УДК 35.073.5

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИИ ДОХОДНОСТЕЙ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

В.А. Горелик, Т.В. Золотова

Статья посвящена вычислению корреляционных моментов оптимальных портфелей, являющихся решением задачи максимизации линейной свертки критериев математического ожидания и дисперсии. Доказано, что при одинаковой информированности инвесторов оптимальные портфели, соответствующие любым различным значениям коэффициентов риска, положительно коррелированны. Получены условия отрицательной коррелированности портфелей инвесторов с различными оценками доходностей входящих в них финансовых инструментов.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, математическое ожидание, дисперсия, коэффициент корреляции, коэффициент риска.

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели управления риском в различных сферах деятельности представлены в работах многих авторов. В работе [1] изложен ряд известных и новых результатов в этой области. Одной из наиболее известных задач управления в условиях риска является двухкритериальная задача максимизации математического ожидания доходности и минимизации ее дисперсии, для которой метод нахождения любого Парето-оптимального решения сводится к максимизации разности этих величин с соответствующими значениями весовых коэффициентов, отражающих отношение инвестора к риску [2]. Получающийся портфель, как правило, диверсифицирован, т. е. состоит из множества компонентов (проектов, заказов, кредитов, ценных бумаг), причем хеджирование риска происходит благодаря отрицательной коррелированности доходностей входящих в него финансовых инструментов. Интересен вопрос, как при этом коррелированы случайные величины доходностей портфелей инвесторов с разными коэффициентами риска. Задачи оценки корреляции доходностей различных портфелей ранее не рассматривались, им и посвящено данное исследование.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ ПРИ УСЛОВИИ ОДИНАКОВОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИНВЕСТОРОВ О ВНЕШНИХ ФАКТОРАХ

Одной из наиболее известных моделей хеджирования несистематического риска на финансовом рынке, связанного с поведением конкретного вида финансовых инструментов, является модель «математическое ожидание — дисперсия», восходящая к Г. Марковицу [3]. В основе этой модели рынка лежит предположение, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i (r от слова *return* — доход или доходность) финансовых инструментов на фондовом рынке. Практически на основании статистических данных за T предшествующих периодов имеются оценки математических ожиданий $\bar{r}_i$ и корреляционных моментов σ_{ij} случайных величин r_i доходностей финансовых инструментов, i, j = 1,..., n. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (r_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Это — объективная информация, доступная исследователю (биржевому аналитику). Инвесторы могут при принятии решений использовать эту объективную информацию или руководствоваться своей собственной субъективной информацией. В данном параграфе предполагается, что инвесторы основывают свое поведение на единой объективной информации. Различие между ними заключается в отношении к риску, выражающееся в значении коэффициента в целевой функции, представляющей собой линейную свертку двух критериев: математического ожидания и дисперсии случайных доходностей портфелей.

Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого есть вектор x (портфель инвестиций), компоненты которого x_i — доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты или проекты из конечного списка, $i = 1, ..., n$. Определим оптимальный портфель как решение задачи на экстремум линейной свертки двух критериев «математическое ожидание — дисперсия»:

$$\max_{x \in X}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - (1-\alpha) \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\right], \qquad (1)$$

где $X = \left\{\{x \mid x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$, $\alpha \in (0; 1)$ — весовой коэффициент, определяющий важности критериев (коэффициент риска). Как известно [4], ковариационная матрица σ неотрицательно определена, т. е. $\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \geq 0$ для любых действительных значений x.

Будем называть портфель полноразмерным, если у составляющего его вектора x все компоненты отличны от нуля. Далее нам понадобится формула для определения полноразмерного оптимального портфеля инвестора.

Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - (1-\alpha) \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Условия оптимальности полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha \bar{r}_i - 2(1-\alpha) \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j^0 - \lambda = 0,$$

$$i = 1, ..., n, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^0 = 1. \qquad (2)$$

Представим систему (2) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j^0 + \frac{\lambda}{2(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \bar{r}_i,$$

$$i = 1, ..., n, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j^0 = 1. \qquad (3)$$

Система (3) эквивалентна матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \\ \dfrac{\lambda}{2(1-\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha \bar{r}_1}{2(1-\alpha)} \\ \dots \\ \dfrac{\alpha \bar{r}_n}{2(1-\alpha)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_n)$, $\beta = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)}$, $\beta \in (0; \infty)$. Тогда система (3) примет вид

$$\sigma x^0 + \frac{\lambda}{2(1-\alpha)} e = \beta \bar{r}, \quad x^0 e = 1. \qquad (4)$$

