

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ УПРУГОМ И ВЯЗКОУПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТЬЮ¹

А.А. Галяев, П.В. Лысенко

Рассмотрены две задачи оптимального по быстродействию управления механической системой, состоящей из материальной точки и препятствия, взаимодействующих между собой посредством пружины, обладающей упругими или вязкоупругими свойствами. Временной интервал взаимодействия определяется физическими условиями контакта. Исследованы зависимости времени окончания взаимодействия и коэффициента восстановления от вязкоупругих свойств пружины. Разработан программный модуль на языке Python и проведено моделирование поведения системы «материальная точка — препятствие».

Ключевые слова: механическая система с ударами, среда Кельвина — Фойгта, управление по быстродействию.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование ударов в механической системе основано на представлении, в соответствии с которым траектория системы по достижении в фазовом пространстве ограничения в общем случае мгновенно «перескакивает» в другую точку с теми же пространственными координатами, но с другими значениями проекций скоростей. Эти новые значения проекций скоростей задаются при помощи ньютоновского коэффициента восстановления, в то время как сам процесс удара (взаимодействия между телами) оказывается скрыт в этом коэффициенте, поскольку длительность фазы удара полагается равной нулю. Управление в таких системах входит только в безударную фазу движения. В настоящей работе рассматривается конечная (ненулевая) длительность фазы удара (взаимодействия с поверхностью препятствия). Решение уравнений движения системы в фазе взаимодействия позволяет связать послеударные макроскопические характеристики системы (скорость, полную энергию и др.) с доударными [1–8], причем взаимодействие может описываться как линейными по фазо-

вым координатам уравнениями (например, для среды Кельвина — Фойгта [6]), так и нелинейными (например, теория удара Герца [7]). Другая отличительная особенность настоящей работы заключается во введении в фазу взаимодействия управляющего воздействия [4, 5]. При решении задачи применяется метод пространственно-временной замены координат, описанной в работе [8].

Решаются две задачи быстродействия при одностороннем упругом и вязкоупругом взаимодействии материальной точки с управляемой поверхностью. Условия окончания взаимодействия определяются через силу, действующую со стороны поверхности препятствия на тело. В литературе такие условия окончания взаимодействия называются физическими [2].

1. ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ УПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Постановка задачи оптимального управления. Рассмотрим динамику физической системы, состоящей из поверхности, управляемой по скорости, и элемента, включающего в себя пружину и тело конечной массы. Элемент, состоящий из тела и пружины, является единым целым. Поверхность и элемент испытывают взаимодействие при наличии упругой силы, которая пропорциональна сжа-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-01285-а).

