УДК 519.863; 519.854.2; 330.46

ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ СУММЫ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Губко

Задача формирования рациональной организационной структуры рассмотрена как задача дискретной оптимизации — поиска иерархии управления, минимизирующей заданный критерий (затраты на содержание иерархии). Исследован класс функций затрат на содержание менеджера, представимых в виде суммы однородных функций. Получены условия, при которых в оптимальной иерархии все менеджеры имеют одинаковое число непосредственных подчиненных, найдена формула нижней оценки затрат оптимальной иерархии. Дан иллюстративный пример расчета.

Ключевые слова: организационная структура, оптимальная иерархия, неоднородная функция затрат, норма управляемости.

ВВЕДЕНИЕ

Современные экономические реалии в большой степени характеризуются процессами глобализации мировой экономики. Жесткая конкуренция за региональные рынки сопровождается масштабными структурными перестройками отраслей в результате непрерывно происходящих процессов вертикальной и горизонтальной интеграции, слияний и поглощений. Все возрастающий темп изменений в технологиях производства и управления требует от компаний быстрой и эффективной перестройки методов управления и внутренней структуры. В условиях глобальных экономических потрясений эффективность системы управления определяет не только финансовые результаты, но и само выживание фирмы. В связи с этим разработка эффективных систем управления крупными производственными предприятиями, корпорациями и холдингами приобретает особенное значение. По различным оценкам на долю системы управления приходится от 20 до 60 % расходов современных предприятий, и потому совершенствование системы организационного управления является для них одним из важнейших способов снижения издержек и повышения конкурентоспособности.

Задача построения эффективной системы управления организацией чрезвычайно сложна. Огромная цена неверного управленческого решения сильно сужает возможности экспериментирования в процессе выбора механизмов функционирования и управления. Поэтому важную роль играет разработка математических и имитационных моделей, которые могли бы теоретически обосновать эффективность тех или иных решений, направленных на совершенствование системы управления.

Несмотря на то, что многие научные дисциплины, такие как экономика, менеджмент, теория фирмы и теория организации, уделяют немалое внимание вопросам управления производством, эту проблематику далеко нельзя назвать исчерпанной. Один из наименее исследованных аспектов в этой области составляют задачи управления структурой системы управления. В настоящее время считается общепризнанным, что вид организационной структуры оказывает огромное влияние на эффективность функционирования организации в целом. Поэтому выбор рациональной организационной структуры представляет собой важный этап в общем процессе управления организацией, а разработка математических методов построения рациональных организационных структур — одно из наиболее перспективных направлений развития теории управления организационными системами.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Впервые математическую модель иерархической организации исследовал Г. Саймон [1]. В этой модели сделаны чрезвычайно сильные предположения, такие как постоянство нормы управляемости (число непосредственных подчиненных менеджера), жесткая зависимость ставки заработной платы менеджера от его уровня в иерархии и т. п.

На основе этой модели О. Вильямсон [2] определил ограничения на размер организации, вызванные потерей контроля из-за снижения эффективности работы сотрудника от уровня к уровню. При этом коэффициент α снижения эффективности задавался экзогенно и не зависел от параметров модели. В модели Вильямсона число $\alpha \in (0, 1)$ интерпретировалось как доля приказов, замыслов, указаний руководителя, которые успешно воплощаются его непосредственными подчиненными. Позже Г. Кальво и С. Веллиц [3] связали снижение эффективности сотрудника со степенью его контроля непосредственным начальником. Они рассмотрели модель максимизации прибыли организации. В их модели уже возможна различная норма управляемости и различные ставки заработной платы на разных уровнях иерархии управления.

В работе [4] рассмотрена модель оптимизации времени принятия решения иерархией. Подход на ее основе далее был развит в ряде работ (см., например, [5, 6]). В работе [7] модель Г. Кальво и С. Веллица исследована с помощью аппарата теории оптимального управления.

Российские ученые также занимались задачами поиска оптимальных иерархий (см., например, работы [8, 9]). В ряде работ [9, 10] были разработаны модели надстройки системы управления над технологическим процессом, описываемым графом взаимодействий между элементарными работами. В работах [10, 11] иерархия рассматривается как процессор, перерабатывающий и консолидирующий информацию (в западной литературе такой подход получил развитие в работах [5, 6, 12]). Более подробный обзор литературы по математическим моделям формирования организационных иерархий дан в статье [13].

Сложность моделирования организационных структур обусловлена сложностью формулировки математической модели, а также сложностью ее последующего формального анализа. Деятельность управленцев в реальных организациях чрезвычайно сложна и многогранна, поэтому во всех известных математических моделях она представляется в довольно упрощенном, стилизованном виде. Обычно из всего многообразия видов управленческой деятельности выделяются лишь один или два, такие, например, как координация подчиненных [5, 9], мониторинг их действий [2, 3, 7, 14], решение проблем и принятие решений [15, 16], обработка информации [4, 6, 10 — 12], создание стимулов [7, 17] и др. Работы же, рассматривающие управленческую деятельность в комплексе (см., например, [18]), ограничиваются описательными моделями, не претендующими на математическую строгость.

Трудности с формальным анализом сформулированных математических моделей связаны с неразвитостью математического аппарата, подходящего для решения задач синтеза структуры сложных систем. Несмотря на то, что большинство упомянутых моделей допускают унифицированную математическую постановку в форме задачи оптимизации, для их анализа различные авторы применяют различные частные математические подходы[1].

В связи с этим одно из насущных направлений развития теории заключается в разработке математического аппарата оптимизации иерархических структур, который мог бы применяться при анализе широкого класса содержательных моделей формирования организационных структур. Такой подход развивается в работах [13, 19 — 25]. В частности, были разработаны общие методы решения задач поиска оптимальной иерархии [19, 20, 23], существенно расширяющие известные из литературы. С помощью концепции *секционных функций затрат*, позволяющих описывать широкий класс прикладных задач, были получены аналитические условия оптимальности иерархий с максимальной и минимальной нормой управляемости, а также оптимальности так называемых *последовательных* иерархий. Кроме того, для секционных функций затрат были разработаны точные и приближенные алгоритмы поиска оптимальных иерархий. Для важного класса *однородных функций затрат* предложены аналитические нижние и верхние оценки затрат оптимальной иерархии, разработаны эффективные алгоритмы построения субоптимальных иерархий[2] [20, 21].

