УДК 519.86

УЧЕТ КОРРУПЦИИ В МОДЕЛЯХ СОЧЕТАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ И ЧАСТНЫХ ИНТЕРЕСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

О.И. Горбанева, Г.А. Угольницкий

Рассмотрен учет коррупции в моделях согласования общественных и частных интересов активных агентов в трехуровневых системах управления типа «принципал — супервайзер — агент». Показано, что при экономической коррупции супервайзер за взятку увеличивает долю агента в общественном доходе, а при административной ослабляет требования к участию агента в общественной деятельности. Модели исследованы в рамках дескриптивного и нормативного подходов, обсуждены полученные результаты.

Ключевые слова: модели сочетания общих и частных интересов, коррупция, административный, экономический механизм, дескриптивный, нормативный, подход.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема сочетания общественных и частных интересов может рассматриваться в двух аспектах. Прежде всего, уровень общественного благосостояния при независимом поведении эгоистичных активных агентов обычно оказывается ниже, чем при их согласованных кооперативных действиях. Количественная сторона этой проблемы получила название «неэффективности равновесий» и характеризуется введенным Х. Пападимитриу показателем «цены анархии» [1]. На самом деле, близкий показатель встречался в работах советских авторов 1970-х гг. Так, В.Н. Бурковым и В.И. Опойцевым [2] была предложена концепция «метаигры», в которой центр должен синтезировать механизм управления, максимизирующий общественное благосостояние в равновесии игры агентов. В работе В.А. Горелика [3] введена мера согласованности интересов верхнего и нижнего уровней управления.

Далее, агенты могут распределять свои ресурсы между общим и частными интересами. В основополагающей работе Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя [4] показано, что если функции выигрыша агентов имеют вид свертки по минимуму функций общего и частного интересов, то в соответствующей игре существует Парето-оптимальное равновесие по Нэшу (т. е. цена анархии равна идеальному значению — единице). Впоследствии Н.С. Кукушкин получил условие существования равновесия Нэша в играх с частными и общественными целями [5, 6].

Исследование моделей обоих типов было продолжено в работах [7—11], в которых функция выигрыша агентов имеет вид линейной свертки. В частности, вычислена «цена анархии» для моделей согласования общественных и частных интересов (СОЧИ-моделей) [8], определены административный и экономический механизмы управления в СОЧИ-моделях с обратной связью и без нее [9], предложено определение системной согласованности [9], при которой равновесные по Нэшу стратегии агентов максимизируют общественное благосостояние, а также определение согласованности механизма управления. Изучена согласованность административного и экономического механизмов управления [11].

В настоящей работе основное внимание уделяется описанию коррупции в СОЧИ-моделях. До сих пор эта тема рассматривалась только в работе [6], но теперь предложена другая схема моделирования и детально изучены механизмы административной и экономической коррупции.

Итак, при решении задач согласования интересов в активных системах представляется существенным учет возможного коррупционного поведения агентов. Обзор математических моделей коррупции в иерархических системах управления дан в работе [12]. Авторский подход к построению и исследованию статических моделей коррупции в иерархических системах управления изложен в ра-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-00432-а).

боте [13]. Этот подход базируется на концепции управления устойчивым развитием [10] и использует идеи информационной теории иерархических систем [14] и теории управления организационными системами [15]. Одним из ключевых тезисов здесь служит трактовка коррупции как обратной связи по размеру взятки.

Отметим, что для описания процессов управления в активных системах (и вообще при моделировании социально-экономических систем) применяются два основных подхода. Первый — это теоретические обобщения высокого уровня, справедливые для широкого класса моделируемых объектов (например, принцип открытого управления или теорема Эрроу). Второй подход — описание реальных систем с помощью «портретных» моделей, опирающихся на эмпирические данные наблюдений. Понятно, что оба эти подхода имеют свои преимущества и недостатки. Получить содержательный теоретический результат для модели общего вида нелегко, даже если говорить не только о «вершинах». Ясна и ограниченность эмпирических исследований при всей их прикладной полезности.

Поэтому в настоящей статье (как и в ряде других работ авторов) делается попытка идти по «среднему» пути, описывая достаточно широкий класс объектов с использованием определенной степени общности моделирования. Именно, изучается коррупция в иерархических системах управления древовидной структуры (примеры которых приводятся в тексте) с помощью степенных модельных функций полезности. На наш взгляд, этот подход позволяет получить достаточно представительные результаты и создать базу как для эмпирического анализа конкретных систем, так и для дальнейших теоретических обобщений.

1. СОЧИ-МОДЕЛИ И УЧЕТ КОРРУПЦИИ

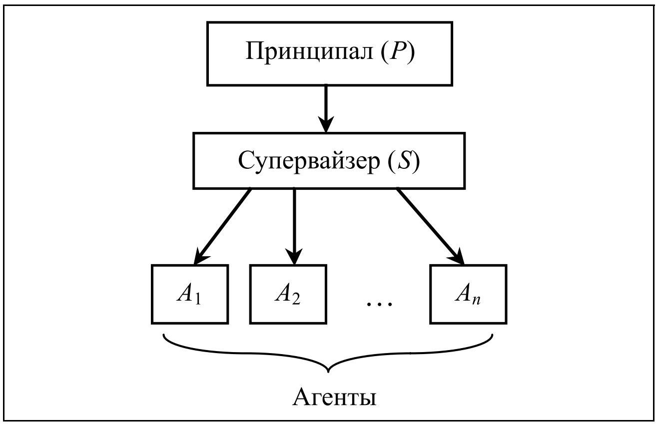
Описанные ранее [8, 9, 11] СОЧИ-модели имеют вид

$$g_i(u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u) \to \max, \quad 0 \le u_i \le r_i, \quad i \in N; \tag{1}$$

$$g_0(u) = \sum_{j \in N} g_j(u) \to \max, \quad 0 \le s_i \le 1,$$

$$\sum_{j \in N} s = \begin{cases} 1, \exists i : s_i > 0, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь r_i — ресурс, которым располагает i-й агент; u_i — часть ресурса, ассигнуемая им на создание общего дохода; $c(u)$ — функция общего дохода; s_i — доля i-го агента в общем доходе; $p_i(r_i - u_i)$ — функция частного интереса i-го агента, $N = \{1, ..., n\}$ — множество агентов, $g_i(u)$ — целевая функция i-го агента, $g_0(u)$ — целевая функция принципала. Фактически, модель (1), (2) описывает двухуровневую древовидную систему управления, в которой управляющий орган верхнего уровня стремится максимизировать общественное благосостояние (2) посредством учета интересов создающих его агентов (1), т. е. построить механизм системного согласования [9].