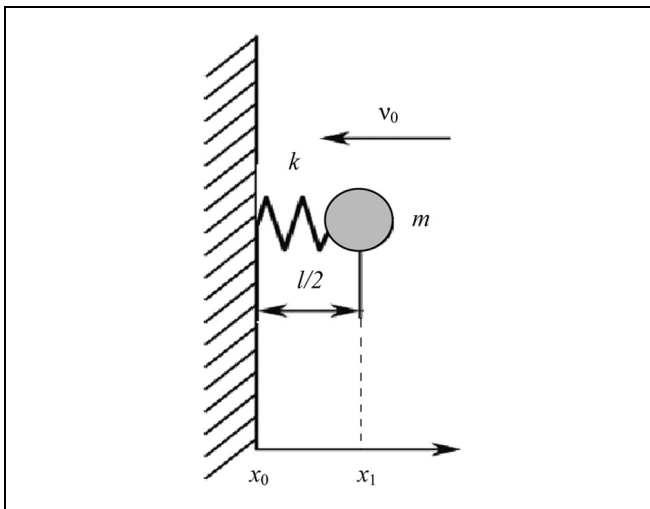


Рис. 1. Состояние системы в начальный момент времени

тию изначально недеформированной пружины. Взаимодействие тела с поверхностью происходит посредством одностороннего контакта безмассовой пружины. Данная модель описывает фазу удара и дает закон восстановления при стремлении жесткости пружины к бесконечности. Динамика системы (рис. 1) описывается уравнениями движения [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u(t), \\ \ddot{x}_1(t) = -\omega_0^2(x_1 - x_0 - l/2). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x_0 — координата поверхности; x_1 — координата элемента, состоящего из тела массой m с прикрепленной к нему пружины длиной $l/2$ и жесткости k , $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — круговая частота. Без потери общности считаем, что $\omega_0 = 1$. Ось x направлена от препятствия к телу. Далее предположим, что на управление наложено ограничение $u \leq |u_0|$. Краевые условия, описывающие начальный и финальный моменты взаимодействия тела с препятствием, имеют вид:

$$\begin{cases} x_0(0) = 0, \\ x_1(0) = l/2, \\ \dot{x}_1(0) = -v_0, \\ x_1(\tau) - x_0(\tau) = l/2, \end{cases} \quad (2)$$

где τ — длительность взаимодействия стенки с пружиной, которую выберем в качестве критерия рассматриваемой задачи оптимального управления. По окончании взаимодействия потребуем, чтобы

$$\tau \rightarrow \min_u. \quad (3)$$

Получили классическую задачу оптимального управления, когда нужно найти минимум критерия (3) на траекториях системы (1) при краевых ограничениях вида (2) и ограничении на управление $u \leq |u_0|$.

Решение задачи. Приведем систему (1) к нормальной форме Коши, совершив замену координат $\dot{x}_1 = x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_0 + l/2. \end{cases} \quad (4)$$

Воспользуемся для решения задачи (1)–(4) принципом максимума Понтрягина [9]. Функция Понтрягина для задачи быстрогодействия

$$\begin{aligned} H(x_0, x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u) = \\ = \psi_1 u + \psi_2 x_2 + \psi_3(-x_1 + x_0 + l/2) - 1. \end{aligned}$$

Сопряженная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 = \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) получаем выражения для сопряженных функций

$$\begin{aligned} \psi_3 &= A \sin(t - \alpha_0), \\ \psi_1 &= A \cos(t - \alpha_0) + B, \end{aligned}$$

где A, B, α_0 — некоторые константы. Условие максимума функции H по u означает, что на оптимальных траекториях (x_0^*, x_1^*, x_2^*) выполнено

$$\begin{aligned} H(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u^*) = \\ = \max_{u < |u_0|} H(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u), \end{aligned}$$

т. е. оптимальное управление u^* максимизирует функцию Понтрягина. Из вида функции H в нашем случае следует, что

$$u^* = u_0 \text{sign}(\psi_1) = u_0 \text{sign}(A \cos(t - \alpha_0) + B).$$

Откуда получаем управление релейного типа, которое переключается в моменты времени t_i , удовлетворяющие уравнению

$$A \cos(t_i - \alpha_0) + B = 0.$$

Теперь возникает вопрос выбора знака управления в начальный момент времени. Поскольку решается задача минимизации времени взаимодействия тела с препятствием, то выберем $u(0) = u_0 > 0$. Выпишем уравнения динамики системы до и после

ле первого момента переключения управления. Первый отрезок времени длительностью τ_1 с управлением $u = u_0$ определяет движение препятствия и динамику взаимодействия тела с препятствием:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u_0 t, \\ \ddot{x}_1(t) = -(x_1 - x_0 - l/2). \end{cases} \quad (6)$$

Проинтегрировав второе из уравнений (6), получим его общее решение в виде

$$x_1 = C \sin(t - \beta_0) + u_0 t + l/2.$$

Подставляем сюда краевые условия (2) и получаем, что

$$x_1(0) = \frac{l}{2} = C \sin(-\beta_0) + \frac{l}{2} \beta_0 = 0,$$

$$\dot{x}_1(0) = -v_0 = C \cos(0) + u_0 C = -(u_0 + v_0).$$

Таким образом, координаты препятствия и тела в момент первого переключения управления $t_1 = \tau_1$:

$$\begin{cases} x_0(t_1) = u_0 t_1, \\ x_1(t_1) = -(u_0 + v_0) \sin(t_1) + u_0 t_1 + l/2. \end{cases} \quad (7)$$

