

УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ОТ ОДИНОЧНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ НА ЗАДАННОЙ СКОРОСТИ¹

А.А. Галяев, П.В. Лысенко, В.П. Яхно

Аннотация. Рассмотрено планирование оптимального маршрута движения подвижного объекта в задаче уклонения от обнаружения одиночным сенсором на плоскости на постоянной скорости с целью минимизации интегрального уровня полезного сигнала, проходящего на наблюдателя. Показано, что различные механизмы обнаружения подвижного объекта могут быть приведены к общей математической формализации, а именно к исследованию задачи обнаружения по различным типам сигнала и малом отношении сигнал/помеха. В результате исследования решение двухточечной вариационной задачи с интегральным ограничением сведена к решению трех типов систем алгебраических интегральных уравнений, в которые входят нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а тип системы определяется различными начальными условиями и значениями интегрального ограничения. Для каждой из систем, описанных в работе, реализована численная процедура ее решения.

Ключевые слова: поиск подвижного объекта, планирование маршрута движения, оптимальный закон уклонения от обнаружения.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи планирования маршрута движения подвижного объекта (ПО) при уклонении от обнаружения в конфликтной среде вызывают большой интерес в связи с расширяющейся областью применения различного рода беспилотных летательных и подводных аппаратов. Термин «конфликтная среда» употребляется для описания взаимодействия подвижного объекта со средой, в которой он движется, другими подвижными объектами и внешними ограничениями, а также как реакция ПО на переменные внешние условия. Математические модели, применяемые для решения задачи об оптимизации закона уклонения ПО, определяются объемом текущей информации о характеристиках информационных полей, создаваемых объектом при своем движении, динамическими возможностями ПО, а также вектором допустимых

управлений. Успешность выполнения миссии ПО (в рассматриваемом случае — уклонения от обнаружения) оценивается значением некоторого функционала (критерия оптимальности), минимизация которого является основной задачей системы управления.

Классические критерии оптимальности связаны с минимизацией расхода энергоресурса, времени (задачи быстрогодействия) или промаха [1]. В последнее время проявляется интерес к нетрадиционным критериям, таким как повышение скрытности движения (при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных рисков-угроз) [2—5]. Одной из моделей, описывающей поиск подвижного объекта в заданном районе, служит модель случайного поиска [6, 7]. При решении задачи планирования маршрута перемещения объекта из фиксированной начальной точки в фиксированную конечную точку минимизируется интегральный уровень полезного сигнала, по которому оценивается успешность решения задачи уклонения от обнаружения. Вектор скорости ПО играет роль вектора управления.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7.

Особенность рассматриваемой задачи планирования маршрута движения подвижного объекта заключается в том, что мгновенный уровень сигнала I , пришедшего на вход наблюдателя или сенсора, зависит от текущего расстояния D до уклоняющегося объекта, а для некоторых типов полей он еще зависит и от модуля мгновенной скорости v объекта. Для описания подобной зависимости используются степенной моделью $I \sim v^m/D^k$ [3].

Значение показателя степени k характеризует физическое поле, по признакам которого осуществляется обнаружение [8]. Значения $k = 1, 2, 3, 4$ могут быть интерпретированы в рамках соответствующих физических моделей. Значение $k = 1$ описывает процесс затухания волн на поверхности жидкости и соответствует убыванию уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в мелком море. Убывание уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в глубоком море, отвечающее пассивному режиму обнаружения, а также убывание уровня интенсивности теплового поля и первичного электромагнитного поля при их распространении соответствует значению $k = 2$. Значение $k = 3$ описывает убывание уровня напряженности магнитного поля. В свою очередь, значение $k = 4$ соответствует убыванию уровня интенсивности вторичного электромагнитного и гидроакустического полей (активный режим обнаружения). Показатель степени m в числителе дроби определяет зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Например, подобная зависимость присуща сигналам, отвечающим первичному гидроакустическому полю [9].

