



СТАЦИОНАРНЫЕ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В СИСТЕМАХ СНАБЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

С.С. Гранин, А.С. Мандель

Рассмотрена возможность использования оптимальных параметров стационарных стратегий управления запасами для синтеза правил управления запасами в системах снабжения, действующих на реальном рынке. Выполнено сравнение эффективности дальнорзорких и близоруких стратегий управления запасами. Исследованы различные подходы к синтезу оптимальных стационарных стратегий. Дана сравнительная оценка этих подходов и отмечены особенности их применения. Приведены результаты модельного оценивания оптимальных параметров стационарных стратегий управления запасами как функций от состояния рынка и, в частности, от уровня инфляции.

Ключевые слова: управление запасами, параметрические стратегии, сравнительный анализ, уровень инфляции, моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с конца 1960-х гг., все большее практическое применение стал находить один из фундаментальных результатов теории управления запасами, который принадлежит Герберту Скарфу [1] и заключается в том, что при достаточно общих предположениях о характере процессов, происходящих в системе снабжения, и выборе критерия управления запасами в форме минимизации суммарных средних затрат в периоде планирования оптимальные стратегии управления запасами оказываются параметрическими [2, 3]. Они относятся к классу так называемых (R, r) -стратегий управления запасами. Это означает, что за n шагов до конца периода для любого n найдутся два такие числа R_n и r_n , что, если уровень запасов в системе больше, чем s_n , то размер заказа на пополнение запасов в этот момент времени подавать не нужно, а если уровень запасов меньше или равен s_n , то размер заказа u_n выбирается равным $R_n - r_n$. Было также установлено [2], что существуют пределы $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ и $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, представляющие собой параметры оптимальных стационарных стратегий управления запасами. При этом номер шага n , в данном случае, так называемое «обратное» время, отсчиты-

ваемое от конца периода планирования. Иначе говоря, если период планирования T достаточно велик ($T = N\tau$, где τ — интервал между моментами принятия решений о размере заказа), то с первых шагов (в обратном времени — N -м, $(N-1)$ -м, ...) могут использоваться параметры оптимальных стационарных стратегий управления запасами. Однако оказалось, что процедуры расчета как динамических параметров (R_n, r_n) , так и стационарных параметров (R, r) оптимальных стратегий управления запасами чрезвычайно вычислительно сложны и требуют прокрутки времязатратных алгоритмов динамического программирования. Именно поэтому в качестве альтернативы были предложены существенно более простые «близорукие» (myopic) стратегии управления запасами, суть которых состоит в том, что в момент принятия решения о размере заказа учитываются не суммарные средние затраты, а средние затраты на ближайшем, примыкающем к текущему моменту временном шаге. В отличие от них стратегии, основанные на минимизации суммарных средних затрат в периоде планирования, будем называть «дальнорзоркими».

В последнее десятилетие в связи с бурным развитием абсолютно прикладной науки, которая в нашей стране известна под названием «логистика» [4–7] и вобрала в себя значительную часть теоретического багажа математической теории управле-

ния запасами и производством, стало очевидным, что именно эти «близоручки» стратегии управления запасами оказались основным инструментом практического управления запасами. Однако сегодня с появлением мощных вычислительных средств представляется возможным вернуться к применению дальноручки стратегий управления запасами, исследовав при этом как параметры (в том числе, и стационарные) этих стратегий зависят от стабильности рынка. Именно этому посвящена настоящая статья, в которой сначала приводятся известная постановка задачи и традиционные алгоритмы ее решения, а затем обсуждается цена замены дальноручки стратегий управления запасами на близоручки и исследуется (посредством имитационного моделирования) зависимость параметров стационарных стратегий управления запасами от коэффициента дисконтирования α , $0 \leq \alpha \leq 1$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим классическую модель управления однономенклатурным запасом с запоминанием задолженного спроса¹ в течение периода планирования $T = (0, N\tau)$, где N — достаточно большое натуральное число, в котором спрос описывается моделью взаимно независимых, одинаково распределенных случайных величин $\{z(t), t = 1, 2, \dots, N\}$ с функцией распределения $F(z)$. Пусть время запаздывания поставки $\theta = 0$. Тогда, если в качестве критерия планирования принят минимум суммарных средних затрат в периоде планирования для оптимальной стратегии пополнения запасов, можно записать уравнения динамического программирования [2, 3]:

$$C_1^*(x) = \min_{u \geq 0} \left\{ A1(u) + cu + h \int_0^{\max\{x+u, 0\}} (x+u-z)dF(z) + d \int_{\max\{x+u, 0\}}^{\infty} (z-x-u)dF(z) \right\}, \quad (1)$$

$$C_t^*(x) = \min_{u \geq 0} \left\{ A1(u) + cu + h \int_0^{\max\{x+u, 0\}} (x+u-z)dF(z) + \right.$$

¹ Это означает [2], что при возникновении дефицита неудовлетворенный спрос регистрируется и удовлетворяется при поступлении очередной поставки.

$$+ d \int_{\max\{x+u, 0\}}^{\infty} (z-x-u)dF(z) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} C_{t-1}^*(x+u-z)dF(z)\}, \quad (2)$$

$n = 2, 3, \dots, N$.

Здесь $1(u)$ — функция единичного скачка (функция Хэвисайда), α , $0 \leq \alpha < 1$, — коэффициент дисконтирования, а $C_t^*(x)$ — минимально возможное значение затрат на t последних (до конца периода планирования: так называемое «обратное» время) шагах, если за t шагов до конца периода планирования фиктивный уровень запасов² в системе x .

Замечание. Отметим, что в уравнениях (1) и (2) в отличие от процитированных источников и вообще от классической теории управления запасами в пределах интегрирования появилась конструкция $\max\{x+u, 0\}$ вместо привычного $x+u$. Это объясняется тем, что расчеты по прежним формулам (с пределом интегрирования $x+u$) при использовании фиктивного уровня запасов приводили к ошибкам, поскольку при отрицательном значении $x+u$ (чего нельзя исключить) интеграл

$$I1 = \int_0^{x+u} (x+u-z)dF(z)$$
 принимает отрицательное

значение, что невозможно, так как $h \times I1$ — это размер издержек хранения, и тогда получилось бы, что в отсутствие запаса плата за хранение возвращается плательщику³. Подобная корректировка никак не отражается на основных выводах теории управления запасами (сохраняются свойства A -выпуклости и оптимальность двухуровневых стратегий управления запасами), поскольку, как нетрудно убедиться, при такой модификации записи интегралов производные от подынтегральных выражений по u остаются непрерывными.

² Под фиктивным уровнем запасом понимается сумма наличного запаса и запаса в пути (который в силу того, что $\theta = 0$, также равен нулю) за вычетом уровня задолженного спроса [2]. Таким образом, фиктивный уровень запаса может быть и отрицательным.

³ Аналогичные рассуждения применимы и к интегралу $\int_{x+u}^{\infty} (z-x-u)dF(z)$. Еще одним аргументом в пользу введенного видоизменения записи интегралов служит то, что при компьютерном моделировании в качестве аппроксимирующей модели часто используют такие вероятностные распределения (гауссово и др.), плотность вероятности которых в качестве носителя захватывает и отрицательную полуось.



Теперь перепишем уравнения (1) и (2), введя функции:

$$\varphi(y) = cy + h \int_0^{\max\{y, 0\}} (y - z) dF(z) + d \int_{\max\{y, 0\}}^{\infty} (z - y) dF(z), \quad (3)$$

$$G_t(y) = \varphi(y) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} C_{t-1}^*(x + u - z) dF(z), \quad (4)$$

где $t = 1, 2, \dots$, а $C_0^*(x) \equiv 0$.

Учитывая функции (3) и (4), уравнения (1) и (2) можно переписать в виде:

$$C_t^*(x) = -cx + \begin{cases} A + \min_{y > x} G_t(y), \\ G_t(x). \end{cases} \quad (5)$$

Известно [2, 3], что в системе, оптимизация которой задается уравнением (5), оптимальны двухуровневые (R, r) -стратегии управления запасами. Это означает, что для каждого момента времени t (при отсчете времени от конца периода планирования) существует пара чисел $R_t, R_t > 0$, и $r_t, r_t < R_t$, таких, что правило подачи заказов $u(x)$ за t шагов до конца периода планирования может быть задано формулой:

$$u(x) = \begin{cases} R_t - x, & \text{если } x \leq r_t, \\ 0, & \text{если } x > r_t. \end{cases} \quad (6)$$

При этом величина R_t является точкой абсолютного минимума функции $G_t(x)$, а величина r_t — решением уравнения

$$G_t(r_t) = A + G_t(R_t).$$

Известно также, что в стационарном режиме⁴ (когда N и t стремятся к бесконечности) в силу существования пределов $R = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t$ и $r = \lim_{t \rightarrow \infty} r_t$ существуют два числа R и r , которые полностью задают оптимальную стратегию управления запасами. При коэффициенте дисконтирования $\alpha < 1$ эти

числа (через соотношение (6)) определяют решение функционального уравнения

$$C^*(x) = \min_{u \geq 0} \left\{ A \mathbf{1}(u) + cu + h \int_0^{\max\{x+u, 0\}} (x+u-z) dF(z) + d \int_{\max\{x+u, 0\}}^{\infty} (z-x-u) dF(z) + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(x)(x+u-z) dF(z) \right\}.$$

Как нетрудно видеть, близорукие стратегии (с параметрами R_1 и r_1 , которые мы выделим и назовем $R_{\text{близ}}$ и $r_{\text{близ}}$) задаются следующим образом:

$$F(R_{\text{близ}}) = \frac{d-c}{h+d}, \quad (7)$$

$$\varphi(r_{\text{близ}}) = A + \varphi(R_{\text{близ}}). \quad (8)$$

В отличие от них параметрами дальнорук стратегий служат значения R и r , которые в дальнейшем мы будем называть $R_{\text{дальн}}$ и $r_{\text{дальн}}$.

2. СРАВНЕНИЕ ДАЛЬНОРУКИХ И БЛИЗОРУКИХ СТРАТЕГИЙ

Прежде чем перейти к сравнению дальнорук и близорук стратегий, напомним о результате, полученном Н. Прабху [8, 9] и развитом в работе [10]. В работе [8] было предложено вместо задачи (1), (2) рассматривать задачу вида: найти такие значения параметров двухуровневой стратегии управления запасами (связанные с размером поставки u), чтобы минимизировать функционал (они и будут параметрами $R_{\text{дальн}}$ и $r_{\text{дальн}}$):

$$C^*(R, r) = \min_{u \geq 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [A \times \mathbf{1}(u) + cu + \varphi(x+u)] dG(x) \right\}, \quad (9)$$

где $G(x)$ — стационарное распределение уровня запасов в начале временного шага, а функция $\varphi(y)$ определяется формулой (3). В работах [8, 9] на базе методов теории восстановления выведены соотношения, позволяющие рассчитать стационарное распределение $G(x)$.

В работах [11, 12] были отмечены те проблемы, которые возникают в связи с тем, что стационарность распределения уровня запасов понимается как обычная стационарность (в прямом времени), а стационарность стратегий управления запасами

⁴ Еще раз отметим, что поскольку отсчет времени ведется от конца периода планирования, то стационарный режим связан с началом периода планирования. Иначе говоря, при $N \rightarrow \infty$ стационарные управления используются сразу — с первых шагов периода планирования.

связана с обратным временем, названные собирательно «проблемой разнополярности». Кроме того, было указано [13], что в связи с проблемой разнополярности полная эквивалентность задач (1), (2) и (9) имеет место только в достаточно экзотическом случае отсутствия инфляции, т. е. когда коэффициент дисконтирования $\alpha = 1$.

Тем не менее, анализ модели (9) на предмет сравнения средних затрат при использовании параметров $(R_{\text{близ}}, r_{\text{близ}})$ близорукой стратегии и $(R_{\text{дальн}}, r_{\text{дальн}})$ дальноручной стратегии гораздо проще, чем анализ модели (1), (2). При этом, как ука-

зано выше, параметры $R_{\text{дальн}}$ и $r_{\text{дальн}}$ отыскиваются в результате решения задачи (9), а параметры $R_{\text{близ}}$ и $r_{\text{близ}}$ — в результате решения задачи (7), (8). Затем вычисляется минимально возможное значение функционала $C^*(R_{\text{дальн}}, r_{\text{дальн}})$, которое и сравнивается со значением $C^*(R_{\text{близ}}, r_{\text{близ}})$. Результаты сравнения сведены в табл. 1. В ее первых столбцах указаны значения стоимостных параметров A , c , h и d , при которых были выполнены соответствующие вычисления. Предполагалось, что распределение спроса экспоненциально и имеет вид

Таблица 1

Оптимальные значения параметров близоруких и дальноручных стратегий и соответствующие значения средних затрат (при коэффициенте дисконтирования $\alpha = 1$)

A	c	h	d	$R_{\text{близ}}$	$r_{\text{близ}}$	$R_{\text{дальн}}$	$r_{\text{дальн}}$	$C^*(R_{\text{близ}}, r_{\text{близ}})$	$C^*(R_{\text{дальн}}, r_{\text{дальн}})$	Соотношение между затратами
10	10	1	20 10	0,64 0	-0,46 -1,1	5,82 5,17	1,35 0,7	29,95 29,21	15,82 15,17	1,89 1,93
		5	20 10	0,51 0	-0,46 -0,97	5,17 2	0,7 0	31,53 28,97	25,82 20,00	1,22 1,48
	5	1	20 10	1,25 0,61	-0,15 -0,8	5,82 5,17	1,35 0,69	19,17 18,50	10,82 10,17	1,77 1,82
		5	20 10	0,92 0,41	-0,23 -0,74	2,51 2	0,51 0	22,35 19,79	17,55 15,00	1,27 1,32
50	10	1	20 10	0,64 0	-1,38 -2,02	10,64 10	0,65 0	53,16 52,34	20,65 20,00	2,57 2,62
		5	20 10	0,51 0	-1,3 -1,82	4,38 3,87	-0,09 -0,6	55,07 52,62	31,91 29,36	1,73 1,79
	5	1	20 10	1,25 0,61	-1,22 -1,86	10,65 10	0,65 0	39,28 38,50	15,65 15,00	2,51 2,57
		5	20 10	0,92 0,41	-1,17 -1,69	4,38 3,87	-0,09 -0,6	43,32 40,85	26,91 24,36	1,61 1,68
10	10	1	20 10	0,64 0	-0,46 -1,1	5,82 5,17	1,35 0,7	29,95 29,21	15,82 15,17	1,89 1,93
		5	20 10	0,51 0	-0,46 -0,97	5,17 2	0,7 0	31,53 28,97	25,82 20,00	1,22 1,48
	5	1	20 10	1,25 0,61	-0,15 -0,8	5,82 5,17	1,35 0,69	19,17 18,50	10,82 10,17	1,77 1,82
		5	20 10	0,92 0,41	-0,23 -0,74	2,51 2	0,51 0	22,35 19,79	17,55 15,00	1,27 1,32
50	10	1	20 10	0,64 0	-1,38 -2,02	10,64 10	0,65 0	53,16 52,34	20,65 20,00	2,57 2,62
		5	20 10	0,51 0	-1,3 -1,82	4,38 3,87	-0,09 -0,6	55,07 52,62	31,91 29,36	1,73 1,79
	5	1	20 10	1,25 0,61	-1,22 -1,86	10,65 10	0,65 0	39,28 38,50	15,65 15,00	2,51 2,57
		5	20 10	0,92 0,41	-1,17 -1,69	4,38 3,87	-0,09 -0,6	43,32 40,85	26,91 24,36	1,61 1,68



$F(z) = 1 - e^{-x}$, т. е. среднее значение спроса на одном шаге $\lambda = 1$.

Результаты сравнения демонстрируют, что выигрыш от использования дальнорукх стратегий может достигать 162 %. Отдельные расчеты, выполненные для модели (1), (2), показывают, что табл. 1 достаточно адекватно моделирует порядок превосходства дальнорукх стратегий над близорукими, что позволяет снизить расходы в 1,5–2,5 раза. Отсюда следует, что именно эти стратегии желательно, да и попросту необходимо внедрять в практическую логику. Возможности современных компьютеров, несомненно, позволяют осуществлять требуемые расчеты с помощью алгоритма (1), (2).

При этом необходимо учесть, что реальное значение коэффициента дисконтирования $\alpha < 1$ и может изменяться во времени. В связи с этим было предпринято дополнительное исследование и разработан пакет программ на базе пакета MATLAB 8.3, который и позволил выполнить соответствующее моделирование. Полученные результаты представлены далее.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В процессе моделирования использовалось распределение спроса вида $F(z) = 1 - e^{-\lambda x}$. Результаты моделирования представлены в форме таблиц задания исходных параметров (табл. 2 и 3) и графиков зависимости параметров R и r как функций коэффициента дисконтирования α (рис. 1–4).

Таблица 2

Значения параметров

Параметр	Значение
A	10
c	5
h	1
d	10
λ	1
N	40

Таблица 3

Значения параметров

Параметр	Значение
A	10
c	5
h	1
d	20
λ	1
N	40

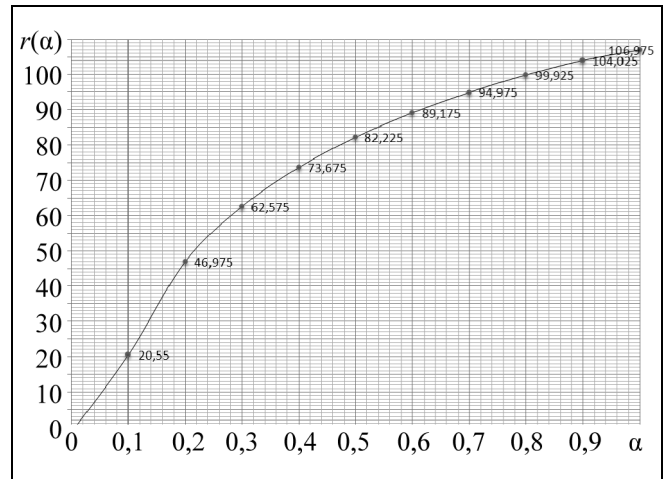


Рис. 1. График зависимости $r(\alpha)$

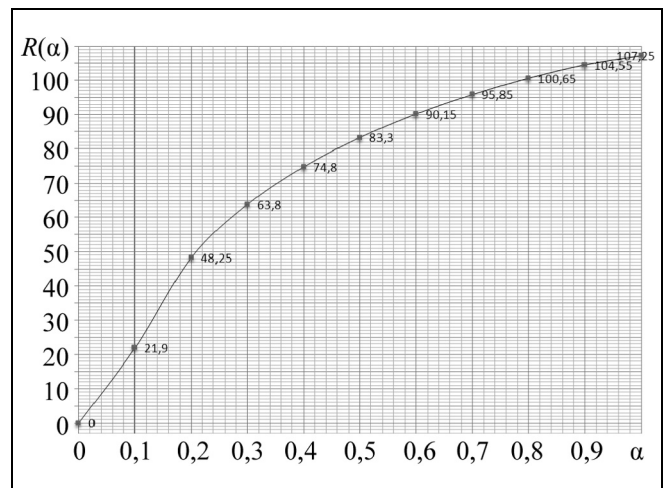


Рис. 2. График зависимости $R(\alpha)$

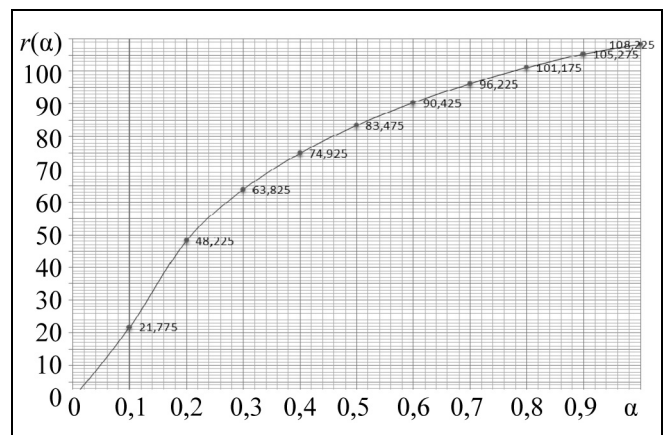


Рис. 3. График зависимости $r(\alpha)$

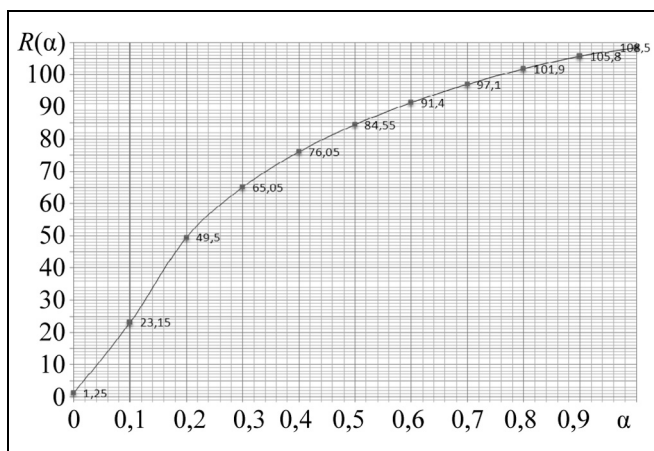


Рис. 4. График зависимости $R(\alpha)$

Как и следовало ожидать, в каждом из рассмотренных случаев графики зависимостей $r(\alpha)$ и $R(\alpha)$ представляют собой монотонно возрастающие функции от α . В самом деле, при большем значении α мы все дальше «заглядываем» в будущее и выясняется, что заказывать нужно больше, поскольку все меньше смысла ограничиваться «интересами» только ближайшего шага принятия решений. Значениями $r(0)$ и $R(0)$ описываются параметры близорукой стратегии управления запасами. С ростом параметра d (удельного коэффициента штрафа за дефицит на одном шаге) при одном и том же значении α заказывать нужно все больше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены модифицированные алгоритмы решения многошаговой динамической задачи управления запасами при случайном спросе. Показано, что и в модифицированном варианте остаются справедливы фундаментальные результаты теории управления запасами: сохраняется свойство A -выпуклости и связанный с ним факт оптимальности двухуровневых стратегий управления запасами.

Рассмотрены известные в литературе основные подходы к формированию стационарных параметрических стратегий управления запасами и очерчены области их применения.

Выполнено сравнение эффективности использования дальнорукх и близорукх стратегий управления запасами.

Создан программный комплекс, позволивший выполнить моделирование предложенных алгоритмов управления запасами. С использованием этого комплекса выполнено исследование (на от-

дельных примерах) зависимости значений параметров стационарных стратегий управления запасами от уровня инфляции, задаваемое значением коэффициента дисконтирования α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Scarf Herbert. The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem. — in: Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick. Mathematical models in the social sciences, 1959 // Proc. of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV. — Stanford, California: Stanford University Press, 1959. — P. 196—204.
2. Хедли Д., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. — М.: Наука, 1969. — 512 с.
3. Лотоцкий В.А., Мандель А.С. Модели и методы управления запасами. — М.: Наука, 1991. — 190 с.
4. Неруш Ю.М. Логистика: учебник. — М.: Проспект; Велби, 2008. — 517 с.
5. Основы логистики: теория и практика / В.В. Шербаков, И.Л. Киппер, Л.А. Мясникова и др. — СПб.: Питер Пресс, 2009. — 426 с.
6. Дыбская В.В. Логистика складирования: учеб. — М.: Инфра-М, 2012. — 557 с.
7. Мельников В.П., Схирладзе А.Г., Антонюк А.К. Логистика. — М.: Юрайт, 2014. — 288 с.
8. Мандель Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами (изучение основных случайных процессов. — М.: Машиностроение, 1969. — 354 с.
9. Пرابху Н. Стохастические процессы теории запасов. — М.: Мир, 1984. — 184 с.
10. Сравнительный анализ «близорукх» и «дальнорукх» стратегий управления запасами в условиях неопределенности / И.И. Барладян, Н.И. Борзенко, А.В. Лапин и др. // Тр. Междунар. конф. по проблемам управления / ИПУ РАН. — М., 2006. — С. 774—783.
11. Мандель А.С. О выборе критериев в задачах управления запасами в условиях неопределенности // Тр. XII Всерос. совещ. по проблемам управления «ВСПУ-2014» / ИПУ РАН. — М., 2014. — С. 4212—4218.
12. Mandel A. Renewal theory methods to compute stationary inventory control strategy parameters (for lot-sizing) // Technical Program of 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies. — Barcelona: IFORS Publications, 2014. — P. 174.
13. Мандель А.С., Семенов Д.А. Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 6. — С. 117—128.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Дорофеевом.

Гранин Сергей Сергеевич — студент,
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный,
✉ ssgranin@gmail.com,

Мандель Александр Соломонович — д-р техн. наук,
зав. лабораторией, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва;
профессор, Московский физико-технический институт,
✉ manfoon@ipu.ru.