

МОДЕЛИ УТОМЛЕНИЯ И ОТДЫХА ПРИ НАУЧЕНИИ.

Ч. 1. Расширение общей модели итеративного научения

Д. И. Гребенков*, А. А. Козлова**, Д. В. Лемтюжникова***, Д. А. Новиков****

*-****Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

*✉ grebenkov-d-i@mail.ru, **✉ sankamoro@mail.ru, ***✉ darabbbt@gmail.com, ****✉ novikov@ipu.ru

Аннотация. Производится расширение классических моделей итеративного научения таким образом, чтобы учитывались факторы утомления и отдыха. На основе анализа существующих подходов к моделированию утомления и отдыха из различных областей – образования, производства, спорта, медицины – обоснована необходимость дополнения моделей этими процессами. Предложены математические модели, описывающие динамику уровня научения в периоды отдыха и с учетом снижения эффективности освоения навыков из-за утомления. Рассмотрены десять моделей возрастающей сложности: от базовых, без учета утомления, до комплексных, включающих зависимость вероятностей освоения и забывания от времени, а также от фазы отдыха. Показано, что наличие перерывов оптимальной продолжительности позволяет повысить терминальный уровень научения. При этом в модели с утомлением, отдыхом и без забывания оптимальный момент начала отдыха не зависит от меняющейся со временем вероятности освоения и приходится на середину периода формирования опыта. Полученные модели предназначены для прогнозирования производительности, оптимизации образовательных программ, производственных процессов и тренировочных циклов. Работа подчеркивает необходимость учета биологических и когнитивных ограничений при проектировании адаптивных систем обучения.

Ключевые слова: опыт, итеративное научение, кривая научения, математическое моделирование, утомление, отдых, освоение, забывание.

ВВЕДЕНИЕ

Научение – процесс и результат приобретения индивидуального опыта [1] – лежит в основе адаптации живых и неживых систем к изменяющимся условиям. В контексте математического моделирования под научением понимается процесс, в ходе которого система (биологическая, техническая или абстрактно-логическая) оптимизирует свои действия для достижения заданной цели. Особый интерес представляет *итеративное научение* (ИН) – вид обучения, основанный на многократном повторении системой действий, проб и ошибок для достижения фиксированной цели при постоянных внешних условиях [2]. Этот процесс формирует основу для выработки навыков у человека, условных рефлексов у животных, а также алгоритмов

адаптации в робототехнике и искусственном интеллекте.

Математические модели ИН описывают последовательность значений уровня научения – так называемые *кривые научения* (КН) [3] – через системы уравнений, графиков или алгоритмов, выявляя универсальные закономерности. Например, КН может быть зависимостью вероятности освоения компонента деятельности от времени или числа повторений (итераций).

Основываясь на экспериментальных данных, можно сделать вывод, что для большинства систем – от человека до нейронных сетей – эти кривые имеют замедленно-асимптотический характер: скорость улучшения показателей со временем снижается, а сама кривая стремится к некоторому пределу [2]. Такое поведение КН часто аппроксими-



мируется экспоненциальными функциями, что подтверждает «насыщение» процесса обучения.

Несмотря на универсальность замедленно-асимптотических закономерностей, классические модели научения не учитывают такие факторы, как утомление и отдых [3]. Для понимания этих ограничений и обоснования расширения моделей необходимо проанализировать существующие подходы к моделированию научения в различных контекстах – от когнитивных процессов в образовании до моторных навыков в спорте и производстве.

1. ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ НАУЧЕНИЯ И ОТДЫХА: ОБЗОР

Научение играет ключевую роль практически в любой человеческой деятельности (*деятельность* – активное взаимодействие человека с окружающей действительностью, в ходе которого человек выступает как *субъект*, целенаправленно воздействующий на *предмет* [4]): от образования до промышленного производства, от спорта до роботизированной хирургии – понимание закономерностей научения позволяет оптимизировать процессы и снижать риски. Современные исследования демонстрируют, что моделирование научения требует учета не только индивидуальных особенностей, но и специфики контекста, будь то когнитивная нагрузка в образовании или физическое утомление в спорте или (и) на производстве.

В **образовании** научение тесно связано с управлением когнитивными ресурсами. Исследование влияния когнитивной усталости на результаты стандартизированных тестов выявило четкую зависимость между временем суток и успеваемостью [5]. Анализ двух миллионов тестов датских школьников показал, что каждый час после начала занятий результаты ухудшаются на 0,9 % стандартного отклонения. Это снижение объясняется накоплением усталости, которая нарушает концентрацию и уменьшает способность к решению сложных задач. Однако введение 20–30-минутных перерывов не только компенсирует этот эффект, но и повышает результаты на 1,7 %, особенно для учащихся с низкой успеваемостью. Для детей, испытывающих трудности в обучении, авторы работы [5] рекомендуют небольшие перерывы по 5–10 минут, которые снижают когнитивную перегрузку и улучшают усвоение материала на 12 %. Эти данные подчеркивают, что образовательный процесс должен проектироваться с учетом биологических

ритмов. Интересно, что аналогичные закономерности наблюдаются в спорте и производстве, где короткие паузы помогают сохранить продуктивность [6].

