УДК 35.073.5

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ УСТОЙЧИВОСТИ ФОНДОВОГО РЫНКА И ВЛИЯНИИ НА НИХ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИНВЕСТОРОВ

В.А. Горелик, Т.В. Золотова

Предложены показатели устойчивости и риска для отдельного инвестора и фондового структурированного рынка. Проведено исследование рыночной модели на устойчивость с помощью предложенных показателей. Показано, что инвесторы, придерживаясь различных прогнозов развития фондового рынка, как следствие различной их информированности, и выбирая соответственно разные стратегии (портфели), способствуют тем самым повышению устойчивости данной системы.

Ключевые слова: коллективный риск, коэффициент риска, средняя ковариация, устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен подход к оценке устойчивости сложных систем с использованием понятия коллективного риска. Под коллективным риском понимается непредсказуемость состояния некоторой системы как результат индивидуального поведения ее подсистем, обладающих различной информированностью и различными интересами. В данной статье эти общесистемные аспекты рассматриваются на примере фондового рынка, а именно, исследуется влияние на устойчивость этой системы различной информированности инвесторов и различного отношения их к риску.

Вопросам поведения инвесторов на фондовом рынке и принятия ими решения о составе своих портфелей ценных бумаг посвящена обширная литература (см., например, библиографические списки в работах [2, 3]). Современные исследования посвящены в основном динамическим моделям управления портфелем и использованию производных финансовых инструментов (фьючерсов, опционов и т. д.). Статическая постановка задачи формирования портфеля, впервые сформулированная Г. Марковицем, в принципе, исследована достаточно полно. Однако это относится в первую очередь к индивидуальному поведению инвесторов. Насколько известно авторам, модели их взаимодействия и влияния на устойчивость рынка отсутствуют. В связи с этим возникает идея воспользоваться понятием коллективного риска для оценки устойчивости фондового рынка.

В работах [1, 4, 5] получены оценки риска на фондовом рынке с использованием корреляционных моментов случайных величин доходностей, проведено исследование коллективного риска на фондовом рынке с разными структурными характеристиками и ограничениями инвестиционных портфелей, рассмотрен вопрос оценки устойчивости фондового рынка с использованием понятия энтропии как меры разнообразия поведения инвесторов. В настоящей статье рассмотрен ряд новых вопросов, относящихся к этой области. Предлагаются показатели (меры) риска и устойчивости стратегии отдельного инвестора и фондового рынка в целом, проведено исследование рыночной модели на устойчивость с помощью предложенных показателей.

1. ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДОХОДНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ РАЗНЫХ ИНВЕСТОРОВ

1.1. Случай одинаковой информированности инвесторов

В основе рассматриваемой нами модели фондового рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. При этом известно, что доходности представляют собой взаимосвязанные случайные величины и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация (или корреляционный момент) доходностей. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов

$\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей $\sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}$. Это — объективная информация, доступная исследователю (биржевому аналитику). Под объективной информацией о векторе $\bar{r}$ и матрице σ здесь понимаются значения этих характеристик, полученные исследователем и не зависящие от влияния участников фондового рынка. Инвесторы могут при принятии решений использовать эту объективную информацию или руководствоваться своей собственной, т. е. субъективной информацией. Предположим сначала, что инвесторы основывают свое поведение на единой объективной информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающееся в значении коэффициента в целевой функции, представляющей собой линейную свертку двух критериев: математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей.

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого есть вектор x (портфель инвестиций), компоненты которого x_i — доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты из конечного списка ($i = 1, ..., n$). Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум линейной свертки критериев математического ожидания доходности портфеля и дисперсии доходности портфеля:

$$\max_{x\in X}\left[\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i - \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\right], \qquad (1)$$