Иерархическая система управления «принципал — супервайзер — агенты»

Общие требования к функциям p_i и c: они предполагаются непрерывно дифференцируемыми, возрастающими и вогнутыми по всем аргументам, $c(0) = 0$, $p_i(0) = 0$ (при $u_i = r_i$), т. е. выполняются стандартные свойства производственных функций. Поскольку результаты для этого общего класса функций пока отсутствуют, будем рассматривать в качестве функций $p_i(x)$ и $c(x)$ широко используемые в экономике и достаточно представительные степенные производственные функции с положительным показателем, меньшим единицы, а также в иллюстративных целях линейные функции.

Что касается учета коррупции в СОЧИ-моделях, то в соответствии с авторским подходом целесообразно различать административную и экономическую коррупцию [13]. Рассмотрим иерархическую систему управления «принципал — супервайзер — агенты», структура которой показана на рисунке.

Принципал осуществляет административный и/или экономический контроль деятельности агентов, воздействуя соответственно на множества их допустимых управлений или целевые функции. Принципал предполагается некоррумпированным, однако реальные функции управления от его имени выполняет супервайзер, который в обмен на взятку от агентов может ослаблять административные либо экономические требования. Соответственно, возникает административная и/или экономическая коррупция, т. е. обратная связь этих видов управления по размеру взятки [10, 13].

Отметим, что представленная на рисунке структура отражает реальные отношения в иерархических организациях. Невозможность обработки принципалом больших объемов информации в реальном времени порождает необходимость делегирования полномочий промежуточному уровню управления — супервайзерам (их в древовидной системе управления на самом деле несколько, на рисунке показан только один, поскольку этого достаточно для решаемой задачи моделирования). Однако наличие супервайзера, интересы которого не совпадают с интересами принципала, создает условия для коррупции (конечно, не обязательно реализуемые).

Можно привести ряд примеров иерархических систем управления со структурой, показанной на рисунке:

законодательный орган — чиновник органа исполнительной власти — хозяйствующие субъекты;

министерство — местный орган лицензирования — претенденты на лицензию;

руководство института (больницы) — преподаватель (врач) — студенты (пациенты);

собственник или генеральный директор предприятия — менеджер среднего уровня — рядовые работники и др.

Рассмотрим более детально математическую формализацию административной и экономической коррупции в СОЧИ-моделях.

2. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КОРРУПЦИЯ В СОЧИ-МОДЕЛЯХ

Предположим, что в отсутствие коррупции общественный доход $c(u)$ в модели (1), (2) распределяется между принципалом, супервайзером и агентами в соотношении t^0, r^0, $\sum_{j=1}^{n} s_j^0$, где $t^0 + r^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j^0 = 1$. Трактовка экономической коррупции состоит в том, что в обмен на взятку супервайзер — распорядитель ресурсов увеличивает долю агентов в общественном доходе за счет принципала (например, государства или иной организации). Эту схему можно описать соотношениями

$$t = t^0 - \sum_{j=1}^{n} \delta_j, \quad r = r^0 + \sum_{j=1}^{n} b_j\delta_j,$$
$$s_i = s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i, \quad i \in N, \qquad (3)$$

где для новых долей распределения общественного дохода (3) вновь выполняется условие $t + r + \sum_{j=1}^{n} s_j = 1$. Здесь δ_i — прибавка доли общественного дохода i-го агента в обмен на «откат», b_i — доля «отката» от δ_i супервайзеру от i-го агента. Тогда СОЧИ-модель (1), (2) с учетом экономической коррупции принимает вид

$$g_S(b, \delta, u) = \left[r^0 + \sum_{j=1}^{n} b_j\delta_j\right] c(u) \to \max,$$
$$0 \le \delta_i \le 1; \qquad (4)$$

$$g_i(b_i, \delta_i, u) = p_i(r_i - u_i) + [s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]c(u) \to \max,$$
$$0 \le b_i \le 1,\ 0 \le u_i \le r_i,\ i \in N, \qquad (5)$$

где g_S и g_i — целевые функции супервайзера и i-го агента соответственно. При этом в функции (4) слагаемое $r^0c(u)$ характеризует официальное вознаграждение супервайзера, а слагаемое $c(u)\sum_{j=1}^{n} b_j\delta_j$ — его коррупционный доход.

Модель (4), (5) можно исследовать двумя способами: дескриптивным и нормативным. В случае дескриптивного подхода вид функции взяточничества $\delta_i(b_i)$ считается известным (из общих соображений либо на основе анализа доступных эмпирических данных). Тогда для агентов возникает игра в нормальной форме, в которой стратегиями служат пары управлений (b_i, u_i). При нормативном подходе функция $\delta_i(b_i)$ определяется как оптимальная гарантирующая стратегия (механизм управления) супервайзера в игре типа Γ_2 с агентами [14, 15]. Отметим, что постановка игры Γ_1 при описании коррупции в данном случае не имеет смысла, так как оптимальный ответ агента на любое фиксированное значение δ_i есть $b_i = 0$. Без существенного ограничения общности моделирования применим дескриптивный подход для линейной и степенной функций $\delta_i(b_i)$.

