УДК 519.237.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ДАТИРОВАНИЯ «ПУЗЫРЕЙ» НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

Е.А. Гребенюк, А.В. Малинкина

Рассмотрен подход к определению и датированию «пузырей», основанный на обнаружении изменений типов случайных процессов цен и дивидендов, и предложен соответствующий алгоритм.

Ключевые слова: рациональный пузырь, разностно-стационарный процесс, взрывной процесс, тест Дики — Фуллерана на единичный корень, алгоритмы последовательной проверки гипотез.

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывный рост цен на финансовых рынках, включая рынки ценных бумаг и рынки недвижимости, время от времени приводит к предположению о возможном появлении «пузыря» на финансовом рынке. Под «пузырем» понимается ситуация, когда разница между рыночной и реальной ценой объекта неоправданно завышена. Причем эта проблема касается не одной или нескольких стран, а широкого перечня промышленных стран, включая страны Европы, США, Японию и др. Озабоченность данным вопросом оправдана, поскольку неадекватное повышение цен на финансовых рынках напрямую влияет на различные аспекты экономики в отдельной стране, а также на мировую экономику в целом. Своевременное выявление факта наличия «пузыря», а также определение дат его возникновения и окончания поможет аналитикам финансового рынка сделать верные прогнозы относительно возникшей экономической ситуации и своевременно выработать комплекс предупредительных мер, позволяющих предотвратить экономический кризис или смягчить его последствия.

Поэтому в последнее время все большее число исследователей работают в направлении разработки эффективных эконометрических методов идентификации «пузырей» и их датирования [1, 2]. Многообразие используемых моделей и тестов приводит к отсутствию какого-либо единого подхода к задаче идентификации «пузырей».

В настоящей статье рассматривается подход к идентификации «пузырей» и их датированию, основанный на обнаружении структурных изменений свойств цен и дивидендов, предлагается соответствующий метод идентификации и датирования «пузырей», основанный на применении методов последовательного обнаружения изменений свойств случайных процессов [3], и проводится его сравнение с известными ранее методами.

1. МОДЕЛИ РАЦИОНАЛЬНЫХ «ПУЗЫРЕЙ»

Отправной точкой анализа и определения рациональных пузырей в большом числе ранних работ служит модель изменения во времени биржевой цены вида [4]:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1} + P_{t+1})}{1+R}, \qquad (1)$$

где E_t — условное математическое ожидание относительно информации, имеющейся в момент времени t относительно всех прошлых значений цен и дивидендов, P_t — реальная биржевая цена (без дивидендов), D_t — реальные дивиденды, полученные в интервале $(t - 1, t]$, R — ставка дисконта.

Уравнение (1) рекурсивной подстановкой $E_t[E_{t+1}(X_{t+1})] = E_t(X_{t+1})$ приводится к виду:

$$P_t = \lim_{k \to \infty}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{E_t(D_{t+i})}{(1+R)^i} + \frac{E_t(P_{t+k})}{(1+R)^k}\right\}. \qquad (2)$$

В уравнении (2) в явном виде выделены две составляющие актива: первое слагаемое — сумма дисконтированных будущих дивидендов, второе — ожидаемая стоимость продажи актива в будущем на k периодов вперед. При анализе динамики цен выделяют:

$$F_t = \sum_{i=1}^{k} \frac{E_t(D_{t+i})}{(1+R)^i} \qquad (2а)$$

— часть цены, определяемую фундаментальными факторами, которая представляет собой ожидаемую текущую стоимость будущего потока дивидендов, полученных от актива, и

$$B_t = \lim_{k \to \infty} \frac{E_t(P_{t+k})}{(1+R)^k} \qquad (2б)$$

— «пузырь»-составляющую. Рациональный «пузырь» представляет собой отклонение рыночной цены от фундаментальной:

$$B_t = \lim_{k \to \infty} \frac{E_t(P_{t+k})}{(1+R)^k}.$$

Равенство предела (2б) нулю называется условием трансверсальности: если бы у инвестора, действующего в долгосрочной перспективе, была возможность продать актив по цене, большей, чем сумма дисконтированных дивидендов, что соответствует отличию от нуля рассматриваемого предела, то инвестор использовал бы эту возможность и получил дополнительный доход. В этом случае другие инвесторы на рынке также захотели бы продать этот актив, и его цена упала бы до фундаментального уровня.

Если условие трансверсальности не выполняется, то стоимость актива в рамках рассматриваемой модели представляет собой сумму фундаментальной и «пузырь» — составляющих: $P_t = F_t + B_t$, где F_t описывается уравнением (2а), а составляющая B_t удовлетворяет уравнению

$$(1 + R)B_t - E_t(B_{t+1}) = 0. \qquad (3)$$

Любое решение уравнения (3), отличное от нуля при всех t, представляет собой рациональный «пузырь».

Рассмотрим теперь некоторые свойства временных рядов финансовых процессов, которые потребуются для анализа существования «пузырей».