В работе [7] рассматривается моделирование процесса изучения второго языка и показывается, что прогресс в языковом навыке – это не плавный рост, а серия резких переходов между устойчивыми состояниями. Например, оптимальное соотношение нового и знакомого материала, примерно 30 % к 70 %, запускает заметный прогресс в освоении, тогда как дисбаланс приводит к «застреванию» процесса освоения на «плато». Это явление хорошо известно педагогам: студенты, сталкивающиеся с чрезмерно сложными заданиями, часто теряют мотивацию, в то время как рутинные упражнения без элементов новизны также тормозят развитие [8]. Такие выводы согласуются с корпусными исследованиями, где распределение ошибок в речи изучающих язык соответствует степенным законам [9, 10].

В **профессиональной деятельности**, особенно в высокотехнологичных отраслях, научение часто сопряжено с проблемой утомления. Исследование когнитивных эффектов утомления у сотрудников инженеринговых компаний [11] выявило, что после восьми часов работы точность поиска информации в памяти падает на 6 %, а время переключения между задачами увеличивается на 120 мс. Более того, 22 % сотрудников неосознанно переходят на менее эффективные стратегии решения задач, экономя когнитивные ресурсы. Эти данные особенно актуальны для сфер, где ошибки могут иметь критические последствия, – от авиадиспетчерских служб до медицинской диагностики. В статье [11] рекомендуется внедрять адаптивные графики работы, где периоды интенсивной нагрузки чередуются с фазами отдыха, а также использовать тренажеры для отработки навыков в условиях, имитирующих утомление.

Особый интерес представляет освоение сложных медицинских технологий, таких как роботизированная хирургия. Исследование кривых обучения для медсестер, работающих в операционных [12], продемонстрировало, что достижение мастерства требует в среднем 8–11 процедур. Однако индивидуальные различия огромны: некоторым достаточно трех операций, другим – до 11-ти. Наиболее сложными этапами оказались планирование установки спинальных винтов и управление роботизированной рукой, где ошибки часто связаны с когнитивной перегрузкой. Для сокращения времени обучения авторы работы [12] предлагают

симуляционные тренировки на 3D-моделях позвоночника, которые позволяют отработать ключевые навыки без риска для пациентов. Этот подход снижает уровень стресса и утомления на 35 %, что напрямую влияет на скорость освоения технологии.

В **производственной сфере** моделирование научения стало основой для оптимизации процессов. Классическая степенная кривая Райта [13], описывающая снижение времени выполнения задач с накоплением опыта, до сих пор остается отправной точкой. Однако многие задачи, сочетающие когнитивные и моторные компоненты, требуют более сложных подходов. Модель, представленная в статье [14], разделяет время выполнения задачи на два компонента: когнитивный (планирование, принятие решений) и моторный (физические действия). Например, при сборке механического устройства начальные этапы требуют активного мышления, и их время сокращается быстрее, тогда как моторные навыки улучшаются постепенно. Эта модель на 23 % точнее предсказывает производительность на ранних стадиях обучения по сравнению с традиционными подходами, что критически важно для расчета себестоимости и планирования производства.

В метаанализе [15], охватившем 115 наборов данных, систематизированы лучшие практики для моделирования научения в производстве. Для задач, связанных со снижением времени или затрат, наиболее эффективными оказались S-образная и трехпараметрическая гиперболическая модели. Они учитывают фазу «плато», когда дальнейшее улучшение становится минимальным. В контексте роста производительности лидирует трехпараметрическая экспоненциальная модель, которая хорошо описывает процессы с эффектом насыщения. Интеграция этих моделей в системы управления производством сокращает ошибки в планировании запасов на 18 %, предотвращая как избыточные складские запасы, так и простои.

В **спорте и реабилитации** научение неотделимо от управления утомлением. Исследование [16] показало, что утомление увеличивает риск травм на 40 % из-за снижения проприоцепции – способности ощущать положение тела в пространстве. Например, в футболе 67 % травм случаются в последние 20 минут матча, когда концентрация внимания падает, а мышцы теряют эластичность. Для мониторинга состояния спортсменов используется комбинация объективных методов (анализ вариабельности сердечного ритма) и субъективных опросников. Анализ вариабельности сердечного

ритма позволяет прогнозировать готовность к нагрузке: снижение вариабельности на 15 % коррелирует с повышением риска травм. Эти данные используются для персонализации тренировок – сокращения интенсивности при первых признаках переутомления.

Отдельного внимания заслуживает проблема реабилитации после травм или инсультов. В модели, предложенной в статье [17], утомление рассматривается как баланс между двумя компонентами: объективным снижением производительности и субъективным восприятием усилий. Например, пациенты, перенесшие инсульт, часто ощущают слабость мышц даже при минимальной нагрузке. Традиционные тренировки, направленные на увеличение силы, могут усугубить состояние, если не учитывают индивидуальные пороги утомления. Авторы работы [17] предлагают использовать сенсорную обратную связь (например, визуализацию мышечной активности в реальном времени), которая помогает пациентам учиться распределять усилия, избегая перенапряжения.

В некоторых работах по **роботизированным системам и промышленному дизайну** процесс научения описывается с помощью биомеханического анализа. Например, в статье [6] представлены дифференциальные уравнения, описывающие динамику мышечного утомления. Восстановление после нагрузки мышцы в 5 кг требует в среднем 2,4 минуты отдыха – эти данные используются для проектирования рабочих мест на конвейерах. Симуляторы, интегрирующие такие модели, позволяют тестировать эргономику еще до запуска производства. В авиационной промышленности это сократило число случаев кумулятивного утомления на 22 % благодаря оптимизации углов наклона инструментов и высоты рабочих поверхностей.