Линейная модель. Здесь $\delta_i = l_ib_i$, поэтому функция (5) принимает вид

$$g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i) + K[s_i^0 + (1 - b_i)l_ib_i]\sum_{j=1}^{n} u_j$$

и подлежит максимизации при ограничениях $0 \le b_i \le 1$, $0 \le u_i \le r_i$.

Коэффициент l_i характеризует увеличение прибавки δ_i с ростом доли отката b_i. Условия первого порядка имеют вид $0 = \frac{\partial g_i}{\partial u_i} K[s_i^0 + l_ib_i + l_ib_i^2] - k_i$,

$0 = \frac{\partial g_i}{\partial b_i} = Kl_i[1 - 2b_i] \sum_{j=1}^{n} u_j$. В силу линейности функции g_i по u_i максимум достигается на границе отрезка $[0, r_i]$:

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_i} \begin{cases} \ge 0, \kappa(b_i) > 0 \Rightarrow u_i^* = r_i; \\ < 0, \kappa(b_i) \le 0 \Rightarrow u_i^* = 0, \end{cases}$$

где $\kappa(b_i) = Ks_i^0 + Kl_ib_i(1 - b_i) - k_i$.

Оптимальное значение $b_i^* = 1/2$, при этом $\kappa(1/2) = K(s_i^0 + l_i/4) - k_i$. Как видно, значение u_i^* зависит от коэффициента l_i, а размер взятки не зависит. Заметим, что должны выполняться условия $t = t^0 - \sum_{j=1}^{n} \delta_j \ge 0$, $r = r^0 + \sum_{j=1}^{n} b_j\delta_j \le 1$ которые приобретают вид: $t^0 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} l_j \ge 0$, $r^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(s_i^0 + \frac{l_i}{2}\right) \le 1$. Эти условия эквивалентны при выполнении условия $t + r + \sum_{j=1}^{n} s_j = 1$, т. е. супервайзер должен назначить l_i таким образом, чтобы $\sum_{j=1}^{n} l_j \le 2t^0$.

Рассмотрим задачу супервайзера:

$$g_S(l) = \left[r^0 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} l_j\right] c\left(\sum_{i \in C} r_i\right) \to \max$$

при ограничениях $0 \le l_i \le 1$, $\sum_{j=1}^{n} l_j \le 2t^0$.

Это задача линейного программирования, но фактически нужно найти $\sum_{j=1}^{n} l_j$, причем целевая функция супервайзера возрастает по этой величине, следовательно, $\sum_{j=1}^{n} l_j = \min\{2t^0, n\}$. Но при $n \ge 2$ имеем $2t^0 \le n$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{n} l_j = 2t^0$. Тогда $g_P = 0$, $g_S = \left[r^0 + \frac{t^0}{2}\right] c\left(\sum_{i \in C} r_i\right)$, $g_{i \in C} = K\left[s_i^0 + \frac{t^0}{2}\right]\sum_{i \in C} r_i$, $g_{i \in I} = k_ir_i + K\left[s_i^0 + \frac{t^0}{2}\right]\sum_{i \in C} r_i$.

Теперь осталось распределить величину $\sum_{j=1}^{n} l_j$ между агентами. Так как целевая функция супервайзера возрастает по $\sum_{i \in C} r_i$, то необходимо как можно больше агентов сделать коллективистами, т. е. в идеале $I_0 = \varnothing$, $C_0 = N$, причем чем сильнее значение u_i^* зависит от коэффициента l_i, тем вероятнее выполнение условия $Ks_i^0 + Kl_ib_i(1 - b_i) - k_i > 0$ (или $l_i > 4(k_i/K - s_i^0)$), при котором $u_i^* = r_i$. Можно добиться того, чтобы все агенты стали коллективистами (добиться системной согласованности), если $\sum_{i=1}^{n}(k_i/K - s_i^0) < t^0/2$, в противном случае приходится решать задачу согласованности в слабой форме, разбивая множество агентов на подмножества коллективистов и индивидуалистов так, чтобы $\sum_{i \in C} r_i \to \max$ при условии $\sum_{i=1}^{n}(k_i/K - s_i^0) < t^0/2$. Полученную задачу можно свести к известной «задаче о рюкзаке» [16].

Модель со степенной функцией взяточничества $\delta_i = l_ib_i^m$. Функция (5) принимает вид $g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i) + K[s_i^0 + (1 - b_i)l_ib_i^m]\sum_{j=1}^{n} u_j$ и подлежит максимизации при ограничениях $0 \le b_i \le 1$, $0 \le u_i \le r_i$. Целевая функция агента линейна по u_i, откуда

$$u_i = \begin{cases} r_i, K\left(s_i^0 + \frac{l_im^m}{(m+1)^{m+1}}\right) > k_i; \\ 0, K\left(s_i^0 + \frac{l_im^m}{(m+1)^{m+1}}\right) < k_i. \end{cases}$$

Из условий первого и второго порядка видно, что оптимальное значение $b_i^* = \frac{m}{m+1}$. Как видно, размер взятки от коэффициента l_i не зависит.

Заметим, что должно выполняться условие: $t^0 - \frac{m^m}{(m+1)^m}\sum_{j=1}^{n} l_j \ge 0$ или, что то же самое, $\sum_{j=1}^{n} l_j \le \frac{(m+1)^m}{m^m} t^0$.

Решим задачу супервайзера: $g_S(l) = \left[r^0 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \sum_{j=1}^{n} l_j\right] c\left(\sum_{i \in C} r_i\right) \to \max$ при ограничениях $0 \le l_i \le 1$, $\sum_{j=1}^{n} l_j \le \frac{(m+1)^m}{m^m} t^0$.