В работе рассматриваются модели движения на плоскости на постоянной скорости ($v = \text{const}$). Цель работы — построение оптимальной траектории движения ПО при заданных ограничениях на модуль скорости в процессе уклонения от одиночного наблюдателя и исследование особенностей полученного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что на плоскости расположены два объекта — одиночный неподвижный наблюдатель (сенсор) в начале координат и управляемый ПО в точке с текущими координатами $(x(t), y(t))$, где t — текущее время. Пусть выполнено $k = 2$, $m = 2$, что соответствует наблюдению за ПО, например, по сигналам электромагнитного поля. Координаты начальной и конечной точек маршрута заданы в неподвижной декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией наблюдателя. Требуется найти траекторию движения

ПО и закон изменения ориентации его вектора скорости, доставляющие минимум функционалу [3]

$$R(\dot{x}(\cdot), \dot{y}(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^T \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt \rightarrow \min_{(\dot{x}(\cdot), \dot{y}(\cdot), x(\cdot), y(\cdot))}. \quad (1)$$

Граничные условия заданы в виде

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(0) = y_A, \quad y(T) = y_B,$$

где $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ — начальная и конечная точки маршрута. Величина T (время движения по траектории) задана, на модуль скорости ПО v наложено ограничение

$$v^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \text{const}.$$

В рамках приведенной выше физической интерпретации числитель дроби в функционале (1) есть величина, пропорциональная мгновенному уровню излучаемого объектом сигнала в предположении о том, что имеет место степенная зависимость этого уровня от модуля текущей скорости объекта.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

Согласно работе [10] карта распределения уровней рисков определяет функцию риска, заданную в полярных координатах $(r(t), \varphi(t))$ как $\Gamma(x, y) = 1/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиус-вектор. Перед планированием миссии стоит задача минимизации интегрального риска при движении подвижного объекта.

Предположим, что движение объекта происходит от точки A к точке B по некоторой траектории l с постоянным модулем скорости v . Тогда вместо функционала (1) подвергаем исследованию функционал вида

$$R(r(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_l v/r^2 dl \rightarrow \min_l, \quad (2)$$

при наличии ограничения на длину траектории

$$\int_l dl \leq vT, \quad (3)$$

где $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ — элемент длины траектории.

В задаче (2), (3) в отличие от задачи (1) ищется оптимальная траектория l как функция полярных координат (r, φ) , в которой зависимость от текущего времени отсутствует.



В полярных координатах функционал (3) и задача оптимизации принимают вид

$$R(r(\cdot)) = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{v}{r^2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \rightarrow \min, \quad (4)$$

где r' — производная r по φ . Получили задачу вариационного исчисления с интегральным ограничением

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \leq vT.$$

Чтобы применить принцип максимума [11], нужно проверить соответствие подынтегральной функции его условиям. Совершим замену переменной $z = \ln r$, $z \in (-\infty, +\infty)$, так как $r \in (0, +\infty)$. Тогда функционал (4) перепишется в виде

$$R(z(\cdot)) = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(-z) \sqrt{1 + z'^2} d\varphi \quad (5)$$

при ограничении

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(z) \sqrt{1 + z'^2} d\varphi \leq vT.$$

Подынтегральное выражение в формуле (5) — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные по своим аргументам (z, z'). Поэтому для задачи вариационного исчисления вида (4) необходимо выполнены уравнения Эйлера, которые запишем в переменных (z, φ),

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{(\exp(-z) + \lambda \exp(z))z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) - \frac{d}{dz} ((\exp(-z) + \lambda \exp(z)) \sqrt{1 + z'^2}) = 0, \quad (6)$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторая константа.

Поскольку функционал задачи явно не зависит от переменной φ , то для уравнений Эйлера (6) существует первый интеграл вида

$$C_1 = -z' \left(\frac{(\exp(-z) + \lambda \exp(z))z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) + ((\exp(-z) + \lambda \exp(z)) \sqrt{1 + z'^2}) = \frac{\exp(-z) + \lambda \exp(z)}{\sqrt{1 + z'^2}}, \quad (7)$$

где $C_1 > 0$ — константа.

Обозначим $C = 1/C_1$. Интегрирование уравнения (7) дает квадратуру

$$\varphi - \varphi_A = \int_{z_A}^z \frac{dz}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}}. \quad (8)$$

Уравнение (8) задает зависимость $\varphi(z)$ и определяет траекторию движения ПО, вышедшую из точки A . Из уравнения (8) и активного ограничения в выражении (5) следует, что для определения констант C и λ нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_A, \\ \int_{z_A}^{z_B} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{C}. \end{cases} \quad (9)$$

Однако эта система справедлива только до момента выполнения условия

$$\frac{dz}{d\varphi} = 0, \quad (10)$$

т. е. пока функция $z(\varphi)$ строго монотонна. Поэтому расширим систему (9), сделав следующие предположения. Пусть для некоторой точки Q с координатами (φ_Q, z_Q) выполнено условие (10), тогда от точки A до точки Q ПО движется в течение интервала времени T_1 , а от точки Q до точки B — в течение интервала времени T_2