Если матрица σ невырождена, то, выразив из первого уравнения системы (4) вектор $x^0 = \beta\sigma^{-1}\left(\bar{r} - \dfrac{\lambda}{\alpha} e\right)$ и подставив его во второе уравнение, найдем множитель Лагранжа $\lambda = \alpha \dfrac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e} - \dfrac{\alpha}{\beta(e\sigma^{-1}e)}$. Подставим найденное значение λ в выражение для x^0: $x^0 = \beta\sigma^{-1}\bar{r} - \dfrac{\lambda\beta}{\alpha}\sigma^{-1}e = \beta\sigma^{-1}\bar{r} - \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\alpha\dfrac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e} - \dfrac{\alpha}{\beta(e\sigma^{-1}e)}\right)\sigma^{-1}e$. После приведения подобных членов получаем, что оптимальный состав полноразмерного портфеля при фиксированном параметре α (или β) вычисляется по формуле

$$x^0(\beta) = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} + \left(\sigma^{-1}\bar{r} - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\beta.$$

Таким образом, состав полноразмерного оптимального портфеля можно представить в виде

$$x^0(\beta) = C_0 + C_1\beta, \qquad (5)$$

где $C_0 = (C_{01}, ..., C_{0j}, ..., C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, ..., C_{1j}, ..., C_{1n})$ определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}, \quad C_1 = \sigma^{-1}\bar{r} - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e. \qquad (6)$$

Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

Доходность любого портфеля x есть случайная величина вида $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Вычислим корреляционные моменты (ковариации) доходностей оптимальных портфелей двух инвесторов с различным отношением к риску, выражающимся в различных значениях коэффициентов α (как говорилось ранее, здесь вектор математических ожиданий доходностей $\bar{r} = (r_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационная матрица σ — единые для всех инвесторов).

Сначала вычислим ковариацию $\mathrm{cov}(r_{x^1}, r_{x^2})$ доходностей двух произвольных портфелей, имеющих составы x^1 и x^2. Здесь r_x — доходность портфеля, состав которого x, принимающая случайные значения. Пусть M означает математическое ожидание случайной величины, $\bar{r}_x$ — ожидаемая доходность портфеля. По определению ковариации, учитывая представления случайных величин в едином n-мерном пространстве, получаем

$$\mathrm{cov}(r_{x^1}, r_{x^2}) = M[(r_{x^1} - \bar{r}_{x^1})(r_{x^2} - \bar{r}_{x^2})] =$$

$$= M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i^1 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i^1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i^2\right)\right] =$$

$$= M\left[\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i) x_i^1 \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i) x_i^2\right] =$$

$$= M\left[\sum_{i,j=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j) x_i^1 x_j^2\right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} M\left[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] x_i^1 x_j^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i^1 x_i^2 .$$

Таким образом, ковариация случайных величин доходностей двух произвольных портфелей вычисляется через составы этих портфелей по формуле

$$\mathrm{cov}(r_{x^1}, r_{x^2}) = x^1 \sigma x^2. \qquad (7)$$

Отметим, что ковариация доходностей двух произвольных портфелей вычисляется с использованием объективной ковариационной матрицы σ, характеризующей рынок, т. е. по формуле (7), независимо от того, какой субъективной информацией пользуются инвесторы при формировании своих портфелей. Для дальнейшего изложения напомним, что ковариационная матрица σ строго положительно определена, если $\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j > 0$ для любых действительных значений x и обращается в нуль лишь при $x = 0$.

Теорема 1. *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \ne 0$, *то ковариация* $\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}})$ *двух полноразмерных оптимальных портфелей положительна. Если дополнительно ковариационная матрица* σ *строго положительно определена, то ковариация любых двух оптимальных портфелей положительна.* ♦

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Для этого сначала покажем, что если $\det\sigma \ne 0$, то $e\sigma^{-1}e > 0$, $e = (1, ..., 1)$.