Это задача линейного программирования. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что можно добиться системной согласованности, если $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{K} - s_i^0\right) < \frac{t^0}{k+1}$, иначе приходится решать задачу согласования в слабой форме, разбивая множество агентов на подмножества коллективистов и индивидуалистов так, чтобы $\sum_{i \in C} r_i \to \max$ при условии $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k_i}{K} - s_i^0\right) < \frac{t^0}{k+1}$. Полученная задача также сводится к «задаче о рюкзаке» [16].

Определим целевую функцию принципала

$$g_P(u) = \sum_{j=1}^{n} p_j(r_j - u_j) + c(u) \to \max \qquad (6)$$

и рассмотрим модель (5), (6). Условие системного согласования [8] в этой модели имеет вид $u^* = u^{\max}$, где $u = (u_1, , u_n)$, u^* — равновесие Нэша в игре агентов (5), $g_P(u^{\max}) = \max_u g_P(u)$.

Алгоритм исследования модели:

1) выявить условия системного согласования интересов принципала и агента, т. е. найти значения u^*, $u^{\max}$ и значения s_i^0, при которых они равны;

2) при найденном условии согласования (возможно, в слабой форме), найти равновесие в игре Γ_2 супервайзера и агента.

Применим нормативный подход для некоторых классов СОЧИ-моделей.

Линейная модель. Модель принимает вид: целевая функция принципала $g_P = \sum_{i \in N} k_i(r_i - u_i) + K\sum_{j=1}^{n} u_j$, супервайзера $g_S = \left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right)K\sum_{j=1}^{n} u_j$. Целевая функция агента (5) принимает вид $g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i) + K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]\sum_{j=1}^{n} u_j$.

Оптимальные стратегии принципала и агента в этом случае:

$$u_i^{\max} = \begin{cases} r_i, & K > k_i; \\ 0, & K < k_i, \end{cases} \qquad u_i^* = \begin{cases} r_i, & K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] > k_i; \\ 0, & K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] < k_i. \end{cases}$$

Чтобы добиться системной согласованности, нужно назначить s_i^0 так, чтобы

$$s_i^0 = \begin{cases} > k_i/K - (1 - b_i)\delta_i, & K > k_i; \\ 0, & K < k_i. \end{cases}$$

Отсюда, чем меньше частных интересов у агента, тем легче заставить работника работать на общие интересы. Также должно выполняться условие $\sum_{i \in N} s_i^0 = 1 - r^0 - p^0$, т. е. системной согласованности можно добиться, если $\sum_{i \in N}\left(\frac{k_i}{K} - (1 - b_i)\delta_i\right) < 1 - r^0 - p^0$, иначе приходится решать задачу согласования в слабой форме. Отметим, что принципал не знает равновесных значений b_i и δ_i и вообще может не знать о коррупции.

Теперь рассмотрим игру Γ_2 супервайзера и агента:

$$g_S = \left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right)K\sum_{j \in C} r_j.$$

Функция (5) принимает вид

$$g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i) + K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]\sum_{j \in C} r_j = \begin{cases} k_i r_i + K(1 - b_i)\delta_i\sum_{j \in C} r_j, & i \in I, \\ K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]\sum_{j \in C} r_j, & i \in C. \end{cases}$$

Стратегия наказания есть $\delta_i^P = 0$, т. е. при выборе супервайзером данной стратегии агент не может рассчитывать на увеличение доли в общем доходе:

$$L_i = k_i(r_i - u_i) + Ks_i^0\sum_{j \in C} r_j = \begin{cases} k_i r_i, & i \in I, \\ Ks_i^0\sum_{j \in C} r_j, & i \in C. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия агента при стратегии наказания произвольна: $E_i = \{b_i \in [0; 1]\}$, при этом $K_2 = r^0K\sum_{j \in C} r_j$. Во множество D_i входят стратегии супервайзера и агента $D_i = \{(\delta_i, b_i) \mid b_i \ne 1, \delta_i \ne 0\}$, т. е. агент должен получить ненулевую надбавку от общей деятельности. Вычислим значение

$$K_1 = \max_{\delta_i}\max_{b_i}\left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right)K\sum_{j \in C} r_j$$

при ограничениях $b_i \ne 1$, $\delta_i \ne 0$, $\sum_{i-1}^{n}\delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n} s_i^0$, откуда

$$b_i = 1 - \varepsilon, \quad \sum_{i-1}^{n}\delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n} s_i^0,$$

$$K_1 = \left(r^0 + (1 - \varepsilon)\left(1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n} s_i^0\right)\right) \times$$
$$\times K\sum_{j \in C} r_j > r^0K\sum_{j \in C} r_j = K_2.$$

Таким образом, оптимальная стратегия супервайзера:

$$\delta_i = \begin{cases} 0,\ b_i \neq 1 - \varepsilon, \\ > 0,\ \sum_{i-1}^{n} \delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n} s_i^0,\ b_i = 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

При этом доход агента

$$g_i = \begin{cases} k_i r_i = K\varepsilon\delta_i \sum_{j=1}^{n} u_j,\ i \in I, \\ K[s_i^0 + \varepsilon\delta_i] \sum_{j=1}^{n} u_j,\ i \in C. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать выводы:

— супервайзер дает агенту совсем незначительную надбавку;

— условие системной согласованности имеет вид $\sum_{i \in N} (k_i/K - (1 - b_i)\delta_i) < 1 - r^0 - t^0$, при этом оптимальная стратегия принципала $s_i^0 = \begin{cases} > k_i/K,\ K > k_i; \\ 0,\ K < k_i. \end{cases}$

Линейно-степенная модель. Модель имеет вид: целевая функция принципала $g_P = \sum_{i \in N} k_i(r_i - u_i)^\alpha + K\sum_{j=1}^{n} u_j$, супервайзера $g_S = \left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right) K \sum_{j=1}^{n} u_j$. Целевая функция агента (5) принимает вид $g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i)^\alpha + K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] \sum_{j=1}^{n} u_j$.