где $X = \{x | x_i \geqslant 0,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$, $\alpha > 0$ — весовой коэффициент, определяющий отношение инвестора к риску (коэффициент риска). Заметим, что впервые рассмотревший эту проблему Г. Марковиц [6] не формулировал ее в виде (1), а говорил об эффективных портфелях, а в книге [7] задача поиска оптимального портфеля была поставлена им как задача минимизации разности дисперсии и математического ожидания доходности портфеля (коэффициент риска при дисперсии равен 1). Кроме того, в той же книге рассмотрена задача на максимум доходности при ограничении на дисперсию, а наиболее распространена сейчас задача минимизации дисперсии при ограничении по доходности. Однако любая задача, решением которой является эффективный портфель, эквивалентна задаче (1) (в силу свойств выпуклости она представляет собой необходимые и достаточные условия Парето-оптимальности). Поэтому выбор линейной свертки критериев «математическое ожидание — дисперсия» для нахождения оптимального портфеля не принципиален; любые другие принципы оптимального выбора приводят к одному из эффективных портфелей, соответствующему определенному $\alpha > 0$ в задаче (1) (подробнее об этом см. в работе [8]). Задача выбора оптимального портфеля (1) предполагает отсутствие коротких продаж, которые совершаются путем займа ценных бумаг и затем погашения займа такими же ценными бумагами (в задаче (1) это отражается в наличии условия неотрицательности на компоненты вектора x), безрискового заимствования и кредитования (эти случаи рассмотрены в работе [5]).

Будем называть портфель полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты больше нуля. Решение задачи (1) приведено в работе [9], а именно, состав оптимального полноразмерного портфеля имеет вид

$$x^0(\gamma) = C_0 + C_1\gamma, \qquad (2)$$

где $\gamma = 1/(2\alpha)$, $\gamma \in (0; \infty)$, $e = (1, ..., 1)$, а $C_0 = (C_{01}, ..., C_{0j}, ..., C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, ..., C_{1j}, ..., C_{1n})$ определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}, \quad C_1 = \sigma^{-1}\bar{r} - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e. \qquad (3)$$

Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов, а в качестве коэффициента риска используется γ. Согласно формуле (2), составы оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} инвесторов имеют вид $x^{01} = C_0 + C_1\gamma_1$ и $x^{02} = C_0 + C_1\gamma_2$ соответственно. В работе [5] приведены необходимые и достаточные условия полноразмерности портфеля, а также показано, что ковариация случайных величин доходностей r_{x^1} и r_{x^2} двух произвольных портфелей, имеющих составы x^1 и x^2, вычисляется через составы этих портфелей по формуле

$$\mathrm{cov}(r_{x^1}, r_{x^2}) = x^1\sigma x^2. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \neq 0$, *то ковариация* $\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}})$ *доходностей двух полноразмерных оптимальных портфелей положительна. Если дополнительно ковариационная матрица* σ *строго положительно определена, то ковариация доходностей любых двух оптимальных портфелей положительна.* ♦

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [5].

Как известно, ковариационная матрица σ всегда неотрицательно определена. Далее предполагается, что ковариационная матрица σ строго положительно определена, т. е. $x\sigma x > 0$ для любых действительных значений $x \neq 0$, тогда существует и строго положительно определена обратная матрица σ^{-1}.

Из выражений (2)—(4) следует, что ковариация двух полноразмерных портфелей есть

$$\operatorname{cov}(r_{x^{01}},\ r_{x^{02}}) = x^{01}\sigma x^{02} = (C_0 + C_1\gamma_1)\sigma(C_0 + C_1\gamma_2) = \\ = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\gamma_1\gamma_2 + (C_0\sigma C_1)\gamma_2 + (C_1\sigma C_0)\gamma_1.$$

Учитывая свойства скалярного произведения, имеем

$$C_0\sigma C_1 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\left(\sigma^{-1}\bar r - \frac{e\sigma^{-1}\bar r}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right) =$$

$$= \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\left(\bar r - \frac{e\sigma^{-1}\bar r}{e\sigma^{-1}e}e\right) =$$

$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e}\left(e\sigma^{-1}\bar r - \frac{(e\sigma^{-1}\bar r)(e\sigma^{-1}e)}{e\sigma^{-1}e}\right) = 0. \qquad (5)$$

Так как матрица σ — симметрическая, то $C_0\sigma C_1 = C_1\sigma C_0$ и

$$\operatorname{cov}(r_{x^{01}},\ r_{x^{02}}) = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\gamma_1\gamma_2. \qquad (6)$$

Отметим, что ковариация доходностей двух произвольных портфелей вычисляется с помощью объективной ковариационной матрицы σ, характеризующей рынок, т. е. по формуле (4), независимо от того, какой субъективной информацией пользуются инвесторы при формировании своих портфелей.