В настоящей статье разработанный ранее подход [20] к поиску оптимальных древовидных иерархий обобщается на более широкий класс функций затрат.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ

В рамках подхода, предложенного в работе [19] и впоследствии развитого в работах [20, 23], формально задачу поиска оптимальной структуры организации можно поставить следующим образом.

---

[1] Отсутствие универсальных методов, позволяющих решать задачи поиска оптимальных иерархий, составляет одну из причин, ограничивающих сложность существующих моделей управленческой деятельности.

[2] Также был сформулирован ряд содержательных моделей формирования организационных иерархий [20, 21, 24, 25], на примере которых было проиллюстрировано прменение разработанных формальных методов.

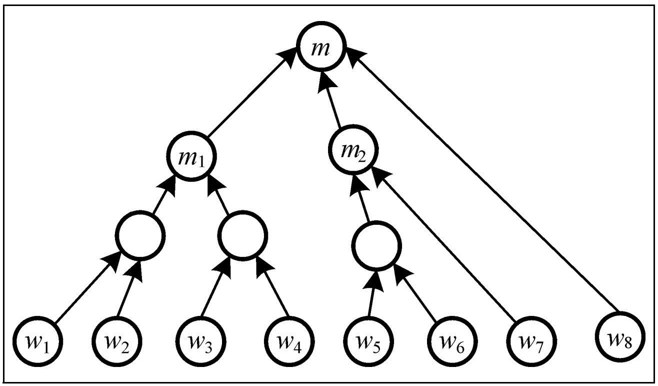

Рис. 1. Пример древовидной иерархии над множеством исполнителей $\{w_1, ..., w_8\}$

Зафиксируем *множество исполнителей* $N = \{1, ..., n\}$ — рядовых рабочих и служащих. Цель организационной иерархии заключается в управлении этими исполнителями, для чего над множеством исполнителей надстраивается иерархия управляющих ими сотрудников — менеджеров. У каждого менеджера должно быть не более одного непосредственного начальника[3] и не менее двух непосредственных подчиненных. Любую структуру управления можно изобразить в виде ориентированного дерева, *листьями* которого являются все исполнители из множества N, а остальные вершины соответствуют *менеджерам*. Считаем, что дуги дерева направлены в сторону корня и описывают взаимную подчиненность сотрудников (рис. 1).

Будем также считать заданной *функцию затрат*, которая любому менеджеру m в иерархии H ставит в соответствие затраты $c(m, H)$ на его содержание в рамках данной иерархии. Затраты $C(H)$ иерархии H равны сумме затрат входящих в нее менеджеров. *Задача поиска оптимальной иерархии* тогда состоит в том, чтобы для заданного множества исполнителей N найти иерархию, имеющую минимальные затраты[4].

В работе [19] был определен важный класс функций затрат менеджера — так называемые *секционные* функции затрат. К ним сводятся многие известные из литературы модели формирования организационных иерархий (см. обзор в работе [20]). Для любого менеджера m из иерархии H можно определить *подчиненную группу исполнителей* $s_H(m) \subseteq N$ — множество исполнителей, для которых менеджер m является начальником в иерархии H. Так, например, на рис. 1 менеджер m_1 управляет группой исполнителей $\{w_1, ..., w_4\}$, а m_2 — группой $\{w_5, ..., w_7\}$. Удобно считать, что любой исполнитель управляет группой, состоящей из самого себя.

Определение 1 [19]. Функция затрат менеджера $c(m, H)$ называется *секционной*, если она зависит только от групп исполнителей, которыми управляют его непосредственные подчиненные; т. е. если менеджер m в иерархии H имеет k непосредственных подчиненных $v_1, ..., v_k$, то его затраты можно записать в виде $c(m, H) = c(s_H(v_1), ..., s_H(v_k))$. ♦

Секционные функции затрат общего вида представляют собой достаточно сложный объект исследования, поскольку являются функциями множеств. В связи с этим возникает необходимость в дальнейшем сужении класса рассматриваемых функций затрат менеджера, например, в рассмотрении функций затрат, *зависящих от мер*. Пусть на множестве исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ определена мера, т. е. каждому исполнителю w из множества N поставлено в соответствие положительное число $\mu(w)$. Мерой $\mu(s)$ группы исполнителей $s \subseteq N$ считается суммарная мера исполнителей, входящих в группу, т. е. $\mu(s) := \sum_{w \in s} \mu(w)$.

Определение 2 [19]. Секционная функция затрат называется *зависящей от мер*, если ее можно записать в виде $c(s_1, ..., s_k) = c(\mu_1, ..., \mu_k)$, где $\mu_1, ..., \mu_k$ — меры групп $s_1, ..., s_k$, управляемых непосредственными подчиненными менеджера. ♦

Определение 3 [19]. Функция затрат менеджера, зависящая от мер, называется *однородной*, если существует такое число γ, что для любого числа $A > 0$ и любого набора мер $\mu_1, ..., \mu_k$ выполняется тождество $c(A\mu_1, ..., A\mu_k) = A^\gamma c(\mu_1, ..., \mu_k)$. Число γ называется *степенью однородности* функции затрат[5]. ♦

---

[3] В настоящей статье не рассматриваются иерархии, допускающие множественное подчинение. В работах [19, 23] формулируется более общее понятие иерархии. Там же рассматривается вопрос о том, при каких условиях на функцию затрат оптимальную иерархию достаточно искать в классе деревьев.