Таким образом, современные исследования процесса научения демонстрируют, что универсальных моделей научения, учитывающих утомление, не существует – каждый контекст требует учета своей специфики. В образовании акцент в настоящее время смещается на управление когнитивной нагрузкой и временными промежутками, в производстве – на разделение когнитивных и моторных компонентов, в спорте – на баланс между утомлением и восстановлением. Как показывают рассмотренные подходы, утомление и отдых играют важную роль в динамике формирования опыта. Следовательно, необходимо дополнить существующие классические модели научения учетом этих процессов. Возьмем в качестве основы для расширения модели из работы [3].



2. УТОМЛЕНИЕ И ОТДЫХ В МОДЕЛЯХ ФОРМИРОВАНИЯ ОПЫТА

Рассмотрим следующие модели научения. Пусть обучаемый (агент) приобретает индивидуальный опыт – осваивает некоторый вид деятельности посредством последовательных попыток (т. е. через ИН), причем опыт в каждом периоде характеризуется двумя возможными состояниями – «сформирован» или «не сформирован». В каждый период времени $t = 1, 2, \dots$, если опыт не сформирован, происходит формирование опыта с вероятностью $0 \leq w(t) < 1$, зависящей в общем случае от времени. Параллельно происходит забывание опыта с вероятностью $0 \leq u(t) < 1$, также зависящей в общем случае от времени. Значение $q(t)$ критерия индивидуального опыта агента принадлежит единичному отрезку. Значением $q(t)$ будем считать вероятность того, что в периоде t опыт агента будет сформирован и не забыт. Как зависимость вероятности формирования опыта от времени (убывающая), так и зависимость от него (возрастающая) вероятности забывания могут отражать эффекты утомления, усталости и пр. в процессе учебной и (или) продуктивной деятельности.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей научения, учитывающих такие процессы, как освоение, забывание, утомление и отдых. Наличие тех или иных процессов в моделях отражено в таблице.

Модель 1. Базовой (простейшей) является модель научения [3], в которой забывание отсутствует, а вероятность освоения опыта w не зависит от времени. В рамках этой модели динамика уровня научения имеет вид:

$$q(t+1) = q(t) + (1 - q(t))w, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где начальное значение $q(0)$ считается известным.

В непрерывном времени разностному уравнению (1) соответствует дифференциальное уравнение

$$\dot{q} = (1 - q)w,$$

имеющее решение

$$q(t) = 1 - (1 - q(0))e^{-wt}. \quad (2)$$

Кривая научения (2) не убывает и асимптотически стремится к единице. График функции (2) при $q(0) = 0$ продемонстрирован на рис. 1.

Процессы и параметры моделей формирования опыта

Модели	Освоение	Забывание	Утомление	Отдых
Модель 1	Не зависит от времени	Нет	Нет	Нет
Модель 2	Нет	Не зависит от времени	Нет	Нет
Модель 3	Не зависит от времени	Не зависит от времени	Нет	Нет
Модель 4	Зависит от времени	Нет	Есть	Нет
Модель 5	Зависит от времени	Не зависит от времени	Есть	Нет
Модель 6	Не зависит от времени	Зависит от времени	Есть	Нет
Модель 7	Зависит от времени	Нет	Есть	Есть
Модель 8	Зависит от времени	Не зависит от времени, учитывается только во время отдыха	Есть	Есть
Модель 9	Зависит от времени	Не зависит от времени	Есть	Есть
Модель 10	Не зависит от времени	Зависит от времени	Есть	Есть

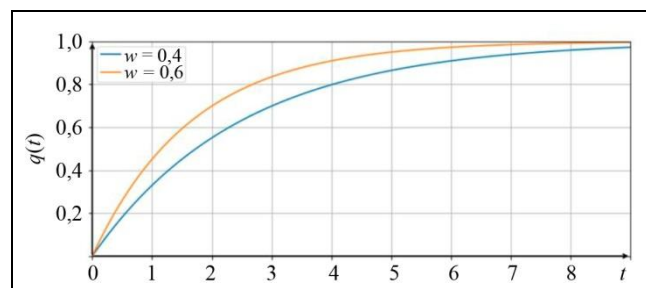


Рис. 1. Пример кривой научения для модели 1

Модель 2 (модель забывания). Предположим, что освоения опыта не происходит, а имеет место только забывание, не зависящее от времени.

Получим:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= q(t) - uq(t), \\ \dot{q} &= -qu, \\ q(t) &= q(0)e^{-ut}. \end{aligned} \quad (3)$$

График функции (3) при $q(0)=1$ приведен на рис. 2.