Большинство финансовых и экономических показателей описывается нестационарными временными рядами. На множестве нестационарных экономических и финансовых временных рядов обычно выделяют два класса [5]: разностно-стационарные и тренд-стационарные. *Тренд-стационарными* называются процессы, стационарные относительно некоторого детерминированного тренда, например, линейного, квадратичного, экспоненциального и др., к этому же классу относят и стационарные процессы, детерминированный тренд которых имеет нулевой наклон. *Разностно-стационарными* называют процессы, которые:

—не являются тренд-стационарными;

— приводятся к стационарным последовательным взятием разностей.

Порядок разности, необходимый для получения стационарного ряда, называется порядком интеграции процесса. Если процесс стационарный, то его называют интегрированным нулевого порядка и обозначают $I(0)$, если нестационарный ряд y_t не является тренд-стационарным и становится стационарным после взятия разностей первого порядка, то процесс называют интегрированным первого порядка и обозначают $I(1)$. Ряды реальных финансовых и макроэкономических показателей редко имеют порядок интеграции больше двух. Однако, как показали исследования таких явлений как финансовые «пузыри», существуют периоды, в которые отдельные ряды не могут быть приведены к стационарным взятием разностей. Процессы в такие периоды называют «взрывными». Приведем формальные определения.

Пусть процесс y_t описывается моделью авторегрессии порядка p:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \mu_t, \qquad (4)$$

тогда тождественными преобразованиями его можно привести к виду:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta y_{t-j} + \mu_t, \qquad (4а)$$

где $\gamma = \beta_1 + \dots + \beta_p - 1$, $\gamma_1 = -(\beta_2 + \dots + \beta_p)$, $\gamma_2 = -(\beta_3 + \dots + \beta_p)$, ..., $\gamma'_{p-1} = -\beta_p$, μ_t — белый шум. Если процесс разностей Δy_t, — стационарный, то тип процесса y_t определяется значениями коэффициента γ в модели (4а): если $\gamma < 0$, то процесс является *стационарным*, если $\gamma = 0$ — *разностно-стационарным* или интегрированным первого порядка, если $\gamma > 0$, то процесс — «*взрывной*». Уравнение (4) является уравнением стационарного процесса, если все корни его характеристического уравнения

$$1 - \beta Z - \dots - \beta_p Z^p = 0 \qquad (5)$$

лежат вне единичной окружности. Если в представлении (4а) $\gamma = 0$, то характеристическое уравнение (5) имеет, по крайней мере, один корень на единичной окружности. Поэтому разностно-стационарный процесс называют процессом с единичным корнем.

Из уравнения (4а) следует:

— реальный взрывной процесс не может оставаться взрывным бесконечно долго, так как иначе цена его станет бесконечно большой;

— взрывной процесс не может быть приведен к стационарному последовательным взятием разностей.

Из уравнения (3) следует, что процесс B_t нестационарный и «взрывной» в силу того, что коэффициент при B_t больше единицы. Так как «пузырь» представляет собой взрывной процесс, то в реальности он не может существовать бесконечно долго, поэтому для описания «пузырей» были разработаны модели, описывающие окончание или схлопывание «пузыря». Наиболее известна модель пузыря, предложенная в работе [6]:

$$B_{t+1} = \begin{cases} \pi^{-1}(1+R)B_t + \varepsilon_{t+1} \text{ с вероятностью } \pi, \\ \varepsilon_{t+1} \text{ с вероятностью } 1-\pi, \end{cases}$$

где $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_t, ...$ — последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с нулевым средним, пузырь в каждый момент времени t продолжается с вероятностью π или сжимается (схлопывается) с вероятностью $1 - \pi$.

2. МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ «ПУЗЫРЕЙ»

2.1. Общий подход. Проверка изменений типов рядов цен и дивидендов

В основе одного из подходов к обнаружению и датированию «пузырей» лежит проверка типов (стационарный, разностно-стационарный, взрывной) рядов цен и дивидендов. Если процесс изменения цен становится «взрывным», а процесс изменения дивидендов остается стационарным или разностно-стационарным, то на рынке возникает пузырь.

Уравнение (1), которое описывает изменение цен в предположении о постоянной ставке дисконта, мало соответствует реальности. Если допустить, что ставка дисконта изменяется во времени времени — R_{t+1}, то исходное уравнение цены (1) принимает вид:

$$P_t = \frac{E_t(D_{t+1} + P_{t+1})}{1 + R_{t+1}}. \tag{6}$$

Соотношение между ценами и дивидендами в отсутствии «пузыря» при изменяющейся во времени ставке дисконта имеет вид [7]:

$$\frac{P_t}{D_t} = E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{j} R_{t+k}^{-1}\right)\frac{D_{t+j}}{D_t}\right], \tag{7}$$

где обозначения совпадают с обозначениями (1). Из выражения (7) следует [7], что отношение цен и дивидендов является стационарным, если на рынке отсутствует пузырь, а ставка дисконта и дивиденды дивиденды — стационарны. Если на рынке присутствует «пузырь», то процесс изменения цен в силу уравнения (3) — «взрывной», независимо от того, является ли процесс изменения дивидендов стационарным или разностно-стационарным. Для определения наличия «пузыря», а также дат его возникновения и «схлопывания», нужно определить участки процесса (7), на которых процесс «взрывной». Обнаруженные особенности отношения цен и дивидендов послужили причиной того, что именно оно часто используется для анализа наличия пузырей. В более ранних работах вместо отношения уровней (7) использовалась аппроксимация логарифмов цен и дивидендов, предложенная в работе [8]. В отсутствие пузыря логарифм отношения цен и дивидендов является стационарным, при возникновении пузыря, как было показано в работе [9], этот процесс становится разностно-стационарным. Алгоритм обнаружения пузырей был основан на применении теста Дики-Фуллера [5], проверяющего наличие в процессе единичного корня. Для реализации теста ряд описывается уравнением вида (4а) и выполняется проверка гипотезы: $H_0{:}\gamma = 0$ (процесс разностно-стационарный) против альтернативной $H_1{:}\gamma < 0$ (процесс стационарный).