Из $\langle \sigma x, x\rangle \ge 0$ следует $\langle \sigma^{-1}x, x\rangle \ge 0$ $\forall x$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения векторов. Действительно, рассмотрим уравнение $\sigma x = \zeta$. Умножая уравнение на x, имеем $\langle \sigma x, x\rangle = \langle \zeta, x\rangle \ge 0$. С другой стороны, $x = \sigma^{-1}\zeta$ и $\langle x, \zeta\rangle = \langle \sigma^{-1}\zeta, \zeta\rangle \ge 0$ $\forall\zeta$.

Как известно, минимальное собственное число симметрической матрицы σ^{-1} равно минимальному значению квадратичной формы $\langle \sigma^{-1}x, x\rangle$ на единичной сфере $\langle x, x\rangle = 1$. Предположим, что $\exists\tilde{x}$ $\langle \sigma\tilde{x}, \tilde{x}\rangle = 0$, следовательно, минимальное собственное число $\mu_{\min} = 0$. Тогда характеристическое уравнение $\det(\sigma^{-1} - \mu E) = 0$, где E — диагональная единичная матрица, при $\mu_{\min} = 0$ дает $\det\sigma^{-1} = 0$. Пришли к противоречию. Значит, $\forall x \langle x, x\rangle = 1$, $\langle \sigma^{-1}x, x\rangle > 0$. Для вектора $\tilde{e} = \frac{e}{\sqrt{n}}$, принадлежащего единичной сфере, имеет место $\langle \sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle > 0$ или $n^{-1}\langle \sigma^{-1}e, e\rangle > 0$, т. е. $e\sigma^{-1}e > 0$.

Рассмотрим двух инвесторов, оптимальные портфели x^{01} и x^{02} которых определены из решения задачи (1) при различных значениях параметра α или, в соответствии с введенными ранее обозначениями, параметра β. Согласно формуле (5), составы оптимальных полноразмерных портфелей инвесторов имеют вид $x^{01} = C_0 + C_1\beta_1$ и $x^{02} = C_0 + C_1\beta_2$ соответственно. Из формул (5) и (7) следует, что ковариация двух полноразмерных портфелей есть

$$\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}}) = x^{01}\sigma x^{02} = (C_0 + C_1\beta_1)\sigma(C_0 + C_1\beta_2) =$$
$$= C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2 + (C_0\sigma C_1)\beta_2 + (C_1\sigma C_0)\beta_1.$$

Так как матрица σ — симметрическая, то имеем равенство $C_0\sigma C_1 = C_1\sigma C_0$ и следующее выражение для ковариации

$$\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}}) = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2 +$$
$$+ (C_0\sigma C_1)(\beta_1 + \beta_2). \qquad (8)$$

Используя свойства скалярного произведения и формулу (6), имеем

$$C_0\sigma C_1 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\left(\sigma^{-1}\bar r - \frac{e\sigma^{-1}\bar r}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right) = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\left(\bar r - \frac{e\sigma^{-1}\bar r}{e\sigma^{-1}e}e\right) =$$
$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e}\left(\langle\sigma^{-1}e, \bar r\rangle - \frac{e\sigma^{-1}\bar r\langle\sigma^{-1}e, e\rangle}{e\sigma^{-1}e}\right) =$$
$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e}\left(e\sigma^{-1}\bar r - \frac{(e\sigma^{-1}\bar r)(e\sigma^{-1}e)}{e\sigma^{-1}e}\right) = 0.$$

Тогда выражение (8) примет вид $\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}}) = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2$.

Так как матрица σ неотрицательно определена, то $C_1\sigma C_1 \geq 0$, а $C_0\sigma C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} = \frac{\langle\sigma^{-1}e, e\rangle}{(e\sigma^{-1}e)^2} = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} > 0.$ Значит, для двух полноразмерных оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} выполняется неравенство $\mathrm{cov}(r_{x^{01}}, r_{x^{02}}) > 0$. Таким образом, доказано первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть теперь x^{01} и x^{02} — составы двух произвольных оптимальных портфелей. В силу строго положительной определенности матрицы σ все ее угловые миноры положительны. Так как от перенумерации случайных величин свойства ковариационной матрицы не меняются, то существует обратная матрица σ_k^{-1} для любой подматрицы σ_k ковариационной матрицы σ и $e_k\sigma_k^{-1}e_k > 0$.