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_Q - \varphi_A, \\ \int_{z_B}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_Q, \\ C(\exp(-z_Q) + \lambda \exp(z_Q)) = 1, \\ \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT_1}{C}, \\ \int_{z_B}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT_2}{C}, \\ T_1 + T_2 = T. \end{cases} \quad (11)$$

В системе (11) первое и второе уравнения отвечают граничным условиям при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно, третье уравнение определяет условие (10),

выполненное в точке Q , четвертое и пятое уравнения определяют ограничения на длину траектории при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно и последнее шестое уравнение определяет условие на полное время движения. Складывая первое и второе, четвертое и пятое уравнения с учетом шестого из системы (11), получаем редуцированную систему

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz + \\ & + \int_{z_B}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_A, \\ & C(\exp(-z_Q) + \lambda \exp(z_Q)) = 1, \\ & \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz + \\ & + \int_{z_B}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{C}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Систему уравнений (12) можно упростить в случае равенства $r_A = r_B$ или, что то же самое, $z_A = z_B$. В этом случае выполнено равенство $\varphi_Q = (\varphi_B + \varphi_A)/2$. Тогда получаем систему уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2}, \\ & \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{2C}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Теперь требуется найти тройку значений (λ, C, z_Q) — решение системы алгебраических и интегральных уравнений (13). Заметим, что несобственные интегралы в системе (13) сходятся. Действительно, первый интеграл — это эллиптический интеграл Лежандра первого рода, а второй — сумма двух эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода. Данный факт устанавливают следующие леммы.

Лемма 1. *Левая часть первого интеграла в системе уравнений (13)*

$$\int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_A, k) &= \int_0^{\xi_A} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \\ k &= \frac{1-2\lambda C^2 - \sqrt{1-4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\lambda/k}, \\ \xi_A &= ar_A. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Известно, что нормальный эллиптический интеграл первого рода задается первым выражением в формулах (14). Совершив линейную замену $\xi = a\eta$, приведем интеграл к виду

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = a \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-a^2\eta^2)(1-k^2a^2\eta^2)}}. \quad (15)$$

Первый интеграл в системе уравнений (13) при интегрировании по координате r принимает вид:

$$\begin{aligned} & \int_{z_A}^{z_Q} \frac{dz}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} = \\ & = \int_{r_A}^{r_Q} \frac{dr}{\sqrt{C^2(1 + \lambda r^2)^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая знаменатели в правых частях выражений (15) и (16), получаем систему уравнений для нахождения пары (a, k) :

$$\begin{cases} k^2 a^4 = \lambda^2, \\ a^2(1+k^2) = \frac{1}{C^2} - 2\lambda. \end{cases} \quad (17)$$

Поскольку λ и k положительны, то, выразив a^2 из первого уравнения (17) и подставив во второе, получаем квадратное уравнение относительно k вида

$$\lambda k^2 - \left(\frac{1}{C^2} - 2\lambda \right) k + \lambda = 0.$$

Заметим, что $0 < k < 1$, и выберем наименьший положительный корень этого уравнения

$$k = \frac{1-2\lambda C^2 - \sqrt{1-4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}.$$

Далее находим выражение для a , а также, сравнивая постоянные множители, стоящие под интегралами в правых частях (15) и (16), определяем равенство $\eta = r$ и выражаем ξ через r . В заключение заметим, что в точке Q вследствие равенства нулю знаменателей в правых частях выражений (15) и (16) выполнено $\xi_Q = 1$. Доказательство завершено.



Следствие 1. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ является решением уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta}, \Rightarrow \theta = \frac{k}{(k+1)^2},$$

где k — решение уравнения

$$\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{2(k+1)}.$$

Лемма 2. Левая часть второго интеграла в системе уравнений (13)

$$\int_{z_A}^{z_0} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz =$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda}{k^2 a^2}\right) \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC} -$$

$$- \frac{\lambda}{k^2 a^2} \frac{\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)}{aC},$$

где

$$\tilde{E}(\xi, k) = \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 - k^2 \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi,$$

$$k = \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2},$$

$$a = \sqrt{\lambda/k},$$

$$\xi_A = ar_A. \blacklozenge$$

Здесь $\tilde{E}(\xi, k)$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 2. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ — решение уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta},$$

где k в свою очередь есть решение уравнения

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) -$$

$$- \frac{1}{k} (\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{vT}{2}.$$

Следствия 1 и 2, а также систему уравнений (13) можно записать совместно.