Однако:

— исследования, проведенные Эвансом [10], показали, что при наличии «схлопывающихся» пузырей тест на единичный корень может отвергнуть нулевую гипотезу, «пропустив» наличие пузырей;

— как показали более поздние эмпирические исследования [11, 12] свойств финансовых активов, соотношение цен и дивидендов крупных биржевых индексов в отсутствие «пузырь»-составляющей не является ни чисто стационарным, ни интегрированным первого порядка процессом, а меняет свои свойства от разностно-стационарного процесса до стационарного и наоборот.

Работы Филлипса и соавторов [1, 13, 14] по исследованию свойств взрывных процессов и соответствующие алгоритмы определения участков процесса взрывного типа положили начало новому направлению в разработке алгоритмов определения пузырей, в которых процедуры обнаружения взрывных свойств процесса и определения моментов возникновения и изменения этих свойств являются ключевыми.

Тесты на обнаружение изменений свойств случайных процессов подразделяются на два больших класса: обнаружение изменений в оценках параметров анализируемого процесса и обнаружение изменений в свойствах распределений, описывающих процессы. Первый подход был применен в работах [1, 13, 14], второй положен в основу алгоритма, предложенного в настоящей статье.

2.2. Подход Филлипса и Ву. Обнаружение изменений в параметрах модели процесса

Пусть анализируемый процесс описывается моделью авторегрессии вида (5а). Метод, предложенный в работах [1, 13, 14], основан на оценивании параметров регрессии на последовательно расширяющейся выборке с целью определения моментов изменения коэффициента γ в уравнении (4а) до значимой положительной величины при возникновении «пузыря» и от положительной величины до значения $\gamma \le 0$ при его схлопывании.

В качестве начального интервала работы алгоритма выбирается интервал τ_0 минимальной длины, необходимой для получения оценок коэфициентов авторегрессионной модели (4а), на котором он не проявляет взрывного поведения, и выполняется оценивание модели.

После получения оценки коэффициента γ оценивается ее значимость: вычисляется стандартная t-статистика, которая сравнивается с соответствующим критическим значением критерия Дики — Фуллера, и, если эта статистика в какой-то момент времени превосходит критическое значение, то процесс определяется как взрывной. Затем к анализируемой выборке добавляется следующее наблюдение, и процедура повторяется до конца выборки. В результате получают набор t-статистик ADF_0, ADF_1, ..., ADF_k, где $k + 1$ — число оценок γ, ADF_k соответствует t-статистике коэффициента γ, вычисленной для полной выборки. Дата возникновения «пузыря» определяется по результатам расчета ADF статистик:

$$\bar{r}_e = \inf_{s \ge 0}\{s\colon ADF_s > G_{\alpha_N}(s)\}, \qquad (8)$$

где $G_{\alpha_N}(S)$ — правостороннее критическое значение ADF_s, соответствующее уровню значимости α_N. Дата окончания «пузыря» определяется как первая точка после момента времени $\bar{r}_e + \delta\ln(T)$, в которой ADF статистика меньше критического значения, параметр δ выбирается при настройке и зависит от объема выборки T:

$$\bar{r}_f = \inf_{s \ge \bar{r}_e + \delta\ln(T)}\{s\colon ADF_s > G_{\alpha_N}(s)\}. \qquad (9)$$

Предложенный тест получил название supADF-тест (SADF). Было проведено эмпирическое исследование предложенного теста, показавшее его эффективность в случаеналиия одного «пузыря». Однако данный алгоритм не эффективен, когда процесс включает в себя не один, а несколько «пузырей». Поэтому было предложено обобщение предыдущего алгоритма [14] — обобщенный supADF-тест (Generalized supADF — GSADF). Данный метод также основывается на идее рекурсивного выполнения правостороннего теста на единичный корень. Однако GSADF-тест последовательно сдвигает начальную точку SADF-теста, и для каждого момента оценивания r_2 выполняет SADF-тест в окнах с начальными точками r_1, лежащими в интервале $[0,\ r_2 - r_0]$. Отметим, что GSADF-статистика представляет собой наибольшее значение ADF-теста для всех значений r_1 и r_2:

$$\mathrm{GSADF}(r_0) = \sup_{\substack{r_1 \in [0,\, r_2 - r_0] \\ r_2 \in [r_0,\, 1]}}\left(ADF_{r_1}^{r_2}\right). \qquad (10)$$

Критические значения правостоннего SADF- и GSADF-тестов были получены в работе [14] численным моделированием.Как показали проведенные авторами алгоритма многочисленные эксперименты, эффективность данного теста существенно зависит от того, насколько корректно используемая модель (4а) описывает анализируемый процесс, и выбора настроечных параметров. Критические значения определяются в результате моделирования и зависят от свойств процесса и объема выборки, что затрудняет практическое применение алгоритма и ограничивает его возможности для обнаружения пузырей в режиме реального времени.

