УДК 501-77:519.24;658.7.01

DOI: https://doi.org/10.25728/pu.2018.6.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В ЦЕПИ ПОСТАВОК ПРИ НАЛИЧИИ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПОСТАВЩИКОВ

С.С. Гранин, А.С. Мандель

Рассмотрена задача управления запасами, связанная с оптимизацией процессов, которые возникают в цепи поставок при наличии нескольких альтернативных поставщиков с разными степенями надежности и разными эконометрическими характеристиками. Исследовано два случая: (а) фиксированная часть затрат на поставку у всех поставщиков одна и та же при не совпадающих ценах на единицу товара и (б) все компоненты затрат у разных поставщиков различны. Для случая (а) предложены конструктивные алгоритмы построения оптимальных стратегий управления запасами и выбора поставщиков. Для случая (б) построена общая схема формирования оптимальных стратегий. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: управление запасами, цепи поставок, альтернативные поставщики, динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие в области теории и приложений управления производственно-складскими системами все большее число работ посвящено решению проблем, собранных под общим наименованием «управление цепями поставок» (supply chain management) [1—5]. Интерес к этому классу задач обусловлен прикладной актуальностью этой темы: большее число предлагаемых моделей, алгоритмов и решений либо изначально разрабатывались для принятия решений в конкретных практических ситуациях, либо рано или поздно находят свои приложения.

Все множество рассматриваемых проблем разбивается на два класса: (а) задачи, рассматриваемые на сети производственных и распределительных центров, которые сводятся к различным вариациям задач математического программирования и лишь опосредованно (через некие упрощенные интегральные характеристики) учитывают стохастический характер процессов снабжения и производства, и (б) детальное исследование ситуаций оперативного управления цепями поставок, связанных с различными сбоями (в том числе, и случайной природы) на запланированных заранее цепях поставок. Одним из основных источников таких сбоев является ненадежность поставщиков, т. е. наличие ненулевой вероятности того, что поставщик сорвет заказанную ему поставку.

Последний класс задач весьма близок к классической проблематике современной теории управления запасами, в которой, начиная с 1980-х гг., исследовались задачи управления запасами с ненадежными поставщиками (см. подытоживающую эти исследования книгу [6]).

В настоящей статье, которая развивает результаты работ [7—10], рассматривается одна из таких задач, а именно, задача управления запасами при случайном спросе при наличии альтернативных поставщиков с разными уровнями надежности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается однономенклатурная система управления запасами в дискретном времени на периоде планирования $T = N\tau$. Здесь τ — период контроля состояния запасов. Моментами принятия решений о размере заказов являются дискретные моменты времени $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, ..., N - 1$. Весь неудовлетворенный сразу потребительский спрос учитывается. В качестве правила оценки эффективности системы выбран критерий минимума суммарных средних затрат на периоде планирования T. Интервал длительности τ называется шагом процесса управления. В начальный момент каждого такого интервала, шага, измеряется значение фиктивного уровня запасов[1] x, и на основании результатов измерения следует принять решение о необходимости подачи (или неподачи) заказа на пополнение запасов, поступающего в систему за пренебрежимо малое время θ, и о размере заказа u.

В суммарные затраты входят затраты на пополнение запасов, затраты на хранение и потери вследствие дефицита. В силу дискретности измерения времени считается, что на очередном шаге периода планирования в конце его, завершаемом с уровнем фиктивного запаса y, выплачиваются затраты на хранение в размере hy, если $y > 0$, или несутся потери вследствие дефицита в размере — dy, если $y < 0$.

Спрос на k-м шаге (в интервале между $(k - 1)$-м и k-м моментами контроля) описывается случайной величиной z_k. Предполагается, что случайные величины $\{z_k\}$ независимы в совокупности и имеют одно и то же вероятностное распределение с функцией распределения $F(z)$ с плотностью вероятности $f(z)$.