Оптимальные стратегии принципала и агента:

$$u_i^{\max} = \begin{cases} r_i - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_i\alpha}{K}},\ K > \dfrac{k_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}; \\ 0,\ K < \dfrac{k_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, \end{cases}$$

$$u_i^* = \begin{cases} r_i - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_i\alpha}{K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]}},\ K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] > \dfrac{k_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}; \\ 0,\ K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] < \dfrac{k_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}. \end{cases}$$

Для системной согласованности необходимо, чтобы все агенты были индивидуалистами. Это возможно только в случае, когда для всех агентов выполняется соотношение $K < k_i\alpha/r_i^{1-\alpha}$. Для этих агентов значения s_i^0 назначаются следующим образом:

$$s_i^0 < \frac{k_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}K} - (1 - b_i)\delta_i,$$

одно из возможных значений $s_i^0 = 0$. Если же хотя бы для одного агента не выполняется условие $K < k_i\alpha/r_i^{1-\alpha}$, то приходится решать задачу согласования в слабой форме.

Теперь рассмотрим игру Γ_2 супервайзера и агента: $g_S = \left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right) K \sum_{j \in C} r_j$,

$$g_i(b_i, u) = k_i(r_i - u_i)^\alpha + K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i] \times \sum_{j \in C'} \left(r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{k_i\alpha}{K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]}}\right) =$$

$$= \begin{cases} k_i r_i^\alpha + K[s_i^0 + (1 - b_i)]\delta \times \sum_{j \in C'} \left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_j\alpha}{K[s_j^0 + (1 - b_j)\delta_j]}}\right),\ i \in I, \\ k_i\left(\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_i\alpha}{K[s_i^0 + (1 - b_i)\delta_i]}}\right)^\alpha + K[s_i^0 + (1 - b_i)]\delta \times \sum_{j \in C'} \left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_j\alpha}{K[s_j^0 + (1 - b_j)\delta_j]}}\right),\ i \in C', \end{cases}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущему случаю, так как в целевой функции изменился только вид первого слагаемого, которое не зависит от размера взятки: $g_i^P = 0$,

$$L_i = k_i(r_i - u_i)^\alpha + Ks_i^0 \sum_{j \in C'} \left(r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{k_i\alpha}{Ks_i^0}}\right) =$$

$$= \begin{cases} k_i r_i^\alpha + Ks_i^0 \sum_{j \in C'} \left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_j\alpha}{Ks_i^0}}\right),\ i \in I, \\ k_i\left(\sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_i\alpha}{Ks_i^0}}\right)^\alpha + Ks_i^0 \sum_{j \in C'} \left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_j\alpha}{Ks_i^0}}\right),\ i \in C'. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия агента при стратегии наказания произвольна: $E_i = \{b_i \in [0; 1]\}$, при этом $K_2 = r^0 K \sum_{j \in C'} \left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\dfrac{k_j\alpha}{Ks_j^0}}\right)$. Во множество D_i входят следующие стратегии супервайзера и агента: $D_i = \{(\delta_i, b_i) \mid b_i \neq 1,\ \delta_i \neq 0\}$, т. е. агент должен получить ненулевую надбавку от общей деятельности. Вычислим значение K_1:

$$K_1 = \max_{\delta_i}\max_{b_i}\left(r^0 + \sum_{i \in N} b_i\delta_i\right) \times$$
$$\times K\sum_{j \in C}\left(r_j - \sqrt[1-\alpha]{\frac{k_j\alpha}{K[s_j^0 + (1-b_j)\delta_j]}}\right)$$

при ограничениях $b_i \neq 1$, $\delta_i \neq 0$, $\sum_{i-1}^{n}\delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n}s_i^0$, откуда $b_i = 1 - \varepsilon$, $\sum_{i-1}^{n}\delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n}s_i^0$, $K_1 = (r^0 + (1 - \varepsilon)\left(r^0 + (1-\varepsilon)\left(1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n}s_i^0\right)\right)K\sum_{j \in C}r_j > r^0K\sum_{j \in C}r_j = K_2$.

Таким образом, оптимальная стратегия супервайзера:

$$\delta_i\begin{cases} = 0,\ b_i \neq 1-\varepsilon, \\ > 0,\ \sum_{i-1}^{n}\delta_i = 1 - r^0 - \sum_{i=1}^{n}s_i^0,\ b_i = 1-\varepsilon. \end{cases}$$

При этом доход агента

$$g_i = \begin{cases} k_ir_i + K\varepsilon\delta_i\sum_{j=1}^{n}u_j,\ i \in I, \\ K[s_i^0 + \varepsilon\delta_i]\sum_{j=1}^{n}u_j,\ i \in C. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

— супервайзер дает агенту совсем незначительную надбавку;

— условие системной согласованности имеет вид $\sum_{i \in N}(k_i/K - (1 - b_i)\delta_i) < 1 - r^0 - t^0$, при этом оптимальная стратегия принципала $s_i^0 = \begin{cases} > k_i/K,\ K > k_i; \\ 0,\ K < k_i. \end{cases}$

3. АДМИНИСТРАТИВНАЯ КОРРУПЦИЯ В СОЧИ-МОДЕЛЯХ

Для анализа административной коррупции рассмотрим СОЧИ-модель в виде

$$g_S(\varepsilon, b, u) = rc(u) + \sum_{j=1}^{n}b_jp_j(r_j - u_j) \to \max,$$
$$0 \le \varepsilon_i \le q_i; \tag{7}$$

$$g_i(\varepsilon_i, b_i, u) = (1 - b_i)p_i(r_i - u_i) + s_ic(u) \to \max,$$
$$0 \le b_i \le 1,\quad q_i - \varepsilon_i \le u_i \le r_i,\quad i \in N. \tag{8}$$

Интерпретация модели (7), (8) заключается в следующем. Если экономическая коррупция возникает по поводу перераспределения общественного дохода, то административная связана с частными интересами агентов. Функция частного интереса $p_i(r_i - u_i)$ возрастает по $r_i - u_i$, однако принципал ограничивает выбор u_i снизу величиной q_i. Поэтому супервайзер в обмен на долю $b_ip_i(r_i - u_i)$ дохода агента берется ослабить это ограничение на величину ε_i. Как и в случае экономической коррупции, функцию взяточничества $\varepsilon_i(b_i)$ можно определить двумя способами. При дескриптивном подходе она считается заданной, а при нормативном ищется как оптимальная гарантирующая стратегия в игре Γ_2 супервайзера с агентами. Примем из общих соображений, что $\varepsilon_i(b_i)$ монотонно возрастает на отрезке [0,1], $\varepsilon_i(0) = 0$, $\varepsilon_i(1) = q_i$.