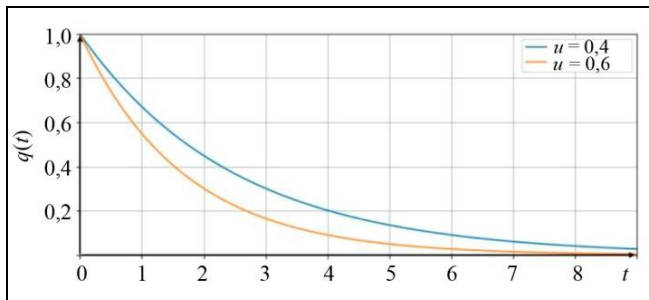


Рис. 2. Пример кривой научения для модели 2

Модель 3. Пусть в условиях модели 1 дополнительно имеет место забывание (или в рамках модели 2 имеет место научение), не зависящее от времени. Получим:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= q(t) + (1-q(t))w - uq(t), \\ \dot{q} &= (1-q)w - qu, \end{aligned} \quad (4)$$

$$q(t) = \frac{w}{w+u} - \left(\frac{w}{w+u} - q(0) \right) e^{-(w+u)t}. \quad (5)$$

Кривая научения (5) при $q(0) < \frac{w}{w+u}$ не убывает и асимптотически стремится к $\frac{w}{w+u}$. График функции (5) при $q(0)=0$ и $w=0,6$ приведен на рис. 3.

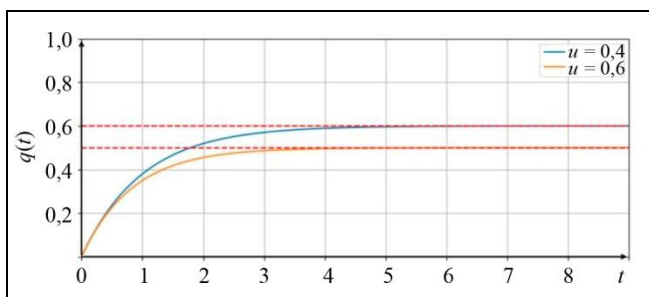


Рис. 3. Пример кривой научения для модели 3

Модель 4. Пусть в условиях модели 1 вероятность формирования опыта $w(t) > 0$ зависит от

времени. Предположим, что $w(\cdot)$ – непрерывная невозрастающая функция (ее можно условно назвать «кривой утомления»), что содержательно может отражать утомление и (или) усталость агента в процессе научения. Получим:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= q(t) + w(t)(1-q(t)), \\ \dot{q} &= (1-q)w(t), \\ q(t) &= 1 - (1-q(0))e^{-W(t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $W(t) = \int_0^t w(\xi) d\xi$. Очевидно, что эта функция обладает следующими свойствами.

Лемма 1. $W(\cdot)$ – непрерывная положительно-значная монотонно возрастающая вогнутая функция времени, $W(0) = 0$.

Кривая научения (6) не убывает и асимптотически стремится к единице. В частном случае, при $w(t) = w$, модель 3 переходит в модель 1.

Для иллюстраций в качестве $w(t)$ здесь и далее будем использовать $w(t) = w_0 e^{-\alpha t}$ и $W(t) = \frac{w_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$. График функции (6) при $q(0)=0$ и $w_0=0,6$ приведен на рис. 4.

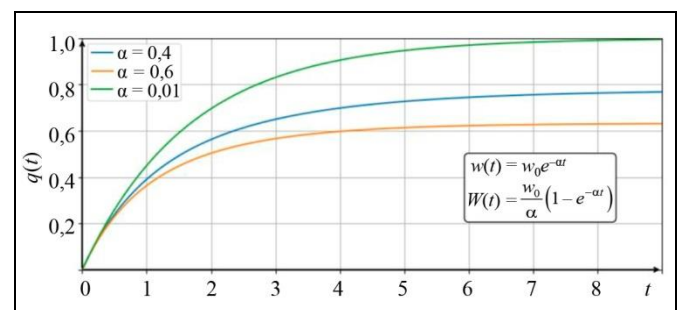


Рис. 4. Пример кривой научения для модели 4

Модель 5. Пусть в условиях модели 4 имеет место постоянное во времени забывание $u(t) = u$. Получим:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= q(t) + w(t)(1-q(t)) - uq(t), \\ \dot{q} &= (1-q)w(t) - uq, \\ q(t) &= e^{-(W(t)+ut)} \cdot \int_0^t w(\xi) \cdot e^{(W(\xi)+u\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

График функции (7) при $w_0=0,6$ и $u=0,1$ приведен на рис. 5. Видно, что кривая научения в модели 5 имеет точку максимума.

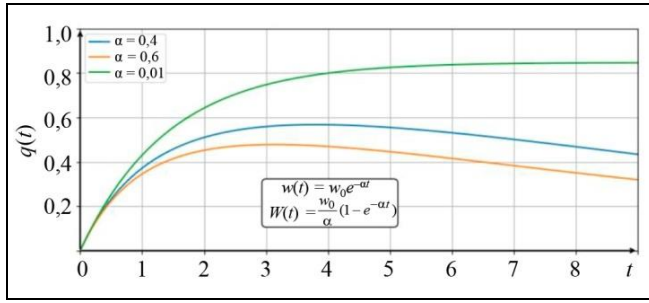


Рис. 5. Пример кривой обучения для модели 5

Модель 6. Пусть в условиях модели 3 вероятность забывания зависит от времени: $u(\cdot)$ – непрерывная неубывающая функция. Тогда решением уравнения (4) будет кривая обучения

$$q(t) = e^{-U(t)} \left(q(0) + w \int_0^t e^{U(\xi)} d\xi \right), \quad (8)$$

где $U(t) = \int_0^t (w + u(\xi)) d\xi$. При $U(t) = u$ выражение (8) переходит в выражение (5). График функции (8) при $w = 0,6$, $q(0) = 0$, $u(t) = 1 - e^{-at}$ и $U(t) = (w+1)t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ приведен на рис. 6.