Затраты на пополнение запасов в размере u связаны с подачей заказа одному из M поставщиков. Эти затраты при подаче заказа j-му поставщику описываются функцией $A_j\mathbf{1}(u) + c_ju$, где A_j — фиксированная часть затрат на поставку у j-го поставщика, $\mathbf{1}(u)$ — функция Хэвисайда (единичного скачка), которая равна единице для положительных u и нулю для отрицательных u, а c_j — закупочная цена единицы продукции у j-го поставщика. Предполагается, что поставщики ненадежны, и для каждого из них существует вероятность p_j того, что j-й поставщик полностью сорвет поставку (соответственно, с вероятностью $1 - p_j$ поставка будет обеспечена). Считается, что сорвавший пополнение запасов поставщик не получает платы за поставку. При этом считается (см. выше), что время запаздывания поставки θ у всех поставщиков равно нулю, поэтому при срыве поставки одним из поставщиков заказ на поставку тут же передается другому поставщику. Таким образом, каждый из поставщиков характеризуется тройкой (A_j, c_j, p_j).

В дальнейшем будет рассмотрено два варианта предложенной постановки задачи: (а) когда все величины A_j равны между собой, т. е. $A_j = A$, и (б) когда все A_j — разные. Как будет ясно из дальнейшего, в варианте (а) удается получить гораздо более конструктивные результаты. Однако более глубокая причина выделения варианта (а) состоит в том, что он гораздо чаще встречается на практике. Дело в том, что, как правило, фиксированная часть затрат на пополнение запасов связана с необходимостью использования транспортных средств для перевозки на склад потребляемой продукции, и эти транспортные средства заказываются получателем продукции. При этом фиксированная часть затрат на транспортное средство оказывается для всех поставщиков одной и той же.

[1] По определению [11], фиктивный уровень запаса равен наличному запасу + еще не пришедшие, но уже заказанные поставки — учтенный задолженный спрос.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯНСТВА ФИКСИРОВАННОЙ ЧАСТИ ЗАТРАТ НА ПОСТАВКУ У РАЗНЫХ ПОСТАВЩИКОВ: ВАРИАНТ (а)

В этом случае каждый из поставщиков характеризуется парой (c_j, p_j). Очевидно, что, если найдутся два поставщика с номерами i и j, для которых одновременно выполнены два неравенства: $c_j \geq c_i$ и $p_j \geq p_i$, то поставщик под номером j заведомо проигрывает поставщику i (он и дороже, и менее надежен). Таким образом, как отмечено в работе [10], если в качестве критерия выбран минимум суммарных средних затрат, то в множестве M поставщиков следует выделить подмножество Парето-оптимальных поставщиков, удалив из списка поставщиков всех поставщиков, у которых пара (c_j, p_j) обладает тем свойством, что найдется другой поставщик под номером i, для которого пара (c_i, p_i) обладает тем свойством, что $c_j \geq c_i$ и $p_j \geq p_i$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Итак, в дальнейшем будем считать, что множество поставщиков L является подмножеством Парето. Иначе говоря, для всех $i, j \in \{1, 2, ..., L\}$ справедливы пары неравенств $c_j \geq c_i$ и $p_i \geq p_j$ либо $c_j \leq c_i$ и $p_i \leq p_j$. Причем будем считать, что номера поставщиков упорядочены по возрастанию цены единицы товара, т. е. $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_L$. Будем также считать, что $p_L = 0$, т. е. среди поставщиков имеется, по крайней мере, один абсолютно надежный (разумеется, с самой высокой ценой товара).

Теорема. *На каждом шаге оптимальная последовательность обращений к поставщикам совпадает с их нумерацией (т. е. сначала заказчик обращается к поставщику 1, затем при его неудаче — к поставщику 2, ... вплоть до обращения к последнему поставщику под номером L из подмножества Парето).*

Доказательство. При критерии минимальных суммарных средних затрат последовательность обращений к поставщикам сказывается на каждом шаге на значении цены заказываемого товара. При том способе нумерации поставщиков, который назван оптимальным в формулировке теоремы, средняя цена поставляемого товара составит величину $c(1, 2, ..., L)$:

$$c(1, 2, ..., L) = (1 - p_1)c_1 + p_1(1 - p_2)c_2 + \\ + p_1p_2(1 - p_2)c_3 ... + p_1p_2 ... p_{L-1}c_L. \quad (1)$$