Следствие 3. Чтобы найти четверку значений $(\lambda, \theta, \xi_A, k)$, являющуюся решением системы урав-

нений (13), нужно совместно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) &= \frac{\Phi_B - \Phi_A}{2(k+1)}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \\ - \frac{1}{k} (\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{vT}{2}, \\ \theta &= \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A &= \xi_A. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Следствие 4. Чтобы найти пять неизвестных $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющихся решением системы (12), нужно совместно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) + \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_B, k) &= \frac{\Phi_B - \Phi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (2\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) - \tilde{F}(\xi_B, k)) - \\ - \frac{1}{k} (2\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k) - \tilde{E}(\xi_B, k)) &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}} vT, \\ \theta &= \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A &= \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B &= \xi_B, \blacklozenge \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Следствие 5. Чтобы найти пять неизвестных $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющихся решением системы уравнений (9) в случае $r_B > r_A$, нужно совместно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{F}(\xi_B, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) &= \frac{\Phi_B - \Phi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right) (\tilde{F}(\xi_B, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \\ - \frac{1}{k} (\tilde{E}(\xi_B, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{vT}{2}, \\ \theta &= \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A &= \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B &= \xi_B, \blacklozenge \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Следствия 3–5 описывают все возможные ситуации, возникающие при построении оптимальной траектории движения, кроме случая неактивного ограничения на длину траектории, когда оптимальной траекторией движения служит дуга окружности, описанной вокруг треугольника OAB , где точка O — начало координат [3]. Решения систем (18)–(20) определяют оптимальные значения (λ, C) , требующиеся для подстановки в уравнение движения (7). Действительно, в следствиях 3 и 4 рассмотрены симметричный и несимметричный случаи краевых условий, когда, стартуя из точки A , объект движется до точки Q , в которой по траектории выполняется условие $\frac{dz}{d\varphi} = 0$. Далее объект

движется от точки Q до точки B . Следствие 5 позволяет найти оптимальные параметры траектории движения объекта при отсутствии на ней точки Q . Оптимальный закон изменения вектора скорости определяется касательной к траектории движения и имеет вид

$$v_x(\varphi) = \frac{z'(\varphi)\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{z'(\varphi)^2 + 1}} v,$$

$$v_y(\varphi) = \frac{z'(\varphi)\sin\varphi + \cos\varphi}{\sqrt{z'(\varphi)^2 + 1}} v.$$

3. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем вышеприведенные выводы результатами компьютерного моделирования. Средствами языка «Python» был разработан программный модуль,

позволяющий перебором по (λ, k) для заданных граничных условий находить четверку значений (λ, C, ξ_A, k) , строить оптимальную траекторию и вычислять значение функционала.

На рис. 1 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями системы (13) для случая симметричных граничных условий. Штриховой линией показан отрезок AB . Сплошной линией показаны траектории движения, на которых отмечена точка Q . Начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ, r_A = 2,5$, конечной точке — $\varphi_B = 90^\circ, r_B = 2,5$. На рис. 1, *a* длина траектории $L = vT = 4$, оптимальные параметры $C = 1,386, \lambda = 0,1293, \theta = 0,2484, k = 0,8514, \xi_A = \xi_B = 0,9743$, на рис. 1, *б* — $L = vT = 5, C = 2,8593, \lambda = 0,0126, \theta = 0,1032, k = 0,1322, \xi_A = \xi_B = 0,7722$.

Значения критерия качества на оптимальной траектории $R_{\text{opt}} = 0,6179$ (рис. 1, *a*), $R_{\text{opt}} = 0,5687$ (рис. 1, *б*). При отсутствии ограничения на длину траектории $R_{\text{opt}} = d_{AB}/r_A r_B = \sqrt{2}/2,5 = 0,5657$ [3]. Здесь d_{AB} — расстояние между точками A и B . В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > 2,5\pi\sqrt{2}/2 \cong 5,5536$. Значение критерия при наличии ограничения ухудшается менее чем на 10 %.