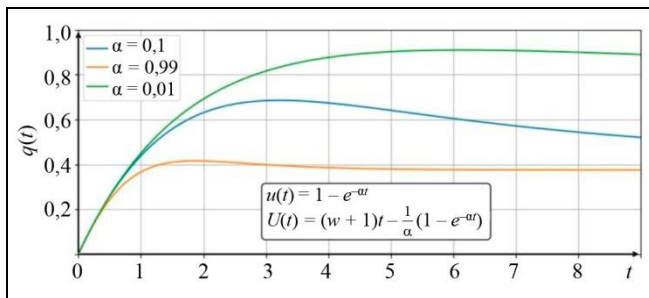


Рис. 6. Пример кривой обучения для модели 6

Лемма 2. $U(\cdot)$ – непрерывная положительно-значная монотонно возрастающая выпуклая функция, $U(0) = 0$.

График функции (8) при $w_0 = 0,6$ и $u_0 = 0,1$ приведен на рис. 5.

Кривая (8) может иметь точку максимума при значении t^* , удовлетворяющем условию

$$(w + u(t^*)) \int_0^{t^*} e^{U(\xi)} d\xi = e^{U(t^*)}.$$

Содержательная интерпретация t^* – максимальная целесообразная продолжительность обучения.

Модель 7. Пусть в условиях модели 4 агент отдыхает в промежутке времени $[\tau; \tau + \Delta]$, где $\tau > 0$ – момент начала отдыха, $\Delta \geq 0$ – его продолжительность. Так как забывание в рассматриваемом случае отсутствует, предположим, что $q(\tau + \Delta) = q(\tau)$, а результат отдыха с точки зрения роста вероятности формирования опыта здесь и далее отразим предположением, что продолжительности отдыха $\Delta \geq \Delta_0$ достаточно для полного восстановления агента (где минимальная необходимая продолжительность отдыха $\Delta_0 > 0$ известна), т. е.

$$w(t) = w(t - \tau - \Delta), \quad t \geq \tau + \Delta.$$

Тогда

$$q(t) = \begin{cases} 1 - (1 - q(0))e^{-W(t)}, & t \in [0; \tau]; \\ 1 - (1 - q(0))e^{-W(\tau)}, & t \in [\tau; \tau + \Delta]; \\ 1 - [(1 - q(0))e^{-W(\tau)}]e^{-W(t - \tau - \Delta)}, & t \geq \tau + \Delta. \end{cases} \quad (9)$$

Далее для простоты будем считать начальный уровень обучения равным нулю: $q(0) = 0$. График функции (9) при $w_0 = 0,6$ и $\alpha = 0,6$ приведён на рис. 7.

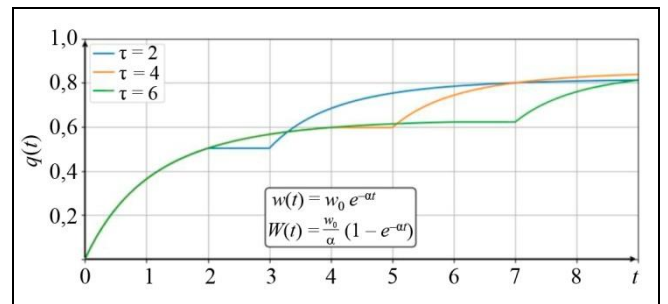


Рис. 7. Пример кривой обучения для модели 7

Выбирая время и продолжительность отдыха, можно ставить и решать две задачи.

Первая задача – максимизация терминального (в момент времени $T > 0$) значения уровня обучения, называемого горизонтом планирования:

$$1 - e^{-W(\tau) - W(T - \tau - \Delta)} \rightarrow \max_{\tau \in (0; T - \Delta_0), \Delta \in [\Delta_0; T - \tau]}. \quad (10)$$

Вторая задача – максимизация интегрального значения уровня обучения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} (1 - e^{-W(\xi)}) d\xi + \int_{\tau+\Delta}^T (1 - e^{-W(\tau)} e^{-W(\xi - \tau - \Delta)}) d\xi \rightarrow \\ \rightarrow \max_{\tau \in (0; T - \Delta_0), \Delta \in [\Delta_0; T - \tau]}. \end{aligned} \quad (11)$$

Содержательная интерпретация интегрального критерия – объем правильно выполненных агентом действий, если научение происходит в процессе продуктивной деятельности [18].

Задачу (10) можно записать в виде:

$$W(\tau) + W(T - \tau - \Delta) \rightarrow \max_{\tau \in (0; T - \Delta_0), \Delta \in [\Delta_0; T - \tau]} \quad (12)$$

Задачу (11) можно записать в виде:

$$\int_0^{\tau} e^{-W(\zeta)} d\zeta + e^{-W(\tau)} \int_0^{T-\tau-\Delta} e^{-W(\xi)} d\xi \rightarrow \min_{\tau \in (0; T - \Delta_0), \Delta \in [\Delta_0; T - \tau]} \quad (13)$$

В силу леммы 1 и структуры критериев (12) и (13), справедливо следующее

Утверждение 1. В модели 7 оптимальная продолжительность отдыха Δ^* (и в задаче максимизации терминального уровня научения, и в задаче максимизации интегрального уровня научения) равна минимально необходимой, т. е. $\Delta^* = \Delta_0$.

