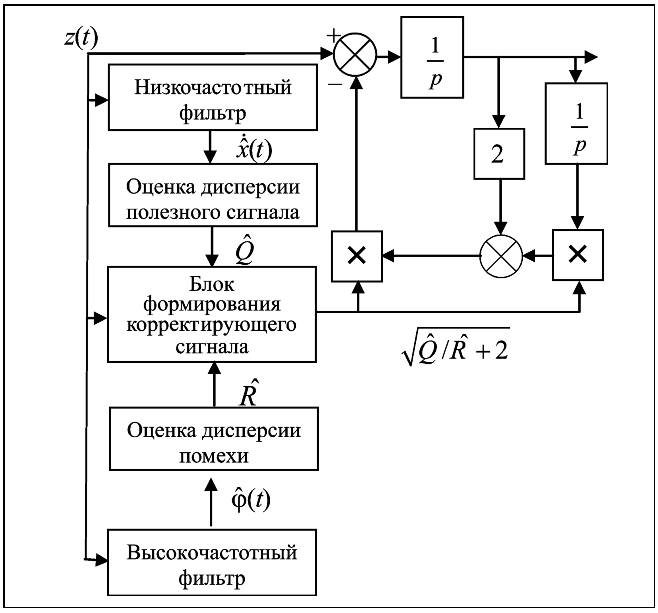

Рис. 1. Схема нелинейного помехозащищенного дифференциатора

помехи — линейным высокочастотным фильтром, $W_{\text{в.ф}}(p) = \dfrac{k_{\text{в.ф}}p}{(T_{\text{н.ф}}p + 1)^2}$. Оценки $\hat{Q}$ и $\hat{R}$ удовлетворяют уравнениям

$$T_g\dot{\hat{Q}}(t) + \hat{Q}(t) = \hat{x}^2(t), \qquad (14)$$

$$T_g\dot{\hat{R}}(t) + \hat{R}(t) = \hat{\varphi}^2(t), \qquad (15)$$

где T_g — достаточно большая постоянная времени.

С помощью оценок (14), (15), передаточной функции (12) оптимального при любом $Q/R > 0$ дифференциатора и эквивалентной передаточной функции $W_{\text{н.д}}(\hat{Q}/\hat{R},\, i\omega)$ (13) нелинейного дифференциатора определим в соответствии с формулами (8) и (9) при $q = 1$ среднеквадратические ошибки дифференцирования

$$\sigma^2_{\text{н.д}} = \sigma^2_{\text{о.д}}(Q/R) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|W_{\text{н.д}}(Q/R,\, i\omega) - W_{\text{о.д}}(i\omega)|^2\left(\frac{Q}{1+\omega^4} + R\right)d\omega, \qquad (16)$$

$$\sigma^2_{\text{о.д}}(Q/R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|i\omega|^2\frac{Q}{1+\omega^4} - |W_{\text{о.д}}(Q/R,\, i\omega)|^2\left(\frac{Q}{1+\omega^4} + R\right)d\omega. \qquad (17)$$

На рис. 2—4 приведены зависимости (16) и (17), а также среднеквадратическая ошибка $\sigma^2_{\text{д.р}}(Q/R)$ известного [3] релейного дифференциатора с эквивалентной передаточной функцией

$$W_{\text{д.р}}(Q/R,\, i\omega) = \frac{i\omega k_{\text{р}}}{(T_{\text{ф}}i\omega + 1)(k_{\text{р}} + i\omega(\bar{k} + \bar{\bar{k}}k_{\text{р}}) - \omega^2)},$$

где $T_{\text{ф}} = 10^{-4}$, $k_{\text{р}} = 2/\sqrt{\pi R}$, $\bar{k} = 16$, $\bar{\bar{k}} = 0{,}01$, и среднеквадратическая ошибка $\sigma^2_{\text{д.л}}(Q/R)$ линейного дифференциатора, оптимального при $Q/R = 10^{-3}$, с передаточной функцией

$$W_{\text{д.л}}(Q/R,\, i\omega) = \frac{0{,}628\,i\omega}{3{,}16 + 7{,}6\,i\omega - \omega^2},$$