1.2. Случай разной информированности инвесторов

Традиционно предполагается, что инвесторы одинаково информированы (например, используют объективную информацию) о ситуации на финансовом рынке и их различное поведение связано с различным отношением к риску (выбор параметра γ). Предположим, что инвесторы обладают различной информированностью (субъективной информацией) о ситуации, складывающейся на финансовом рынке, которая выражается в том, что они по-разному оценивают математические ожидания доходностей финансовых инструментов (пока мы не конкретизируем способ коррекции ими объективной информации). Ковариационная матрица здесь для простоты считается объективной и единой для всех (в дальнейших исследованиях мы планируем отказаться от этого предположения).

Рассмотрим двух инвесторов, оптимальные портфели x^{01} и x^{02} которых определены из решения задачи (1) при различных значениях параметра γ и различных значениях математических ожиданий доходностей. Пусть первый инвестор имеет вектор математических ожиданий доходностей $\bar r^1$, а второй — $\bar r^2$. Составы оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} инвесторов имеют вид $x^{01} = C_0 + C_1^1\gamma_1$ и $x^{02} = C_0 + C_1^2\gamma_2$ соответственно, где C_1^1 и C_1^2 определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e},\quad C_1^1 = \sigma^{-1}\bar r^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar r^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e,$$

$$C_1^2 = \sigma^{-1}\bar r^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar r^2}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e.$$

Теорема 2. *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \neq 0$, *то ковариация* $\operatorname{cov}(r^1_{x^{01}},\ r^2_{x^{02}})$ *двух полноразмерных оптимальных портфелей отрицательна для* $\bar r^1$, $\bar r^2$ и σ, *удовлетворяющих условию*

$$(e\sigma^{-1}\bar r^1)(e\sigma^{-1}\bar r^2) - (\bar r^1\sigma^{-1}\bar r^2)(e\sigma^{-1}e) > 1/\gamma_1\gamma_2. \ \blacklozenge \qquad (7)$$

Доказательство теоремы 2 см. в работе [9]. Условие (7) характеризует степень различия оценок, которая приводит к отрицательной ковариации.

2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ И УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТРАТЕГИИ ИНВЕСТОРА

Рассмотрим одного инвестора, который на основе своей собственной субъективной информации может давать оценки математических ожиданий доходностей финансовых инструментов при различных сценариях развития экономики.

Пусть $\bar r(y)$ — вектор математических ожиданий доходностей финансовых инструментов, зависящий от значения внешних (неконтролируемых) факторов y, описание которых включает в себя указание вида неконтролируемых факторов и информированности о них инвестора (например, законы распределения случайных параметров, область значений неопределенных факторов, схемы передачи информации в системе, процедуры обработки информации). Тогда задача (1) примет вид

$$\max_{x\in X}\left[\sum_{i=1}^{n}\bar r_i(y)x_i - \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j\right], \qquad (8)$$

а состав оптимального полноразмерного портфеля вид

$$x^0(\gamma,\ y) = C_0 + C_1(y)\gamma, \qquad (9)$$

где $C_0 = \dfrac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}$, $C_1(y) = \sigma^{-1}\bar r(y) - \dfrac{e\sigma^{-1}\bar r(y)}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e.$

Согласно выражениям (8) и (9) оптимальное управление инвестора (состав портфеля) зависит теперь не только от отношения инвестора к риску (выбора параметра γ), но и от предполагаемого инвестором сценария развития экономической ситуации, характеризуемой информацией о значениях внешних факторов y (например, цены на нефть, валютного курса, роста ВВП и др.). Для двух сценариев имеем два вектора значений внешних факторов y^1 и y^2 и соответственно две оценки вектора математических ожиданий доходностей $\bar{r}(y^1)$ и $\bar{r}(y^2)$ (примером может служить многофакторная модель [2, *с. 295*]). Тогда составы двух оптимальных полноразмерных портфелей одного инвестора согласно выражению (9) есть $x^0(\gamma, y^1) = C_0 + C_1(y^1)\gamma$ и $x^0(\gamma, y^2) = C_0 + C_1(y^2)\gamma$.