[4] Также может ставиться задача не минимизации затрат, а максимизации прибыли организации (разности дохода и затрат). Эта постановка сводится к задаче минимизации заменой знака оптимизируемого критерия. Однако стоит отметить, что большинство имеющихся работ (в частности, [20]) существенно использует неотрицательность функции затрат, что затрудняет использование полученных в них результатов для решения задач максимизации прибыли. В настоящей статье неотрицательность функции затрат иерархии оговаривается особо.

[5] Далее будет использовать обозначение $c(m, H)$ для описания затрат менеджера m в иерархии H, $c(s_1, ..., s_k)$ — для обозначения секционной функции затрат менеджера, k непосредственных подчиненных которого управляют группами исполнителей $s_1, ..., s_k$, а также $c(\mu_1, , \mu_k)$ для обозначения функции затрат менеджера, зависящей от мер.

При однородной функции затрат затраты менеджера, имеющего k непосредственных подчиненных, можно записать в виде $\mu^\gamma c(y_1, ..., y_k)$, где μ — мера контролируемой менеджером группы исполнителей, а $(y_1, ..., y_k) = (\mu_1/\mu, ..., \mu_k/\mu)$ — *пропорция*, в которой эта группа делится между непосредственными подчиненными менеджера. Введем вспомогательные обозначения.

Определение 4. Обозначим через D_k *k-мерный симплекс* — множество векторов $(y_1, ..., y_k)$ с неотрицательными компонентами, дающими в сумме единицу. Для любого числа $\varepsilon \in [0, 1/k]$ через $D_k(\varepsilon)$ обозначим ту часть симплекса D_k, на которой $y_i \geqslant \varepsilon$, $i = 1, ..., k$.

В частности, в иерархии, управляющей множеством исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ с мерами $\mu(1), ..., \mu(n)$, пропорция, в которой любой менеджер иерархии делит подчиненную ему группу исполнителей, принадлежит $D_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \mu_{\min}(w)/\mu(N)$, где $\mu_{\min}(N) := \min_{w \in N}\mu(w)$.♦

Для однородной функции затрат задача поиска оптимальной иерархии была решена в работах [20—22]. Было показано, что оптимальная иерархия стремится быть *однородным деревом*, т. е. иерархией, в которой все менеджеры имеют одинаковую норму управляемости (число непосредственных подчиненных) и делят подчиненную группу исполнителей между своими заместителями в одинаковой пропорции в смысле мер этих подгрупп. Параметры этого однородного дерева (норма управляемости r и пропорция $x = (x_1, ..., x_r)$) находятся из решения задачи оптимизации, которая для $\gamma \neq 1$ имеет следующий вид:

$$(r, x) \in \operatorname*{Arg\,min}_{k = 2, ..., n} \min_{y \in D_k(\varepsilon)} c_a(y_1, ..., y_k) \Big/ \left|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\gamma_\gamma}\right|. \quad (1)$$

Минимизация в (1) ведется по k — всем нормам управляемости от двух до n (числа исполнителей) и по всем пропорциям $y = (y_1, ..., y_k) \in D_k(\varepsilon)$, $\varepsilon = \mu_{\min}(N)/\mu(N)$. При этом выражение

$$C_{(r,\,x)}(N) := \left|\mu(N)^\gamma - \sum_{w \in N}\mu(w)^\gamma\right| \frac{c(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^\gamma\right|} \quad (2)$$

дает затраты оптимального (r, x)-однородного дерева над множеством исполнителей N и, одновременно, является *нижней оценкой* затрат оптимальной иерархии.

В работе [22] было доказано, что в большинстве важных с практической точки зрения случаев нижняя оценка (2) хорошо описывает затраты оптимального дерева при большом числе исполнителей, и, кроме того, с ее помощью можно построить субоптимальные деревья, затраты которых будут лишь ненамного превышать затраты оптимального дерева.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАТРАТ

Аналитическая формула затрат оптимальной иерархии, подобная выражению (2), чрезвычайно облегчает анализ модели, позволяя дать ответ на вопрос о том, как значения параметров сказываются на виде и затратах оптимальной иерархии. В то же время понятно, что однородные функции затрат позволяют описывать далеко не все возникающие на практике задачи, и, даже оставаясь в рамках парадигмы секционных функций затрат менеджера, можно рассматривать и другие модели оптимальных иерархий.

Наиболее простым обобщением являются функции затрат, представимые в виде суммы однородных функций с различными степенями однородности. Рассмотрим функцию затрат[6] $c(m, H)$ менеджера m в иерархии H, представимую в виде суммы однородных функций со степенями однородности $\gamma_1, ..., \gamma_A$, т. е.

$$c(m, H) = \sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) =$$
$$= \sum_{a=1}^{A} \mu^{\gamma_a} c_a(y_1, ..., y_k). \quad (3)$$

Для такой функции затрат однородная иерархия в общем случае не будет оптимальной. Это связано с тем, что слагаемые функции затрат растут с разной скоростью с увеличением размера управляемой менеджером группы исполнителей. Соответственно, на нижних уровнях иерархии больший относительный вес имеют одни слагаемые, а на верхних — другие, что приводит к изменению оптимальной нормы управляемости с уровнем. В то же время, если для всех менеджеров организации соотношение весов, с которыми отдельные слагаемые входят в их затраты, меняется не очень сильно, оптимальная норма управляемости может оставаться неизменной для всех менеджеров[7].

---

[6] Заметим, что подобными функциями затрат, например, можно с большой точностью приблизить неоднородные функции затрат вида $c(\mu_1, ..., \mu_k) = \xi(\mu)\psi(y_1, ..., y_k)$.

[7] Это можно обеспечить в не очень больших организациях в тех случаях, когда степени однородности слагаемых функции затрат достаточно близки.