Положительные компоненты $x^{01}_{\neq 0}$ и $x^{02}_{\neq 0}$ портфелей x^{01} и x^{02} определяются согласно формуле (5): $x^{01}_{\neq 0}(\beta_1) = C_0^1 + C_1^1\beta_1$, $x^{02}_{\neq 0}(\beta_2) = C_0^2 + C_1^2\beta_2$, где $C_0^k = \frac{\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}$, $C_1^k = \sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\sigma_k^{-1}e_k$, $k = 1, 2$, σ_k — квадратная подматрица ковариационной матрицы σ, $\bar r_k$ — часть компонент вектора доходностей $\bar r$ для k-го портфеля, соответствующих положительным компонентам вектора x^{0k}, e_k — вектор соответствующей размерности с единичными компонентами.

Найдем значение критерия эффективности $W(x) = \alpha\bar r x - (1 - \alpha)x\sigma x$ в оптимальных точках x^{0k}, $k = 1, 2$:

$$W_k(x^{0k}) = \alpha_k\bar r x^{0k} - (1 - \alpha_k)x^{0k}\sigma x^{0k} =$$
$$= \alpha_k\bar r_k x^{0k}_{\neq 0} - (1 - \alpha_k)x^{0k}_{\neq 0}\sigma_k x^{0k}_{\neq 0} = \alpha_k\bar r_k(C_0^k + C_1^k\beta_k) -$$
$$- (1 - \alpha_k)(C_0^k + C_1^k\beta_k)\sigma_k(C_0^k + C_1^k\beta_k) =$$
$$= \alpha_k\bar r_k\left(\frac{\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\sigma_k^{-1}e_k\right)\beta_k\right) -$$
$$- (1 - \alpha_k)\left(\frac{\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\sigma_k^{-1}e_k\right)\beta_k\right) \times$$
$$\times \sigma_k\left(\frac{\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\sigma_k^{-1}e_k\right)\beta_k\right) =$$
$$= \alpha_k\left(\frac{\bar r_k\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\bar r_k\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{(e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k)^2}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\right)\beta_k\right) -$$
$$- (1 - \alpha_k)\left(\frac{\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\sigma_k^{-1}e_k\right)\beta_k\right) \times$$
$$\times \left(\frac{e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\bar r_k - \frac{e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}e_k\right)\beta_k\right) =$$
$$= \alpha_k\left(\frac{\bar r_k\sigma_k^{-1}e_k}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\bar r_k\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{(e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k)^2}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\right)\beta_k\right) -$$
$$- (1 - \alpha_k)\left(\frac{1}{e_k\sigma_k^{-1}e_k} + \left(\bar r_k\sigma_k^{-1}\bar r_k - \frac{(e_k\sigma_k^{-1}\bar r_k)^2}{e_k\sigma_k^{-1}e_k}\right)\beta_k^2\right) =$$
$$= \alpha_k M_k - (1 - \alpha_k)D_k,$$

где через M_k и D_k обозначены ожидаемая доходность и дисперсия k-го портфеля.

Условия оптимальности для задачи (1) имеют вид $\frac{\partial\tilde L(x^0, \lambda)}{\partial x_i} \leq 0$, $\frac{\partial\tilde L(x^0, \lambda)}{\partial x_i}x_i^0 = 0$, $i = 1, ..., n$, $\frac{\partial\tilde L(x^0, \lambda)}{\partial x_i} = 0$, $x^0 \geq 0$. Для первого портфеля неравенства $\frac{\partial\tilde L(x^0, \lambda)}{\partial x_i} \leq 0$, $i = 1, ..., n$, системы условий есть $\alpha_1\bar r_i - 2(1 - \alpha_1) \times \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_j^{01} - \lambda \leq 0$, $i = 1, ..., n$, или $\alpha_1\bar r - 2(1 - \alpha_1)\sigma x^{01} - \lambda e \leq 0$. Представим последнее выражение в виде $\sigma x^{01} \geq \beta_1\bar r - \frac{\lambda\beta_1}{\alpha_1}e$ и, подставляя в него значение λ для первого портфеля $\lambda = \alpha_1\frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_1(e_1\sigma_1^{-1}e_1)}$, получаем $\sigma x^{01} \geq \frac{e}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \left(\bar r - \frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}e\right)\beta_1$. Тогда имеем оценку ковариации