С учетом результата утверждения 1 задачи (12) и (13) сводятся соответственно к следующим задачам выбора оптимального момента начала отдыха:

$$W(\tau) + W(T - \tau - \Delta_0) \rightarrow \max_{\tau \in (0; T - \Delta_0)} \quad (14)$$

$$\int_0^{\tau} e^{-W(\zeta)} d\zeta + e^{-W(\tau)} \int_0^{T-\tau-\Delta_0} e^{-W(\xi)} d\xi \rightarrow \min_{\tau \in (0; T - \Delta_0)} \quad (15)$$

Условие первого порядка для решения τ^* задачи (14) имеет вид: $w(\tau^*) = w(T - \tau^* - \Delta_0)$, откуда в силу непрерывности и монотонности функции $w(\cdot)$ получаем:

$$\tau^* = \frac{T - \Delta_0}{2} \quad (16)$$

Отрицательность второй производной (14) в этой точке легко проверяется.

Таким образом, согласно модели 7, с точки зрения максимизации терминального значения уровня научения перерыв лучше совершать примерно в середине периода формирования опыта.

Утверждение 2. В модели 7 оптимальный (с точки зрения максимизации терминального уровня научения) момент начала отдыха определяется выражением (16) и не зависит от кривой утомления.

Выражение (16) дает оптимальный момент начала отдыха для случая, если отдых продолжи-

тельностью Δ_0 обязательно должен быть осуществлен. Для ответа на вопрос, необходим ли перерыв на отдых, следует сравнить значения критерия (10) в точке τ^* с максимальным значением уровня научения $1 - e^{-W(T)}$, которое может быть достигнуто при отсутствии отдыха. Ответ на этот вопрос, конечно, зависит и от свойств функции $w(\cdot)$, и от значений величин T и Δ_0 , и дается следующим утверждением.

Утверждение 3. Перерыв на отдых целесообразен с точки зрения максимизации терминального уровня научения, если выполнено

$$w\left(\frac{T - \Delta_0}{2}\right) \geq \frac{W(T)}{2} \quad (17)$$

Условие (17) можно записать в виде:

$$\int_0^{\frac{T - \Delta_0}{2}} w(\zeta) d\zeta \geq \int_{\frac{T - \Delta_0}{2}}^T w(\zeta) d\zeta \quad (18)$$

В силу убывания подынтегральной функции при достаточно малых Δ_0 и (или) достаточно больших T , условие (18) выполнено. В то же время при фиксированном Δ_0 можно найти значение T , обращающее выражение (18) в равенство – минимальный горизонт планирования, при котором отдых данной продолжительности будет еще целесообразен. И наоборот, при фиксированном T можно найти значение Δ_0 , обращающее выражение (18) в равенство – максимальную продолжительность отдыха, еще целесообразную при заданном горизонте планирования.

Перейдем к задаче (15). Условие первого порядка для ее решения τ^{**} имеет вид:

$$\int_0^{T-\tau^{**}-\Delta_0} e^{-W(\xi)} d\xi = \frac{1 - e^{-W(T-\tau^{**}-\Delta_0)}}{w(\tau^{**})}$$

Отрицательность второй производной (15) в этой точке легко проверяется.

Модель 8. Пусть в условиях модели 7 во время отдыха (и только во время него) имеет место забывание с постоянной и не зависящей от времени вероятностью u . Тогда в соответствии с выражением (3) модели 2 получим, что к моменту окончания отдыха уровень научения снизится до

$$q(t + \Delta_0) = q(\tau) e^{-u\Delta_0}$$



Тогда

$$q(t) = \begin{cases} 1 - e^{-W(t)}, & t \in [0; \tau]; \\ \left(1 - e^{-W(\tau)}\right) e^{-u(t-\tau)}, & t \in [\tau; \tau + \Delta_0]; \\ 1 - \left[1 - \left(1 - e^{-W(\tau)}\right) e^{-u \Delta_0}\right] e^{-W(t-\tau-\Delta_0)}, & t \geq \tau + \Delta_0. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим для модели 8 задачу максимизации терминального значения уровня научения. Интегральный критерий исследуется аналогично тому, как это делалось в модели 7.

$$1 - \left[1 - \left(1 - e^{-W(\tau)}\right) e^{-u \Delta_0}\right] e^{-W(t-\tau-\Delta_0)} \rightarrow \max_{\tau \in (0; T-\Delta_0)},$$

т. е.

$$\left[1 - \left(1 - e^{-W(\tau)}\right) e^{-u \Delta_0}\right] e^{-W(T-\tau-\Delta_0)} \rightarrow \min_{\tau \in (0; T-\Delta_0)}. \quad (20)$$

Условие первого порядка для задачи (20) имеет вид:

$$e^{u \Delta_0} - 1 = \left(\frac{w(\tau^*)}{w(T - \tau^* - \Delta_0)} - 1 \right) e^{-W(\tau^*)}.$$

График функции (19) при $w_0 = 0,6$, $u_0 = 0,6$ и $\alpha = 0,6$ приведен на рис. 8.