3.ОПРЕДЕЛЕНИЕ УЧАСТКОВ ВЗРЫВНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОЦЕССА МЕТОДАМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ

3.1 Обнаружение и датирование «пузырей» с помощью методов последовательного анализа

Рассмотрим метод обнаружения и датирования пузырей, основанный на алгоримах текущего обнаружения изменений типа процесса. Предлагаемый подход не требует построения регрессионной модели ряда, имеет достаточно простые алгоритмы настройки, позволяет обнаруживать множественные пузыри и определять даты их возникновения и схлопывания. Экспериментальные исследования показали, что он, по крайней мере, не менее эффективный, чем подход, рассмотренный в работах [13, 14].

Пусть процесс описывается уравнением (4а) и $\gamma = 0$ или $\gamma \le 0$ до возникновения «пузыря», и $\gamma > 0$ — после. Если пузырь отсутствует, то корреляция между Δy_t и y_{t-1} равна нулю или отрицательна, если на рынке возникает пузырь, то корреляция между Δy_t и y_{t-1} становится положительной.

Для обнаружения перехода процесса y_t от интегрированного или стационарного к взрывному достаточно обнаружить изменение коэффициента корреляции от нулевого или отрицательного значения до его значимого положительного значения. И наоборот, для обнаружения перехода процесса y_t от взрывного к интегрированному или стационарному проверяется изменение коэффициента корреляции от заданного положительного значения до нулевого или отрицательного. Моменты изменений коэффициента корреляции определяют даты возникновения и схлопывания пузыря.

Алгоритм обнаружения изменений коэффициента корреляции представляет собой последовательную процедуру проверки гипотез, проверяется гипотеза H_0: «плотность распределения последовательности r_{t-k}, r_{t-k+1}, ..., r_t, ... выборочных коэффициентов корреляции, вычисленных по выборкам объема N, равна $f_{\theta_0}(r)$», против альтернативной гипотезы H_1: «плотность распределения последовательности r_{t-k}, r_{t-k+1}, ..., r_t, ... равна $f_{\theta_0}(r)$ до момента $t_\alpha : t - k < t_\alpha < t$ и равна $f_{\theta_1}(r)$ после», где $\theta_0 = (\rho_0, N)$, $\theta_1 = (\rho_1, N)$, момент t_α неизвестен. В основе алгоритма лежит процедура, разработанная Пейджем [15] для обнаружения изменений случайной последовательности независимых переменных $y_1, y_2, ..., y_{t_a}, y_{t_{a+1}}, ...$, где $y_1, y_2, ..., y_{t_a}$ одинаково распределены с плотностью распределения $f_{\theta_0}(r)$, а $y_{t_{a+1}}, y_{t_{a+2}}, ...$ — одинаково распределены с плотностью распределения f_{θ_1}, где θ_0, θ_1 — известные параметры распределения до и после изменения свойств. Момент изменения свойств определяется как решение оптимизационной задачи:

$$\tau = \inf\left\{\tau \ge 1 : g = \max_{1 \le k \le t} s_k^\tau \ge h\right\}, \qquad (11)$$

где h — порог алгоритма,

$$s_k^\tau = \sum_{i=k}^{\tau} \ln\frac{f_{\theta_2}(s_i)}{f_{\theta_1}(s_i)}. \qquad (12)$$

Алгоритм (11), (12) обладает оптимальными свойствами при точно известных параметрах θ_0 и θ_1 в смысле критерия минимизации средней задержки обнаружения при ограничении среднего времени до ложной тревоги $T = E_{\theta_0}(t|t < t_a) < r_\alpha$, где r_α — заданный интервал между ложными тревогами.

Обнаружение пузыря сводится к выполнению процедуры последовательной проверки гипотезы: $H_0 : \rho = \rho_0 \le 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \rho = \rho_1 > 0$ при получении нового наблюдения[1].

3.2. Алгоритм последовательного обнаружения изменения коэффициента корреляции

Статистика, используемая в алгоритме обнаружения изменения коэффициента корреляции, представляет собой логарифм отношения правдоподобия двух плотностей распределения выборочного коэффициента корреляции $f_{\theta_0}(r)$, $f_{\theta_1}(r)$ для значений параметров $\theta_0 = (\rho_0, N)$, $\theta_1 = (\rho_1, N)$. Как показано в Приложении, эта статистика имеет вид:

$$s_{t-1}^t = \ln\frac{f_{\theta_2}(r_t)}{f_{\theta_1}(r_t)} = \ln\frac{(1-\rho_1^2)^{\frac{N-1}{2}}(1-\rho_0 r_t)^{N-3/2} \times}{(1-\rho_1 r_t)^{N-3/2}(1-\rho_0^2)^{\frac{N-1}{2}} \times} \to$$

$$\to \frac{\times\left[1 + \dfrac{\rho_1 r_t + 1}{4(2N-1)} + \dfrac{9(\rho_1 r_t + 1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right]}{\times\left[1 + \dfrac{\rho_0 r_t + 1}{4(2N-1)} + \dfrac{9(\rho_0 r_t + 1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right]}, \qquad (13)$$

где ρ_0 и ρ_1 — значения коэффициентов корреляции генеральной совокупности до и после изменения свойств, r_t — выборочный коэффициент корреляции, вычисленный в момент времени t, N — объем

[1] Выборочный коэффициент корреляции является оценкой генерального коэффициента корреляции между двумя случайными величинами y_t и Δy_{t-1} лишь в случае двумерного нормального закона распределения этих величин. Поэтому алгоритм может быть применен только к рядам, совместное распределение значений и первых разностей которых может быть аппроксимировано двумерным нормальным распределением.