На рис. 2 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями системы (12). Программный модуль, разработанный для симметричных граничных условий, был преобразован для случая несимметричных условий. На рис. 2 начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ, r_A = 2,5$, конечной точке — $\varphi_B = 135^\circ, r_B = \sqrt{2}/2$. На

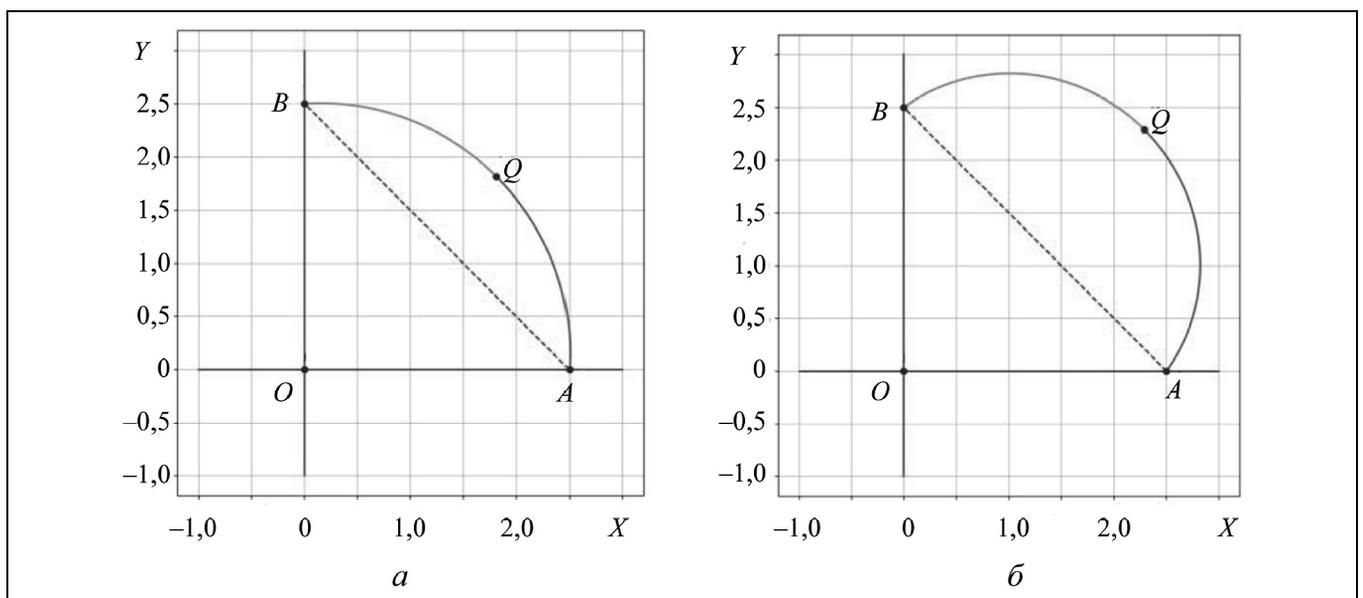


Рис. 1. Траектории движения подвижного объекта, полученные при решении системы (13): *a* — при $vT = 4$; *б* — при $vT = 5$

рис. 2, *a* длина траектории $L = vT = 7$, оптимальные параметры $C = 1,8154$, $\lambda = 0,0735$, $\theta = 0,2421$, $k = 0,6984$, $\xi_A = 0,8108$, $\xi_B = 0,9174$, на рис. 3, *б* — $L = vT = 16$, $C = 6,755$, $\lambda = 0,002$, $\theta = 0,0079$, $k = 0,0081$, $\xi_A = 0,3671$, $\xi_B = 0,4154$.

Значения критерия качества на оптимальной траектории $R_{\text{opt}} = 0,8151$ (рис. 2, *a*), $R_{\text{opt}} = 0,6964$. При отсутствии

ограничения на длину траектории $R_{\text{opt}} = d_{AB}/r_A r_B = 0,696$. Значение критерия при наличии ограничения ухудшается менее чем на 20 %. В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > 16,04$. Оптимальная траектория в этом случае представляет собой окружность, описанную вокруг треугольника OAB . Оптимальные скоростные режимы приведены на рис. 3 и 4.