Второй отрезок времени длительностью τ_2 с управлением $u = -u_0$ определяет динамику системы вплоть до момента окончания взаимодействия, а именно:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(s) = u_0 \tau_1 - u_0 s, \\ \ddot{x}_1(s) = -(x_1 - x_0 - l/2) \end{cases} \quad (8)$$

во времени $s = t - t_1$, которое отсчитывается от момента $t_1 = \tau_1$. Проинтегрировав второе из уравнений (8), получим общий вид решения с неизвестными константами C_1 и β_1 :

$$x_1(s) = C_1 \sin(s - \beta_1) + u_0 \tau_1 - u_0 s + l/2.$$

Из условия неразрывности координат $x(0) = x(t_1)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(t_1)$ в выражении (7) находим соотношения между константами в виде:

$$\begin{aligned} C_1 \sin(\beta_1) &= (u_0 + v_0) \sin \tau_1, \\ C_1 \cos(\beta_1) &= 2u_0 - (u_0 + v_0) \cos \tau_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Конечный момент взаимодействия из краевых условий (2) задает соотношение между интервалом τ_2 и константой β_1 :

$$\begin{aligned} C_1 \sin(\tau_2 - \beta_1) + u_0 \tau_1 - u_0 \tau_2 + \frac{l}{2} - (u_0 \tau_1 - u_0 \tau_2) &= \\ = \frac{l}{2} \tau_2 = \beta_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует, что

$$\operatorname{tg} \tau_2 = \frac{(u_0 + v_0) \sin \tau_1}{2u_0 - (u_0 + v_0) \cos \tau_1}.$$

Общее время взаимодействия

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \tau_1 + \operatorname{arctg} \frac{(u_0 + v_0) \sin \tau_1}{2u_0 - (u_0 + v_0) \cos \tau_1}. \quad (11)$$

Аналитическое исследование функции $\tau(\tau_1)$ (11) в пакете Maple показывает, что она достигает минимума в первой точке перелома — нуле знаменателя тангенса, а именно, при

$$2u_0 - (u_0 + v_0) \cos \tau_1 = 0.$$

Следовательно, длительности интервалов управления

$$\tau_1 = \arccos \frac{2u_0}{u_0 + v_0}, \quad \tau_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Выражение (12) означает, что оптимальная длительность второго интервала управления при любых, имеющих физический смысл, u_0 и v_0 равна четверти периода.

Продемонстрируем полученный результат несколькими примерами.

Приведем соответствующие (рис. 2) графику оптимальные значения интервалов τ_1 и τ , получен-

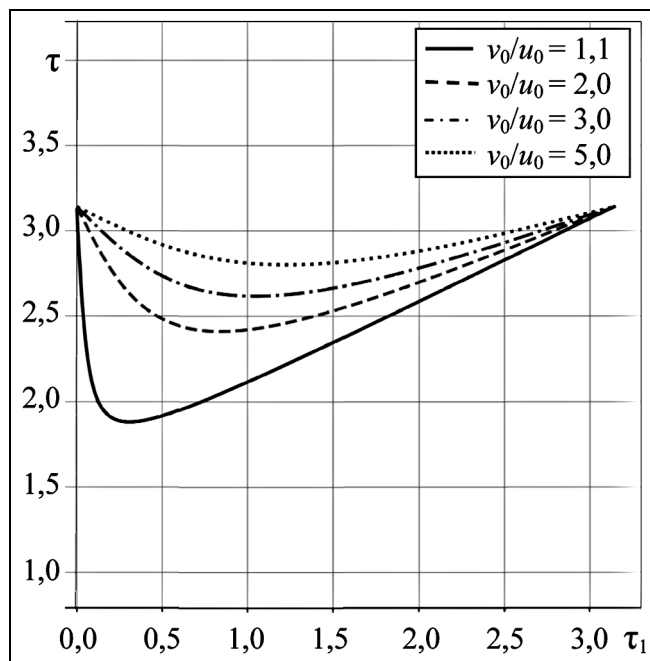


Рис. 2. Зависимость времени взаимодействия поверхности с телом от длительности первого интервала управления для разных соотношений начальной скорости тела к уровню управления