Дескриптивный подход для линейной модели. Функция взяточничества имеет вид $\varepsilon_i(b_i) = q_ib_i$. Модель (7), (8) есть

$$g_S(\varepsilon, b, u) = rc\sum_{i \in N}u_i + \sum_{j=1}^{n}b_jp_j(r_j - u_j) \to \max,$$

$$g_i(\varepsilon_i, b_i, u) = (1 - b_i)p_i(r_i - u_i) + s_ic\sum_{i \in N}u_i \to \max,$$

$$0 \le b_i \le 1,\quad q_i(1 - b_i) \le u_i \le r_i,\quad i \in N.$$

Условие первого порядка для функции агента дает результаты:

$$u_i = \begin{cases} r_i,\ s_ic > p_i(1-b_i), \\ q_i(1-b_i),\ s_ic < p_i(1-b_i), \end{cases}\quad i \in N.$$

$$b_i = \begin{cases} 0,\ u_i = r_i \text{ или } \dfrac{r_i}{2q_i} + \dfrac{s_ic}{2p_i} > 1, \\ 1 - \dfrac{r_i}{2q_i} - \dfrac{s_ic}{2p_i},\ u_i \neq r_i \text{ и } \dfrac{r_i}{2q_i} + \dfrac{s_ic}{2p_i} < 1. \end{cases}$$

Окончательно

$$u_i = \begin{cases} r_i,\ s_ic > p_i, \\ \dfrac{r_i}{2} + \dfrac{s_icq_i}{2p_i},\ s_ic < \dfrac{r_ip_i}{q_i},\ \dfrac{r_i}{2q_i} + \dfrac{s_ic}{2p_i} < 1, \\ q_i,\ s_ic < p_i,\ \dfrac{r_i}{2q_i} + \dfrac{s_ic}{2p_i} > 1. \end{cases}$$

Отсюда видно, что большая часть ресурсов выделяется агентами на общие цели, а меньше половины частного дохода возвращается агентом супервайзеру в качестве взятки.

Нормативный подход для линейной модели. Задача принципала имеет вид $g_P = \sum_{i \in N} k_i(r_i - u_i) + K\sum_{j=1}^{n} u_j$, $0 \le q_i \le r_i$, задача супервайзера $g_S = rK\sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} b_j k_j(r_j - u_j)$, $0 \le \varepsilon_i \le q_i$, задача агента: $g_i(b_i, u) = (1 - b_i)k_i(r_i - u_i) + Ks_i\sum_{j=1}^{n} u_j$, $q_i - \varepsilon_i \le u_i \le r_i$.

Принципал стремится к системной согласованности в равновесии Нэша игры в нормальной форме агентов, при этом:

$$q_i = u_i^{\max} = \begin{cases} r_i, K > k_i; \\ 0, K < k_i, \end{cases}$$

$$u_i^* = \begin{cases} r_i, s_iK > k_i(1 - b_i); \\ q_i - \varepsilon_i, s_iK < k_i(1 - b_i). \end{cases}$$

Совместив эти два выражения, получим стратегию агента:

$$u_i^* = \begin{cases} r_i, s_iK > k_i(1 - b_i), \\ q_i - \varepsilon_i, s_iK < k_i(1 - b_i), K > k_i, \\ 0, s_iK < k_i(1 - b_i), K < k_i. \end{cases}$$

Системной согласованности могут помешать:

— агенты, которые хотят быть индивидуалистами, но им не позволяет принципал, обозначим множество таких агентов $I_1 = \{s_iK < k_i(1 - b_i), K > k_i\}$, они надеются на помощь супервайзера;

— агенты, которые хотят быть коллективистами, но для принципала желательно, чтобы они были индивидуалистами. Это агенты, для которых $K > k_i$, $s_iK < k_i(1 - b_i)$. Здесь административные ограничения со стороны принципала не работают.

Заметим, что состав этих двух множеств агентов не зависит от принципала. Для системной согласованности необходимо, чтобы: 1) множество агентов $K > k_i$, $s_iK < k_i(1 - b_i)$ было пустым; 2) множество агентов I_1 было пустым либо для таких агентов супервайзер назначил стратегию $\varepsilon_i = 0$. Задачу системной согласованности в слабой форме ставить бессмысленно, так как от принципала не зависит выполнение данных условий.

Теперь рассмотрим игру Γ_2 супервайзера и агента. Целевая функция супервайзера приобретает вид

$$g_S = rK\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{j \in I_1} \varepsilon_j\right) + \sum_{j \in I_0} b_j k_j r_j + \sum_{j \in I_1} b_j k_j \varepsilon_j,$$

$$0 \le \varepsilon_i \le q_i,$$

а функция агента

$$g_i = \begin{cases} s_iK\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{j \in I_1} \varepsilon_j\right), i \in C, \\ (1 - b_i)k_i\varepsilon_i + s_iK\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{j \in I_1} \varepsilon_j\right), i \in I_1, \\ (1 - b_i)k_ir_i + s_iK\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{j \in I_1} \varepsilon_j\right), i \in I_0. \end{cases}$$

Заметим, что супервайзер имеет влияние только на агентов из множества I_1. Целевая функция коллективистов не зависит и от размера взятки, поэтому можно считать $b_i = 0$. При этом условие, чтобы агент был коллективистом, имеет вид $s_iK > k_i$. Индивидуалисты также не надеются на помощь супервайзера, а значит, им незачем платить взятку, поэтому их оптимальная стратегия также $b_i = 0$. Условие индивидуализма агента: $K < k_i$. Заметим, что в таком случае нет агентов, которым выгодно быть коллективистами, несмотря на то, что принципал желает, чтобы они были индивидуалистами. В связи с этим, все дальнейшие рассуждения будут касаться только агентов из множества I_1.