Оценим ковариацию случайных величин доходностей двух разных портфелей одного инвестора, имеющих составы $x(\gamma, y^1)$ и $x(\gamma, y^2)$. По формуле (4)

$$\mathrm{cov}(r_{x(\gamma, y^1)}(y^1),\ r_{x(\gamma, y^2)}(y^2)) = x(\gamma, y^1)\sigma x(\gamma, y^2). \quad (10)$$

Можно считать оптимальное управление $x^0(y)$ (состав портфеля) инвестора устойчивым, если при рассматриваемых сценариях развития ковариация случайных значений доходностей портфелей, определяемая формулой (10), положительна. Отметим, что в случае оценки риска фондового рынка в целом положительная ковариация доходностей портфелей разных инвесторов является фактором неустойчивости рынка [8]. Положительная же ковариация доходностей разных портфелей одного инвестора говорит об устойчивости управления конкретного инвестора, т. е. при рассматриваемых сценариях развития экономической ситуации случайные значения доходностей его портфелей имеют тенденцию меняться в одну и ту же сторону.

Следствие (из теоремы 2). *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \neq 0$, *то ковариация* $\mathrm{cov}(r_{x^0(\gamma, y^1)}(y^1),\ r_{x^0(\gamma, y^2)}(y^2))$ *двух полноразмерных оптимальных портфелей* $x^0(\gamma, y^1)$ *и* $x^0(\gamma, y^2)$ *инвестора положительна для* $\bar{r}(y^1)$, $\bar{r}(y^2)$ *и* σ, *удовлетворяющих условию*

$$(e\sigma^{-1}\bar{r}(y^1))(e\sigma^{-1}\bar{r}(y^2)) - \\ - (\bar{r}(y^1)\sigma^{-1}\bar{r}(y^2))(e\sigma^{-1}e) < (1/\gamma)^2. \ \blacklozenge$$

Доказательство следствия непосредственно вытекает из формулы (7).

3. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЫНКА

3.1. Влияние отношения инвестора к риску на устойчивость рынка

Как вытекает из результатов анализа, доходности оптимальных портфелей при одинаковой информированности имеют положительную корреляцию, причем, чем ближе значения коэффициентов γ инвесторов, т. е. сходно их отношение к риску, тем ближе к единице коэффициенты корреляции доходностей их портфелей. Так как инвесторы не обязаны вести себя на фондовом рынке оптимально (согласно задаче (1)) и использовать одинаковую информацию, то доходности их портфелей могут быть коррелированны как положительно, так и отрицательно. Таким образом, однотипное поведение инвесторов может вызывать большие колебания рынка, а разнотипное гасит колебания рынка, т. е. снижает уровень коллективного риска.

В модели CAPM исследуется коллективное поведение инвесторов в ситуации равновесия, когда спрос равен предложению и цены стабилизируются. К числу основных предположений этой модели относится наличие безрискового актива и, главное, однородных ожиданий инвесторов, т. е. одинаковых оценок ими ожидаемых доходностей, среднеквадратических отклонений и ковариаций доходностей ценных бумаг [2, *с. 259*]. Поэтому в нашем исследовании коллективного поведения инвесторов модель CAPM не применима, а рынок может находиться вне ситуации равновесия. В зависимости от характера переходных процессов (скорости, амплитуды) могут возникнуть значительные колебания рынка, а в поведении инвесторов — известный в теории игр «эффект толпы» (например, массовый переход в кеш), что может привести (как и было недавно) к обвалу. Поэтому положительная корреляция случайных величин доходностей служит одним из существенных факторов неустойчивости. Наличие безрискового актива принципиально картину не меняет [5].

Как известно, систематический (или рыночный) риск фондового рынка определяется предельным значением средней ковариации доходностей финансовых инструментов (см., например, работу [3, *с. 61*, *62*]). Эта величина не зависит от распределения финансовых инструментов (ценных бумаг) по инвестиционным портфелям. На реальном фондовом рынке все финансовые инструменты принадлежат инвесторам, т. е. распределены по портфелям. Такой рынок будем называть структурированным. Поэтому предельное значение средней ковариации ценных бумаг можно считать оценкой риска неструктурированного рынка, т. е. первичного рынка, на котором эмитенты размещают новые выпуски финансовых инструментов.

Мерой (показателем) риска структурированного фондового рынка может служить средняя ковариация доходностей портфелей. Пусть N — общее число портфелей (или инвесторов), присутствующих на рынке. Вычислим дисперсию средней доходности портфелей, т. е. дисперсию величины $r^p_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} r^m$. Имеем

$$Dr^p_{\text{ср}} = \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{N^2}Dr_{x^m} + \sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\frac{1}{N^2}\operatorname{cov}(r_{x^s}, r_{x^m}) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}Dr_{x^m}\right) + \frac{1}{N^2}(N^2-N)\left(\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\frac{1}{N^2-N}\operatorname{cov}(r_{x^s}, r_{x^m})\right) = \frac{1}{N}\bar{\sigma}^2_N + \frac{1}{N^2}(N^2-N)\overline{\operatorname{cov}}_N,$$

где $\bar{\sigma}^2_N = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}Dr_{x^m}$ — средняя дисперсия доходностей портфелей,

$$\overline{\operatorname{cov}}_N = \frac{1}{N^2-N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\operatorname{cov}(r_{x^s}, r_{x^m}) \text{ —} \quad (11)$$

средняя ковариация доходностей портфелей.