ные численным анализом функций $\tau(\tau_1)$ при различных отношениях v_0/u_0 :

$$\begin{aligned} \tau_1 = 0,31, \quad \tau_2 = 1,57, \quad \tau = 1,88, \\ \tau_1 = 0,64, \quad \tau_2 = 1,57, \quad \tau = 2,21, \\ \tau_1 = 0,84, \quad \tau_2 = 1,57, \quad \tau = 2,41, \\ \tau_1 = 1,05, \quad \tau_2 = 1,57, \quad \tau = 2,62. \end{aligned}$$

Численный расчет показывает, что интервал τ_2 с любой точностью всегда равен $\pi/2$. Также численно проверено, что функция $\tau(\tau_1)$ имеет минимум в точке, удовлетворяющей условию (12). Все численные расчеты выполнены средствами языка Python.

2. ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ ВЯЗКОУПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Постановка задачи оптимального управления. Положим теперь, что в рассмотренной выше системе взаимодействие препятствия с телом определяются не только упругой силой пружины, но еще и вязкой силой Кельвина — Фойгта, пропорциональной относительной скорости тела. Уравнения динамики системы (1) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u(t), \\ \ddot{x}_1(t) = -(x_1 - x_0 - l/2) - 2\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) \end{cases} \quad (13)$$

Снова на управление наложено ограничение $u \leq |u_0|$. Коэффициент вязкости находится в интервале $\alpha \in [0, 1]$. Краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} x_0(0) = 0, \\ x_1(0) = l/2, \\ \dot{x}_1(0) = -v_0, \\ \ddot{x}_1(\tau) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где τ — длительность взаимодействия препятствия с пружиной, которую выберем в качестве критерия задачи. Итак, необходимо найти

$$\tau \rightarrow \min_u,$$

на решениях системы (13) и краевых условиях (14).

Решение задачи проводим аналогично решению задачи быстрогодействия в § 1. Приводим систему (13) к нормальной форме Коши, совершив замену координат $\dot{x}_1 = x_2$, получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = u, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_0 + l/2 - 2\alpha(x_2 - u). \end{cases} \quad (15)$$

Функция Понтрягина для задачи быстрогодействия (13)—(15)

$$H = \psi_1 u + \psi_2 x_2 + \psi_3(-x_1 + x_0 + l/2 - 2\alpha(x_2 - u)) - 1.$$

Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_3, \\ \dot{\psi}_2 = \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_2 + 2\alpha\psi_3. \end{cases} \quad (16)$$

Подставив второе уравнение системы (16) в третье, получим

$$\ddot{\psi}_2 + 2\alpha\dot{\psi}_2 + \psi_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$, поэтому сопряженные функции представимы в явном виде:

$$\begin{cases} \psi_1 = -\psi_2 + C, \\ \psi_2 = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi_0), \\ \psi_3 = A\alpha e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi_0) + A\omega e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi_0), \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$, а A, C и ϕ_0 — некоторые константы.