выборки, по которому рассчитывается выборочный коэффициент корреляции.

Теорема 1. *Логарифм отношения правдоподобия выборочного коэффициента корреляциидля проверки гипотезы* $H_0 : \rho = \rho_0 \le 0$ *против гипотезы* $H_1 : \rho = \rho_1 > 0$ *определяется формулой* (13). *Математическое ожидание приращения логарифма правдоподобия при условии выполнения нулевой гипотезы отрицательно, а при условии выполнения альтернативной — положительно.*

Теорема 2. *Логарифм отношения правдоподобия выборочного коэффициента корреляции для проверки гипотезы* $H_0 : \rho = \rho_0 > 0$ *против гипотезы* $H_1 : \rho = \rho_1 \le 0$ *определяется как* $\hat{s}^t_{t-1} = \frac{1}{s^t_{t-1}}$, *где* s^t_{t-1} *определяется формулой* (13). *Математическое ожидание приращения логарифма правдоподобия при условии выполнения нулевой гипотезы отрицательно, а при условии выполнения альтернативной — положительно.* ♦

Доказательства теорем 1 и 2 и формулы расчета математических ожиданий и значения порогов приведены в Приложении.

В силу теорем 1 и 2 будем определять моменты возникновения «пузыря» как моменты изменения статистики s^t_{t-1} до значимой положительной величины, а моменты «схлопывания» как моменты изменения статистики $\hat{s}^t_{t-1}$ до значимой отрицательной величины. Решающая функция алгоритма обнаружения изменений коэффициента корреляции, определяющая выход статистики за доверительные границы, имеет вид:

$$g_0^+ = g_0^- = 0,$$

$$g_i^+ = \max\{h_l,\ g_{i-1}^+ + su^t_{t-1})\}, \quad i = 1, 2, ..., \quad (14)$$

где h_l — нижний порог алгоритма, $su^t_{t-1} = s^t_{t-1}$ или $su^t_{t-1} = \tilde{s}^t_{t-1}$, в зависимости от того, обнаруживается ли изменение от θ_0 к θ_1 или от θ_1 к θ_0. Значения решающей функции сравниваются с порогом h_h, (определяемым по формулам, приведенным в Приложении), при превышении которого фиксируются изменение коэффициента корреляции и момент возникновения или схлопывания «пузыря»:

$$g_i^+ = \max\{0,\ g_{i-1}^+ + su^t_{t-1})\} \ge h_n.$$

Истинные значения коэффициентов корреляции до возникновения «пузыря», в моменты существования «пузыря» и после его схлопывания, как правило, неизвестны иизменяются во времени. В отсутствие какой либо дополнительной информации о поведении процесса параметр ρ_0 выбирается равным нижней границе доверительного интервала нулевого выборочного коэффициента корреляции, вычисляемого по выборке размера N, параметр ρ_1 — равным верхней границе этого доверительного интервала.

Алгоритм обнаружения «пузырей» алгоритмом последовательного обнаружения изменений коэффициента корреляции включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Задание начальных значений: положительного значения коэффициента корреляции ρ_1, которое достигается при возникновении «пузыря», и значения коэффициента корреляции ρ_0 до возникновения «пузыря», вычисление верхнего и нижнего порогов по формулам (П8) и (П10) — см. Приложение. Формируется признак «наличие пузыря» и полагается равным нулю.

Шаг 2. Вычисление выборочного коэффициента корреляции в скользящем окне длины N.

Шаг 3. Проверка признака «наличие пузыря», если признак равен 1 («пузырь» существует), то вычисляется статистика $\hat{s}^t_{t-1} = 1/s^t_{t-1}$ и ее решающая функция, значение которой сравнивается с порогом h_h (П10), при превышении порога признак «наличие пузыря» полагают равным нулю и переходят к шагу 2. Если признак «наличие пузыря» равен 0, то переходят к шагу 4.

Шаг 4. Вычисление статистики, определяемой формулой (13), сравнение ее с верхним порогом h_h (П8),вычисление решающей функции по формуле (14). Если значение решающей функции превышает верхний порог, то признак «наличие пузыря» полагают равным 1 и переходят к шагу 2.

Заметим, что значения нижнего порога используются только для вычисления решающих функций по формуле (14), а значения верхнего порога — для определения дат возникновения и схлопывания пузыря.