Из приведенных зависимостей видно, что среднеквадратическая ошибка дифференцирования (16) нелинейного дифференциатора лишь незначительно больше среднеквадратической ошибки (17) оптимального при любых значениях Q/R

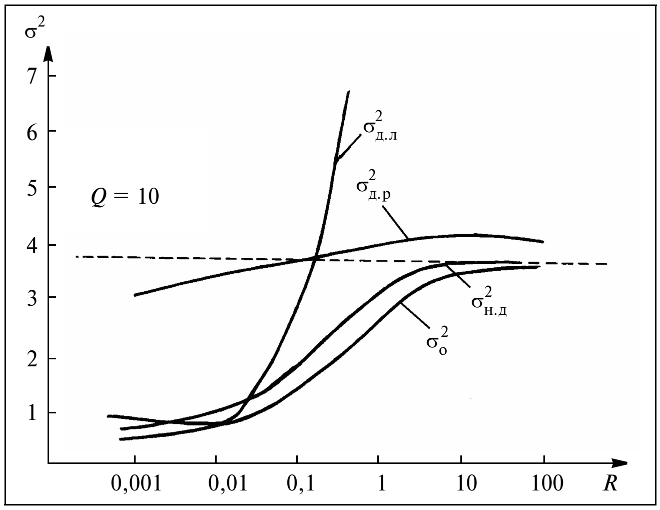

Рис. 2. Оценки дисперсий при высоком уровне сигнала

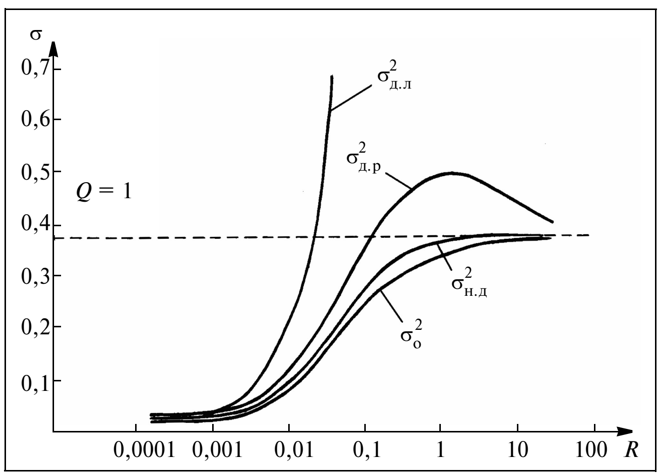

Рис. 3. Оценки дисперсий при среднем уровне сигнала

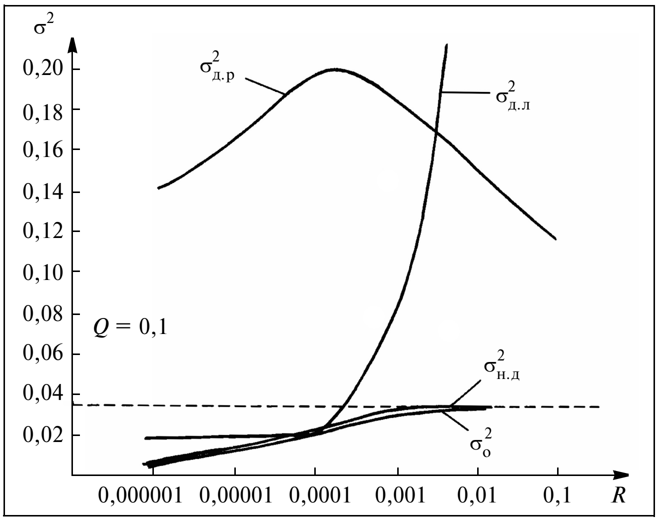

Рис. 4. Оценки дисперсий при низком уровне сигнала

дифференциатора и существенно меньше среднеквадратических ошибок релейного и линейного дифференциаторов. Реализация нелинейного дифференциатора по приведенной на рис. 1 схеме сопоставима по сложности с реализацией релейных [3] и линейных дифференциаторов с постоянными коэффициентами [4].