Согласно рассуждениям, аналогичным рассуждениям в § 1, из вида функции Понтрягина следует, что

$$\begin{aligned} u^*(t) &= u_0 \text{sign}(\psi_1 + 2\alpha\psi_3) = \\ &= u_0 \text{sign}(-Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi_0) + 2\alpha(A\alpha e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi_0) + \\ &\quad + A\omega e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi_0)) + C). \end{aligned}$$

Далее, выпишем уравнения, характеризующие поведение системы, до и после первого переключения. На первом отрезке времени длительностью τ_1 с управлением $u = u_0$ уравнения (13) принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = u_0, \\ \ddot{x}_1(t) + 2\alpha\dot{x}_1 + x_1 = x_0 + l/2 + 2\alpha\dot{x}_0. \end{cases} \quad (17)$$

Подставив первое из уравнений (17) во второе, получим

$$\ddot{x}_1(t) + 2\alpha\dot{x}_1 + x_1 = u_0 t + l/2 + 2\alpha u_0.$$

Решение уравнения имеет вид:

$$x_1(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi_0) + u_0 t + l/2.$$

Подставив начальные условия из краевых условий (14), получим

$$x_1(0) = l/2 = A \sin(\phi_0) + (l/2)\phi_0 = 0,$$

$$\dot{x}_1(0) = -v_0 = A\omega + u_0 A = -\frac{v_0 + u_0}{\omega}.$$

Таким образом, координаты и скорость тела в момент первого переключения управления $t_1 = \tau_1$

$$\begin{cases} x_1(t_1) = -\frac{v_0 + u_0}{\omega} e^{-\alpha t_1} \sin(\omega t_1) + u_0 t_1 + l/2, \\ \dot{x}_1(t_1) = -\frac{v_0 + u_0}{\omega} (-\alpha e^{-\alpha t_1} \sin(\omega t_1) + \\ + \omega e^{-\alpha t_1} \cos(\omega t_1)) + u_0. \end{cases} \quad (18)$$

На втором отрезке времени длительностью τ_2 с управлением $u = -u_0$ уравнения (13) принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(s) = u_0 \tau_1 + u_0 s, \\ \ddot{x}_1(s) + 2\alpha \dot{x}_1 + x_1 = x_0 + l/2 + 2\alpha \dot{x}_0. \end{cases} \quad (19)$$

Время $s = t - t_1$ здесь отсчитывается от момента времени $t = \tau_1$. Для уравнения

$$\ddot{x}_1(s) + 2\alpha \dot{x}_1 + x_1 = u_0 \tau_1 - u_0 s + l/2 - 2\alpha u_0,$$

аналогично рассуждениям выше, находим решение системы уравнений (19)

$$x_1(s) = B e^{-\alpha s} \sin(\omega s - \phi_1) + u_0 \tau_1 - u_0 s + l/2,$$

где B и ϕ_1 — некоторые константы, которые могут быть найдены из краевых условий. Из условия непрерывности координат $x(0) = x(t_1)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(t_1)$ в выражениях (18), получаем

$$\begin{cases} -B \sin \phi_1 = -\frac{v_0 + u_0}{\omega} e^{-\alpha \tau_1} \sin(\omega \tau_1), \\ B(\omega \cos \phi_1 + \alpha \sin \phi_1) - u_0 = \\ = -\frac{v_0 + u_0}{\omega} (-\alpha e^{-\alpha \tau_1} \sin(\omega \tau_1) + \omega e^{-\alpha \tau_1} \cos(\omega \tau_1)) + u_0. \end{cases} \quad (20)$$

Условие окончания взаимодействия из краевых условий (14) принимают вид:

$$(2\alpha^2 - 1) \sin(\omega \tau_2 - \phi_1) - 2\alpha \omega \cos(\omega \tau_2 - \phi_1) = 0. \quad (21)$$

Объединив выражения (20) и (21), запишем систему, позволяющую найти $\tau_2(\tau_1)$:

$$\begin{cases} B \sin \phi_1 = -A e^{-\alpha \tau_1} \sin(\omega \tau_1), \\ B \cos \phi_1 = 2 \frac{u_0}{\omega} + A e^{-\alpha \tau_1} \cos(\omega \tau_1), \\ (2\alpha^2 - 1) \sin(\omega \tau_2 + \phi_1) - 2\alpha \omega \cos(\omega \tau_2 - \phi_1) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Разделив первое из уравнений (22) на второе и сделав преобразования в третьем уравнении, можно перейти к более компактному виду:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \phi_1 = \frac{A \omega e^{-\alpha \tau_1} \sin(\omega \tau_1)}{2u_0 + A \omega e^{-\alpha \tau_1} \cos(\omega \tau_1)}, \\ \operatorname{tg}(\omega \tau_2 - \phi_1) = \frac{2\alpha \omega}{2\alpha^2 - 1}. \end{cases} \quad (23)$$

Легко удостовериться в том, что при подстановке $\alpha = 0$ уравнения (23) переходят в выражения (12) в предыдущей задаче.

Продемонстрируем данный результат несколькими примерами. Приведем численные результаты для первого случая ($v_0/u_0 = 1,1$):

$$\alpha = 0,0: \quad \tau_1 = 0,31, \quad \tau_2 = 1,57, \quad \tau = 1,88,$$

$$\alpha = 0,1: \quad \tau_1 = 0,31, \quad \tau_2 = 1,29, \quad \tau = 1,6,$$

$$\alpha = 0,5: \quad \tau_1 = 0,33, \quad \tau_2 = 0,49, \quad \tau = 0,82,$$

$$\alpha = 0,8: \quad \tau_1 = 0,34, \quad \tau_2 = 0,08, \quad \tau = 0,42.$$

Откуда и из рис. 3 следует, что с увеличением α оптимальное время уменьшается, также как и длительность второго интервала взаимодействия, при этом длительность первого интервала управления меняется незначительно в широком диапазоне изменения α . Это связано с тем, что с увеличением α все больше начальной кинетической энергии тела рассеивается в течение первого интервала. Построим зависимость оптимального времени от α при разных отношениях v_0/u_0 .

Рис. 4 показывает, что длительность интервала взаимодействия тела с поверхностью возрастает при увеличении отношения начальной скорости тела к уровню управления, и убывает с увеличением коэффициента вязкости α .

Особый интерес представляет коэффициент восстановления v_f/v_0 (отношение послеударной скорости тела к доударной) как характеристика взаимодействия тела с поверхностью. Послеударная скорость получается вследствие решения уравнений динамики взаимодействия тела с поверхностью в момент их контакта. Видим, что при различных отношениях начальной скорости тела к уровню управления возможно получить одинаковые коэффициенты восстановления при одних α . На рис. 5 видно, что для фиксированных α и u_0 есть максимум коэффициента восстановления по начальной скорости тела v_0 .

В полученные выражения оптимальных значений τ жесткость k и круговая частота ω_0 не входят,

поскольку изначально было высказано предположение, что $\omega_0 = 1$. В случае когда $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, то замена времени $t \rightarrow t/\omega_0$ и ограничения $u_0 \rightarrow u_0/\omega_0$ приводит к тому, что оптимальные значения τ , τ_1 и τ_2 , полученные при решении задач быстродействия, следует разделить на ω_0 . Тогда при $k \rightarrow \infty$ эти временные интервалы стремятся к нулю. Однако структура решений задач быстродействия сохраня-

ется, временной интервал, на котором действует оптимальное управление, состоит из двух интервалов: на первом управление действует навстречу начальной скорости тела, на втором — в противоположную. Терминальное значение скорости не зависит от жесткости, а значит и от предельного перехода при $k \rightarrow \infty$. Тем самым в зависимости от вязкоупругих свойств пружины, начальной скорости тела и ограничения управления однозначным образом по решению системы (1) или (13) опреде-