Доминирующая стратегия супервайзера в этом случае

$$\varepsilon_i^D = \begin{cases} q_i, b_ik_i > c, \\ 0, b_ik_i > c. \end{cases}$$

Стратегия наказания есть $\varepsilon_i^P = 0$, т. е. при выборе супервайзером данной стратегии агент не может рассчитывать на ослабление административного ограничения, и ему придется потратить все ресурсы на общие цели. При этом он получит доход

$$L_{i \in I_1} = \max_{b_i} \min_{\varepsilon_i^P} \left[(1 - b_i)k_i\varepsilon_i + Ks_i\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{j \in I_1} \varepsilon_j\right)\right] =$$

$$= \max_{b_i}\left[Ks_i\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{\substack{j \in I_1 \\ j \ne i}} \varepsilon_j\right)\right] = Ks_i\left(\sum_{j \notin I_0} r_j - \sum_{\substack{j \in I_1 \\ j \ne i}} \varepsilon_j\right).$$

Оптимальная стратегия агента при наказании произвольна: $E_i = \{b_i \in [0;1]\}$. При этом

$$K_2 = \max_{\varepsilon_i}\min_{b_i}\left[rK\left(\sum_{j\notin I_0} r_j - \sum_{j\in I_1}\varepsilon_j\right) + \sum_{j\in I_0} b_j k_j r_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j\in I_1} b_j k_j \varepsilon_j\right] = \max_{\varepsilon_i} rK\left(\sum_{j\notin I_0} r_j - \sum_{j\in I_1}\varepsilon_j\right) = rK\sum_{j\notin I_0} r_j.$$

Во множество D_i входят стратегии супервайзера и агента, при которых доход агента больше, чем L_i, т. е. должно выполняться условие $(1 - b_i)k_i\varepsilon_i +$ $+ s_iK\left(\sum_{j\notin I_0} r_j - \sum_{j\in I_1}\varepsilon_j\right) > Ks_i\left(\sum_{j\notin I_0} r_j - \sum_{\substack{j\in I_1\\ j\neq i}}\varepsilon_j\right)$, которое сводится к $k_i\varepsilon_i(1 - b_i) > s_iK\varepsilon_i$, откуда $D_i =$ $= \{(\varepsilon_i, b_i) | b_i < 1 - s_iK/k_i, \varepsilon_i > 0\}$, т. е. агент должен получить возможность какую-то часть ресурсов направить на общие цели. Вычислим значение K_1:

$$K_1 = \max_{\varepsilon_i}\min_{b_i}\left[rK\left(\sum_{j\notin I_0} r_j - \sum_{j\in I_1}\varepsilon_j\right) + \sum_{j\in I_1} b_j k_j r_j\right]$$

при ограничениях $b_{i\in I_1} < 1 - s_iK/k_i$, $\varepsilon_i > 0$, откуда

$$b_i = 1 - s_iK/k_i - \varepsilon,\ \varepsilon_i =$$

$$= \begin{cases} r_i,\ k_i - s_iK - \varepsilon k_i > rK, \\ \varepsilon,\ k_i - s_iK - \varepsilon k_i < rK. \end{cases}$$

Обозначим множество агентов, которые по мнению супервайзера должны быть индивидуалистами, через $I_{11} = \{i \in I_1 \mid k_i - s_iK - \varepsilon k_i > rK\}$, а тех агентов, которые должны быть коллективистами, через $I_{12} = \{i \in I_1 \mid k_i - s_iK - \varepsilon k_i < rK\}$. Тогда

$$K_1 = rK\left(\sum_{j\notin\in C\cup I_{12}} r_j - \sum_{j\in I_{11}}\varepsilon)\right) +$$

$$+ \sum_{j\in I_{12}}(k_j - s_iK - \varepsilon)\varepsilon +$$

$$+ \sum_{j\in I_{11}}(k_j - s_iK - \varepsilon)r_i > K_2.$$

Оптимальная стратегия супервайзера:

$$\varepsilon_{i\in I_1} =$$

$$= \begin{cases} 0,\ b_{i\in I_1} \neq 1 - s_iK/k_i - \varepsilon, \\ r_i,\ b_{i\in I_1} = 1 - s_iK/k_i - \varepsilon,\ k_i - s_iK - \varepsilon k_i > rK, \\ \varepsilon,\ b_{i\in I_1} = 1 - s_iK/k_i - \varepsilon,\ k_i - s_iK - \varepsilon k_i < rK, \end{cases}$$

при этом доход агента

$$g_i = \begin{cases} s_iK\left(\sum_{j\in C\cup I_{12}} r_j - \sum_{j\in I_{11}}\varepsilon\right),\ s_iK > k_i, \\ (s_iK + k_i\varepsilon)\varepsilon + s_iK\left(\sum_{j\in C\cup I_{12}} r_j - \sum_{j\in I_{11}}\varepsilon\right), \\ s_iK < k_i < K,\ \ k_i - s_iK - \varepsilon k_i < rK, \\ (s_iK + k_i\varepsilon)r_i + s_iK\left(\sum_{j\in C\cup I_{12}} r_j - \sum_{j\in I_{11}}\varepsilon\right), \\ s_iK < k_i < K,\ \ k_i - s_iK - \varepsilon k_i < rK, \\ k_ir_1 + s_iK\left(\sum_{j\in C\cup I_{12}} r_j - \sum_{j\in I_{11}}\varepsilon\right),\ K < k_i. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать выводы:

— супервайзер может воздействовать только на тех агентов, которые хотят быть индивидуалистами, хотя принципал принуждает их быть коллективистами;

— если агенты, указанные выше, присутствуют, то системной согласованности добиться нельзя, условие системной согласованности имеет вид $\forall i$: $s_iK > k_i \vee k_i > K$;

— указанным агентам супервайзер позволяет потратить на частные цели либо лишь незначительную часть ресурсов (если он считает, что агент должен быть коллективистом), либо все ресурсы (если он считает, что агент должен быть индивидуалистом, именно ожидания этой части агентов ему удается оправдать).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен учет административной и экономической коррупции в СОЧИ-моделях, причем в каждом случае полученная модель исследуется при помощи двух подходов: дескриптивного и нормативного. Сформулируем полученные результаты.

- В случае дескриптивного подхода при экономической коррупции размер взятки зависит не от уровня доходов, получаемых агентами от общей и частной деятельности, а только от эластичности функции взяточничества.
- В случае нормативного подхода при экономической коррупции супервайзер дает агенту незначительную надбавку за почти 100 %-й откат. При этом системная согласованность, как и в случае отсутствия коррупции, может достигаться только тогда, когда все агенты разделяются на два класса: коллективистов и индивидуалистов.

- В случае экономической коррупции при дескриптивном подходе на общие цели выделяется больше ресурсов, чем при нормативном, но почти вся разница от дохода уходит на повышение дохода агента от общей деятельности. При этом на взятку супервайзеру идет меньше средств. Следовательно, при нормативном подходе доход супервайзера больше, а доход агента меньше, чем при дескриптивном.
- В случае дескриптивного подхода при административной коррупции большая часть ресурсов выделяется агентами на общие цели, а меньше половины частного дохода возвращается агентом супервайзеру в качестве взятки.
- В случае нормативного подхода при административной коррупции супервайзер может воздействовать лишь на тех агентов, которым выгодно быть индивидуалистами, хотя принципалу выгодно, чтобы они были коллективистами. Этой группе агентов принципал позволяет выделить на частные цели либо лишь незначительную часть ресурсов, либо все ресурсы (тем самым удовлетворить желание агента), по усмотрению самого принципала. Иначе говоря, супервайзер может помочь в полной мере лишь тем агентам, которые и по мнению супервайзера, и по мнению агента должны быть индивидуалистами.
- В случае административной коррупции при нормативном подходе группа агентов, которую не поддерживает супервайзер, на общие цели выделяет больше ресурсов, чем при дескриптивном. Группа агентов, поддерживаемая супервайзером, наоборот, при нормативном подходе расходует меньше средств на общие цели, чем при дескриптивном. Размер взятки при нормативном подходе для агентов достаточно большой, обеспечивающий лишь небольшую надбавку над официальным доходом.

Эти результаты можно применить для выявления закономерностей прогнозирования поведения участников и способов борьбы с коррупцией в иерархических системах, например, таких как законодательный орган — чиновник органа исполнительной власти — хозяйствующие субъекты, министерство — местный орган лицензирования — претенденты на лицензию, руководство института (больницы) — преподаватель (врач) — студенты (пациенты), собственник или генеральный директор предприятия — менеджер среднего уровня — рядовые работники и др. Выполненное исследование позволяет лучше понять на качественном уровне природу административной и экономической коррупции. При наличии соответствующих эмпирических данных, обеспечивающих идентификацию рассмотренных моделей, возникает возможность сформулировать для принципала конкретные рекомендации по созданию условий, делающих коррупцию менее выгодной для потенциальных взяточников или взяткодателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Algorithmic* Game Theory / Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 754 p.
2. *Бурков В.Н., Опойцев В.И.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 1. — С. 103—114.
3. *Горелик В.А.* Иерархические оптимизационно-координирующие системы // Кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 87—94.
4. *Гермейер Ю.Б., Ватель И.А.* Игры с иерархическим вектором интересов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1974. — № 3. — С. 54—69.
5. *Кукушкин Н.С.* О существовании устойчивых исходов в теоретико-игровой модели экономики с общественными благами // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 320, № 1.— С. 25—28.
6. *Kukushkin N.S.* A Condition for Existence of Nash Equilibrium in Games with Public and Private Objectives // Games and Economic Behavior. — 1994. — Vol. 7, iss. 2. — P. 177—192.
7. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Статические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 42. — С. 195—216.
8. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // Математическая теория игр и приложения. — 2015. — Т. 7, вып. 1. — С. 50—73.
9. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Механизмы согласования интересов в модели распределения ресурсов // Системы управления и информационные технологии. — 2014. — № 3.2 (57). — С. 225—231.
10. *Угольницкий Г.А.* Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2016. — 940 с.
11. *Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A.* System Compatibility, Price of Anarchy and Control Mechanisms in the Models of Concordance of Private and Public Interests // Advances in Systems Science and Applications. — 2015. — Vol. 15. — N 1. — P. 45—59.
12. *Mishra A.* Corruption, hierarchies and bureaucratic structure // International Handbook on the Economics of Corruption / ed. by S. Rose-Ackerman. — Cheltenham, UK; Northampton, MA, USA, 2006. — P. 189—215.
13. *Антоненко А.В., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Статические модели борьбы с коррупцией в иерархических системах управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 4. — С. 165—176.
14. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991. — 288 с.
15. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2007. — 584 с.
16. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 304 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Горбанева Ольга Ивановна — канд. физ.-мат. наук,
✉ gorbaneva@mail.ru,

Угольницкий Геннадий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой, ✉ ougoln@mail.ru,

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону.