

МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

О.И. Горбанева, Г.А. Угольницкий, А.Б. Усов

Представлена концепция математического моделирования коррупции в иерархических системах управления. Сформулированы основные положения концепции, даны определения основных используемых при моделировании понятий. Построены и исследованы ряды последовательно усложняемых моделей административной и экономической коррупции в статическом и динамическом случаях. Выявлены зависимости коррупционного поведения и описаны возможности борьбы с коррупцией при различных значениях параметров моделей.

Ключевые слова: иерархическая система управления, коррупция, оптимизационные и теоретико-игровые модели.

ВВЕДЕНИЕ

Пионерской работой по математическому моделированию коррупции считается статья С. Роуз-Аккерман [1]. Указанная работа является адаптацией идей Г. Беккера, относящихся к моделированию абстрактного рода преступлений и методике выбора соответствующих наказаний [2]. Согласно Беккеру, борьба с преступностью целесообразна, если в ее результате сокращение ущерба от преступности превысит затраты на борьбу. Эти идеи развиты в монографиях Роуз-Аккерман [3, 4].

Подробный обзор и анализ статических моделей коррупции в иерархических организациях дан в работе А. Мишры [5], где имеется обширная библиография. Детальный разбор моделей этого класса приводится также в учебном пособии [6]. Среди работ российских авторов отметим работы [7–11].

Количество публикаций по динамическим моделям коррупции в иерархических системах управления не слишком велико. В основном такие модели являются многошаговыми теоретико-игровыми, в которых динамика управляемой системы явно не описывается. В одной из первых работ этого направления [12] рассматривается рекурсивная постановка задачи, в которой учитывается, что если контролер вступает в сделку с проверяемым, то он сам может быть пойман и ему, в свою очередь, придется включиться в коррупционную це-

почку уже в качестве дающей стороны. Авторы показали, что при определенных условиях повышение вероятности наказания имеет больший эффект в борьбе с коррупцией, чем увеличение штрафа. В статье [13] рассматривается двухшаговая модель «принципал — контролер — агент», в которой принципал использует нелегальный характер сделок контролера и исполнителя и может благодаря этому в долгосрочном периоде получить больший выигрыш, чем в краткосрочном. В статье [14] показано, что при правильном определении значений переговорной силы институциональные особенности китайской системы лицензирования делают коррупцию структурно устойчивым исходом, а некоторые действия по контролю могут привести к контринтуитивным последствиям. В качестве адекватной меры борьбы с коррупцией предлагается введение конкуренции среди лицензирующих органов. В работе [15] изучается «цепочка» бюрократических органов, которую должен пройти предприниматель для одобрения своего проекта. Детально характеризуются равновесия в «триггерных» стратегиях, позволяющих минимизировать социальные потери от коррупции. В статье [16] изучается влияние природных ресурсов на коррупцию и его зависимость от качества демократических институтов. На основе теоретико-игровой модели показано, что природная рента увеличивает коррупцию только при слабых институтах. В работе [17] исследуется роль «несклонности



к вине» у чиновников на основе модели повторяющейся психологической игры. Изучается зависимость поведения чиновников и лоббирующих структур от общественных ожиданий, которые могут быть постоянными или меняться со временем. Отдельно отметим статьи [18, 19], в которых исследуются модели экономического роста с учетом коррупции.

Авторская концепция моделирования коррупции в иерархических системах управления [20–37] основывается на положениях, сформулированных в § 1. В основном настоящая статья представляет собой реферативное изложение авторского подхода к моделированию коррупции, подробно изложенного в монографии [38].

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- Базовой схемой моделирования служит иерархическая система «принципал — супервайзер — агент-объект» в различных модификациях и ее теоретико-игровое исследование. В динамических моделях состояние объекта описывается явно, в статических рассматривается только воздействие агента на объект. Коррупции подвержен средний уровень управления (супервайзер), верхний уровень управления (принципал) считается некоррупцированным и выполняет функции борьбы с коррупцией.
- Предполагаются известными определенные требования устойчивого развития управляемой системы (объекта). В динамических моделях они формулируются в терминах состояния объекта, а в статических — в терминах воздействия агента на объект. Если требования устойчивого развития выполняются, то задача принципала считается решенной даже при наличии коррупции.
- Пары «принципал — супервайзер» и «супервайзер — агент» состоят в отношениях «ведущий — ведомый». Ведущий игрок (принципал или супервайзер соответственно) для достижения своих целей применяет методы принуждения (преимущественно административно-законодательные воздействия) и побуждения (преимущественно экономические воздействия); при математической формализации принуждение означает воздействие ведущего на множество допустимых стратегий ведомого (как правило, без обратной связи), а побуждение — на функцию выигрыша ведомого (как правило, с обратной связью).
- Различаются административная коррупция, при которой за взятку ослабляются административные требования, и экономическая коррупция, при которой взятка позволяет ослабить экономические требования верхнего уровня управления.