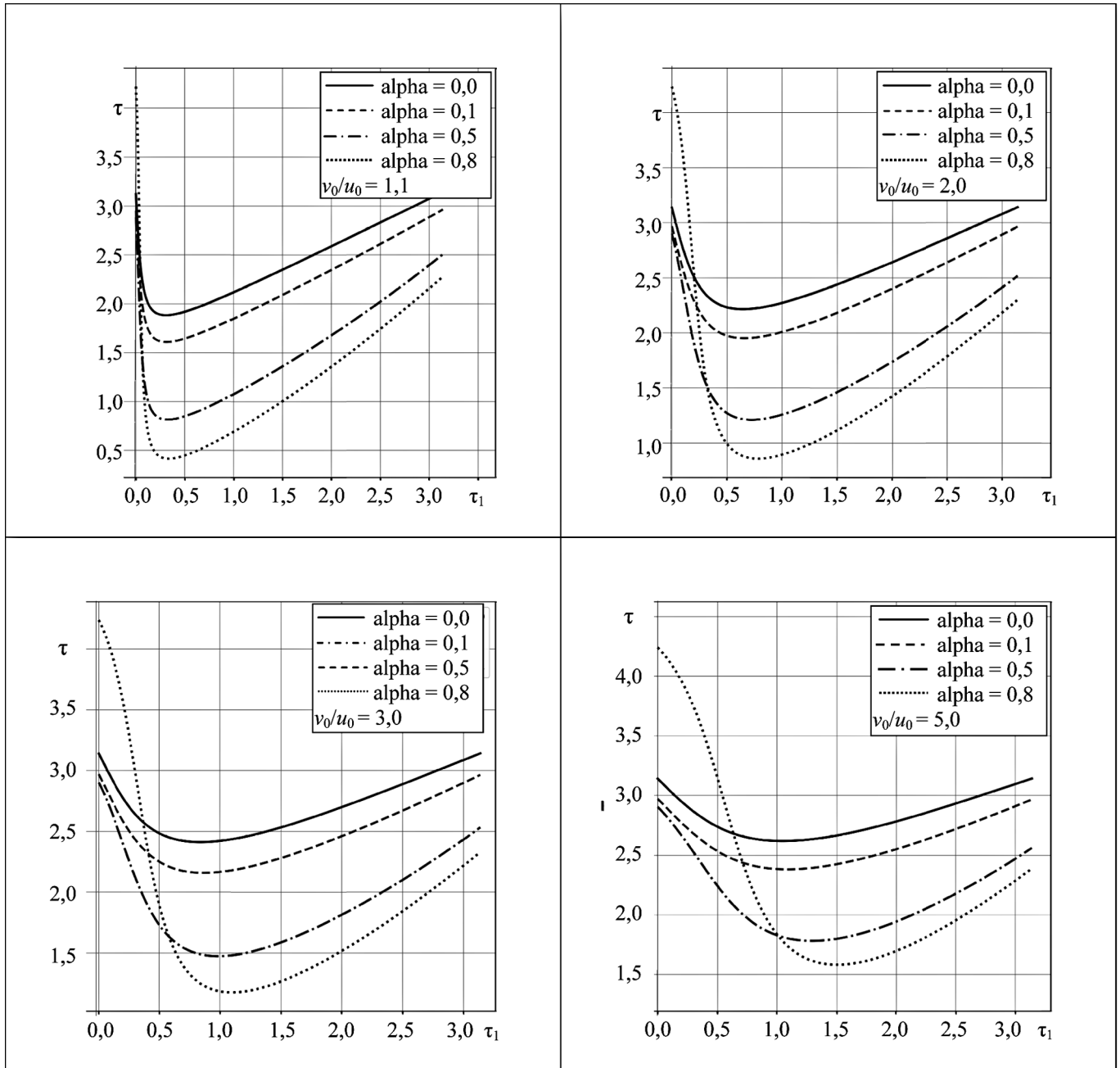


Рис. 3. Зависимость времени взаимодействия поверхности с телом от длительности первого этапа управления при разных отношениях начальной скорости элемента к уровню управления и разных коэффициентах вязкости α