3.3. Сравнение качества алгоритмов обнаружения «пузырей» методами последовательного анализа и рекурсивной регрессии

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма обнаружения множественных «пузырей» и сравнения его с методом, предложенным в работах [13, 14], рассмотрим результаты обнаружения и датирования «пузырей» для отношения цен и дивидендов фондового индекса S&P500, в корзину которого включено 500 избранных акционерных компаний США. Ежемесячные данные, собранные за период с января 1871 г. по декабрь

Таблица

Экспериментальная проверка и сравнение алгоритмов последовательного анализа и GSADF

Даты «пузырей»	Алгоритм последовательного анализа	Алгоритм GSADF
1878, июль — 1880, апрель	1878, июль — 1880, апрель	1879, октябрь — 1880, февраль
1885, декабрь — 1887, январь	1885, декабрь — 1887, январь	1886, ноябрь
1907, сентябрь — 1908, февраль	1907, сентябрь — 1908, май	1907, октябрь — 1907, ноябрь
1917, август — 1918, апрель	1917, август — 1918, сентябрь	1917, ноябрь — 1917, декабрь
1928, ноябрь — 1929, сентябрь	1928, ноябрь — 1929, октябрь	1929, январь — 1929, сентябрь
1945, октябрь — 1946, июнь	1946, апрель — май	—
1954, сентябрь — 1956, апрель	1954, ноябрь — 1956, август	1955, февраль — 1955, декабрь
1974, июль — декабрь	1974, июль — 1975, май	1974, сентябрь
1986, март — 1987, сентябрь	1986, март — 1987, сентябрь	1986, март — 1987, август
1995, июль — 2001, август	1995, август — 2000, июль	1995, декабрь — 2001, февраль
2008, октябрь — 2009, апрель	2008, сентябрь — 2009, сентябрь	2008, октябрь — 2009, март

2010 г., содержат 1680 значений и включают в себя значительное число кризисных событий, которым предшествуют рациональные «пузыри».

Проверка метода, предложенного в работах [13, 14], выполнялась с помощью комплекса программ разработанного авторами и представленного на сайте [16]. В комплекс программ входят исходные данные, программа для расчета критических значений GSADF-теста и программа для расчета значений GSADF статистики в каждой точке выборки. Начальный интервал для расчета модели был выбран равным 36-ти точкам. Рассчитанные критические значения статистики сравнивались с критическими значениями, моменты возникновения и схлопывания«пузыря» определялись по формулам (8) и (9) с использованием в них GSADF статистики (10).

Рассмотрим результаты экспериментальной проверки работы алгоритма. В первом столбце таблицы приведены даты кризисных событий, которые сопровождались возникновением «пузырей» на финансовых рынках, во втором — даты обнаружения и схлопывания финансовых «пузырей», обнаруженных алгоритмом кумулятивных сумм, в третьем — аналогичные даты для алгоритма GSADF.

Оценим точность датировки событий с помощью алгоритмов последовательного анализа. Оценка средней длительности события составляет по фактической оценке — 18,7 мес, по датированию алгоритмом последовательного анализа — 19,3, по алгоритму [13, 14] — 11,5 мес, запаздывание относительно фактической оценки составляет, соответственно, 9 и 26 мес.

Как следует из приведенных результатов сравнения, предложенный алгоритм обнаружения и датирования «пузырей» обнаруживает и датирует все события, определенные в первом столбце таблицы, причем датировка событий приближается к оценке, полученной экономистами. Алгоритм [13, 14] пропускает одно событие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены методы обнаружения и датирования «пузырей» рядов финансовых и макроэкономических показателей, основанные на анализе типов процессов изменения цен и дивидендов. Отношение цен и дивидендов в отсутствие пузыря представляет собой процесс, свойства которого могут меняться от стационарного к разностно-стационарному и наоборот. При возникновении ценового «пузыря» отношение цен и дивидендов становится «взрывным». Поэтому для обнаружения «пузырей» такого типа достаточно диагностировать наличие у процесса «взрывных» свойств. Даты возникновения о «схлопывания» пузыря определяются как моменты возникновения и исчезновения «взрывных» свойств процесса отношения цен и дивидендов. Предложен алгоритм обнаружения и датирования взрывных участков процесса, основанный на обнаружении возникновения значимых корреляций между уровнями процесса и его первыми разностями. Сравнение алгоритма с известными методами показало его высокую эффективность. Алгоритм не требует построения модели процесса, а его настроечные параметры легко вычисляются.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Плотность распределения выборочного коэффициента корреляции r двумерного нормально распределенного процесса [17]

$$f_{\theta_1}(r) = \frac{(N-2)(1-r^2)^{\frac{(N-4)}{2}}(1-\rho_1^2)^{\frac{(N-1)}{2}}\Gamma(N-1)}{\sqrt{2}\pi\Gamma(N-1/2)(1-\rho_1 r)^{N-3/2}} \times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2N-1}{2}, \frac{r\rho_1+1}{2}\right), \qquad (П1)$$

где $\theta_1 = (\rho_1, N)$ — параметры распределения, r — значение выборочного коэффициента корреляции, ρ_1 — значение коэффициента корреляции генеральной совокупности, N — объем выборки для расчета выборочного значения коэффициента корреляции,

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2N-1}{2}, \frac{r\rho_1+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(N-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(N-1)}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{N-2}\left(1-t\frac{\rho r+1}{2}\right)^{-1/2}dt, \qquad (П2)$$

— гипергеометрическая функция.