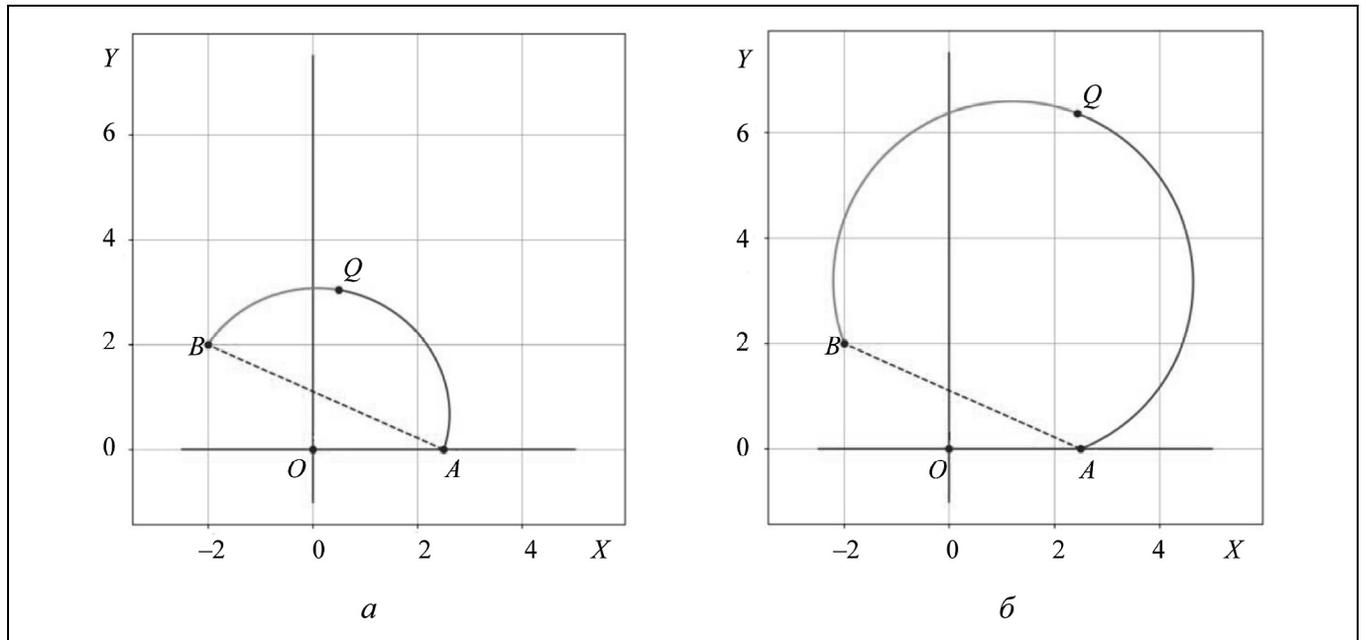


Рис. 2. Траектории движения подвижного объекта, полученные при решении системы (12): *a* — при $vT = 7$; *б* — при $vT = 16$

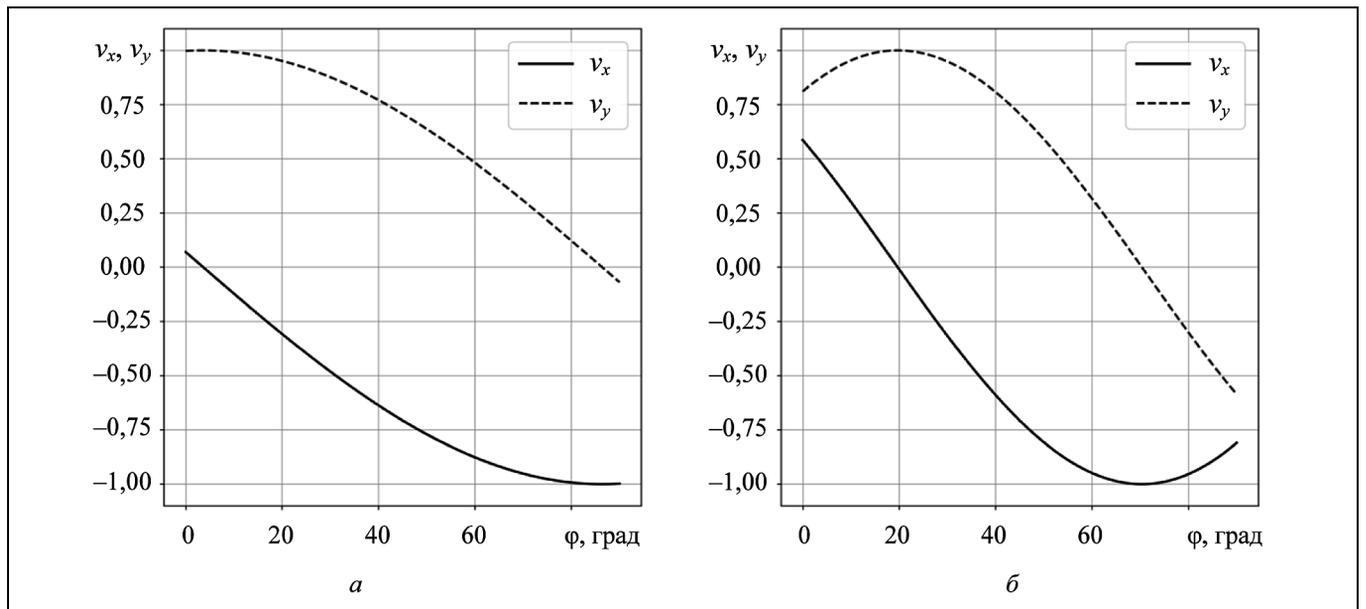


Рис. 3. Оптимальные значения проекций скорости подвижного объекта, полученные при решении системы (13): *a* — при $vT = 4$; *б* — при $vT = 5$