Теперь воспользуемся перестановочным методом, впервые предложенным в работе [12]. Докажем, что при любом другом упорядочении поставщиков $(i_1, i_2, ..., i_L)$, где $(i_1, i_2, ..., i_L)$ — произвольная перестановка множества номеров $(1, 2, ..., L)$, для средней цены товара при его заказе может только возрасти, т. е. $c(1, 2, ..., L) \le c(i_1, i_2, ..., i_L)$. Здесь $c(i_1, i_2, ..., i_L)$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле (1):

$$c(i_1, i_2, ..., i_L) = (1 - p_{i_1})c_{i_1} + p_{i_1}(1 - p_{i_2})c_{i_2} + \\ + p_{i_1}p_{i_2}(1 - p_{i_3})c_{i_3} ... + p_{i_2}p_{i_1} ... p_{i_{L-1}}c_L. \quad (2)$$

Докажем сначала более простой факт: если в перестановке $(i_1, i_2, ..., i_L)$ встретились по соседству, начиная с произвольного места под номером l: $1 \le l \le L - 1$, два номера таких, что для них $c_{il} \ge c_{il+1}$, то, поменяв местами этих поставщиков, среднюю цену единицы товара можно только уменьшить. Обозначим для простоты $c_{i_l} = a$, $c_{i_{l+1}} = b$, $p_{i_2}p_{i_1} ... p_{i_{l-1}} = D$, $p_{i_l} = d$ и $p_{i_{l+1}} = e$. При такой перемене мест двух соседних элементов в сумме, определяемой формулой (2) изменятся только два слагаемых — l-е по счету и $(l + 1)$-е. Используя введенные обозначения, запишем значения этих слагаемых до и после перемены мест. До перемены мест обозначим сумму этих двух слагаемых Y, а после перемены мест Z. Тогда

$$Y = D(1 - d)a + Dd(1 - e)b, \quad (3)$$

$$Z = D(1 - e)b + De(1 - d)a. \quad (4)$$

Подсчитаем разность

$$Z - Y = D(1 - e)b + De(1 - d)a - D(1 - d)a - \\ - Dd(1 - e)b = D(1 - d)(1 - e)(b - a).$$

В силу того, что, по предположению, $b \le a$, разность $Z - Y \le 0$. Теорема доказана. ♦

Итак, установлен факт: любая перестановка двух соседних (по последовательности обращения к ним) поставщиков, у которых цены (по величине) «перепутаны», приводит к снижению средней цены товара. Естественно, верно и обратное: если двух соседних поставщиков с «правильно» упорядоченными ценами поменять местами, то средняя цена увеличится.

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку произвольная индексация поставщиков в последовательности $(i_1, i_2, ..., i_L)$ может быть получена из «правильной» индексации $(1, 2, ..., L)$ посредством выполнения конечного числа «плохих» попарных перестановок. Действительно, сначала поставщик под номером i_1 переставляется на первое место ($(i_1 - 1)$ «плохих» попарных перестановок), затем с помощью только «плохих» перестановок на второе место ставится поставщик под номером i_2 и т. д., пока на последнем месте не окажется поставщик под номером i_L.

Теперь предположим, что за n шагов (длительности τ) до конца периода планирования фиктивный уровень запаса в системе равен x и принимается решение о подаче заказа размера u. Тогда средние одношаговые затраты на шаге между моментами t_n и t_{n-1} (в обратном дискретном времени) составят величину

$$\varphi(x, u) = A\mathbf{1}(u) + cu + h\int_0^{x+u}(x + u - z)f(z)dz + \\ + d\int_{x+u}^{\infty}(z - x - u)f(z)dz, \quad (3)$$

где c определяется по формуле (1).