$$x^{02}\sigma x^{01} \geq x^{02}\left(\frac{e}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \left(\bar r - \frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}e\right)\beta_1\right) =$$
$$= x^{02}_{\neq 0}\left(\frac{e_2}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \left(\bar r_2 - \frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}e_2\right)\beta_1\right) =$$
$$= \left(\frac{\sigma_2^{-1}e_2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2} + \left(\sigma_2^{-1}\bar r_2 - \frac{e_2\sigma_2^{-1}\bar r_2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2}\sigma_2^{-1}e_2\right)\beta_2\right) \times$$
$$\times \left(\frac{e_2}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \left(\bar r_2 - \frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}e_2\right)\beta_1\right) = \frac{1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} +$$
$$+ \beta_1\beta_2\left(\bar r_2\sigma_2^{-1}\bar r_2 - \frac{(e_2\sigma_2^{-1}\bar r_2)^2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2}\right) + \beta_1\left(\frac{e_2\sigma_2^{-1}\bar r_2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2} - \frac{e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} - \beta_1\frac{\bar r_1\sigma_1^{-1}e_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} +$$

$$+ \beta_1\left(\frac{\bar r_2\sigma_2^{-1}e_2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2} + \left(\bar r_2\sigma_2^{-1}\bar r_2 - \frac{(e_2\sigma_2^{-1}\bar r_2)^2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2}\right)\beta_2\right).$$

Учитывая, что $M_2 = \frac{\bar r_2\sigma_2^{-1}e_2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2} + \left(\bar r_2\sigma_2^{-1}\bar r_2 - \frac{(e_2\sigma_2^{-1}\bar r_2)^2}{e_2\sigma_2^{-1}e_2}\right) \times$ $\times\, \sigma_2$ — ожидаемая доходность второго портфеля, преобразуем неравенство к виду

$$x^{02}\sigma x^{01} \ge \frac{1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \beta_1\Bigg[M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 + \frac{1}{2\beta_2}D_2 -$$

$$- \left(\frac{\bar r_1\sigma_1^{-1}e_1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} + \left(\bar r_1\sigma_1^{-1}\bar r_1 - \frac{(e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1)^2}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}\right)\beta_1\right) -$$

$$- \left(\bar r_1\sigma_1^{-1}\bar r_1 - \frac{(e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1)^2}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}\right)\beta_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1 + \frac{1}{2\beta_2}D_1)\Bigg] =$$

$$= \beta_1\left[M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 - \left(M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1\right)\right] + \frac{1}{e_1\sigma_1^{-1}e_1} +$$

$$+ \left(\bar r_1\sigma_1^{-1}\bar r_1 - \frac{(e_1\sigma_1^{-1}\bar r_1)^2}{e_1\sigma_1^{-1}e_1}\right)\beta_1^2 + \frac{\beta_1}{2\beta_2}D_2 - \frac{\beta_1}{2\beta_2}D_1 =$$

$$= \beta_1\left[M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 - \left(M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1\right)\right] + D_1 + \frac{\beta_1}{2\beta_2}(D_2 - D_1),$$

где M_1 и D_1, D_2 — ожидаемая доходность и дисперсии портфелей.

Так как $M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 = \frac{1}{\alpha_2}W_2(x^{02})$, то $M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1 = \frac{1}{\alpha_2}W_2(x^{01})$, т. е. $M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1$ есть значение критерия $\frac{1}{\alpha_2}W_2(x)$ в неоптимальной для него точке x^{01}. Поэтому $M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 - \left(M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1\right) > 0$. Если при этом $\beta_1 \ge 2\beta_2$, то в силу оптимальности по Парето $D_2 > D_1$ и, следовательно, $x^{02}\sigma x^{01} > 0$.

Если $\beta_1 < 2\beta_2$, то $x^{02}\sigma x^{01} \ge \beta_1\left[M_2 - \frac{1}{2\beta_2}D_2 - \left(M_1 - \frac{1}{2\beta_2}D_1\right)\right] + \frac{\beta_1}{2\beta_2}D_2 + \left(1 - \frac{\beta_1}{2\beta_2}\right)D_1 > 0$. Теорема доказана полностью. ♦

Теорема 2. *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \ne 0$, *то для того чтобы оптимальный портфель* x^0 *был полноразмерным, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\max\left\{0;\ \max_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right\} < \beta < \min_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}, \qquad (9)$$