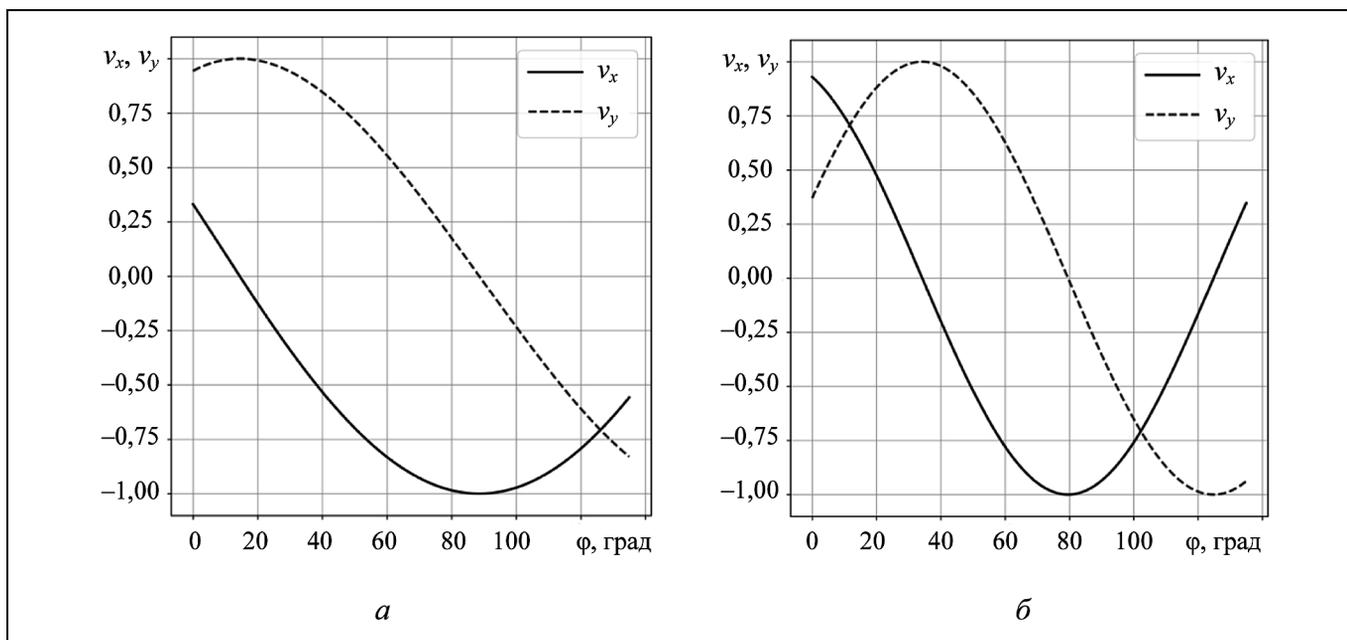


Рис. 4. Оптимальные значения проекций скорости подвижного объекта, полученные при решении системы (12): а — при $vT = 7$; б — при $vT = 16$

Примеры показывают, что длина траектории является существенным фактором, который может быть учтен в постановке и соответственно в решении задачи планирования траектории подвижного объекта. В примерах проиллюстрировано, что оптимизация траектории с учетом ограничения на ее длину приводит к незначительному увеличению критерия при том, что длина траектории движения может быть существенно уменьшена, что в свою очередь приводит к экономии энергетических ресурсов при выполнении миссии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены задачи планирования траектории движения подвижного объекта на постоянной скорости на плоскости в случае, когда карта рисков угроз формируется одиночным сенсором. В результате формализации интегрального критерия исследована вариационная постановка задачи оптимизации при наличии ограничения на длину траектории. Двухточечная вариационная задача сведена к решению системы алгебраических и интегральных уравнений, в которые входят нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а для ее численного решения разработаны программные модули, позволяющие находить решения для различных начальных и конечных условий, а также произвольных ограничений на длину траектории. Результаты решения снабжены примерами и иллюстрациями. Полученные решения сравнены с известными решениями при отсутствии ограничений на длину маршрута. Также