В этом случае оптимальная иерархия будет однородным деревом. Найдя параметры этого однородного дерева — норму управляемости r и пропорцию $(x_1, ..., x_r)$ — легко вычислить его затраты по формуле, аналогичной выражению (2):

$$C_{(r, x)}(N) := \sum_{a=1}^{A} \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}. \quad (4)$$

Основной результат статьи (см. далее теорему) формализует условия оптимальности однородной иерархии для функций затрат вида (3). Введем вспомогательное определение.

Определение 5. Пусть задано множество исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ с мерами $\mu(1), ..., \mu(n)$ и пусть $s_1, ..., s_k$ — некоторый непустой набор не менее чем из двух попарно непересекающихся групп исполнителей множества N. Множество исполнителей $N' = \{1, ..., k\}$ с мерами $\mu_i := \mu(s_i)$, $i = 1, ..., k$, назовем *производным* множеством исполнителей к множеству исполнителей N. ♦

Рассмотрим множество исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ с мерами $\mu(1), ..., \mu(n)$ и функцию затрат, представимую в виде суммы $\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k)$ однородных функций со степенями однородности $\gamma_1, ..., \gamma_A$, отличными от единицы[8].

Теорема. *Пусть найдутся такие нормы управляемости* $r \in \{2, 3, ...\}$ *и пропорция* $x = (x_1, ..., x_r) \in D_r$, *что для любого производного (к множеству* N*) множества* N' *из* k *исполнителей с мерами* $\mu_1, ..., \mu_k$ *затраты* (r, x)*-однородного дерева* (4) *не превышают затрат веерной иерархии*[9], *т. е.*

$$\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) \geqslant C_{(r, x)}(N'). \quad (5)$$

Тогда затраты оптимальной древовидной иерархии, надстроенной над множеством исполнителей N, *будут не меньше* $C_{(r, x)}(N)$. ♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

При выполнении условий теоремы формула (4) дает нижнюю оценку затрат оптимальной иерархии. Можно показать, что во многих случаях эта оценка имеет хорошее качество, т. е. близка к затратам оптимальной иерархии. Так, в работе [22] для однородных функций затрат были разработаны два алгоритма построения *субоптимальных иерархий*[10].

Первый алгоритм применяется, когда степени однородности функции затрат не меньше единицы. Субоптимальная иерархия при этом строится «сверху вниз» так, чтобы ее верхняя часть была максимально похожей на однородное дерево (такая иерархия в работе [22] называется *TD-деревом*). Доказывается, что TD-дерево субоптимально, когда все компоненты пропорции наилучшего однородного дерева строго положительны.

Второй алгоритм работает для степеней однородности из отрезка [0, 1]. В этом случае важно следить, чтобы нижняя часть иерархии была по возможности более однородной. В результате получается так называемое *BU-дерево*. Оно субоптимально, когда все исполнители имеют одинаковые меры, а оптимальная пропорция *симметрична*[11], т. е. $x = (1/r, ..., 1/r)$.

При этом построенные субоптимальные иерархии зависят только от *нормы управляемости и пропорции* наилучшего однородного дерева, к которому они должны были стремиться, но не зависят от степени однородности функции затрат. Это позволяет применять эти же алгоритмы и для функций затрат, представимых в виде суммы однородных функций.

Так, TD-дерево субоптимально, когда степени однородности всех слагаемых функции затрат не меньше единицы, а BU-дерево — когда все они принадлежат отрезку[12] [0, 1].

Чтобы сделать теорему удобным инструментом поиска оптимальных иерархий, необходимо преодолеть две сложности. Прежде всего, прямая проверка условий теоремы требует перебора огромно-

---

[8] Ограничение отличности от единицы степеней однородности слагаемых функции затрат не является принципиальным и необходимо лишь для компактности формул. Аналогичные результаты будут верны и для случая, когда в сумме присутствует слагаемое со степенью однородности единица.

[9] *Веерной* называется иерархия с единственным менеджером. Затраты веерной иерархии над множеством исполнителей $N = \{1, ..., n\}$ с мерами $\mu(1), ..., \mu(n)$ равны $\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu(1), ..., \mu(n))$.

[10] Имеются в виду иерархии с затратами, ненамного превышающими их нижнюю оценку. Более строго, субоптимальной в работе [22] называется иерархия, отношение затрат которой к нижней оценке (4) стремится к единице с ростом числа исполнителей во множестве N.

[11] В обоих случаях субоптимальность доказана для неотрицательных функций затрат, удовлетворяющих необременительным условиям ограниченности.

[12] Построение субоптимальных иерархий несколько сложнее, когда часть слагаемых функции затрат имеет степень однородности меньше, а часть — больше единицы. TD-иерархия представляется здесь более перспективной. Дело в том, что слагаемые с большей степенью однородности имеют бóльшую скорость роста при росте числа исполнителей, «съедая», тем самым, слагаемые с меньшей степенью однородности.

го числа множеств исполнителей, производных к множеству исполнителей N. Далее, теорема не дает никаких указаний по поводу поиска параметров r и x наилучшего однородного дерева.

Разрешим первую сложность. Проверка условия (5) эквивалентна проверке неотрицательности минимума функции $\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) - C_{(r,x)}(N')$ по всем производным множествам исполнителей N'. Для любого N' из формулировки теоремы 1 выполнены неравенства

$$k \leqslant n,\ \mu_1 + ... + \mu_k \leqslant \mu(N), \quad \mu_i \geqslant \mu_{\min}(N), \\ i = 1, ..., k. \qquad (6)$$

Поэтому можно утверждать, что если неотрицателен минимум функции

$$\sum_{a=1}^{A}\left\{c_a(\mu_1, ..., \mu_k) - \left|\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i\right)^{\gamma_a} - \sum_{i=1}^{k}\mu_i^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{k} x_i^{\gamma_a}\right|}\right\} \qquad (7)$$

по всем натуральным k и действительным $\mu_1, ..., \mu_k$, удовлетворяющим неравенству (6), то неравенство (5) верно для любого производного к N множества исполнителей.