где $C_0 = (C_{01}, ..., C_{0j}, ..., C_{0n})$, $C_1 = (C_{11}, ..., C_{1j}, ..., C_{1n})$ *вычисляются по формулам* (6). *При этом коэффициент корреляции двух полноразмерных портфелей* x^{01} *и* x^{02}

$$\rho_{x^{01}x^{02}} =$$

$$= \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)^{1/2}},$$

монотонно убывает с ростом величины $\delta = \beta_1 - \beta_2$ *и принимает значения из интервала* $(a; 1]$, *где*

$$a =$$

$$= \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\max\left\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right\}}{\left[\begin{array}{c}\left(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right)^{1/2}\times\\ \times\left(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\max\left\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\frac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right\}\right)^{1/2}\end{array}\right]} > 0. \blacklozenge$$

Доказательство. Неравенства $x_j^0(\beta) = C_{0j} + C_{1j}\beta > 0$, $j = 1, ..., n$ (условие полноразмерности оптимального портфеля) имеют место при следующих ограничениях на параметр β: если $C_{1j} > 0$, то $\beta > -C_{0j}/C_{1j}$; если $C_{1j} < 0$, то обязательно $C_{0j} > 0$ и $0 < \beta < -C_{0j}/C_{1j}$. Значит, для тех $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $C_{1j} > 0$ имеем условие $\beta > \max\limits_{j|C_{1j}>0}(-C_{0j}/C_{1j})$, а для тех $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $C_{1j} < 0$ имеем условие $\beta < \min\limits_{j|C_{1j}<0}(-C_{0j}/C_{1j})$. Так как условия относятся к разным индексам, то для полноразмерного портфеля выполняются оба эти условия. Учитывая, что $\beta \ge 0$, имеем ограничение на значение параметра β в виде (9).

По теореме 1 $\rho_{x^{01}x^{02}} \in (0; 1]$. При $\beta_1 = \beta_2$ получаем два одинаковых портфеля, и формула (7) дает дисперсию портфеля. Для первого оптимального портфеля дисперсия имеет вид $\sigma_{x^{01}} = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2$, а для второго $\sigma_{x^{02}} = C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2$. Тогда коэффициент корреляции

$$\rho_{x^{01}x^{02}} = \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)^{1/2}(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)^{1/2}}.$$

Нетрудно видеть, что $\rho_{x^{01}x^{02}} = 1$ при $\beta_1 = \beta_2$. Для доказательства монотонности убывания $\rho_{x^{01}x^{02}}$ при увеличении $\delta = \beta_1 - \beta_2$ выполним следующие преобразования:

$$\rho^2_{x^{01}x^{02}} = \frac{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2)^2}{(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_1^2)(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\beta_2^2)} =$$

$$= \frac{(C_0\sigma C_0)^2 + 2(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\beta_1\beta_2 + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}{(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}.$$

При этом $\rho^2_{x^{01}x^{02}} \le 1$ и

$$1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} =$$

$$= \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1 - \beta_2)^2}{(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_1^2\beta_2^2}.$$

Фиксируя β_2, имеем $\beta_1 = \beta_2 + \delta$. Тогда

$$1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} =$$

$$= \frac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\delta^2}{\begin{bmatrix}(C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)(2\beta_2^2 + 2\beta_2\delta + \delta^2) + \\ + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^2(\beta_2^2 + 2\beta_2\delta + \delta^2)\end{bmatrix}}$$

или $1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \dfrac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\delta^2}{A + B\delta + C\delta^2} = \dfrac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)}{A\delta^{-2} + B\delta^{-1} + C}$,

где

$$A = (C_0\sigma C_0)^2 + (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)\beta_2^2 + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^4,$$

$$B = (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)2\beta_2 + (C_1\sigma C_1)^2 2\beta_2^3,$$

$$C = (C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1) + (C_1\sigma C_1)^2\beta_2^2.$$