При моделировании административная коррупция означает принуждение агента супервайзером с обратной связью по размеру взятки, а экономическая коррупция — побуждение агента супервайзером с дополнительной обратной связью по размеру взятки.

- Коррупция представляет собой угрозу устойчивому развитию объекта, поскольку взяточнику выгодно в обмен на взятку ослаблять требования устойчивого развития. С другой стороны, коррупция есть специфическая форма обратной связи в иерархических системах управления, в силу которой управляющие воздействия становятся функциями размера взятки.
- Коррупция существует в форме попустительства и вымогательства. При попустительстве законодательно установленный набор услуг гарантируется, а дополнительные послабления предоставляются в обмен на взятку. При вымогательстве взятка требуется уже для предоставления базового уровня услуг, в противном случае требования ужесточаются.
- Поведение взяточника характеризуется сговорчивостью, т. е. готовностью ослабить административные или экономические требования в обмен на взятку, и жадностью, т. е. ценой этих послаблений. Предложен набор количественных показателей сговорчивости и жадности.
- Взятка может представлять собой часть выигрыша, получаемого агентом благодаря административным или экономическим послаблениям («откат»), либо некоторую абсолютную сумму («откуп»). В обоих случаях переменную взятки удобно считать долей от коррупционного выигрыша либо от общего дохода агента соответственно.
- При описании коррупции в иерархических системах управления с учетом требований устойчивого развития применимы дескриптивный и нормативный подходы. В случае дескриптивного подхода функции административной или экономической коррупции считаются известными, и основная задача состоит в идентификации их параметров по статистическим данным. В случае нормативного подхода вид функции взяточничества определяется в результате решения оптимизационной или теоретико-игровой задачи.
- Исследование коррупции в системе «принципал — супервайзер — агент» возможно с трех позиций. Если функция взяточничества известна, то с позиции агента коррупция может быть описана оптимизационной моделью. С позиции супервайзера возникает иерархическая параметрическая игра. С позиции принципала задача борьбы с коррупцией заключается в нахождении таких значимых параметров управления, при которых с учетом

найденной оптимальной стратегии супервайзера удовлетворяются требования устойчивого развития.

- Задача идентификации (выбора класса используемых функций и определения численных значений параметров) здесь отнюдь не тривиальная и требует проведения специальных исследований и экспертиз. Методологический смысл идентификации состоит в том, что каждый набор значений параметров определяет конкретную социально-экономико-политическую систему, подверженную коррупции.

- Целесообразно строить «генетические» ряды последовательно усложняемых моделей, все более точно описывающих реальные феномены коррупции в иерархических системах управления. Основная логическая схема такого усложнения в статике имеет вид «оптимизационные модели — иерархические игры двух лиц — иерархические игры трех лиц», а в динамике — «задачи оптимального управления — иерархические динамические игры двух лиц — иерархические динамические игры трех лиц».

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Статические модели

Последовательность статических моделей коррупции имеет вид «оптимизационная модель — иерархическая игра двух лиц — иерархическая игра трех лиц». В случае экономической коррупции последняя модель в базовой форме может быть записана как

$$J_p(p, r, b) = (1 - p)r \rightarrow \max, \quad 0 \leq p \leq \bar{p}, \quad (1)$$

$$J_S(p, r, b) = pr + b \rightarrow \max, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (2)$$

$$J_A(p, r, b) = -r - b \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (3)$$

Здесь J_p , J_S и J_A — функции выигрыша принципала, супервайзера и агента соответственно, p — доля собранных налогов, идущая на поощрение супервайзера, \bar{p} — максимально возможное для принципала значение p , r — налоговая ставка, r_0 — законодательный размер налоговой ставки, b — доля дохода агента, идущая на взятки. Предполагается, что при наличии экономической коррупции $r = r(b)$, т. е. реальный размер налоговой ставки может зависеть от взятки (например, налоговый инспектор может закрыть глаза на налоговую недоимку или исчисление налогов по незаконной льготной схеме).

С позиции агента рассматривается задача оптимизации (3) при заданной функции $r(b)$. Например, при $r(b) = r_0 - Ab^k$, $k > 0$, оптимальный для агента размер взятки есть

$$b^* = \begin{cases} (kA)^{1/(1-k)}, & 0 < k < 1, \\ 0, & k > 1 \wedge 0 < A < 1, \\ 1, & k > 1 \wedge 1 < A < 1 + r_0. \end{cases}$$

Следующим элементом «генетического ряда» служит модель (2), (3), рассматриваемая как игра Гермейера Γ_2 [39]. В этом случае ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{r}^*(b) = \begin{cases} 0, & b = r_0 - \varepsilon, \\ r_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для иерархической игры трех лиц (1)—(3) можно вывести условия выгоды взятки $p\Delta r < b < \Delta r$, $\Delta r = r_0 - r(b)$.

В случае административной коррупции иерархическая игра трех лиц в базовой форме может быть записана как

$$J_p(q, s, u, b) = -M|s - s_0| \rightarrow \max, \quad 0 \leq q \leq \bar{s}, \quad (4)$$

$$J_S(q, s, u, b) = bf(u) \rightarrow \max, \quad q \leq s \leq \bar{s}, \quad (5)$$

$$J_A(q, s, u, b) = (1 - b)f(u) \rightarrow \max, \\ 0 \leq u \leq 1 - s, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (6)$$

Здесь J_p , J_S и J_A — вновь функции выигрыша принципала, супервайзера и агента соответственно; b — доля дохода агента, идущая на взятки; u — усилие агента; $f(u)$ — доход агента как функция его усилия; s — переменная управления супервайзера такая, что величина $1 - s$ ограничивает сверху усилие агента («квота»); s_0 — законодательно установленное значение s ; \bar{s} — максимально возможное значение s ; q — переменная управления принципала, ограничивающая величину s снизу; M — коэффициент штрафа, налагаемого на принципала при нарушении условия устойчивого развития $s = s_0$. Предполагается, что при наличии административной коррупции $s = s(b)$, т. е. в обмен на взятку супервайзер может увеличивать квоту (например, разрешать больший вылов рыбы или выдавать разрешительные лицензии недостаточно подготовленным соискателям).

С позиции агента рассматривается задача оптимизации (6) при заданной функции $s(b)$. Поскольку естественно считать, что функция $f(u)$ мо-



нотонно возрастает, то задачу (6) можно переписать в виде

$$J_A(b) = (1 - b)f(1 - s(b)) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

Например, при $g(b) = (1 - b)(s_0 + Ab)^k$ оптимальный для агента размер взятки

$$b^* = \begin{cases} 0, & A < s_0/k, \\ \frac{kA - s_0}{(1 - k)A}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующим элементом «генетического ряда» служит модель (5), (6), рассматриваемая как игра Гермейера Γ_2 . В этом случае при $f(u) = \sqrt{u}$ ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} 0, & b = 1 - \varepsilon - \sqrt{1 - \bar{s}}, \\ \bar{s}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

При рассмотрении полной модели (4)–(6) как принципал, так и агент могут применять стратегии принуждения либо побуждения. Если они оба применяют принуждение, то при $f(u) = \sqrt{u}$ ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} q, & b = 1 - \varepsilon - \sqrt{1 - \bar{s}}, \\ \bar{s}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и тогда выбором $q = s_0$ принципал обеспечивает выполнение требований устойчивого развития. В остальных случаях ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид (7), и принципал не может воздействовать на супервайзера.

2.2. Динамические модели

Последовательность динамических моделей коррупции имеет вид «задача оптимального управления — иерархическая динамическая игра двух лиц — иерархическая динамическая игра трех лиц». Без существенного ограничения общности будем говорить о задачах оптимальной эксплуатации биоресурсов. В этом случае уравнение динамики управляемой системы с начальными условиями можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = h(x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \quad (8)$$

Здесь $x(t)$ — биомасса эксплуатируемой (например, рыбной) популяции, $u(t)$ — доля вылова, h — некоторая функция динамики численности одно-

родной популяции; x_0 — значение биомассы в начальный момент времени. В качестве примера функции $h(x(t))$ рассмотрим функцию Мальтуса, т. е. $h(x(t)) = \varepsilon x(t)$, $\varepsilon = \text{const}$.

Общий доход от рыболовства равен aux , где a — цена единицы биомассы (зависимость от времени для простоты опускаем). Будем считать, что доля r этой величины (где r можно трактовать как налоговую ставку с учетом возможной коррупции) изымается в пользу принципала (государства), а доля $1 - r$ остается агенту (рыболовному предприятию). Возможны и другие интерпретации переменной экономического воздействия r , например, штраф. В свою очередь, принципал отдает долю p от своей части в качестве зарплаты (или премии) супервайзеру (чиновнику службы рыбного хозяйства), а долю $1 - p$ оставляет себе. Наконец, агент выделяет долю b своего дополнительного дохода при налоговой ставке, которая в результате коррупции фактически оказывается меньше законодательно установленной r_0 , на взятку супервайзеру. Таким образом, целевой функционал агента можно записать в виде

$$J_A(r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T (a(1 - r(t))u(t) - ab(t)(r_0 - r(t))u(t) - cu^2(t))x(t)dt \rightarrow \max. \quad (9)$$

Здесь $cu^2(t)$ — затраты агента на вылов доли биомассы $u(t)$; T — период рассмотрения; $a(r_0 - r(t))u(t)x(t)$ — налоговая недоимка (экономия агента на недоплате налогов, на которую супервайзер «закрывает глаза» за взятку); $ab(t)(r_0 - r(t))u(t)x(t)$ — «откат» агента супервайзеру с этой суммы.

При экономической коррупции налоговая ставка представляет собой функцию доли взятки, определяющей размер отката. Если рассмотрение ведется с позиции агента, то эта функция считается заданной. Например, можно использовать нелинейную функцию попустительства вида

$$r(b(t)) = r_0(1 - b^k(t)), \quad k = \text{const}. \quad (10)$$

Здесь в левой части стоит фактическая ставка налога, первое слагаемое правой части r_0 — ее законодательное значение, а второе слагаемое — его послабление в обмен на взятку. В частности, $r(0) = r_0$, $r(1) = 0$. Подставляя значение (10) в целевой функционал (9), получаем

$$J_A(r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T (a(1 - r_0 + r_0 b^k(t) - r_0 b^{k+1}(t))u(t) - cu^2(t))x(t)dt. \quad (11)$$

Добавляя ограничения на управления

$$0 \leq b(t) \leq 1; \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad (12)$$

получаем задачу оптимального управления (8), (11), (12). Конечно, наряду с функцией (10) можно использовать и другие функции экономической коррумпции. Большой интерес представляет идентификация функции $r(b)$ на основе фактических данных о коррумпции. Мы оставляем эту непростую задачу для дальнейших исследований.

Если рассмотрение ведется с позиции супервайзера, то функция $\tilde{r}(t) = r(b(t))$ ищется как решение игры типа Γ_{2t} между супервайзером и агентом [39]. Целевой функционал супервайзера можно записать в виде

$$J_S(\cdot) = \int_0^T ([p(t)r(t) + b(t)(r_0 - r(t))]au(t)x(t) - K\mu(r_0 - r(t)))dt \rightarrow \max. \quad (13)$$

Он рассматривается с ограничениями на управления

$$0 \leq r(t) \leq r_0. \quad (14)$$

Второе слагаемое в подынтегральной функции в выражении (13) представляет собой штраф, налагаемый на супервайзера при обнаружении налоговой недоимки, где K — размер штрафа, μ — вероятность поимки. Значения K и μ характеризуют возможности принципала по борьбе с коррумпцией (т. е. обеспечению условия $r(t) = r_0$) путем побуждения. В целом, соотношения (8), (9) и (12)—(14) определяют дифференциальную иерархическую игру двух лиц вида Γ_{2t} .

Наконец, целевой функционал принципала можно записать как

$$J_P(p(\cdot), r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T [au(t)x(t)(1 - p(t))r(t) - M(x(t) - \bar{x})^2]dt \rightarrow \max. \quad (15)$$

Здесь \bar{x} — значение биомассы, оптимальное для устойчивого состояния популяции; M — коэффициент штрафа, налагаемого на принципала при отклонении текущего значения биомассы от оптимального. Предполагается, что принципал применяет метод побуждения, которому соответствует управляющая переменная

$$0 \leq p(t) \leq 1. \quad (16)$$

Первое слагаемое в подынтегральной функции в выражении (15) означает доход принципала, второе — штраф, налагаемый на него при нарушении

требований устойчивого развития. В целом соотношения (8), (9) и (12)—(16) определяют дифференциальную иерархическую игру трех лиц. Ее регламент зависит от применяемых принципалом методов управления. Если принципал применяет побуждение — то игра Γ_{1t} или Γ_{2t} в зависимости от того, считается ли функция $p(t)$ зависящей только от времени или также от управления супервайзера. Игра между супервайзером и агентом всегда имеет вид Γ_{2t} [35], поскольку при описании коррумпции принципиально наличие обратной связи по размеру взятки.

Задача оптимального управления (8), (11), (12) решается аналитически (вид решения опустим в силу громоздкости). Для решения динамических иерархических игр двух и трех лиц предлагаются алгоритмы, основанные на изложенных в работе [40] идеях.

Последовательность динамических моделей административной коррумпции структурно аналогична представленной выше. Различие заключается в том, что теперь квота на долю вылова представляет собой функцию взятки, что приводит к задаче оптимального управления со связанными ограничениями. Для решения таких задач и динамических иерархических игр на их основе построены соответствующие алгоритмы.

3. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Разработаны прикладные модели коррумпции при управлении производственными системами и инвестиционно-строительными проектами, модели борьбы с хищениями электроэнергии, модели распределения ресурсов с учетом коррумпции, динамические модели эксплуатации биоресурсов и контроля качества водных ресурсов. Ввиду ограниченного объема статьи рассмотрим только два примера.

3.1. Модели коррумпции при управлении инвестиционно-строительными проектами

Рассмотрим модель экономической коррумпции в постановке:

$$g_1(r, b) = (k + b)f(r) - pMb \rightarrow \max, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$g_2(r, b) = (1 - b)f(r) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (17)$$

Пусть агент участвует в конкурсе, проводимом супервайзером; здесь r — выделяемый при победе на конкурсе ресурс (в долях от единицы), $f(r)$ — доход агента от его использования, k — коэф-



фициент заинтересованности супервайзера в эффективном использовании ресурса (в долях от единицы), b — доля взятки, p — вероятность обнаружения взятки, M — штраф супервайзера в случае обнаружения взятки. Положим $f(r) = a\sqrt{r}$ и будем считать, что $\tilde{r} = r(b)$. Применение теории Гермейера дает оптимальную гарантирующую стратегию супервайзера в виде

$$\tilde{r}^*(b) = \begin{cases} 1, & b = b^* = \begin{cases} 1, & a > pM, \\ 0, & a < pM, \end{cases} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

Стратегия (18) эффективна при $a > pM$; в этом случае справедливо $g_1(r^*, b^*) = a > 0 = g_1(0, 0)$. При $a < pM$ стратегия (18) эффективна лишь формально, так как в любом случае оптимальной стратегией агента является отказ от дачи взятки, при этом $g_1(0, 0) = g_1(r^P, 0) = 0$. Итак, коррупция экономически невыгодна агенту, если его производственные возможности меньше ущерба супервайзера при обнаружении взятки, в противном случае агенту приходится давать максимальную взятку.

Обобщим модель (17) для случая древовидной структуры управления с супервайзером и несколькими агентами в виде

$$g_S(r, b) = \sum_{i=1}^n (k + b_i) a_i \sqrt{r_i} - pM \sum_{i=1}^n b_i \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1, \quad r_i \geq 0,$$

$$g_i(r_i, b_i) = a_i(1 - b_i) \sqrt{r_i} \rightarrow \max,$$

$$0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $a_i \sqrt{r_i}$ — производственная функция i -го агента, a_i — тип агента, характеризующий его производственные возможности, r_i — выделяемый i -му агенту ресурс в обмен на взятку b_i . Суммарный доход системы определяется величиной $G = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{r_i}$; условие $G \geq A$ можно трактовать как требование устойчивого развития.

В рамках дескриптивного подхода к моделированию рассмотрим сначала бескоррупционный механизм распределения ресурсов пропорционально производственным возможностям агентов вида

$$\tilde{r}_i^0 = r_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \left/ \sum_{j=1}^n a_j \right., \quad b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$G_0 = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{r_i} \left/ \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j} \right., \quad g_S^0 = kG^0.$$

Теперь рассмотрим коррупционный механизм распределения ресурсов пропорционально размерам взяток

$$\tilde{r}_i^b = r_i(b_1, \dots, b_n) = b_i \left/ \sum_{j=1}^n b_j \right., \quad i = 1, \dots, n.$$

На нижнем уровне управления возникает игра агентов в нормальной форме

$$g_i(b_1, \dots, b_n) = a_i(1 - b_i) \sqrt{b_i} \left/ \sqrt{\sum_{j=1}^n b_j} \right. \rightarrow \max,$$

$$0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Равновесие по Нэшу в игре (19) имеет вид $b_1 = \dots = b_n = b^*$, $b^* = \frac{n-1}{3n-1}$, откуда $r_i(b^*, \dots, b^*) = 1/n$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i;$$

$$g_S^b = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(k + \frac{n-1}{3n-1} \right) \sum_{i=1}^n a_i - \frac{pMn(n-1)}{3n-1}.$$

Для сравнения результатов в бескоррупционном и коррупционном случаях положим $n = 2$ и рассмотрим два характерных варианта.

1) $a_1 = a_2 = a$.

$$G^0 = \frac{2a\sqrt{a}}{\sqrt{2a}} = a\sqrt{2}, \quad g_S^0 = ka\sqrt{2},$$

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{2}} 2a = a\sqrt{2} = G^0,$$

$$g_S^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (k - 1/5)2a = \frac{(5k+1)a\sqrt{2} - 2pM}{5},$$

$$g_S^b - g_S^0 = a\sqrt{2} - 2pM/5.$$

Таким образом, при равенстве производственных возможностей агентов суммарные доходы системы в коррупционном и бескоррупционном случаях совпадают. Чтобы сделать коррупционный механизм невыгодным для супервайзера, необходимо обеспечить выполнение условия $2pM > a\sqrt{2}$.

$$2) a_1 = 2a, a_2 = a.$$

$$G^0 = \frac{2a\sqrt{2a} + a\sqrt{a}}{\sqrt{a+2a}} = \frac{a\sqrt{3}(2\sqrt{2}+1)}{3}, \quad g_S^0 = kG^0,$$

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{2}} 3a = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \quad g_S^b = \frac{3a(\sqrt{2}) - 4pM}{10},$$

$$G^0 - G^b = \frac{a}{2}(2\sqrt{6} + \sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \approx 1,2a > 0,$$

$$g_S^b - g_S^0 = (5ka(9\sqrt{2} - 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}) + 9a\sqrt{2} - 12pM)/30 \approx (a(12,7 - 0,25k) - 12pM)/30.$$

Таким образом, при двукратном различии производственных возможностей агентов суммарный доход системы при коррупции снижается. Чтобы сделать коррупцию невыгодной для супервайзера, следует обеспечить выполнение условия (приближенного) $12pM > a(12,7 - 0,25k)$.

3.2. Модели борьбы с хищениями электроэнергии

Рассмотрим иерархическую систему вида принципал (энергетическая компания) — супервайзер (работник-контролер) — агент (обслуживаемое предприятие). Обозначим: p — доля от дохода компании, идущая на премию работнику; q — доля выявленных случаев подлога; b — доля «отката»; s — сообщаемое контролером значение энергопотребления, кВт·ч; r — истинное значение энергопотребления, кВт·ч, c — цена 1 кВт·ч электроэнергии, руб.; a — затраты компании на выявление всех случаев подлога, руб.; M — штраф за подлог, руб./кВт·ч.

Тогда имеем: cs — доход компании; pcs — премия работника; $c(r - s)$ — цена скрытого энергопотребления (доход от недоплаты); $bc(r - s)$ — «откат»; aq — затраты компании на контроль; $Mq(r - s)$ — штраф при выявлении подлога в размере $r - s$.

Модель можно записать в виде

$$g_p(p, q, s) = (1 - p)cs - aq \rightarrow \max, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (20)$$

$$g_S(p, q, s, b) = pcs + (bc - Mq)(r - s) \rightarrow \max, \quad 0 \leq s \leq r, \quad (21)$$

$$g_A(s, b) = c(1 - b)(r - s) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (22)$$

Рассмотрим сначала ситуацию с позиции агента с функцией выигрыша (22). Пусть функция

«информационной коррупции» $s = s(b)$ известна. В простейшем иллюстративном случае будем считать ее линейной функцией размера взятки: $s(b) = r(1 - b)$.

Таким образом, в отсутствие коррупции ($b = 0$) контролер сообщает принципалу истинное значение потребления $s = r$, а при максимально возможном «откате» $b = 1$ не показывает потребление вообще ($s = 0$). Тогда задача оптимизации агента имеет вид

$$g_A(b) = crb(1 - b) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1,$$

ее очевидное решение $b^* = 1/2$, при этом

$$s^* = r/2, \quad g_A(b^*) = cr/4, \quad cb^*(r - s^*) = cr/4,$$

$$g_p(p, q, s^*) = (1 - p)cr/2 - aq.$$

Далее, рассматривая задачу оптимизации супервайзера (20), получаем условие неманипулируемости механизма передачи информации о потреблении электроэнергии:

$$Mq \geq c(b - p). \quad (23)$$

В этом случае $s^* = r$, т. е. супервайзеру выгодно сообщать истинное значение энергопотребления. Заметим, что при нарушении условия (23) супервайзеру, напротив, выгодно вообще не показывать энергопотребление ($s^* = 0$).

Теперь рассмотрим иерархическую игру Γ_2 (21), (22) супервайзера и агента, считая управления принципала p, q параметрами. Тогда оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера (т. е. механизм управления, который он сообщает агенту в качестве правила своего поведения) имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} r, & Mq > c(b - r), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это правило побуждает агента выбирать долю отката из условия $b > r + Mq/c$, чтобы избежать применения супервайзером стратегии наказания $r^P(b) = r$. Итак, при любом «откате» супервайзеру выгодно сообщать истинную информацию об энергопотреблении, если выполнено условие неманипулируемости (23), и вообще не показывать (на практике — максимально занижать) его значение, если условие (23) нарушается. Поэтому для борьбы с хищениями принципал должен обеспечить выполнение условия (23) различными методами иерархического управления (принуждением или



побуждением). Решения задач принуждения и побуждения имеют вид соответственно

$$q^* = \begin{cases} 1, & c(b-p)/M > 1, \\ c(b-p)/M, & 0 \leq c(b-p)/M \leq 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$p^* = \begin{cases} 1, & b - Mq/c > 1, \\ b - Mq/c, & 0 \leq b - Mq/c \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что чем больше доля «отката», тем значительнее должны быть усилия принcipала по борьбе с коррупцией как административными, так и экономическими методами. При некоторых значениях параметров оптимальное решение становится экономически нереальным (принципал должен отдать все средства на премию или контроль).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные при моделировании коррупции в иерархических системах управления (ИСУ).

- Разработана концепция моделирования коррупции в ИСУ на основе теории управления устойчивым развитием, ее основные положения апробированы при построении конкретных моделей.
- Построены и исследованы теоретические статические модели административной и экономической коррупции в одно-, двух- и трехуровневых системах управления («генетические ряды» моделей вида «задача оптимизации — иерархическая игра двух лиц — иерархическая игра трех лиц»). Обосновано различие между указанными типами коррупции, а также между попустительством и вымогательством при математической формализации. Предложены показатели сговорчивости и жадности взяточника. Найдены зависимости стратегий поведения взяточника от параметров модели.
- Построены и исследованы теоретические динамические модели административной и экономической коррупции в одно-, двух- и трехуровневых системах управления («генетические ряды» моделей вида «задача оптимального управления — динамическая иерархическая игра двух лиц — динамическая иерархическая игра трех лиц»). Даны определения равновесий принуждения и побуждения с учетом требований устойчивого развития при коррупции, предложены алгоритмы их нахождения.
- Построены и исследованы статические оптимизационные и теоретико-игровые модели управ-

ления инвестиционно-строительными проектами в условиях коррупции, реализован и апробирован соответствующий программный комплекс.

- Построены и исследованы модели управления качеством производственных систем различной структуры в условиях коррупции.
- Построены и исследованы динамические ряды моделей управления качеством водных ресурсов и эксплуатации биологических ресурсов в условиях коррупции.
- Построены и исследованы модели распределения ресурсов в ИСУ с учетом коррупции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rose-Ackerman S.* The Economics of Corruption // *Journal of Public Economics.* — 1975. — N 4. — P. 187–203.
2. *Becker G.* Crime and Punishment: An Economic Approach // *Journal of Political Economy.* — 1968. — N 76. — P. 169–218.
3. *Rose-Ackerman S.* Corruption: A Study in Political Economy. — N.-Y.: Academic Press, 1978. — 258 p.
4. *Rose-Ackerman S.* Corruption and Government: Causes, Consequences and Reform. — Cambridge University Press, 1999. — 266 p.
5. *Mishra A.* Corruption, hierarchies and bureaucratic structure. In *International Handbook on the Economics of Corruption* / Ed. S. Rose-Ackerman. — Edward Elgar. — 2006. — P. 189–215.
6. *Лекции по экономике коррупции* / М.И. Левин, Е.А. Левина, Е.В. Покатович. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. — 360 с.
7. *Васин А.А., Картунова П.А., Уразов А.С.* Модели организации государственных инспекций и борьбы с коррупцией // *Математическое моделирование.* — 2010. — Т. 22, № 4. — С. 67–89.
8. *Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С.* Механизмы подавления коррупции // *Журнал новой экономической ассоциации.* — 2011. — № 10. — С. 10–30.
9. *Левин М.И., Цирик М.Л.* Коррупция как объект математического моделирования // *Экономика и математические методы.* — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 40–62.
10. *Полтерович В.М.* Факторы коррупции // *Экономика и математические методы.* — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 30–39.
11. *Выборнов Р.А.* Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. — М.: ИПУ РАН, 2006. — 110 с.
12. *Basu K., Bhattacharya S., Mishra A.* Notes on bribery and the control of corruption // *Journal of Public Economics.* — 1992. — N 48. — P. 349–359.
13. *Olsen T.E., Torsvik G.* Collusion and Renegotiations in Hierarchies: A Case of Beneficial Corruption // *International Economic Review.* — 1998. — Vol. 39, N 2. — P. 143–157.
14. *Yang D.* Corruption by monopoly: Bribery in Chinese enterprise licensing as a repeated bargaining game // *China Economic Review.* — 2005. — N 16. — P. 171–188.
15. *Lambert-Mogiliansky A., Majumdar M., Radner R.* Strategic analysis of petty corruption: Entrepreneurs and bureaucrats // *Journal of Development Economics.* — 2007. — N 83. — P. 351–367.
16. *Bhattacharya S., Hodler R.* Natural resources, bureaucracy and corruption // *European Economic Review.* — 2010. — N 54. — P. 608–21.
17. *Balafoutas L.* Public beliefs and corruption in a repeated psychological game // *Journal of Economic Behavior and Organization.* — 2011. — N 78. — P. 51–59.

18. Blackburn K., Forgues-Puccio G.F. Financial liberalization, bureaucratic corruption and economic development // Journal of International Money and Finance. — 2010. — N 29. — P. 1321–1339.
19. Cerqueti R., Coppier R. Economic growth, corruption and tax evasion // Economic Modeling. — 2011. — N 28. — P. 489–500.
20. Рыбасов Е.А., Угольницкий Г.А. Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции // Компьютерное моделирование. Экология. — 2004. — Вып. 2. — С. 46–65.
21. Угольницкий Г.А., Горбанева О.И. Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее экологические приложения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2007. — № 1. — С. 43–47.
22. Денин К.И., Угольницкий Г.А. Теоретико-игровая модель коррупции в системах иерархического управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 192–198.
23. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Управление устойчивым развитием иерархических систем в условиях коррупции // Проблемы управления. — 2010. — № 6. — С. 19–26.
24. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Устойчивое развитие систем управления с учетом коррупции // Математическая теория игр и ее приложения. — 2010. — Т. 2, вып. 4. — С. 106–119.
25. Угольницкий Г.А., Денин К.И. Математические модели коррупции. Теория и приложения — LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 152 с.
26. Розин М.Д., Суций С.Я., Угольницкий Г.А. Методологические аспекты моделирования борьбы с коррупцией как фактором социальной конфликтности и терроризма // Научная мысль Кавказа. Междисциплинарные и специальные исследования. — 2011. — № 2 (18). — С. 32–51.
27. Antonenko A.A., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Static Models of Corruption in Hierarchical Control Systems // Contributions to game theory and management. Vol. V. Collected papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management / Eds L. Petrosyan, N. Zenkevich. — SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2012. — P. 20–32.
28. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Статические модели коррупции в системах контроля качества водных ресурсов // Проблемы управления. — 2012. — № 4. — С. 38–44.
29. Антоненко А.В., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Статические модели борьбы с коррупцией в иерархических системах управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 4. — С. 165–176.
30. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. Статические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 42. — С. 195–216.
31. Chernushkin A.A., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Dynamic Models of Corruption in Hierarchical Control Systems // Contributions to game theory and management. Vol. VI. Collected papers presented on the Sixth International Conference Game Theory and Management / Editors L. Petrosyan, N. Zenkevich. — SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2013. — P. 63–74.
32. Antonenko A.V., Ougolnitsky G.A. Static Models of Corruption in Hierarchical Systems // Advances in Systems Science and Application. — 2013. — Vol. 13, N 1. — P. 37–52.
33. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. Purpose and Non-Purpose Resource Use Models in Two-Level Control Systems // Advances in Systems Science and Application. — 2013. — Vol. 13, N 4. — P. 378–390.
34. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в трехуровневых системах управления // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 53–62.
35. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. Теоретико-игровые модели распределения ресурсов при управлении качеством речной воды в условиях коррупции. Ч. 1 // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. — 2014. — Т. 1, вып. 1. — С. 16–24.
36. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. Теоретико-игровые модели распределения ресурсов при управлении качеством речной воды в условиях коррупции. Ч. 2 // Там же, вып. 2. — С. 21–29.
37. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Модели борьбы с административной коррупцией в иерархических системах управления // Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, вып. 1. — С. 73–90.
38. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в иерархических системах управления. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — 412 с.
39. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982. — 144 с.
40. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991. — 288 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Горбанева Ольга Ивановна — канд. физ.-мат. наук, доцент,
✉ gorbaneva@mail.ru,

Усов Анатолий Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
✉ usov@math.rsu.ru,

Угольницкий Геннадий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой, ☎ (863) 297-51-14, ✉ ougoln@mail.ru,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону.

Новая книга

Горбанева О.И., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в иерархических системах управления: монография. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — 412 с. (ISBN 978-5-9905703-6-8).

Представлена авторская концепция математического моделирования коррупции в иерархических системах управления. Сформулированы основные положения концепции. Построены и исследованы теоретические модели административной и экономической коррупции в статических и динамических постановках, а также прикладные модели управления организационными и эколого-экономическими системами в условиях коррупции.

Для специалистов по прикладной математике, математической экономике и организационному управлению, аспирантов и студентов соответствующих специальностей, а также сотрудников органов государственного управления.