Если $\bar{\sigma}^2_N \leqslant A$ и $\overline{\operatorname{cov}}_N \to B$ при $N \to \infty$, то имеем $\bar{\sigma}^2_N/N \to 0$ и $Dr^p_{\text{ср}} \to B$ при $N \to \infty$. Значит, если $B = 0$, то диверсификацией с достаточно большим N значение $Dr^p_{\text{ср}}$ можно сделать сколь угодно малым. Однако при однотипном (оптимальном по Марковицу) поведении инвесторов доходности их портфелей положительно коррелированы, поэтому $B > 0$, и риск структурированного рынка неустраним. При разнотипном поведении доходности портфелей инвесторов могут быть коррелированны отрицательно, что приводит к хеджированию коллективного риска: колебания рынка гасятся, и он возвращается в прежнее положение равновесия. Отрицательное значение средней ковариации доходностей портфелей можно считать условием устойчивости рынка, а положительное значение — условием неустойчивости, причем, чем больше значение средней ковариации, тем менее устойчив фондовый рынок.

Согласно формуле (4) выражение (11) можно записать в виде

$$\overline{\operatorname{cov}}_N = \frac{1}{N^2-N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N} x^s\sigma x^m. \quad (12)$$

Рассмотрим на примере полноразмерных оптимальных портфелей вопрос, как изменится значение средней ковариации, если число портфелей на рынке увеличилось на единицу, т. е. исследуем знак разности $\Delta\overline{\operatorname{cov}} = \overline{\operatorname{cov}}_{N+1} - \overline{\operatorname{cov}}_N$.

Теорема 3. *Если* σ *строго положительно определена, то при добавлении еще одного* $(N+1)$-го *полноразмерного оптимального портфеля имеет место равенство* $\operatorname{sign}(\Delta\overline{\operatorname{cov}}) = \operatorname{sign}(\gamma_{N+1}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m - \frac{1}{(N-1)N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m)$. ♦

Доказательство. Согласно выражению (6) $\operatorname{cov}(r_{x^{0s}}, r_{x^{0m}}) = C_0\sigma C_0 + C_1\sigma C_1\gamma_s\gamma_m$. Так как

$$C_0\sigma C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} = \frac{\langle\sigma^{-1}e, e\rangle}{(e\sigma^{-1}e)^2} = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} > 0,$$

то по формуле (12) $\overline{\operatorname{cov}}_N = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{C_1\sigma C_1}{N^2-N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m$.

При $N+1$ портфелей их средняя ковариация $\overline{\operatorname{cov}}_{N+1} = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{C_1\sigma C_1}{(N+1)^2-(N+1)}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N+1}\gamma_s\gamma_m$. Преобразуем последнее выражение к виду

$$\overline{\operatorname{cov}}_{N+1} = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{C_1\sigma C_1}{(N+1)N}\left(\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m + 2\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m\right) = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{C_1\sigma C_1}{(N+1)N}\frac{N-1}{N+1}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m + \frac{2C_1\sigma C_1}{(N+1)N}\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{C_1\sigma C_1}{(N-1)N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m + \frac{2C_1\sigma C_1}{(N-1)N(N+1)}\left((N-1)\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m - \sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m\right).$$

Значит, $\overline{\operatorname{cov}}_{N+1} = \overline{\operatorname{cov}}_N + \frac{2C_1\sigma C_1}{(N+1)}\left(\gamma_{N+1}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m - \frac{1}{(N-1)N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m\right)$. Учитывая, что $C_1\sigma C_1 > 0$, получаем утверждение теоремы. ♦

Таким образом, для того чтобы при добавлении $(N+1)$-го полноразмерного оптимального портфеля средняя ковариация совокупности портфелей уменьшалась, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент риска $(N+1)$-го портфеля был меньше отношения среднего попарных произведений коэффициентов риска первых N портфелей к среднему их коэффициентов риска.

Следствие 1. *Для того чтобы при добавлении* $(N+1)$-го *полноразмерного оптимального портфеля средняя ковариация совокупности портфелей уменьшалась, достаточно выполнения неравенства* $\gamma_{N+1} < \frac{1}{N-1}\min_{m=1,\dots,N}\sum_{s=1,s\neq m}^{N}\gamma_s$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 имеем $\overline{\text{cov}}_{N+1} < \overline{\text{cov}}_N$, если

$$(N-1)\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m - \sum_{s,\, m=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m < 0$$

$$\text{или}\ \sum_{m=1}^{N}\gamma_m\left((N-1)\gamma_{N+1} - \sum_{s=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s\right) < 0.$$

Для того чтобы последнее соотношение имело место достаточно, чтобы $\forall m = 1, ..., N$ $(N-1)\gamma_{N+1} < \sum_{s=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s$.

Это эквивалентно $\gamma_{N+1} < \dfrac{1}{N-1}\min_{m=1,...,N}\sum_{s=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s$, что и требовалось доказать. ♦

Таким образом, появление оптимального полноразмерного портфеля, коэффициент риска которого $\gamma_{N+1} < \dfrac{1}{N-1}\min_{m=1,...,N}\sum_{s=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s$, уменьшает среднюю ковариацию портфелей и рынок становится более устойчивым.

Следствие 2 из теоремы 3. *Для того чтобы при добавлении* $(N+1)$*-го полноразмерного оптимального портфеля средняя ковариация совокупности портфелей не уменьшалась, достаточно выполнения неравенства* $\gamma_{N+1} \geqslant \dfrac{1}{N-1}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 имеем $\overline{\text{cov}}_{N+1} \geqslant \overline{\text{cov}}_N$, если

$$(N-1)\sum_{m=1}^{N}\gamma_{N+1}\gamma_m - \sum_{s,\, m=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m \geqslant 0,$$

т. е. $(N-1)\gamma_{N+1} \geqslant \sum_{s,\, m=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m / \sum_{m=1}^{N}\gamma_m$ или, используя тождество $\sum_{m=1}^{N}\sum_{s=1,\, s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m = \sum_{m=1}^{N}(\gamma_m)^2 - \sum_{m=1}^{N}(\gamma_m)^2$, имеем $(N-1)\gamma_{N+1} \geqslant \sum_{m=1}^{N}\gamma_m - \sum_{m=1}^{N}(\gamma_m)^2 / \sum_{m=1}^{N}\gamma_m$. Для выполнения последнего неравенства достаточно $\gamma_{N+1} \geqslant \dfrac{1}{N-1}\sum_{m=1}^{N}\gamma_m$, что и требовалось доказать. ♦

Таким образом, если на фондовом рынке появляется оптимальный полноразмерный портфель, коэффициент риска которого γ_{N+1} не меньше смещенной средней величины коэффициентов риска уже присутствующих на рынке портфелей (т. е. риск портфеля относительно высок), то средняя ковариация полноразмерных оптимальных портфелей по крайней мере не уменьшается (т. е. фондовый рынок не становится более устойчивым).

3.2. Влияние оценок доходности рыночного индекса на устойчивость рынка

Рассмотрим в качестве примера широко используемую рыночную модель [2, с. 293], которая предполагает, что случайные величины доходностей финансовых инструментов за данный период времени связаны со случайной доходностью рыночного индекса за данный период соотношением $r_i = a_{iI} + \beta_{iI}r_I + \varepsilon_i$, $i = 1, ..., n$, где α_{iI} — коэффициент смещения, β_{iI} — коэффициент наклона (бета-коэффициент), r_I — случайное значение доходности рыночного индекса I, ε_i — случайная погрешность (белый шум). Тогда математические ожидания доходностей $\bar{r}_i = a_{iI} + \beta_{iI}\bar{r}_I$, $i = 1, ..., n$, где $\bar{r}_I$ — математическое ожидание доходности рыночного индекса I. Оптимальный полноразмерный портфель, определяемый из решения задачи (1), имеет вид

$$x^0(\gamma, \bar{r}_I) = C_0 + C_1\gamma =$$

$$= \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} + \left(\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_I) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_I)}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\gamma,$$

где $a_I = (a_{1I}, ..., a_{nI})$, $\beta_I = (\beta_{1I}, ..., \beta_{nI})$.

Пусть инвесторы руководствуются субъективной информацией относительно величины $\bar{r}_I$. Согласно формуле (6) получаем выражение для ковариации случайных величин доходностей любых двух портфелей $x^0(\gamma_s, \bar{r}_{I,s}) = C_0 + C_{1,s}\gamma_s$ и $x^0(\gamma_m, \bar{r}_{I,m}) = C_0 + C_{1,m}\gamma_m$, $s, m = 1, ..., N$, $s \neq m$ (из выражения (5) нетрудно видеть, что $\forall m$ $C_0\sigma C_{1,m} = 0$):

$$\text{cov}(r_{x^{0s}}, r_{x^{0m}}) = x^0(\gamma_s, \bar{r}_{I,s})\sigma x^0(\gamma_m, \bar{r}_{I,m}) =$$

$$= C_0\sigma C_0 + C_{1,s}\sigma C_{1,m}\gamma_s\gamma_m =$$

$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \left((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,s}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,s})}{e\sigma^{-1}e}e\right) \times$$

$$\times \sigma^{-1}\left((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m})}{e\sigma^{-1}e}e\right)\gamma_s\gamma_m.$$

Тогда согласно формуле (12) средняя ковариация портфелей

$$\overline{\text{cov}}_N = \frac{1}{N^2 - N}\sum_{s,\, m=1,\, s\neq m}^{N} x^0(\gamma_s, \bar{r}_{I,s})\sigma x^0(\gamma_m, \bar{r}_{I,m}) =$$

$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{1}{N^2 - N}\sum_{s,\, m=1,\, s\neq m}^{N}\left((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m}) -\right.$$

$$\left.- \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,s})}{e\sigma^{-1}e}e\right)\sigma^{-1}\left((a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m}) -\right.$$

$$\left.- \frac{e\sigma^{-1}(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m})}{e\sigma^{-1}e}e\right)\gamma_s\gamma_m. \qquad (13)$$

Преобразуем разность $(a_I + \beta_I \bar{r}_{I,s}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I+\beta_I \bar{r}_{I,s})}{e\sigma^{-1}e}e$ к виду $\left(\beta_I - \frac{e\sigma^{-1}\beta_I}{e\sigma^{-1}e}e\right)\bar{r}_{I,s} + \left(a_I - \frac{e\sigma^{-1}a_I}{e\sigma^{-1}e}e\right) = \xi\bar{r}_{I,s} + \eta$. Аналогично для разности $(a_I + \beta_I\bar{r}_{I,m}) - \frac{e\sigma^{-1}(a_I+\beta_I\bar{r}_{I,m})}{e\sigma^{-1}e}e$ имеем $\left(\beta_I - \frac{e\sigma^{-1}\beta_I}{e\sigma^{-1}e}e\right)\bar{r}_{I,m} + \left(a_I - \frac{e\sigma^{-1}a_I}{e\sigma^{-1}e}e\right) = \xi\bar{r}_{I,m} + \eta$. Тогда выражение, стоящее под знаком суммы в равенстве (13), примет вид $(\xi\bar{r}_{I,s} + \eta)\sigma^{-1}(\xi\bar{r}_{I,m} + \eta)\gamma_s\gamma_m$. После преобразования получим выражение $(\xi\bar{r}_{I,s} + \eta)\sigma^{-1}(\xi\bar{r}_{I,m} + \eta)\gamma_s\gamma_m = [(\xi\sigma^{-1}\xi)\bar{r}_{I,s}\bar{r}_{I,m} + \eta\sigma^{-1}\eta + (\xi\sigma^{-1}\eta)(\bar{r}_{I,s} + \bar{r}_{I,m})]\gamma_s\gamma_m]$, с учетом которого равенство (13) примет вид

$$\overline{\mathrm{cov}}_N = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{1}{N^2-N}\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}[(\xi\sigma^{-1}\xi)\bar{r}_{I,s}\bar{r}_{I,m} + \eta\sigma^{-1}\eta + (\xi\sigma^{-1}\eta)(\bar{r}_{I,s} + \bar{r}_{I,m})]\gamma_s\gamma_m = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \frac{1}{N^2-N}\left[(\xi\sigma^{-1}\xi)\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\bar{r}_{I,s}\bar{r}_{I,m}\gamma_s\gamma_m + (\eta\sigma^{-1}\eta)\times\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}\gamma_s\gamma_m + (\xi\sigma^{-1}\eta)\sum_{s,m=1,s\neq m}^{N}(\bar{r}_{I,s} + \bar{r}_{I,m})\gamma_s\gamma_m\right].$$