Если ввести функцию минимально возможных средних затрат для n-шагового процесса, который начинается с фиктивного уровня запасов x, обозначив ее $C_n^*(x)$, то нетрудно убедиться в том, что эта функция удовлетворяет уравнению дискретного динамического программирования:

$$C_n^*(x) = \\ = \min_{u>0}\left\{\varphi(x, u) + \alpha\int_0^{\infty}C_n^*(x + u - z)f(z)dz\right\}, \quad (4)$$

где α — коэффициент дисконтирования, $0 \le \alpha \le 1$, с начальным условием

$$C_0^*(x) = 0. \quad (5)$$

Как следует из вида уравнений (4) и (5), для них справедливы все выводы теории управления запасами [11] и, в частности, факт оптимальности двухуровневых (R, r)-стратегий управления запасами. Иначе говоря, для каждого натурального n существуют такие два числа r_n и R_n, что $r_n < R_n$, и оптимальный размер заказа за n шагов до конца периода планирования при текущем фиктивном уровне запаса x вычисляется по формуле:

$$u_n^*(x) = \begin{cases} R_n - x, & \text{если } x < r_n, \\ 0, & \text{если } x \ge r_n. \end{cases}$$

При этом существуют пределы при $n \to \infty$ монотонно возрастающих последовательностей $\{R_n\}$ и $\{r_n\}$. Обозначим эти пределы, параметры оптимальной стационарной управления запасами, R и r. Представляет интерес изучить, как эти пределы зависят от таких параметров, как h, d и α. Соответствующие результаты будут частично представлены далее в § 4.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФИКСИРОВАННОЙ ЧАСТИ ЗАТРАТ НА ПОСТАВКУ У РАЗНЫХ ПОСТАВЩИКОВ: ВАРИАНТ (б)

В этом случае, как и в варианте (а), последовательность выбора поставщика обусловлена тем, что размер платежа поставщику должен быть как можно меньше. Однако та логика, которой можно было руководствоваться в § 2 (выделение подмножества Парето-оптимальных поставщиков и последующие действия), перестает работать. Правда, можно исключить поставщиков с характеристической тройкой параметров (A_i, c_i, p_i), для которых найдется такой поставщик под номером j, у которого $A_j \le A_i$, $c_j \le c_i$ и $p_j \le p_i$. Считая, что подобное «прореживание» выполнено, воспользуемся результатом предыдущего параграфа, который в данном случае будет применяться как эвристическое правило.

Эвристическое правило: последовательность обращения к поставщикам обусловливается их упорядочением по возрастанию затрат на поставку размера u, т. е. в данном случае последовательность обращений зависит от размера заказа u. ♦

Итак, каждое упорядочение поставщиков $(i_1(u), i_2(u), ..., i_L(u))$ строится по возрастанию величины $A_j\mathbf{1}(u) + c_ju$. При этом одношаговые затраты $\varphi(x, u)$ определяются уже не по формуле (3), а с помощью формулы, которая комбинирует формулы (2) и (3):

$$\varphi(x, u) = A_j\mathbf{1}(u) + c(u)u + h\int_0^{x+u}(x + u - z)f(z)dz + d\int_{x+u}^{\infty}(z - x - u)f(z)dz, \qquad (6)$$

где

$$A(u) = (1 - p_{i_1(u)})A_{i_1(u)} + p_{i_1(u)}(1 - p_{i_2(u)})A_{i_2} + p_{i_1(u)}p_{i_2(u)}(1 - p_{i_3(u)})A_{i_3} + ... + p_{i_1(u)}p_{i_2(u)} ... p_{i_{L-1}(u)}A_L, \ (7)$$

$$c(u) = (1 - p_{i_1(u)})c_{i_1(u)} + p_{i_1(u)}(1 - p_{i_2(u)})c_{i_2} + p_{i_1(u)}p_{i_2(u)}(1 - p_{i_3(u)})c_{i_3} + ... + p_{i_1(u)}p_{i_2(u)} ... p_{i_{L-1}(u)}c_L. \qquad (8)$$

Функции $\varphi(x, u)$ из формул (6)—(8) подставляются в алгоритм (4), (5), который и позволяет рассчитать оптимальные размеры заказов.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ

В отличие от работы [7], в которой для более простой задачи моделирование охватывало все упомянутые выше варианты зависимостей суммарных средних затрат (от параметров d, h и α), в настоящей работе мы представим результаты моделирования при построении зависимости оптимальных значений параметров стратегии управления запасами от коэффициента дисконтирования α.

При моделировании исследовался вариант (а). Функция плотности вероятности $f(z) = F'(z)$ в нашей модели имеет вид функции Гаусса (как наиболее часто встречающийся, наряду с равномерным и пуассоновским распределениями, на практике вариант):

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где математическое ожидание $\mu = 5$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1$. Малость среднеквадратического отклонения по сравнению с математическим ожиданием позволяет считать, что физически нереальные отрицательные значения спроса будут встречаться в пренебрежимо малом числе реализаций, т. е. приближение хорошее.

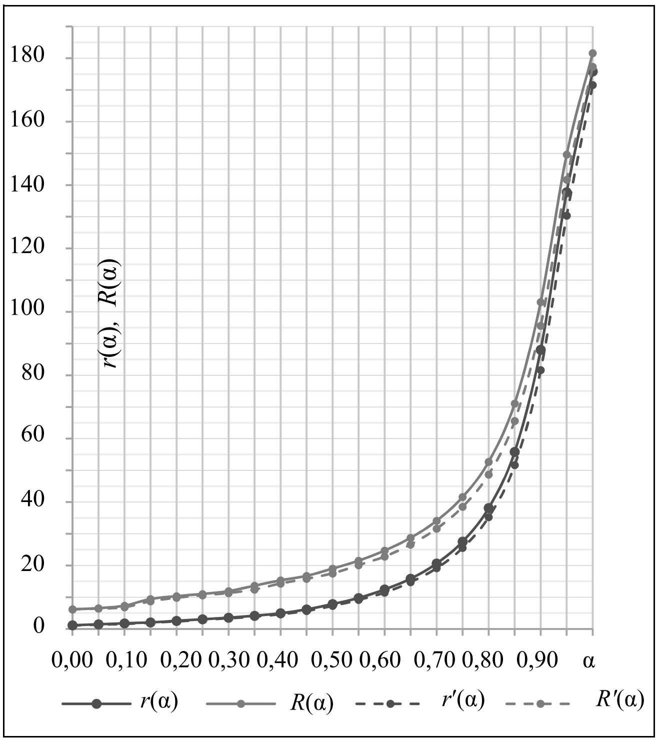
Для большей наглядности (и в соответствии с соображениями практики), значения стоимостных параметров (в условных единицах) были подобраны таким образом: стоимость одной поставки $A = 100$, цена хранения единицы товара $h = 1$, потери, связанные с дефицитом товара $d = 30$. Промоделированы два случая. Случай 1 — прямой порядок (оптимальный) пар поставщиков (1; 0,9), (2; 0,5), (3; 1), при котором средняя цена единицы товара $c = 2{,}35$ (по формуле (1)). Случай 2 — обратный (по отношению к оптимальному) порядок поставщиков (3; 1), (2; 0,5), (1; 0,9), при котором $c = 3$.

4.1. Результаты моделирования

Полученные результаты моделирования показаны на рисунке. Видно, что при изменении порядка (относительно оптимального выбора) поставщиков будет возрастать средняя цена поставки (в соответствии с теоремой), что в свою очередь будет вызывать понижение значений оптимальных параметров двухуровневой стратегии управления запасов $r(\alpha)$ и $R(\alpha)$ (а также снижение значения $R(\alpha) - r(\alpha)$), что на практике приводит к уменьшению размера заказов на каждом шаге (подтверждено при моделировании).

4.2. Технические особенности процесса моделирования

Модель обсчитывалась в MATLAB 2015a Student (с дополнительными пакетами Symbolic Math Toolbox & Parallel Computing Toolbox). Среднее время расчетов на процессоре Intel Core i7 2,3 GHz составляет 24 ч. Шаг по x (и внутренним переменным y и z) был выбран равным 0,1. При временном шаге, равном 1, разница оптимальных значений $r(\alpha)$ и $R(\alpha)$ составляла от 15 до 5 % (в порядке возрастания α). Дальнейшее уменьшение шага по x, y и z разумно остановить на отметке 0,05 (при этом время расчетов вырастет линейно в два раза).