Сделаем в выражении (7) замену переменных — обозначим $\mu := \mu_1 + ... + \mu_k$, $y_i = \mu_i/\mu$, $i = 1, ..., k$:

$$\sum_{a=1}^{A}\mu^{\gamma_a}\left\{c_a(y_1, ..., y_k) - \left|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}\right\}. \qquad (8)$$

Из неравенств (6) следуют условия на новые переменные:

$$k = 2, ..., n, \quad \mu \in [k\mu_{\min}(N), \mu(N)], \\ (y_1, ..., y_k) \in D_k(\mu_{\min}(N)/\mu). \qquad (9)$$

Тогда для проверки условий теоремы достаточно проверить неотрицательность минимума функции (8) по всем k, μ, $y = (y_1, ..., y_k)$, удовлетворяющим условиям (9), что заменяет перебор производных множеств исполнителей решением одной задачи смешанной оптимизации.

В свою очередь, задача минимизации (8) при условиях (9) существенно упрощается, когда удается гарантировать симметричность наилучшего однородного дерева (т. е. когда все компоненты оптимальной пропорции равны между собой, $x_i = 1/r$, $i = 1, ..., r$). Одно из возможных условий симметричности описывается далее.

Определение 6. Однородную секционную функцию затрат $f(\cdot)$ назовем *выпуклой на симплексе*, если для всех $k = 2, 3, ...$ функция $f(\cdot)$ выпукла на симплексе D_k. ♦

Лемма 1. Пусть все слагаемые $c_a(\cdot)$ функции затрат менеджера неотрицательны и выпуклы на симплексе и условия теоремы выполнены для некоторой нормы управляемости r и пропорции x. Тогда теорема верна и для симметричной пропорции $x' = (1/r, ..., 1/r)$. ♦

Лемма 2. Пусть все слагаемые $c_a(\cdot)$ функции затрат менеджера неотрицательны и выпуклы на симплексе. Тогда минимум (8) достигается при $y_1 = ..., y_k = 1/k$. ♦

Доказательства лемм приведены в Приложении.

Лемма 1 говорит, что достаточно ограничиться симметричными однородными деревьями, а лемма 2 — что можно рассматривать только производные множества, в которых меры всех исполнителей одинаковы. Заметим, что для выпуклых на симплексе функций затрат упрощается и поиск параметров наилучшего однородного дерева — согласно лемме 1 оптимальная пропорция x всегда симметрична. Норма же управляемости r ищется перебором — для проверки условий теоремы 1 для каждого $r = 2, ..., n$ проверяется неотрицательность

$$\sum_{a=1}^{A}\mu^{\gamma_a}\left\{c_a(1/k, ..., 1/k) - \right. \\ \left. - \left|1 - k^{1-\gamma_a}\right| \frac{c_a(1/r, ..., 1/r)}{\left|1 - r^{1-\gamma_a}\right|}\right\} \qquad (10)$$

для всех $k = 2, ..., n$ и $\mu \in [k\mu_{\min}(N); \mu(N)]$. Эта проверка может осуществляться численно, как, например, в § 4.

Если слагаемые функции затрат невыпуклы на симплексе, напрямую применять леммы 1 и 2 нельзя, однако в этом случае задача все равно сводится к доказательству симметричности наилучшего однородного дерева[13] и проверке неотрицательности выражения (10) для всех r, $k = 2, ..., n$, $\mu \in [k\mu_{\min}(N); \mu(N)]$. Иногда при этом удается воспользоваться результатами исследования однородных функций затрат [20].

---

[13] Прежде всего, результаты исследования однородных функций затрат [20] показывают, что наилучшее дерево в большинстве интересных с практической точки зрения случаев симметрично. Далее, сложно представить себе асимметричный случай, при котором пропорция наилучшего однородного дерева не зависела бы существенно от соотношения весов слагаемых функций затрат, а для выполнения условий теоремы необходимо гарантировать постоянство пропорции для всевозможных производных множеств исполнителей, а следовательно, для широкого диапазона этих весов.

4. ПРИМЕР ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИИ ЗАТРАТ

Проиллюстрируем описанные выше результаты на относительно простом примере. Рассмотрим организацию из $n = 96$ исполнителей, мера каждого из которых равна единице. Будем считать, что затраты на содержание менеджера складываются из «оклада» $c_1(\mu_1, ..., \mu_k) = B_1(\mu_1 + ... + \mu_k)^{\gamma_1}k(k - 1)$ и «премии» $c_2(\mu_1, ..., \mu_k) = B_2(\mu_1 + ... + \mu_k)^{\gamma_2}$, где B_1 и B_2 — размерные множители. Сумма оклада зависит от суммарного размера $\mu_1 + ... + \mu_k$ подчиненной менеджеру группы и от условий работы, определяемых числом непосредственных подчиненных k, в то время как премия зависит только от размера группы.

Положим степени однородности $\gamma_1 = 0{,}15$, $\gamma_2 = 0{,}30$, а размерные множители равными $B_1 = 3500$ руб., $B_2 = 25\,900$ руб. При таких значениях параметров затраты на содержание менеджера, управляющего подразделением из десяти исполнителей и имеющего троих непосредственных подчиненных, будут равны примерно 81 000 руб., а затраты на содержание руководителя подразделения из ста исполнителей, имеющего пятерых непосредственных подчиненных — уже приблизительно 243 000 руб.

Слагаемые функции затрат не зависят от пропорции, следовательно, они выпуклы (нестрого) на симплексе, и для рассматриваемой функции затрат применимы леммы 1 и 2. Тогда, по формуле (10), задача сводится к поиску нормы управляемости $r = 2, 3, ...$, при которой функция

$$f(r, k, \mu) := 3500 \cdot \mu^{0,15}\left\{k(k - 1) - r(r - 1)\frac{|k^{0,85} - 1|}{|r^{0,85} - 1|}\right\} + 25\,900 \cdot \mu^{0,30}\left\{1 - \frac{|k^{0,70} - 1|}{|r^{0,70} - 1|}\right\}$$

неотрицательна для всех $k = 2, ..., 96$ и $\mu \in [k; 96]$.