показано, что движение на оптимальной траектории увеличивает значение интегрального критерия не более чем на 20 % по сравнению с оптимальным решением при отсутствии ограничения на длину. Дальнейшая работа будет посвящена решению задачи планирования маршрута движения подвижного объекта при интервальном ограничении на его модуль скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев К.В., Рубинович Е.Я. Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 1. — С. 134—162. [Andreev, K.V., Rubinovich, E.Ya. // Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 1. — P. 106—129.]
2. Dogan, A., Zengin, U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 2006. — Vol. 29, no. 4. — P. 723—732.
3. Галяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 4. — С. 52—62. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Optimization of a mobile object evasion laws from detection // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2012. — Vol. 73, no. 4 — P. 560—569.]
4. Галяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 73—88. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Optimization of the Law of Moving Object Evasion from Detection under Con-

- straints // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, no. 6. — P. 992—1004.]
5. *Галеев А.А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 6. — С. 28—37. [*Galyaev, A.A.* Evasion on Plane from a Single Mobile Observer in the Conflict Environment // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 6. — P. 1017—1024.]
 6. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. — М.: Советское радио, 1977. [*Abchuk, V.A., Suzdal, V.G.* Search of Objects. — М.: Sovetskoe Radio, 1977. (In Russian)]
 7. *Галеев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П., Абрамянц Т.Г.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей: сенсор — маневренное средство // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 8. — С. 113—126. [*Galyaev, A.A., Maslov, E.P., Yakhno, V.P., Abramyan, T.G.* Evasion of a Moving Object from Detection by a System of Observers: Sensor — Maneuvering Search Means // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 8. — P. 1449—1459.]
 8. *Zabarankin, M., Uryasev, S., Murphey, R.* Aircraft Routing under the Risk of Detection // Naval Research Logistics. — 2006. — Vol. 53, no. 8. — P. 728—747.
 9. *Урик З.* Основы гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1978. — 445 с. [*Urik, Z.* Basics of Hydroacoustics. — L.: Sudostroenie, 1978. — 445 s. (In Russian)]
 10. *Галеев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П.* Задача планирования оптимального движения объекта через район случайного поиска // Проблемы управления. — 2017. — № 5. — С. 77—83. [*Galyaev, A.A., Lysenko, P.V., Yakhno, V.P.* Optimal Path Planning for an Object in a Random Search Region // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 11. — P. 2080—2089.]
 11. *Гирсанов И.В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. — 2003. — 120 с. [*Girsanov, I.V.* Lectures on Mathematical Theory of Extreme Problems. — Izhevsk: Regular and Chaotic dynamics, 2003. — 120 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

*Поступила в редакцию 20.07.2018, после доработки 3.09.2018.
Принята к публикации 1.10.2018.*

Галеев Андрей Алексеевич — чл.-корр. РАН, д-р техн. наук,
✉ galyaev@ipu.ru,

Лысенко Павел Владимирович — мл. науч. сотрудник,

Яхно Виктор Павлович — канд. техн. наук,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

MOVING OBJECT EVASION FROM SINGLE DETECTOR AT GIVEN SPEED

A.A. Galyaev[#], P.V. Lysenko, V.P. Yakhno

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#]✉ galyaev@ipu.ru

Abstract. Within the problem of evasion from detection by a single sensor on a plane at a constant speed the problem is considered of planning the optimal route of a moving object in order to minimize the integral level of the useful signal coming to the observer. It is shown that the various mechanisms of detection of a moving object can be reduced to a general mathematical formalization, namely to the study of the detection problem for different types of signal and a small signal/noise ratio. The study of the two-point variational problem with an integral constraint reduces to solving three types of systems of algebraic-integral equations, which include elliptic integrals of Legendre of the first and second kind, and the system type is determined by different initial conditions and values of the integral constraints. For each of the systems described in the paper, a numerical procedure for its solution is implemented.

Keywords: search for a moving object, route planning, optimal law of evasion from detection.

Funding. The work is performed with partial financial support of No. 7 Program of Presidium of Russian Academy of Sciences.



Конгресс WOSC2020

Всемирная организация систем и кибернетики (World Organisation of Systems & Cybernetics, WOSC) будет проводить свой 18-й конгресс (WOSC2020) в Москве с 16 по 18 сентября 2020 г.). Помимо заявленных общих направлений на Конгрессе запланированы специализированные секции **кибернетики и междисциплинарных приложений физики**, заседания которых будут проходить в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

Подробности см. на сайте <https://www.wosc2020.org>