

ПОКОМПОНЕНТНЫЙ МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПУТИ, ПОСТРОЕННОГО ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ РОБОТОВ¹

Р.Ф. Гилимьянов

Рассмотрена задача планирования движения робота, суть которой состоит в следующем. Управляемый вручную робот проводится по желаемой траектории, координаты которой измеряются GNSS-приемником. Для повторения этой траектории в автоматическом режиме необходимо построить геометрический путь, удовлетворяющий определенным критериям гладкости и ограничениям на кривизну. Предложен покомпонентный метод сглаживания кривизны пространственного пути, представленного с помощью однородных кубических В-сплайнов. Приведены результаты применения предложенного метода к реальным траекториям автомашины и вертолета, полученным с помощью GNSS-приемника.

Ключевые слова: планирование пути, пространственный путь, автоматически управляемые транспортные средства, GNSS-навигация, приближение данных, сглаживание кривизны, В-сплайны.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения различных задач военного и гражданского назначения широко применяются разнообразные робототехнические системы (роботы), например, беспилотные летательные аппараты, автономные необитаемые подводные аппараты и автоматически управляемые транспортные средства [1]. Одна из важных задач, возникающих при управлении роботами, состоит в планировании пути, вдоль которого робот должен следовать в автоматическом режиме. Построенный путь должен обладать необходимой степенью гладкости, его кривизна должна плавно меняться и быть ограниченной по абсолютному значению. В автоматическом режиме вдоль такого пути робот движется более точно, плавно и с меньшими энергетическими затратами.

Обычно путь представляется с помощью параметрически заданной кривой, например, с помо-

щью последовательности прямых линий и дуг окружностей, разнообразных сплайнов, клотоид, или обобщенных спиралей Корню. Сплайны наиболее популярны как для задания плоского, так и пространственного пути. Данные кривые широко используются для задания целевого пути различных беспилотных роботов, оперирующих на земле [2–5], под водой [6] и в воздухе [7–9].

Для определения своего местоположения и ориентирования в пространстве роботы оборудуются необходимыми сенсорами: одометрами, лазерными дальномерами, сонарами, геомагнитными сенсорами, видеокамерами, инерциальными сенсорами и GNSS-оборудованием [1]. Данное оборудование может также использоваться для задания целевого пути. Например, в сельском хозяйстве [4], для задания целевого пути трактор, управляемый вручную, проводится по желаемой траектории. И во время движения координаты трактора измеряются с помощью GNSS-приемника. По сохраненным точкам строится путь, вдоль которого впоследствии трактор может двигаться в автоматическом режиме.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 15 ОЭММПУ РАН.



На GNSS-измерения влияют различного рода ошибки, такие как ошибки, вызываемые атмосферой Земли (ионосферой и тропосферой), ошибки часов спутников, ошибки эфемерид спутников, ошибки многолучевости и шумы аппаратуры. Используя избыточность измерений, GNSS-приемник может «отлавливать» аномальные измерения и обеспечить большую точность и надежность определения координат точек. К примеру, GNSS-приемник в фазово-дифференциальном режиме может обеспечить сантиметровую точность измерения координат в реальном времени. Однако если приемнику не удастся разрешить фазовые неоднозначности, погрешность измерений может достичь нескольких метров.

Большие ошибки измерений могут сильно исказить путь, построенный по зашумленным измерениям. Если ошибки малы, то построенный путь может выглядеть вполне удовлетворительно, но его кривизна может оказаться непригодной для движения робота вдоль него в автоматическом режиме. К зашумленным измерениям можно применить различные методы сглаживания и фильтры. Но в результате мы опять получим набор точек, а не параметрически заданную кривую. Если по полученным точкам построить кривую, то не факт, что она будет иметь плавно меняющуюся кривизну.

Для получения сплайновых кривых с плавно меняющейся кривизной пользуются следующими широко распространенными подходами. Первый — когда процесс построения кривой совмещен с ее сглаживанием. Например, таким образом строятся сглаживающие сплайны (smoothing splines) [10–13]. Второй — когда строится аппроксимирующая или интерполирующая кривая, а затем производится ее сглаживание [14–20].

Ко второму подходу относится метод, предложенный в работе [19]. С его помощью можно получить путь на плоскости в виде C^2 -гладкой кривой, представленной однородными кубическими В-сплайнами. Метод хорошо работает, когда погрешность измерения точек мала и расстояние между точками приблизительно одинаково. В настоящей работе предложен аналогичный метод сглаживания кривизны пути. Из отличительных преимуществ можно выделить следующие. Метод может применяться для сглаживания кривизны как плоского пути, так и пространственного. Координаты исходных точек могут иметь большую погрешность измерения. Предложенный метод эффективен и по быстродействию и по использованию оперативной памяти. В настоящей статье приводятся результаты применения предложенного метода к реальным траекториям автомашины и вертолета, полученным с помощью GNSS-приемника.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ПУТИ

Пусть есть упорядоченный набор GNSS-измерений $r_1, r_2, \dots, r_n$, $n \geq 4$, $r_i \in R^d$ на плоскости ($d = 2$) или в пространстве ($d = 3$), полученный во время движения робота по некоторому пути. Предполагается, что большинство координат точек измерения с большой точностью, но могут попадаться точки, измеренные с меньшей точностью в тот момент, когда GNSS-приемник не смог разрешить фазовые неоднозначности. Предполагается известной оценка погрешности измерений координат точек. Это может быть как среднеквадратическое отклонение ошибки по каждой компоненте точки r_i : $\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,d}$, так и вероятная сферическая ошибка измерения точки с радиусом SEP_i . Данную информацию, наряду с позицией, может выдавать GNSS-приемник.

Искомый путь аппроксимируется однородными кубическими В-сплайнами, каждый из которых строится по четверке контрольных точек следующим образом

$$r^{(d)}(t) = R_i M T(t), \quad R_i = [r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}],$$

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

где t — параметр сплайна. Кривизна параметрически заданного пути определяется следующей формулой

$$k(t) = \|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\| / \|\dot{r}(t)\|^3,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Как видно, кривизна кривой является функцией от первой и второй производной кривой по ее параметру. Поэтому даже малый шум измерений приводит к существенным осцилляциям графика кривизны кривой, построенной по этим измерениям.

2. СГЛАЖИВАНИЕ КРИВИЗНЫ ПУТИ

В статье [19] показано, что на характер графика кривизны составной кубической В-сплайновой кривой влияют скачки третьей производной

$$\Delta \ddot{r}_i \equiv \ddot{r}^{(i)} - \ddot{r}^{(i-1)} =$$

$$= r_{i-2} - 4r_{i-1} + 6r_i - 4r_{i+1} + r_{i+2}$$

в точках соединения двух смежных сплайнов. В этой же работе предлагается путем малых вариаций (в пределах ошибки измерений) контрольных точек в перпендикулярном к кривой направлении

минимизировать проекции скачков третьей производной на нормальное к кривой направление. Такой выбор направления сдвига объясняется тем, что малый сдвиг вдоль плоской кривой не сильно меняет ее форму. Заметим, что в указанной статье не учтена зависимость направления нормалей от вариаций контрольных точек. Поэтому метод можно применять при условии, что ошибки измерений и вариации контрольных точек малы. Также отметим, что в случае трехмерной кривой сдвигом контрольных точек только в перпендикулярном направлении ограничиваться не разумно.

В настоящей работе предлагается варьировать точки в произвольном к кривой направлении. Обозначим через $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,d}]^T$ вектор, определяющий новое положение i -й контрольной точки r_i в пространстве следующим образом:

$$\tilde{r}_i(\varepsilon_i) = r_i + \varepsilon_i = [r_{i,1}, \dots, r_{i,d}]^T + [\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,d}]^T.$$

Здесь первый нижний индекс обозначает номер контрольной точки, второй — номер компоненты.

Запишем скачки третьей производной через вариации контрольных точек

$$\Delta \tilde{r}_i(\varepsilon) = [\Delta \tilde{r}_{i,1}, \dots, \Delta \tilde{r}_{i,d}]^T,$$

где

$$\Delta \tilde{r}_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} r_{i-2,j} \\ r_{i-1,j} \\ r_{i,j} \\ r_{i+1,j} \\ r_{i+2,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{i-2,j} \\ \varepsilon_{i-1,j} \\ \varepsilon_{i,j} \\ \varepsilon_{i+1,j} \\ \varepsilon_{i+2,j} \end{bmatrix} \right), \quad j = 1, \dots, d. \quad (1)$$

Вместо проекции скачков третьей производной на нормальное к кривой направление, как это предложено в работе [19], будем минимизировать норму вектора (1). Если количество точек n , то число элементарных сплайнов равно $(n-3)$, а число скачков третьей производной равно $(n-4)$. Наша цель заключается в минимизации суммы квадратов норм всех векторов скачков:

$$S(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-4} \|\Delta \tilde{r}_i(\varepsilon)\|^2 = \sum_{i=1}^{n-4} \sum_{j=1}^d |\Delta \tilde{r}_{i,j}|^2.$$

Вводя векторные обозначения $\tilde{r}_j = [r_{1,j}, \dots, r_{n,j}]^T$, $\bar{\varepsilon}_j = [\varepsilon_{1,j}, \dots, \varepsilon_{n,j}]^T$, данную сумму можно записать в матричном виде

$$S(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) = \sum_{j=1}^d (\bar{r}_j + \bar{\varepsilon}_j)^T H (\bar{r}_j + \bar{\varepsilon}_j),$$

где матрица H — ленточная симметричная положительно полуопределенная,

$$H = C^T C, \quad H \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

матрица C имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{(n-4) \times n}.$$

Элементы матрицы H не нужно вычислять, в отличие от элементов аналогичной матрицы из статьи [19]. Также во время вычислений достигается экономия памяти благодаря тому, что элементы матрицы состоят из одних и тех же чисел.

Вариации контрольных точек следует ограничить. В работе [19] это делается введением простых ограничений в задачу оптимизации. Но решение задачи условной минимизации требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому в работе [20] было предложено добавить в целевой функционал штраф за большие вариации точек и вместо задачи условной минимизации решать задачу безусловной минимизации. Поступим аналогично, только размер штрафа будем выбирать в зависимости от точности измерения координат точек. Точкам, имеющим большую погрешность измерения, назначим меньший штраф за большие вариации и наоборот. Штрафной член можно выбрать следующим

$$P(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) = \gamma \sum_{j=1}^d \bar{\varepsilon}_j^T D_j \bar{\varepsilon}_j,$$

где γ — положительный параметр, D_j — диагональные матрицы,

$$D_j = \text{diag}\{1/\sigma_{1,j}^2, \dots, 1/\sigma_{n,j}^2\}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Если вместо среднеквадратического отклонения ошибки измерений по каждой компоненте известна вероятная сферическая ошибка измерений, то матрицы D_j выбираются одинаковыми

$$D_1 = \dots = D_d = \text{diag}\{1/SEP_1^2, \dots, 1/SEP_n^2\}.$$

С учетом штрафного члена целевой функционал записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) &= \frac{1}{2} S(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) + \frac{1}{2} P(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d ((\bar{r}_j + \bar{\varepsilon}_j)^T H (\bar{r}_j + \bar{\varepsilon}_j) + \gamma \bar{\varepsilon}_j^T D_j \bar{\varepsilon}_j). \end{aligned}$$



Задача минимизации данного квадратичного функционала d векторных аргументов при отсутствии перекрестных произведений эквивалента минимизации этого функционала по каждому аргументу в отдельности:

$$\min_{\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d} \Phi(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_d) \Leftrightarrow \min_{\bar{\varepsilon}_1} \Phi(\bar{\varepsilon}_1), \dots, \min_{\bar{\varepsilon}_d} \Phi(\bar{\varepsilon}_d).$$

Последняя задача эквивалентна решению d систем линейных уравнений

$$A_j \bar{\varepsilon}_j = -H \bar{r}_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (2)$$

с ленточными симметричными положительно определенными матрицами $A_j = H + \gamma D_j$.

Данные системы можно эффективно решить, разложив матрицу системы по Холецкому на произведение нижней и верхней треугольных ленточных матриц, и затем методом прямой и обратной прогонки решив ленточные треугольные системы.

Заметим, что если задана вероятная сферическая ошибка измерений, то у всех d систем матрица A_j системы будет одинаковой. А если измерения имеют одинаковую точность, то все элементы на диагоналях матрицы также одинаковы, за исключением нескольких начальных и конечных элементов. Коэффициенты разложения Холецкого такой матрицы устанавливаются, и после некоторого числа строк диагональные элементы нижней треугольной матрицы практически перестают отличаться. Используя это, можно достичь большей производительности и экономии памяти. Также отметим, что для решения задачи (2) можно построить рекуррентную схему и применить методы со скользящим окном, аналогичные методам, предложенным в статье [20].

3. ОЦЕНКА ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ ЗАДАЧИ

Рассмотрим, как с ростом размера матриц A_j меняется точность решения систем линейных уравнений (2) с этими матрицами. Точность решения системы линейных уравнений характеризуется числом обусловленности матрицы $\kappa(A)$. При больших значениях $\kappa(A)$ говорят о плохой обусловленности матрицы A , при значении $\kappa(A)$, близком к единице — о хорошей. Для невырожденной нормальной матрицы число обусловленности по отношению к спектральной норме задается формулой [21]

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = \frac{\rho(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

где $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$ — минимальные и максимальные по абсолютной величине собственные значения матрицы A , $\rho(A)$ — ее спектральный радиус.

Оценим значения $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ для матриц A_j . По теореме Рэлея—Ритца [21] для вещественной симметричной матрицы A

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{x^T x = 1} x^T A x.$$

Обозначим через $d_{\min}(D_j)$ и $d_{\max}(D_j)$ минимальный и максимальный диагональные элементы матрицы D_j . Прибавим и отнимем от матрицы A_j единичную матрицу I , помноженную на число $\gamma d_{\min}(D_j)$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_j) &= \min_{x^T x = 1} x^T (H + \gamma D_j) x = \\ &= \min_{x^T x = 1} \{x^T (H + \gamma d_{\min}(D_j) I) x + \gamma x^T (D_j - d_{\min}(D_j) I) x\}. \end{aligned}$$

В силу того, что

$$\gamma x^T (D_j - d_{\min}(D_j) I) x \geq 0,$$

верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_j) &\geq \min_{x^T x = 1} x^T (H + \gamma d_{\min}(D_j) I) x = \\ &= \lambda_{\min}(H) + \gamma d_{\min}(D_j). \end{aligned}$$

Собственные значения симметричной положительно полуопределенной матрицы H являются неотрицательными действительными числами, поэтому $\lambda_{\min}(H) \geq 0$. Учитывая это, получаем следующую оценку снизу для минимального собственного значения матрицы A_j :

$$\lambda_{\min}(A_j) \geq \gamma d_{\min}(D_j).$$

Воспользовавшись теоремой Гершгорина [21] для симметричной матрицы A с элементами a_{ij} , можно оценить сверху ее спектральный радиус следующим образом:

$$\rho(A) \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Для матрицы A_j эта оценка находится просто, так как все строки матрицы H , за исключением первых и последних четырех, состоят из одинаковых элементов. Максимальная по всем строкам сумма модулей элементов строки матрицы H равна 256, поэтому

$$\rho(A_j) \leq 256 + \gamma d_{\max}(D_j).$$

Таким образом, число обусловленности матриц A_j можно оценить как

$$\kappa(A_j) = \frac{256 + \gamma d_{\max}(D_j)}{\gamma d_{\min}(D_j)}.$$

Полученная оценка очень консервативная, но благодаря ей видно, что с ростом размерности матриц A_j число обусловленности не превышает величины, зависящей от параметра γ и от минимальной и максимальной оценки погрешности измерений. Поэтому предложенный в работе метод можно применять для разумно больших наборов точек. Задачу большой размерности также можно решить, разбив длинную траекторию, согласно схеме из работы [22], на несколько сегментов, и применив предложенный метод к каждому сегменту в отдельности.

Из полученной оценки видно, что обусловленность задачи можно улучшить, отбросив точки с большой погрешностью измерения и/или соответствующим образом подобрав параметр γ , который носит смысл параметра регуляризации [23]. В настоящей работе для его выбора применяется способ подбора [24].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Алгоритмическая схема вычислений предложенного метода очень проста. На основе измерений координат точек траектории и погрешности их измерений формируются левые и правые части ленточных систем линейных алгебраических уравнений (2). Затем данные системы решаются описанным в работе способом. Далее путем изменения координат измеренных точек на величины, найденные при решении систем (2), получается новый набор точек, по которому строится искомый путь.

Предложенный метод сглаживания кривизны апробировался на многих плоских и пространственных траекториях, построенных по данным реальных навигационных измерений. Приведем примеры применения метода к траекториям колесного робота и вертолета. В качестве колесного робота была взята автомашина, оборудованная спутниковыми антеннами, GNSS-приемником, приводом поворота рулевых колес и датчиком угла поворота колес.

В описываемом далее эксперименте машина, управляемая вручную, проводилась по желаемой траектории, координаты точек которой измерялись приемником в фазово-дифференциальном режиме. Длина траектории составила 460 м. Количество измеренных точек равно $n = 780$, из кото-

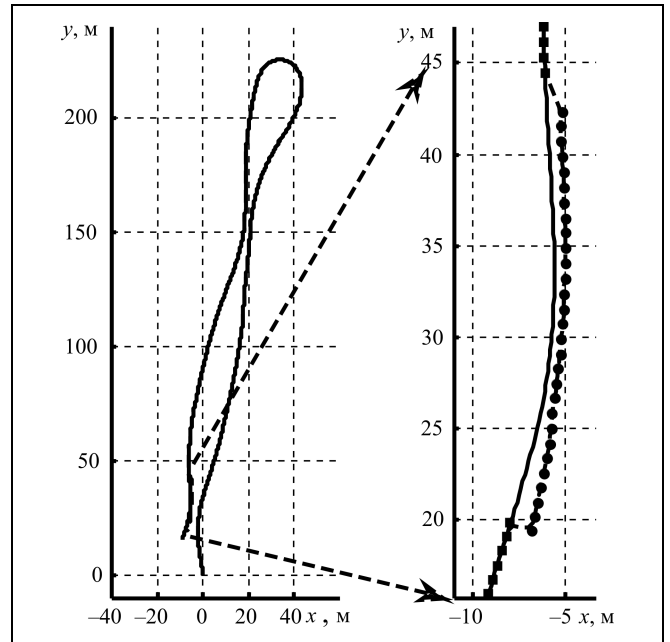


Рис. 1. Путь, построенный по измеренным точкам траектории автомашины и путь, построенный по новому набору точек (справа показан в увеличенном масштабе фрагмент рисунка)

рых 751 измерены с высокой точностью. Оценка минимального радиуса вероятной сферической ошибки измерений составила 4 см, максимального — 1,93 м. Расстояние между соседними точками неодинаковое и лежит в диапазоне от 25 см до 2,3 м. Автомашина двигалась по плоской поверхности, поэтому для простоты восприятия трехмерные координаты точек, полученные с помощью GNSS-приемника, спроецированы на плоскость локального горизонта. На рис. 1 штриховой линией изображен плоский путь, построенный по полученному набору точек $r_1, \dots, r_n$. Справа в увеличенном масштабе показан фрагмент траектории, во время движения автомашины вдоль которого приемник не смог разрешить фазовые неоднозначности, и измерил координаты с большой погрешностью. Эти точки показаны на графике круглым маркером. Квадратным маркером показаны точки, измеренные с более высокой точностью. Из рисунка видно, как измерения скачком «ушли» от реальной траектории автомашины.

На рис. 2 тонкой линией изображен график кривизны пути в зависимости от длины пройденного пути s . Как видно, он имеет осциллирующий характер. Для движения вдоль пути с такой кривизной требуются частые повороты рулевых колес. К тому же кривизна достигает значений $3,1 \text{ м}^{-1}$ (на рисунке этого не видно, так как для наглядности видимый диапазон графика кривизны по-

оси ординат ограничен значением $0,25 \text{ м}^{-1}$), что намного больше максимальной кривизны траектории $k_{\max} \approx 0,2 \text{ м}^{-1}$, по которой может проехать используемая в экспериментах автомашина с минимальным радиусом разворота $R_{\min} \approx 5 \text{ м}$. Поэтому данный путь непригоден для движения вдоль него колесного робота в автоматическом режиме.

Применив предложенный в настоящей работе метод к набору измерений координат точек в трехмерном пространстве, был получен новый набор точек. На рис. 1 сплошной линией показан путь, построенный по новому набору измерений (на рисунке они не изображены). Его кривизна показана на рис. 2 жирной линией. Из первого рисунка видно, что там, где точность измерения была высокой, путь, построенный по новому набору измерений, проходит близко от исходных точек, а там где низкой — вдали, но в пределах ошибки измерений. График кривизны нового пути имеет более плавный вид и не превышает значения $0,12 \text{ м}^{-1}$. Эксперименты по движению автомашины в автоматическом режиме вдоль пути со сглаженной кривизной показали хорошие результаты.

Рассмотрим другой пример. Во время полета вертолета по траектории длиной 91 км с помощью GNSS-приемника измерялось его положение. Таким образом был получен набор из $n = 3100$ точек, из которых 2156 измерены с высокой точностью. Оценка минимального радиуса вероятной сферической ошибки измерений составила 3,7 см, максимального — 1,92 м. Расстояние между соседними точками оказалось в диапазоне от 1,5 до 57,5 м.

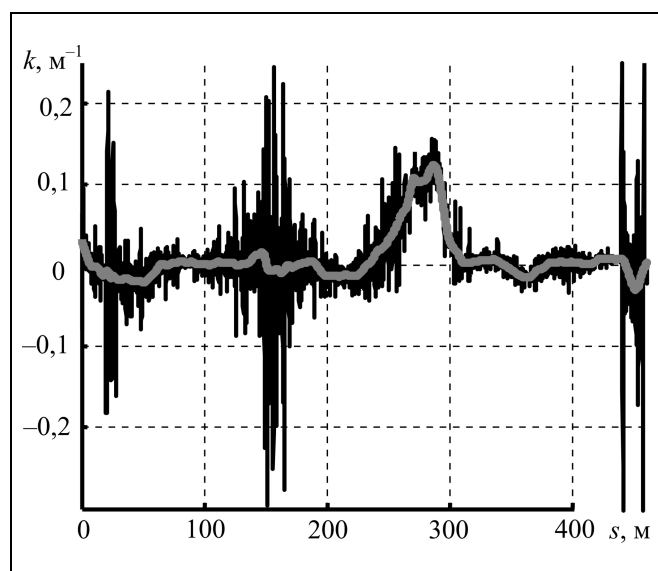


Рис. 2. Зависимость кривизны пути от длины пройденного пути

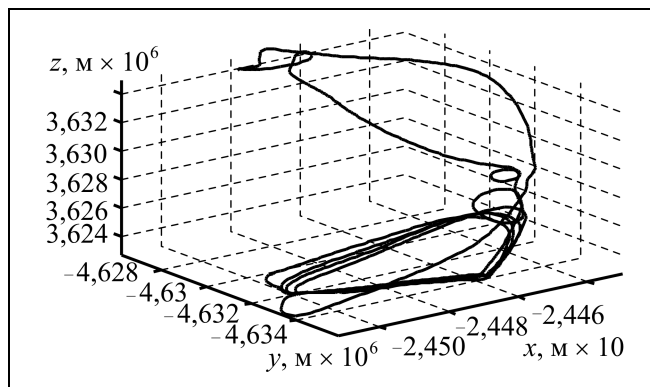


Рис. 3. Путь, построенный по измеренным точкам траектории вертолета

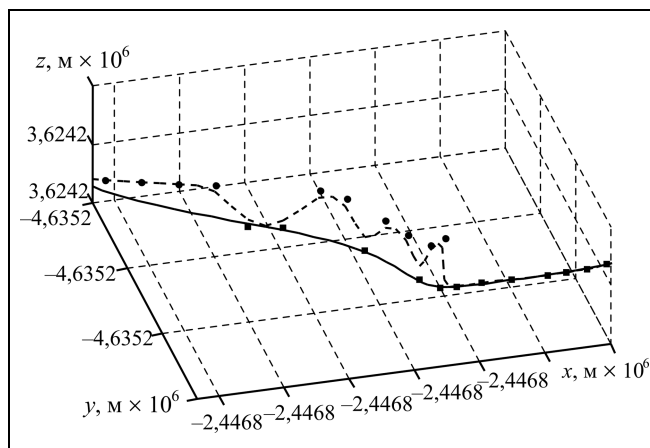


Рис. 4. Фрагмент пути, построенного по измеренным точкам траектории вертолета (штриховая линия) и путь, построенный по новому набору точек (сплошная линия)

На рис. 3 изображен путь, построенный по исходному набору точек. На рис. 4 в увеличенном масштабе показан фрагмент траектории. Точки с большой погрешностью измерений показаны на графике круглым маркером. Квадратным маркером показаны точки, измеренные с более высокой точностью. На данном рисунке сплошной линией изображен путь, построенный по новому набору точек, полученному после применения предложенного метода сглаживания кривизны. Новый путь проходит вблизи точных измерений и, его кривизна плавно меняется. График самой кривизны не приводится ввиду слишком большой длины пути. Для сравнения, максимальная кривизна пути до сглаживания — 126 м^{-1} , после — $2,9 \text{ м}^{-1}$. Сумма квадратов норм всех векторов скачков после применения метода уменьшилась приблизительно на четыре порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан покомпонентный метод сглаживания кривизны как плоского, так и пространственного пути. Среди точек, по которым строится путь, допускается наличие точек, измеренных с большой погрешностью. Метод эффективен в смысле объема вычислений и используемой памяти. Задача сглаживания сводится к решению двух систем линейных уравнений с ленточной матрицей для плоского пути и трех систем — для пространственного. Применимость предложенного метода проиллюстрирована численными примерами его применения для сглаживания пути, построенного по реальным GNSS-измерениям координат точек траекторий автомобиля и вертолета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Siciliano B., Khatib O.* Handbook of Robotics. — Berlin: Springer, 2008.
2. *Komoriya K., Tanie K.* Trajectory Design and Control of a Wheel-type Mobile Robot Using B-spline Curve // Proc. of the IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems / Tsukuba, Japan, 4 — 6 Sept., 1989. — P. 398—405.
3. *Пестерев А.В., Гилимьянов Р.Ф.* Планирование пути для колесного робота // Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические модели и оптимизация / Тр. ИСА РАН. — М., 2006. — Т. 25. — С. 204—211.
4. *Bell T.* Precision Robotic Control of Agricultural Vehicles on Realistic Farm Trajectories: Ph.D. thesis. — Stanford University, 1999.
5. *Thrun S., et al.* Stanley: The Robot that Won the DARPA Grand Challenge // Journal of Field Robotics. — 2006. — Vol. 23(9). — P. 661—692.
6. *Kanakakis V., Tsourveloudis N.* Evolutionary Path Planning and Navigation of Autonomous Underwater Vehicles // Proc. of the Mediterranean Conf. on Control and Automation / Athens, Greece, 27—29, June 2007. — P. 1—6.
7. *Yang K., Sukkarieh S.* 3D Smooth Path Planning for a UAV in Cluttered Natural Environments // Proc. of the IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems / Nice, France, 22—26 Sept. 2008. — P. 794—800.
8. *Koyuncu E., Inalhan G.* A Probabilistic B-Spline Motion Planning Algorithm for Unmanned Helicopters Flying in Dense 3D Environments // Ibid. — 2008. — P. 815—821.

9. *Whalley M., et al.* Design, Integration, and Flight Test Results for an Autonomous Surveillance Helicopter // Proc. of the AHS Intern. Specialists Meeting on Unmanned Rotorcraft / Mesa, AZ, USA, 18—20 January, 2005.
10. *Schoenberg I.* Spline Functions and the Problem of Graduation // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1964. — Vol. 52. — P. 947—950.
11. *Reinsch C.* Smoothing by Spline Functions // Numer. Math. — 1967. — Vol. 10. — P. 177—183.
12. *De Boor C.* A Practical Guide to Splines. — New York: Springer-Verlag, 1978.
13. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошников В.Л.* Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
14. *Farin G., Sapidis N.* Curvature and the Fairness of Curves and Surfaces // IEEE Computer Graphics and Applications. — 1989. — Vol. 9, № 2. — P. 52—57.
15. *Sapidis N., Farin G.* Automatic Fairing Algorithm for B-Spline Curves // Computer-Aided Design. — 1990. — Vol. 22. — P. 121—129.
16. *Kjellander J.* Smoothing of Cubic Parametric Splines // Computer-Aided Design. — 1983. — Vol. 15(3). — P. 175—179.
17. *Farin G., et al.* Fairing Cubic B-Spline Curves // Computer Aided Geometric Design. — 1987. — Vol. 4. — P. 91—103.
18. *Eck M., Hadenfeld J.* Local Energy Fairing of B-spline Curves // Computing Supplement. — 1995. — Vol. 10. — P. 129—147.
19. *Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В., Панопорт Л.Б.* Сглаживание кривизны траекторий, построенных по зашумленным измерениям, в задачах планирования пути для колесных роботов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 148—156.
20. *Гилимьянов Р.Ф.* Рекуррентный метод сглаживания кривизны траекторий в задачах планирования пути для колесных роботов // Проблемы управления. — 2010. — № 1. — С. 71—76.
21. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
22. *Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В.* Применение декомпозиции для сглаживания кривизны траекторий, построенных по зашумленным измерениям, в задачах большой размерности // IV Всерос. школа-семинар молодых ученых «Проблемы управления и информационные технологии» (ПУИТ'2008). Материалы конф. / Казанский гос. техн. ун-т. — Казань, 2008. — С. 188—191.
23. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
24. *Сизиков В.С.* Устойчивые методы обработки результатов измерений. — СПб.: СпецЛит, 1999.

Статья представлена к публикации руководителем РРС В.А. Твердохлебовым.

Гилимьянов Руслан Фаильевич — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-93-69, ✉ Gilimyanov@gmail.com.

Не забудьте подписаться!

Если Вы не успели подписаться на журнал «Проблемы управления», то подписку можно оформить через редакцию по льготной цене с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Позвоните по телефону (495) 330-42-66 или обратитесь по электронной почте ru@ipu.ru, и подписка будет оформлена за один день. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.