Легко проверить, что функция $f(r, k, \mu)$ выпукла по k и равна нулю при $k = r$. Из этого следует, что для наилучшей нормы управляемости r выполняется неравенство $f(r, r + 1, \mu) \geqslant 0$ для всех $\mu \in [r + 1; 96]$ и неравенство $f(r, r - 1, \mu) \geqslant 0$ для всех $\mu \in [r - 1; 96]$ (при $r = 2$ выполнение последнего неравенства не требуется).

Эти неравенства легко проверяются численно. Построив графики $f(r, r + 1, \mu)$ и $f(r, r - 1, \mu)$ как функций μ при различных нормах управляемости r, легко показать, что эти функции неотрицательны при $r = 4$ на соответствующих диапазонах изменения μ. Значит, каждый менеджер в оптимальной иерархии должен по возможности иметь четырех непосредственных подчиненных (в силу симметричности наилучшего однородного дерева эти подчиненные должны управлять группами исполнителей по возможности одинакового размера). По формуле (5), затраты оптимальной иерархии не будут меньше чем $C_L(N) \approx 3210$ тыс. руб.

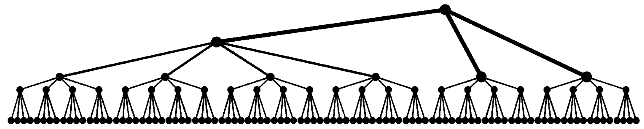

Рис. 2. Субоптимальная иерархия над множеством из 96-ти исполнителей

С помощью описанных в работе [22] алгоритмов строится субоптимальная иерархия (рис. 2). Она состоит их 32-х менеджеров. Легко вычислить суммарные затраты на содержание каждого менеджера. Так, сумма оклада и премии менеджеров нижнего уровня равна 90 965 руб., топ-менеджера — 143 500 руб. Суммарные затраты на содержание всей иерархии — 3 234 202 руб., что менее чем на 1 % превышает их нижнюю оценку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована задача поиска оптимальной иерархии управления для неоднородных функций затрат менеджера. Ранее эта задача была решена для однородных функций затрат, в частности, показано, что оптимальна однородная иерархия (в которой все менеджеры имеют одинаковое число непосредственных подчиненных и делят подчиненное подразделение между ними на части в одинаковой пропорции) [20—22]. Затраты однородной иерархии легко вычисляются по удобной формуле, что позволяет в ряде случаев решать задачу об оптимальной иерархии аналитически.

В общем случае для неоднородных функций затрат однородные иерархии уже не будут оптимальными, однако доказанная в настоящей статье теорема выделяет условия, при которых оптимальность однородных иерархий сохраняется. Для этого достаточно, чтобы функция затрат менеджера была представима в виде суммы однородных функций и для каждого производного множества исполнителей наилучшая однородная иерархия имела одинаковые параметры — норму управляемости и пропорцию.

В случае невыполнения условий теоремы вопрос о виде оптимальной иерархии остается открытым. Например, для функции затрат, рассмотренной в § 4, условия теоремы не выполняются уже для организаций, состоящих из 178-ми исполнителей. Однако в этом случае можно рассуждать следующим образом.

В любой иерархии, управляющей множеством из 178-ми исполнителей, только топ-менеджер управляет группой более чем из 177-ми исполнителей. Для групп, управляемых всеми остальными менеджерами, условия теоремы выполняются. Следовательно, в оптимальной иерархии каждый менеджер (кроме, может быть, топ-менеджера) будет управлять по возможности однородным поддеревом с нормой управляемости четыре. Пусть в оптимальной иерархии H топ-менеджер имеет k непосредственных подчиненных, управляющих группами из n_1, ..., n_k исполнителей соответственно. Тогда затраты $C(H)$ иерархии H не превышают суммы затрат на содержание топ-менеджера и вычисляемых по формуле (5) нижних оценок затрат всех поддеревьев, управляемых его непосредственными подчиненными:

$$C(H) \geqslant 3500 \cdot n^{0,15}k(k-1) + 25\,900 \cdot n^{0,3} + \\ + \sum_{i=1}^{k}\left[(n_i - n_i^{0,15})\frac{3500 \cdot 12}{4^{0,85}-1} + (n_i - n_i^{0,15})\frac{25900}{4^{0,7}-1}\right].$$

Минимум правой части неравенства достигается при распределении исполнителей поровну между непосредственными подчиненными топ-менеджера, т. е. при $n_i = n/k$ и при норме управляемости $k = 5$, т. е. топ-менеджер оптимальной организации со 178-ю исполнителями должен по возможности иметь пятерых непосредственных подчиненных.

Дальнейшее расширение множества исполнителей в рамках описанной логики затруднительно, но этот небольшой выход за рамки условий теоремы 1 позволяет кое-что сказать о виде оптимальной иерархии, когда та неоднородна, например, понять тенденцию изменения нормы управляемости менеджера с ростом его уровня (так, в рассматриваемом примере норма управляемости с ростом уровня возрастает).

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Доказательства формальных результатов

Доказательство теоремы. Для доказательства воспользуемся индукцией по числу исполнителей во множестве N. Пусть множество N состоит из единственного исполнителя. По формуле (4) затраты любой однородной иерархии над таким множеством исполнителей равны нулю, что совпадает с затратами единственного возможного в этой ситуации «дерева[14]», т. е. для таких множеств теорема верна.

Предположим, что теорема верна для любого множества исполнителей, состоящего менее чем из n исполнителей. Докажем, что оно верно и для любого множества N, состоящего из n исполнителей с некоторыми мерами $\mu(1)$, ..., $\mu(n)$.

Пусть в некотором дереве H, надстроенным над множеством исполнителей N, k непосредственных подчиненных топ-менеджера управляют группами исполнителей s_1, ..., s_k. Затраты $C(H)$ этого дерева складываются из затрат топ-менеджера $c(s_1, ..., s_k)$ и затрат $C(H_1)$, ..., $C(H_k)$ поддеревьев H_1, ..., H_k, $k \geqslant 2$, которыми управляют его непосредственные подчиненные (поддерево может состоять из единственного исполнителя, тогда его затраты равны нулю), т. е. $C(H) = c(s_1, ..., s_k) + C(H_1) + ... + C(H_k)$.

Любое множество исполнителей, производное к множеству s_i, является производным и к множеству N. Поэтому условия теоремы выполнены для множеств исполнителей s_1, ..., s_k. Поскольку группы s_1, ..., s_k содержат менее n исполнителей, по индуктивному предположению утверждение для них верно и, следовательно, затраты поддеревьев H_1, ..., H_k не меньше, чем $C_{(r,x)}(s_1)$, ..., $C_{(r,x)}(s_k)$ соответственно. Следовательно,

$$C(H) \geqslant c(s_1, ..., s_k) + C_{(r,\,x)}(s_1) + ... + C_{(r,\,x)}(s_k).$$

Отсюда, по формуле (4),

$$C(H) \geqslant \sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) + \\ + \sum_{i=1}^{k}\sum_{a=1}^{A}\left|\mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in s_i}\mu(w)^{\gamma_a}\right|\frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}, \qquad (\text{П}1)$$

где для краткости через μ_1, ..., μ_k обозначены меры групп s_1, ..., s_k.

Воспользовавшись тем, что для любого фиксированного γ_a все k выражений вида $\mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in s_i}\mu(w)^{\gamma_a}$, $i = 1$, ..., k, имеют одинаковый знак (это частный случай неравенства Минковского), поменяем порядок суммирования в выражении (П1). Получим, что

$$C(H) \geqslant \sum_{a=1}^{A}\left\{c_a(\mu_1, ..., \mu_k) + \right. \\ \left. + \left|\sum_{i=1}^{k}\mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in N}\mu(w)^{\gamma_a}\right|\frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}\right\}.$$

[14] У каждого менеджера по определению не менее двух подчиненных, поэтому в древовидной иерархии над единственным исполнителем нет менеджеров. Следовательно, ее затраты равны нулю.

В правой части добавим и отнимем $C_{(r,x)}(N)$. В соответствии с формулой (4) неравенство примет вид:

$$C(H) \geqslant C_{(r,\,x)}(N) + \\ + \sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) + \sum_{a=1}^{A} \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|} \times \\ \times \left(\left|\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| - \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right|\right). \quad (\text{П}2)$$

С помощью неравенства Минковского легко проверить, что для любого γ_a выражения $\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in s_i} \mu(w)^{\gamma_a}$ и $\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in s_i} \mu(w)^{\gamma_a}$ имеют одинаковый знак, причем

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| \leqslant \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right|.$$

Следовательно, независимо от значения γ_a, справедливо тождество

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| - \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| \equiv \\ \equiv -\left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a}\right|.$$

Поэтому неравенство (П2) можно преобразовать к следующему виду:

$$C(H) \geqslant C_{(r,\,x)}(N) + \sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) - \\ - \sum_{a=1}^{A} \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}. \quad (\text{П}3)$$

Заметим, что $\sum_{a=1}^{A} \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|} =$ $= C_{(r,\,x)}(N')$ для множества исполнителей $N' = \{1, ..., k\}$ с мерами $\mu_1, ..., \mu_k$. Это множество является производным к множеству N, поэтому для него выполнено условие (5) теоремы. Это значит, что $\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) \geqslant$ $\geqslant C_{(r,\,x)}(N')$ и, из неравенства (П3), $C(H) \geqslant C_{(r,\,x)}(N)$, что и требовалось доказать. ♦

Доказательство леммы 1. Каждое слагаемое функции затрат симметрично по своим аргументам. Тогда, в силу выпуклости этой функции на симплексе, для любых $a = 1, ..., A$, $r = 2, 3, ...$ и $(x_1, ..., x_r) \in D_r$ верно неравенство $c_a(x_1, ..., x_r) \geqslant c_a(1/r, ..., 1/r)$. Легко также проверить, что для любого γ_a функция $1/\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|$ выпукла на симплексе и симметрична и, следовательно, функция $\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|$ достигает своего максимума при симметричной пропорции. В силу неотрицательности функций затрат, минимум частного $c_a(x_1, ..., x_r)/\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|$ также достигается при симметричной пропорции:

$$\frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|} \geqslant \frac{c_a(1/r, ..., 1/r)}{\left|1 - r^{1-\gamma_a}\right|}. \quad (\text{П}4)$$

Из выражений (4) и (П4) следует, что затраты симметричного однородного дерева не превышают затрат (r, x)-однородного дерева:

$$C_{(r,\,x)}(N) \geqslant \sum_{a=1}^{A} \left|\mu(N)^{\gamma_a} - \sum_{w \in N} \mu(w)^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(1/r, ..., 1/r)}{\left|1 - r^{1-\gamma_a}\right|} = \\ = C_{(r,\,x')}(N), \quad (\text{П}5)$$

где $x' = (1/r, ..., 1/r)$.

По условию леммы, для любого производного множества исполнителей N' с мерами $\mu_1, ..., \mu_k$ верно неравенство $\sum_{a=1}^{A} c_a(\mu_1, ..., \mu_k) \geqslant C(r,x)(N')$. Но, в силу выражения (П5), это неравенство останется верным при замене (r, x)-однородного дерева симметричным однородным r-деревом, что и говорит о выполнении условий теоремы. ♦

Доказательство леммы 2. При доказательстве леммы 1 показано, что для любого $a = 1, ..., A$, $k = 2, 3, ..., y \in D_k$ выполнены неравенства $c_a(y_1, ..., y_k) \geqslant$ $\geqslant c_a(1/k, ..., 1/k)$ и $\left|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\gamma_a}\right| \leqslant \left|1 - k^{1-\gamma_a}\right|$. Тогда, в силу неотрицательности $c_a(\cdot)$, верно и неравенство

$$\sum_{a=1}^{A} \mu^{\gamma_a} \left\{c_a(y_1, ..., y_k) - \left|1 - \sum_{i=1}^{k} y_i^{\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}\right\} \geqslant \\ \geqslant \sum_{a=1}^{A} \mu^{\gamma_a} \left\{c_a(1/k, ..., 1/k) - \left|1 - k^{1-\gamma_a}\right| \frac{c_a(x_1, ..., x_r)}{\left|1 - \sum_{i=1}^{r} x_i^{\gamma_a}\right|}\right\}.$$

Это и говорит о том, что минимум функции (8) достигается при $y_1 = ..., y_k = 1/k$. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simon H.A.* The Compensation of Executives // Sociometry. — 1957. — Vol. 20, N 1. — P. 32—35.
2. *Williamson O.* Hierarchical Control and Optimal Firm Size // The Journal of Political Economy. — 1967. — Vol. 75, N 2. — P. 123—138.
3. *Calvo G.A., Wellisz S.* Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm // The Journal of Political Economy. — 1978. — Vol. 86, N 5. — P. 943—952.
4. *Keren M., Levhari D.* The Internal Organization of the Firm and the Shape of Average Costs // The Bell Journal of Economics. — 1983. — Vol. 14, N 2. — P. 474—486.
5. *Bolton P., Dewatripont M.* The Firm as a Communication Network // The Quarterly Journal of Economics. — 1994. — Vol. 109, N 4. — P. 809—839.
6. *Radner R.* Hierarchy: The Economics of Managing // The Journal of Economic Literature. — 1992. — Vol. 30, N 3 — P. 1382—1415.
7. *Qian Y.* Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy // The Review of Economic Studies. — 1994. — Vol. 61, N 3. — P. 527—544.
8. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. — М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
9. *Овсиевич Б.И.* Модели формирования организационных структур. — Л.: Наука, 1979.
10. *Цвиркун А.Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. — М.: Наука, 1982.
11. *Агиева М.Т., Мальсагов М.Х., Угольницкий Г.А.* Моделирование иерархической структуры управления образованием. — Ростов н/Д: ООО ЦВВР, 2003.
12. *Radner R., van Zandt T.* Real-time decentralized information processing and returns to scale // Economic Theory. — 2001. — N 17 — P. 545—575.
13. *Губко М.В.* Математические модели формирования рациональных организационных иерархий // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 114—139.
14. *Geanakoplos J., Milgrom P.* A Theory of Hierarchies Based on Limited Managerial Attention // The Journal of Japanese and International Economies. — 1991. — Vol. 5(3). — P. 205—225.
15. *Beggs A.W.* Queues and Hierarchies // The Review of Economic Studies. — 2001. — Vol. 68, N 2. — P. 297—322.
16. *Hart O., Moore J.* On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization // The Journal of Political Economy. — 2005. — Vol. 113. — P. 675—702.
17. *Melumad D.N., Mookherjee D., Reichelstein S.* Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts // The RAND Journal of Economics. — 1995. — Vol. 26, N 4. — P. 654—672.
18. *Минцберг Г.* Структура в кулаке: создание эффективной организации. — М.: Питер, 2001.
19. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Оптимальные иерархические структуры. — М.: ИПУ РАН, 2003.
20. *Губко М.В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. — М.: ЛЕНАНД, 2006.
21. *Губко М.В.* Поиск оптимальных организационных иерархий при однородных функциях затрат менеджеров // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 1. — С. 97—113.
22. *Губко М.В.* Алгоритмы построения субоптимальных организационных иерархий // Там же. — 2009. — № 1. — С. 162—180.
23. *Мишин С.П.* Оптимальные иерархии управления в экономических системах. — М.: ПМСОФТ, 2004.
24. *Мишин С.П.* Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 5. — С. 96—119.
25. *Мишин С.П.* Оптимальная норма управляемости для степенной функции затрат // Там же. — 2006. — № 8. — С. 154—168.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Губко Михаил Владимирович — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎/🖹 (495) 334-90-51, ✉ mgoubko@mail.ru.

Содержание сборника "Управление большими системами", вып. 24, http://ubs.mtas.ru/

- ✓ ***Алиев В.С.*** Точное агрегирование информации в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера
- ✓ ***Шмырин А.М., Седых И.А.*** Алгоритмы идентификации и управления функционированием окрестностных систем, полученных на основе сетей Петри
- ✓ ***Ахобадзе А.Г., Краснова С.А.*** Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости
- ✓ ***Епифанов А.С.*** Анализ геометрических образов законов функционирования автоматов
- ✓ ***Воробкалов П.Н., Камаев В.А.*** Оценка качества электронных обучающих систем
- ✓ ***Карташев Е.А., Самков Л.М.*** Онлайновая информационно-аналитическая система мониторинга индикаторов жизнеобеспечения территориальных объектов
- ✓ ***Мазалов В.В., Печников А.А.*** О рейтинге официальных сайтов научных учреждений северо-запада России
- ✓ ***Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.*** Поиск потока в несовместных транспортных сетях
- ✓ ***Денин К.И.*** Математическая модель множественной коррупции в системе управления устойчивым развитием
- ✓ ***Карташов В.Я., Хорошева Т.А.*** Модели механизма и процесса социальной реабилитации (на примере детей "группы риска")
- ✓ ***Новиков Д.А.*** Структура теории управления социально-экономическими системами
- ✓ ***Андриевский Б.Р.*** Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением
- ✓ ***Шаров С.Н.*** Особенности мониторинга земной поверхности космическим аппаратом на геосинхронной и геостационарной орбите
- ✓ ***Сизиков А.П.*** Программный продукт СМОННП (система оптимизации нефтеперерабатывающих и нефтехимических производств)