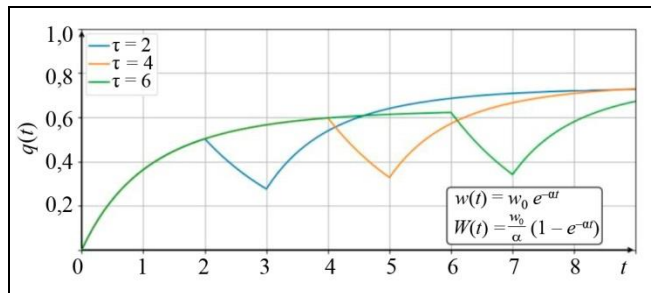


Рис. 8. Пример кривой научения для модели 8

Модель 9. Пусть в условиях модели 8 постоянное во времени забывание имеет место не только во время отдыха, но и во время научения. Участок $q(t)$ до отдыха в этом случае будет аналогичен формуле (7) из модели 5. Соответствующая кривая научения может уже не быть монотонной и может, например, иметь точку максимума.

Модель 10. Пусть в условиях модели 9 освоение не зависит от времени, а забывание — зависит. Участок $q(t)$ до отдыха в этом случае будет соответствовать формуле (8) из модели 6. Тогда аналог

выражения (19) для этой модели будет выглядеть так:

$$q(t) = \begin{cases} e^{-U(t)} \cdot \left(w \int_0^t e^{U(\xi)} d\xi + q(0) \right), & t \in [0; \tau]; \\ e^{\hat{U}(t-\tau)} \cdot \left[e^{-U(\tau)} \cdot \left(w \int_0^{\tau} e^{U(\xi)} d\xi + q(0) \right) \right], & t \in [\tau; \tau + \Delta_0]; \\ e^{-U(t-\tau-\Delta_0)} \cdot \left\{ w \int_0^{t-\tau-\Delta_0} e^{U(\xi)} d\xi + e^{\hat{U}(t-\tau)} \cdot \left[e^{-U(\tau)} \cdot \left(w \int_0^{\tau} e^{U(\xi)} d\xi + q(0) \right) \right] \right\}, & t \geq \tau + \Delta_0, \end{cases}$$

где в общем случае $\hat{U}(t) \neq U(t)$.

Дальнейшее аналитическое исследование этой и более сложных моделей не представляется целесообразным, так как полученные результаты громоздки и не дают сделать аналитических выводов о закономерностях формирования опыта. В последующих расчетах возможно применение численных методов. Однако для этого необходимо использовать конкретные зависимости вероятностей освоения и забывания от времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложено расширение моделей формирования опыта из работы [3] с учетом факторов утомления и отдыха. Важным результатом стало выявление оптимальных временных интервалов для перерывов: для задач, которые описывает модель 7, с точки зрения максимизации терминального значения уровня научения оптимальный момент начала отдыха не зависит от меняющейся со временем вероятности освоения и находится примерно в середине периода формирования опыта. Кроме того, в более сложных моделях, зная функции освоения и (или) забывания, можно выявлять максимальное целесообразное время научения и оптимальный момент начала отдыха.

Таким образом, дополнение моделей формирования опыта учетом процессов утомления и отдыха повышает их практическую применимость, позволяя прогнозировать снижение эффективности и

оптимизировать ресурсы благодаря расчету интервалов отдыха.