Следовательно, при росте δ величина $1 - \rho^2_{x^{01}x^{02}} = \dfrac{(C_0\sigma C_0)(C_1\sigma C_1)}{A\delta^{-2} + B\delta^{-1} + C}$ монотонно возрастает, а $\rho_{x^{01}x^{02}}$ соответственно монотонно убывает. Учитывая условие (9), обеспечивающее полноразмерность портфеля, имеем

$$a = \lim_{\substack{\beta_1 \to \min\limits_{j|C_{1j}<0}(-C_{0j}/C_{1j}) \\ \beta_2 \to \max\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}(-C_{0j}/C_{1j})\}}} \rho_{x^{01}x^{02}} =$$

$$= \frac{C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\max\left\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right\}}{\begin{bmatrix}\left(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\min\limits_{j|C_{1j}<0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right)^{1/2} \times \\ \times\left(C_0\sigma C_0 + (C_1\sigma C_1)\max\left\{0;\ \max\limits_{j|C_{1j}>0}\dfrac{-C_{0j}}{C_{1j}}\right\}\right)^{1/2}\end{bmatrix}}.$$

Значит, коэффициент корреляции $\rho_{x^{01}x^{02}}$ принадлежит интервалу $(a; 1]$, что и требовалось доказать. ♦

Таким образом, справедлив интересный и, на наш взгляд, неожиданный результат, что несмотря на возможное наличие компонент портфеля с отрицательными ковариациями, обеспечивающих хеджирование риска для индивидуального инвестора, положительно коррелированны не только полноразмерные оптимальные портфели, соответствующие сравнительно узкому диапазону значений α, но и любые оптимальные портфели со сколь угодно различающимся отношением инвесторов к риску.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ ПРИ УСЛОВИИ РАЗНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИНВЕСТОРОВ О ВНЕШНИХ ФАКТОРАХ

Традиционно предполагается, что инвесторы одинаково информированы о ситуации на финансовом рынке и их различное поведение связано с различным отношением к риску (выбором параметра α). Предположим, что инвесторы обладают различной информированностью о ситуации, складывающейся на финансовом рынке, которая выражается в том, что они по-разному оценивают ожидаемые эффективности компонент портфеля (ковариационная матрица пока считается единой). Рассмотрим двух инвесторов, оптимальные портфели x^{01} и x^{02} которых определены из решения задачи (1) при различных значениях параметра β и различных значениях ожидаемых эффективностей. Пусть первый инвестор имеет вектор ожидаемых эффективностей $\bar{r}^1$, а второй — $\bar{r}^2$. Составы оптимальных портфелей x^{01} и x^{02} инвесторов имеют вид

$$x^{01} = C_0 + C_1^1\beta_1 \text{ и } x^{02} = C_0 + C_1^2\beta_2 \qquad (10)$$

соответственно, где C_1^1 и C_1^2 определяются по формулам

$$C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}, \quad C_1^1 = \sigma^{-1}\bar{r}^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e,$$

$$C_1^2 = \sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^2}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e.$$

Теорема 3. *Если определитель ковариационной матрицы* $\det\sigma \ne 0$, *то ковариация* $\operatorname{cov}(r^1_{x^{01}}, r^2_{x^{02}})$ *двух полноразмерных оптимальных портфелей отрицательна для* $\bar{r}^1$, $\bar{r}^2$ *и* σ, *удовлетворяющих условию*

$$(\bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2)(e\sigma^{-1}e) - (e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2) < -\frac{1}{\beta_1\beta_2}. \ ♦ \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (7), (10) и симметричности матрицы σ следует, что

$$\operatorname{cov}(r^1_{x^{01}}, r^2_{x^{02}}) = x^{01}\sigma x^{02} =$$

$$= (C_0 + C_1^1\beta_1)\sigma(C_0 + C_1^2\beta_2) =$$

$$= C_0\sigma C_0 + (C_1^1\sigma C_1^2)\beta_1\beta_2 + C_0\sigma(C_1^1\beta_1 + C_1^2\beta_2). \qquad (12)$$

Учитывая свойства скалярного произведения и выражение (12), имеем $C_0\sigma C_0 = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e} = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\cdot\frac{e}{e\sigma^{-1}e} = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} > 0$ в силу того, что $\det\sigma \neq 0$ и, как было показано при доказательстве теоремы 1, $e\sigma^{-1}e > 0$,

$$C_0\sigma(C_1^1\beta_1 + C_1^2\beta_2) = \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\sigma\left(\left(\sigma^{-1}\bar{r}^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\beta_1 + \left(\sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^2}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\beta_2\right) =$$