Доказательство теоремы 1: Разложение разложение гипергеометрической функции (П2) в степенной ряд имеет вид:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2N-1}{2}, \frac{r\rho_1+1}{2}\right) =$$

$$= \left[1 + \frac{\rho r+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho r+1)^2}{16(2N-1)(2N+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{225(1+\rho r)^3}{384(2N-1)(2N+1)(2N+3)} + \ldots\right]. \qquad (П3)$$

С учетом разложения (П3) распределение выборочного коэффициента корреляции параметрами $\theta_1 = (\rho_1, N)$ может быть представлено в виде:

$$f_{\theta_1}(r) = \frac{(N-2)(1-r^2)^{\frac{(N-4)}{2}}(1-\rho_1^1)^{\frac{(N-1)}{2}}\Gamma(N-1)}{\sqrt{2}\pi\Gamma(N-1/2)(1-\rho_1 r)^{N-3/2}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\rho_1 r+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1 r+1)^2}{16(2N-1)(2N+1)} + \ldots\right].$$

Логарифм отношения двух плотностей распределения $f_{\theta_0}(r)$, $f_{\theta_1}(r)$ до и после изменения свойств равен:

$$\ln\frac{f_{\theta_1}(r_t)}{f_{\theta_0}(r_t)} = \ln\frac{(1-\rho_1^2)^{\frac{N-1}{2}}(1-\rho_0 r_t)^{N-3/2}\times}{(1-\rho_1 r_t)^{N-3/2}(1-\rho_0^2)^{\frac{N-1}{2}}\times} \to$$

$$\to \frac{\times\left[1 + \frac{\rho_1 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right]}{\times\left[1 + \frac{\rho_0 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right]},$$

откуда статистика правдоподобия логарифма отношения двух плотностей распределения $f_{\theta_0}(r)$, $f_{\theta_1}(r)$ в каждый момент времени t определяется формулой (13).

Покажем, что математическое ожидание приращения логарифма правдоподобия в случае $\theta_0 = (\rho_0, N)$, $\rho_0 \le 0$, $\theta_1 = (\rho_1, N)$, $\rho_1 > 0$ при условии $\theta = \theta_0$ положительно, а при условии $\theta = \theta_1$ — отрицательно. По свойству логарифмической функции имеем:

$$s_{t-1}^t = \frac{N-1}{2}[\ln(1-\rho_1^2) - \ln(1-\rho_0^2)] +$$

$$+ \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_0 r_t) - \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_1 r_t) +$$

$$+ \ln\left[1 + \frac{\rho_1 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right] -$$

$$- \ln\left[1 + \frac{\rho_0 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right].$$

Разложим члены в приведенной формуле, включающие в себя r_t, в ряд:

$$s_{t-1}^t = \frac{N-1}{2}[\ln(1-\rho_1^2) - \ln(1-\rho_0^2)] +$$

$$+ \frac{2N-3}{2}\left(-\rho_0 r_t - \frac{(-\rho_0 r)^2}{2} + \ldots\right) -$$

$$- \frac{2N-3}{2}\left(-\rho_1 r_t - \frac{(-\rho_1 r)^2}{2} + \ldots\right) +$$

$$+ \left(\frac{\rho_1 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} - \ldots\right) -$$

$$- \left(\frac{\rho_0 r_t+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0 r_t+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} - \ldots\right). \qquad (П4)$$

Возьмем математическое ожидание, при условии $\theta = \theta_0 = (\rho_0, N)$, от обеих частей выражения (П4), затем выполним обратное преобразование полученных рядов к логарифмам:

$$E_{\theta_0 0}(s_{t-1}^t) = \frac{N-1}{2}[\ln(1-\rho_1^2) - \ln(1-\rho_0^2)] +$$

$$+ \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_0^2) - \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_1\rho_0) +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{\rho_1\rho_0+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1\rho_0+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right) -$$

$$- \ln\left(1 + \frac{\rho_0^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{N-2}{2}\ln(1-\rho_0^2) + \frac{N-1}{2}\ln(1-\rho_1^2) -$$

$$- \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_0\rho_1) +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{\rho_1\rho_0+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1\rho_0+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right) -$$

$$- \ln\left(1 + \frac{\rho_0^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + \ldots\right). \qquad (П5)$$

Математическое ожидание приращения логарифма правдоподобия, при условии $\theta = \theta_1 = (\rho_1, N)$, равно:

$$E_{\theta_1}(s_{t-1}^t) = \frac{N-1}{2}[\ln(1-\rho_1^2) - \ln(1-\rho_0^2)] +$$

$$+ \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_0\rho_1) - \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_1^2) +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{\rho_1^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right) -$$

$$- \ln\left(1 + \frac{\rho_0\rho_1+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0\rho_1+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right) =$$

$$= -\frac{N-2}{2}\ln(1-\rho_1^2) - \frac{N-1}{2}\ln(1-\rho_0^2) +$$

$$+ \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_0\rho_1) -$$

$$- \ln\left(1 + \frac{\rho_1\rho_0+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1\rho_0+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right) +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{\rho_1^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right). \quad (П6)$$