Вторая часть статьи будет посвящена обзору наборов данных с динамикой формирования опыта, а также примерам применения приведенных выше моделей для описания результатов различных известных экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краткий психологический словарь*. – М.: Политиздат, 1985. – 201 с. [*Kratkii psikhologicheskii slovar'*. – М.: Politizdat, 1985. – 201 s. (In Russian)]
2. *Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения*. – М.: Институт проблем управления РАН, 1998. – 96 с. [*Novikov, D.A. Zakonomernosti iterativnogo naucheniya*. – М.: Institut problem upravleniya RAN, 1998. – 96 s. (In Russian)]
3. *Белов М.В., Новиков Д.А. Модели опыта // Проблемы управления*. – 2021. – № 1. – С. 43–60. – DOI: 10.25728/psu.2021.1.5. [*Belov, M.V., Novikov, D.A. Models of Experience // Control Sciences*. – 2021. – No. 1. – P. 37–52. – DOI: 10.25728/cs.2021.1.5. (In Russian)]
4. *Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология*. – М.: Синтег, 2007. – 668 с. [*Novikov, A.M., Novikov, D.A. Metodologiya*. – М.: Sinteg, 2007. – 668 s. (In Russian)]
5. *Piovesan, M. Cognitive Fatigue Influences Students' Performance on Standardized Tests // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2016. – Vol. 113, no. 10. – DOI: 10.1073/pnas.1516947113
6. *Bennis, F. A New Muscle Fatigue and Recovery Model and Its Ergonomics Application in Human Simulation // Virtual and Physical Prototyping*. – 2010. – Vol. 5, no. 3. – DOI: 10.1080/17452759.2010.504056
7. *van Geert, P. Some Thoughts on Dynamic Systems Modeling of L2 Learning // Frontiers in Physics*. – 2023. – Vol. 11. – DOI: 10.3389/fphy.2023.1186136
8. *Ryan, R.M., Deci, E.L. Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being // American Psychologist*. – 2000. – Vol. 55, no. 1. – P. 68–78.
9. *Ellis, N., Larsen-Freeman, D. Constructing a Second Language: Analyses and Computational Simulations of the Emergence of Linguistic Constructions from Usage // Lang. Learn.* – 2009. – Vol. 59 (suppl. 1). – P. 90–125. – DOI: 10.1111/j.1467-9922.2009.00537.x
10. *Rastelli, S. The Discontinuity Model: Statistical and Grammatical Learning in Adult Second-Language Acquisition // Lang. Acquis.* – 2019. – Vol. 26, no. 4. – P. 387–415. – DOI: 10.1080/10489223.2019.1571594.
11. *Величковский Б.Б. Когнитивные эффекты умственного утомления // Вестник Московского университета. Сер. 14. Психология*. – 2019. – № 1. – С. 108–122. – DOI: 10.11621/vsp.2019.01.108. [*Velichkovsky, B.B. Cognitive Effects of Mental Fatigue // Lomonosov Psychology Journal*. – 2019. – No. 1. – P. 108–122. – DOI: 10.11621/vsp.2019.01.108. (In Russian)]
12. *Yao, Y., Wang, H., Zhang, Q., et al. Learning Curves for Itinerant Nurses to Master the Operation Skill of Ti-Robot Assisted Spinal Surgery Equipment by CUSUM Analysis: A Pilot Study // PLoS ONE*. – 2024. – Vol. 19, iss. 3. – DOI: 10.1371/journal.pone.0291147
13. *Wright, T.P. Factors Affecting the Cost of Airplanes // Journal of the Aeronautical Sciences*. – 1936. – Vol. 3, iss. 4. – P. 122–128.
14. *Mohamad, Y.J., Christoph, H.G. A Learning Curve for Tasks with Cognitive and Motor Elements // Computers & Industrial Engineering*. – 2013. – Vol. 64, iss. 3. – P. 866–871. – DOI: 10.1016/j.cie.2012.12.005
15. *Eric, H.G., Christoph, H.G., Sebastian, M. Production Economics and the Learning Curve: A Meta-analysis // International Journal of Production Economics*. – Vol. 170, part B. – P. 401–412. – DOI: 10.1016/j.ijpe.2015.06.021
16. *Bestwick-Stevenson, T., Toone, R., Neupert, E., et al. Assessment of Fatigue and Recovery in Sport: Narrative Review // International Journal of Sports Medicine*. – 2022. – Vol. 43, no. 14 – DOI: 10.1055/a-1834-7177
17. *Enoka, R.M., Duchateau, J. Translating Fatigue to Human Performance // Medicine & Science in Sports & Exercise*. – 2016. – Vol. 48, iss. 11. – P. 2228–2238. – DOI: 10.1249/MSS.0000000000000929.
18. *Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий*. – М.: Ленанд, 2019. – 160 с. [*Belov, M.V., Novikov, D.A. Modeli tekhnologii*. – М.: Lenand, 2019. – 160 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации руководителем PPC
А. А. Ворониным.

Поступила в редакцию 26.03.2025,
после доработки 29.04.2025.
Принята к публикации 05.05.2025.

Гребенков Дмитрий Игоревич – математик,
✉ grebenkov-d-i@mail.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-7085-5912>

Козлова Анастасия Андреевна – инженер,
✉ sankamoro@mail.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-6105-121X>

Лемтюжникова Дарьяна Владимировна – канд. физ.-мат. наук, ✉ darabtt@gmail.com,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5311-5552>

Новиков Дмитрий Александрович – д-р техн. наук, академик РАН, ✉ novikov@ipu.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

© 2025 г. Гребенков Д. И., Козлова А. А., Лемтюжникова Д. В., Новиков Д. А.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



MODELS OF FATIGUE AND REST IN LEARNING. PART I: Extension of the General Iterative Learning Model

D. I. Grebenkov*, A. A. Kozlova**, D. V. Lemtyuzhnikova***, and D. A. Novikov****

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ grebenkov-d-i@mail.ru, **✉ sankamoro@mail.ru, ***✉ darabbt@gmail.com, ****✉ novikov@ipu.ru

Abstract. In this paper, classical iterative learning models are extended by including the factors of fatigue and rest. The existing approaches to model fatigue and rest from various fields—education, production, sports, and medicine—are analyzed, and the need to include these factors in the models is justified accordingly. Mathematical models are proposed to describe learning level dynamics during rest periods, considering the reduced efficiency of acquiring skills due to fatigue. Ten models of growing complexity are studied: from simple models without any fatigue effects to complex ones with the probabilities of skill acquisition and forgetting depending on time and rest periods. As is shown, the breaks of optimal duration allow improving the terminal learning level. In the model with fatigue, rest, and no forgetting, the optimal time to start rest is independent of the probability of skill acquisition as a function of time and lies at the middle of the experience acquisition interval. The models proposed are intended for predicting performance and optimizing training programs, production processes, and training cycles. This study emphasizes the need to consider biological and cognitive constraints when designing adaptive learning systems.

Keywords: experience, iterative learning, learning curve, mathematical modeling, fatigue, rest, skill acquisition, forgetting.