Так как здесь $e\sigma^{-1}e > 0$, $\gamma_s\gamma_m > 0\ \forall s, m$, $(\xi\sigma^{-1}\xi) \geqslant 0$ и $(\eta\sigma^{-1}\eta) \leqslant 0$, то средняя ковариация $\overline{\mathrm{cov}}_N$ может быть отрицательной только тогда, когда $(\xi\sigma^{-1}\eta) < 0$. Пусть ξ и η не равны нулю. При $\bar{r}_{I,s}$ и $\bar{r}_{I,m} \to \infty$ произведение $\bar{r}_{I,s}\bar{r}_{I,m} \to \infty$ быстрее, чем $\bar{r}_{I,s} + \bar{r}_{I,m}$, и при больших значениях $\bar{r}_{I,s}$ и $\bar{r}_{I,m}$ имеем $\overline{\mathrm{cov}}_N \gg 0$; а при $\bar{r}_{I,s}$ и $\bar{r}_{I,m} \to 0$ имеем $\overline{\mathrm{cov}}_N > 0$. Поэтому при прогнозе быстро растущего рынка поведение инвесторов приводит к высокой вероятности кризисных явлений. При прогнозе падения рынка вероятность кризисных явлений также значительна. При умеренных значениях $\bar{r}_{I,s}$, $\bar{r}_{I,m}$ и условии $(\xi\sigma^{-1}\eta) < 0$ состояние рынка относительно устойчивое.

Нетрудно видеть, что при одинаковых оценках всеми инвесторами значений доходности индекса $\bar{r}_{I,s} = \bar{r}_{I,m} = \bar{r}_{I,s}$, $m = 1, ..., N$, $s \neq m$ имеем $(\xi\bar{r}_{I,s} + \eta)\sigma^{-1}(\xi\bar{r}_{I,m} + \eta)\gamma_s\gamma_m = (\xi\bar{r}_I + \eta)\sigma^{-1}(\xi\bar{r}_I + \eta)\gamma_s\gamma_m \geqslant 0$. Значит, если различное поведение инвесторов связано только лишь с различным отношением к риску (выбор параметра γ), то средняя ковариация случайных значений доходностей портфелей, определяемая соотношением (13), всегда положительная, что согласуется с утверждением теоремы 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показывает, что однотипное поведение инвесторов (оптимизация портфеля при одинаковой информированности) даже при разном отношении к риску служит фактором неустойчивости фондового рынка. С другой стороны, инвесторы, придерживаясь различных прогнозов развития фондового рынка, как следствие различной их информированности, будут выбирать разные стратегии (портфели) и, тем самым, повышать устойчивость всей системы (фондового рынка). При этом средняя ковариация доходностей портфелей инвесторов является приближенным значением дисперсии рыночной доходности и может быть принята в качестве оценки риска структурированного рынка (состоящего из большого числа портфелей). Дальнейшие исследования мы связываем с рассмотрением вопросов коллективного риска и устойчивости фондового рынка при использовании других моделей оценки математических ожиданий и ковариаций доходностей финансовых инструментов, а также иных моделей формирования инвестиционных портфелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Модели оценки коллективного и системного риска. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2011. — 163 с.
2. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 2004. — Т. XII. — 1028 с.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: ФАЗИС, 1998. — 512 с.
4. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Оценка коллективного риска на фондовом рынке // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов / ВЦ РАН. — М., 2010. — С. 55—65.
5. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* О некоторых обобщениях результатов исследования корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов / ВЦ РАН. — М., 2012. — С. 40—52.
6. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — N 7. — P. 77—91.
7. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. — N.-Y.: Wiley, 1959. — 344 c.
8. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Оценка корреляции доходности инвестиционных портфелей и устойчивость фондового рынка // Государственный университет Минфина России. Финансовый журнал. — 2012. — № 3. — С. 43—52.
9. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. — 2011. — № 3. — С. 36—42.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Виктор Александрович Горелик — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, ☎ (499) 135-62-04, ✉ vgor16@mail.ru,

Татьяна Валерьяновна Золотова — д-р физ.-мат. наук, проф., Финансовый университет при Правительстве РФ, ☎ (499) 277-21-02, ✉ tgold11@mail.ru.