В правой части соотношения (П5) первые три члена отрицательные, сумма последних двух — отрицательна, так как ρ_0, ρ_1 имеют разные знаки, в правой части соотношения (П6) первые три члена положительные, сумма последних двух — положительна, откуда следует заключение теоремы и формулы (13):

$$E_{\theta_0}(s_{t-1}^t) = \frac{N-2}{2}\ln(1-\rho_0^2) +$$

$$+ \frac{N-1}{2}\ln(1-\rho_1^2) - \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_1\rho_0) +$$

$$+ \ln\frac{\left(1 + \frac{\rho_1\rho_0+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1\rho_0+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right)}{\left(1 + \frac{\rho_0^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_0^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right)} < 0,$$

$$E_{\theta_1}(s_{t-1}^t) = -\frac{N-2}{2}\ln(1-\rho_1^2) -$$

$$- \frac{N-1}{2}\ln(1-\rho_0^2) + \frac{2N-3}{2}\ln(1-\rho_1\rho_0) +$$

$$+ \ln\frac{\left(1 + \frac{\rho_1^2+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1^2+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right)}{\left(1 + \frac{\rho_1\rho_0+1}{4(2N-1)} + \frac{9(\rho_1\rho_0+1)^2}{16(2N-1)(2N-1)} + ...\right)} > 0. \quad (П7)$$

Из формул (П7) следует, что верхний h_h и h_l нижний пороги алгоритма могут быть определены по формулам:

$$h_l = E_{\theta_0}(s_{t-1}^t),\ h_h = E_{\theta_1}(s_{t-1}^t). \quad (П8)$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Из определения статистики $\tilde{s}_{t-1}^t$ следует, что

$$E_{\theta_0}(\tilde{s}_{t-1}^t) = -E_{\theta_1}(s_{t-1}^t),$$

$$E_{\theta_1}(\tilde{s}_{t-1}^t) = -E_{\theta_0}(s_{t-1}^t). \quad (П9)$$

Из формул (П9) следует, что верхний h_h и h_l нижний пороги алгоритма могут быть определены соотношениями:

$$h_h = -E_{\theta_0}(\tilde{s}_{t-1}^t),\ h_l = -E_{\theta_1}(\tilde{s}_{t-1}^t). \quad (П10)$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phillips C.B., Wu Y., Yu J.* Explosive behavior in the 1990s NASDAQ: When did exuberance escalate asset values? // International economic review. — 2011. — Vol. 52, N 1.
2. *Дробышевский С.* Анализ возможности возникновения «пузыря» на российском рынке недвижимости // Институт экономики переходного периода. — М., 2008. — С. 99.
3. *Basseville M. and Nikiforov I.V.* Detection of Abrupt Changes: Theory and Application. Prent. Hall. — URL: www.irisa.fr/sigma2/kniga, 1993 (дата обращения 28.08.2014).
4. *Gurkaynak R.S.* Econometric tests of asset price bubbles: Taking stock // Jounal of Economic Surveys. — 2008. — Vol. 22. — P. 166—186.
5. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
6. *Blanchard O.J., and Watson M.W.* Bubbles, Rational Expectations, and Financial Markets / In P. Wachtel (ed.), Crisis in the Economic and Financial Structure. — 1982. — P. 295—315.
7. *Cochrain G.H.* Explaining the variance of price-dividend ratios // Review of Financial Studies. — 1992.—Vol. 5, N 2.— P. 243—280.
8. *Campbell J.Y., Shiller R.J.* Stock Prices, Earnings and Expected Dividends // The Journal of Finance. — 1988. — Vol. 43, N 3. — P. 661—676.
9. *Craine R.* Rational Bubbles: A Test // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1993. — Vol. 17. — P. 829—846.
10. *Evans G.W.* Pitfalls in Testing for Explosive Bubbles in Asset Prices // American Economic Review. — 1991. — Vol. 81. — P. 922—930.
11. *Park C.* When does the dividend — price ratio predict stock returns? // Journal of Empirical Finance. — 2010. — Vol. 17. — P. 81—101.
12. *Leybourne S., Kim T.-H., Smith V., and Newbold P.* Tests for a change in persistence against the null of difference-stationarity // Econometrics Journal. — 2003. — N 6. — P. 291—311.
13. *Phillips P.C.B., Yu J.* Dating the timeline of financial bubbles during the subprime crisis // Quantitative Economics, Econometric Society. — 2011. — Vol. 2 (3). — P. 455—491.
14. *Phillips P.C.B., Shi S., and Yu J.* Specification sensitivity in right-tailed unit root testing for explosive behavior // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. — 2013. — Vol. 76, iss. 3.
15. *Page E.S.* Continuous insrection schemes // Biometrika. — 1954. — Vol. 41. — P. 100—115.
16. *URL:*https://sites.google.com/site/shupingshi/PrgGSADF.zip?attredirects=0\&d=1 (дата обращения 28. 08. 2004).
17. *Kenney J.F., and Keeping E.S.* Mathematics of Statistics. Pt. 2. — 2nd ed. — Princeton, NJ: Van Nostrand, 1951.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Гребенюк Елена Алексеевна — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, ✉ lngrebenuk@rambler.ru, ☎ (495) 334-46-40,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,

Малинкина Антонина Валерьевна — гл. специалист, ОАО «Банк Москвы», ✉ malinkinaav@gmail.com.