3. ПРИМЕР

Сравним качественные показатели результатов дифференцирования нелинейным, линейным и релейным дифференциаторами, полученные с помощью моделирования в системе «Matlab».

Дифференцировался сигнал вида $z(t) = A\sin 2\pi Ft + \varphi(t)$, где $A\sin 2\pi Ft$ — дифференцируемый полезный сигнал, $\varphi(t)$ — гауссовская экспоненциально коррелированная помеха. Было выполнено 16 экспериментов, половина из них — без помехи (дисперсия помехи $\sigma^2_\varphi = 0$), остальные — с помехой ($\sigma^2_\varphi = 0,1$). Во всех экспериментах частота полезного сигнала $F = 0,0016$ Гц.

Результаты приведены в таблице, где $\sigma^2_{\text{н.д}}$, $\sigma^2_{\text{р.д}}$ и $\sigma^2_{\text{л.д}}$ — среднеквадратические ошибки дифференцирования соответственно нелинейным, релейным и линейным дифференциатором. Для последнего из них приведены значения ошибки при малой и большой постоянной времени $T_ф$ фильтра.

Дисперсии ошибок

A	σ^2_φ	$\sigma^2_{\text{н.д}}$	$\sigma^2_{\text{р.д}}$	$\sigma^2_{(T=3\text{ с})\text{л.д}}$	$\sigma^2_{(T=30\text{ с})\text{л.д}}$
0,1	0	$2,87 \cdot 10^{-6}$	$1,55 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$
0,3	0	$1,45 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-1}$	$3,94 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$
0,1	0,1	$8,3 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
0,3	0,1	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$

Представленные результаты естественным образом подтверждают сделанные теоретические выводы о том, что нелинейные дифференциаторы во всех рассмотренных случаях лучше малоинерционных линейных дифференциаторов и значительно лучше инерционных линейных и релейных дифференциаторов. Другими словами, предложенное нелинейное дифференцирующее устройство обладает высокими адаптивными возможностями при дифференцировании сигналов с изменяющимися в широких диапазонах параметрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что методы теории оптимальной фильтрации дают возможность на базе функциональных степенных элементов, множителей и линейных динамических фильтров синтезировать помехозащищенные, обладающие большими адаптивными возможностями и просто реализуемые дифференцирующие устройства, близкие по среднеквадратическим ошибкам к подстраиваемым оптимальным дифференциаторам. Таким образом, рассмотренный способ дифференцирования по своим возможностям качественно превышает возможности других известных и широко применяемых на практике способов дифференцирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адаптивное* в среднеквадратическом смысле дифференцирование // Управление большими системами / С.В. Гуляев, А.М. Шубладзе, В.А. Малахов и др. — 2010. — № 3. — С. 75—88.
2. *Теория* систем с переменной структурой / С.В. Емельянов, В.И. Уткин, В.А. Таран и др. — М.: Наука, 1970.
3. *Цыпкин Я.З.* Теория релейных систем автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1955.
4. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. — М.: Физматгиз, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Гуляев Сергей Викторович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, (495) 334-88-81, ✉ svgul@inbox.ru,

Шубладзе Александр Михайлович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-88-81, ✉ shub@ipu.ru,

Кузнецов Сергей Иванович — ген. директор, Государственный научно-исследовательский институт теплоэнергетического приборостроения, г. Москва, ☎(495) 615-21-90, www.niiteplopribor.ru,

Кротов Александр Васильевич — нач. управления, ОАО «Газавтоматика», г. Москва, ☎(499) 580-41-22, ✉ alex_k@gazauto.gazprom.ru,

Ольшванг Владимир Рафаилович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, (495) 334-88-81,

Малахов Валерий Александрович — канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-88-81.