Зависимости оптимальных параметров двухуровневой стратегии управления запасами $r(\alpha)$ и $R(\alpha)$ от коэффициента дисконтирования. Оптимальный (сплошная линия) и обратный оптимальному (штриховая линия) порядки поставщиков

Шаг коэффициента дисконтирования α равен 0,05. Число шагов для уравнения суммарных средних затрат $N = 40$ (при $N = 35$ приращение целевой функции $C_n(x)$ на последнем шаге составляет не более 5 %).

Возможные пути оптимизации скорости расчетов — распараллеливание вычислений по α при помощи дополнительного пакета Parallel Computing Toolbox. В этом случае создаются параллельные пулы процессов, число которых не может превышать числа виртуальных ядер. В рассматриваемом случае 4 физических ядра умножаются на 2 потока (технология Intel Hyper-Threading), в результате получается 8 параллельных потоков (однако не факт, что скорость расчетов возрастет восьмикратно). В дальнейших исследованиях предпочтительно воспользоваться более низкоуровневым (по доступу к аппаратной части) языком программирования. Например, языком C++, как наиболее производительным и кроссплатформенным. Однако, в силу крайне неудобной среды разработки и отладки C++ (по сравнению с тем же Matlab), возможен компромиссный вариант: новые модели создавать в Matlab (во избежание снижения скорости разработки), а рабочие решения переносить на C++.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача об управлении запасами в простейшей цепи поставок при наличии нескольких поставщиков с разными ценами поставки и разными вероятностями срыва поставки. Построен алгоритм формирования оптимальных стратегий пополнения запасов. Дальнейшие исследования будут направлены на усложнение модели, включая учет насыщения отдельных поставщиков при наличии ограничений на интенсивности их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ettl M., Feigin G.E., Lin G.Y., Yao D.D.* A supply network model with base-stock control and service requirements // Operation Research. — 2000. — N 48. — P. 21—28.
2. *Graves S.C., Wilems S.P.* Supply chain design safety stock placement and supply chain configuration // Handbook in OR & MS. — 2003. — N 11. — P. 95—132.
3. *Justus N., Meyr H.* Designing a Planning System for Suppliers of the Ma-chine Building Industry / Technical program of IFORS-2014 World Conference, Barcelona, 2014. — P. 3.
4. *Pishchulo G., Richter K., Golesorkhi S.* Supply Chain Contracting under Asymmetric Information and Partial Vertical Integration / Technical program of IFORS-2014 World Conference. — Barcelona, 2014. — P. 18.
5. *Alegoz M., Ozturk Z.K.* A Goal Programming Approach to Design the Supply Chain Network / Technical program of IFORS-2014 World Conference. — Barcelona, 2014. — P. 27.
6. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. — М.: Наука, 1991. — 192 с.
7. *Вильмс М.А., Мандель А.С., Барладян И.И., Токмакова А.Б.* Локальная модель управления цепями поставок при ненадежных поставщиках // Управление большими системами. — 2015. — Вып. 59. — С. 147—164.
8. *Mandel A., Vilms M.* Local Supply Chain Control Model with Unreliable Suppliers // Proc. of the 8th IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control (MIM 2016, Troyes, France). — Troyes, 2016. — P. 465—470.
9. *Granin S., Mandel A.* Stationary Inventory Control Policies in Supply Systems under Inflation Condition // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, N 8. — P. 1453—1460.
10. *Вильмс М.А, Гранин С.С., Мандель А.С.* Моделирование процесса управления запасами в цепи поставок при наличии нескольких поставщиков // Управление развитием крупномасштабных систем. Тр. десятой междунар. конф. / ИПУ РАН. — М., 2017. — Т. 1. — С. 186—190.
11. *Хедли Дж., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. — М.: Наука, 1969. — 512 с.
12. *Бронштейн О.И., Рыков В.В.* Об оптимальных приоритетах в системах массового обслуживания // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1965. — № 6. — С. 28—37.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Гранин Сергей Сергеевич — аспирант,
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный,
✉ ssgranin@gmail.com,

Мандель Александр Соломонович — д-р техн. наук,
гл. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; профессор,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, ✉ almandel@yandex.ru.