$$= \frac{\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}\left(\bar{r}^1\beta_1 + \bar{r}^2\beta_2 - \frac{\langle e, \sigma^{-1}(\bar{r}^1\beta_1 + \bar{r}^2\beta_2)\rangle}{e\sigma^{-1}e}e\right) =$$

$$= \frac{1}{e\sigma^{-1}e}\left((\bar{r}^1\beta_1 + \bar{r}^2\beta_2)\sigma^{-1}e - \frac{(\bar{r}^1\beta_1 + \bar{r}^2\beta_2)\sigma^{-1}e}{e\sigma^{-1}e}e\sigma^{-1}e\right) = 0,$$

$$C_1^1\sigma C_1^2 = \left(\sigma^{-1}\bar{r}^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\sigma\left(\sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^2}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right) =$$

$$= \left(\sigma^{-1}\bar{r}^1 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^1}{e\sigma^{-1}e}\sigma^{-1}e\right)\left(\bar{r}^2 - \frac{e\sigma^{-1}\bar{r}^2}{e\sigma^{-1}e}e\right) =$$

$$= \langle\sigma^{-1}\bar{r}^1, \bar{r}^2\rangle + \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e} - \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)\langle\sigma^{-1}e, \bar{r}^2\rangle}{e\sigma^{-1}e} -$$

$$- \frac{\langle e, \sigma^{-1}\bar{r}^1\rangle(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e} = \bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2 + \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e} -$$

$$- 2\frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e} = \bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e}.$$

Тогда выражение (12) примет вид

$$\mathrm{cov}(r^1_{x_{01}}, r^2_{x_{02}}) = \frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \left(\bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e}\right)\beta_1\beta_2.$$

Следовательно, $\mathrm{cov}(r^1_{x_{01}}, r^2_{x_{02}}) < 0$, если $\frac{1}{e\sigma^{-1}e} + \left(\bar{r}^1\sigma^{-1}\bar{r}^2 - \frac{(e\sigma^{-1}\bar{r}^1)(e\sigma^{-1}\bar{r}^2)}{e\sigma^{-1}e}\right)\beta_1\beta_2 < 0$. Приведя к общему знаменателю и учитывая, что $e\sigma^{-1}e > 0$, приходим к условию (11), что и требовалось доказать. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что ковариация доходностей оптимальных портфелей двух инвесторов, получающихся из решения задачи (1), при использовании ими единой объективной рыночной информации положительна и тем больше, чем ближе значения их коэффициентов риска. При использовании же инвесторами различной (субъективной) информации ковариация оптимальных портфелей может быть отрицательна. При различной оценке ими математических ожиданий доходностей финансовых инструментов и общей оценке ковариационной матрицы условие (11) характеризует степень различия оценок, которая приводит к отрицательной ковариации. При этом предположение о единой оценке ковариационной матрицы не является существенным. Различные оценки ковариационной матрицы отразятся на составах их оптимальных портфелей, которые, естественно, и в этом случае могут быть отрицательно коррелированы, изменится лишь вид условия (11).

Как показывают вычислительные эксперименты, коэффициент корреляции оптимальных неполноразмерных портфелей при одинаковой информированности инвесторов может быть сколь угодно близок к нулю (оставаясь положительным), а неоптимальные портфели, естественно, могут быть отрицательно коррелированы; в условиях же различной информированности инвесторов ковариация как полноразмерных, так и неполноразмерных оптимальных портфелей может быть отрицательной. Таким образом, если рассмотреть некоторую группу инвесторов, то дисперсия условного совокупного портфеля, состоящего из их портфелей, увеличивается при их однотипном поведении (оптимизация в условиях одинаковой оценки доходности даже при сколь угодно отличающемся отношении к риску) и уменьшается при разнотипном поведении (разные оценки доходности или разные принципы рационального выбора).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Критерии оценки и оптимальности риска в сложных организационных системах. Научное издание. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 162 с.
2. *Белолипецкий А.А., Горелик В.А.*. Экономико-математические методы: университетский учебник. — М.: Изд. центр «Академия», 2010. — 368 с.
3. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // Journal of Finance. — 1952. — N 7. — P. 77—91.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. — М.: Высш. школа, 2007. — 206 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Горелик Виктор Александрович — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, г. Москва,
☎ (499) 135-62-04, ✉ gorelik@ccas.ru,

Золотова Татьяна Валерьяновна — д-р физ.-мат. наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, ✉ tgold11@mail.ru.