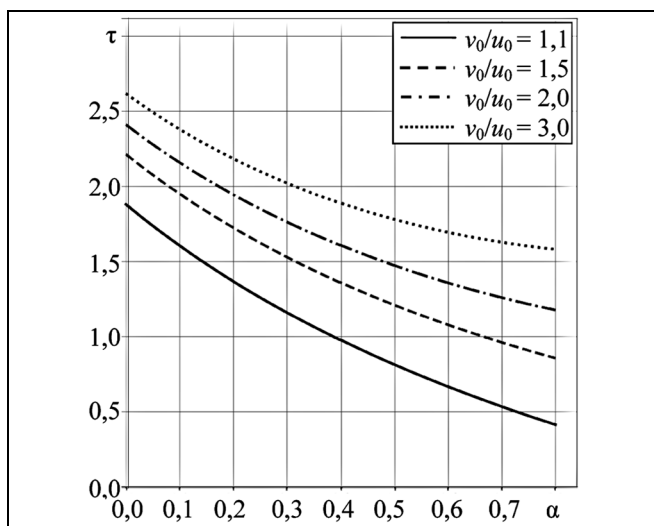


Рис. 4. Зависимость оптимального времени взаимодействия поверхности с телом от коэффициента вязкости α при разных отношениях начальной скорости элемента к уровню управления

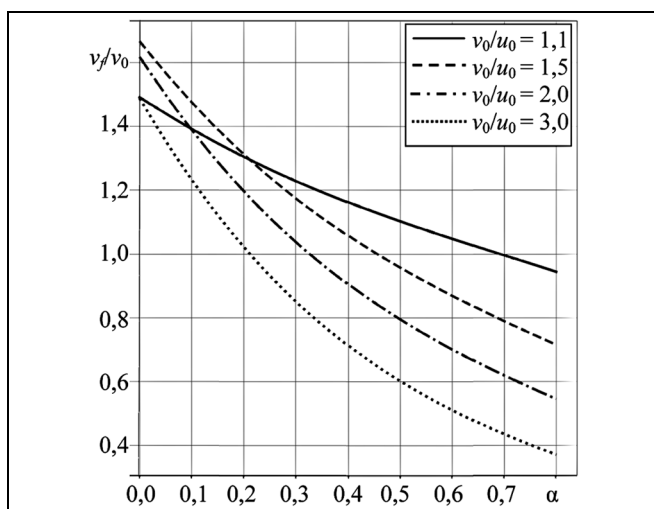


Рис. 5. Зависимость коэффициента восстановления от коэффициента вязкости α при разных отношениях начальной скорости тела к уровню управления

ляется терминальное послеударное значение скорости тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Допредельная управляемая система является одномерной моделью взаимодействия в фазе удара. Чтобы дополнительно снабдить препятствие упругими свойствами, нужно знать пространственные распределения напряжений в среде либо пользоваться готовыми моделями, например, нелинейной моделью Герца. Показано, что даже в случае простой линейной модели появляется нетривиальный закон управления, с неоднозначной связью

закона восстановления с параметрами задачи. Закон оптимального управления, а также коэффициент восстановления, полученные в работе, служат основой численного моделирования поведения системы и дают начальные условия для описания движения точки после взаимодействия с препятствием. Предложенный подход к нахождению послеударных макроскопических характеристик системы позволит решать и другие задачи оптимального управления механической системой в фазе удара.

Решена задача оптимального быстрогодействия при одностороннем вязкоупругом взаимодействии материальной точки с управляемой поверхностью. Исследованы зависимости времени окончания взаимодействия и коэффициента восстановления от вязких свойств. Разработан программный модуль на языке Python и проведено моделирование поведения системы «материальная точка — препятствие».

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 12. — С. 56—103.
2. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 168 с.
3. Галаев А.А. О математической модели импульсного воздействия, вызванного ударом системы материальных точек об абсолютно жесткое препятствие // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 6. — С. 27—40. [Galyaev A.A. Impact of a system of material points against an absolutely rigid obstacle: a model for its impulsive action // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67, N 6. — P. 856—867.]
4. Галаев А.А. Оптимальное импульсное управление динамической системой в фазе удара // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 75—88. [Galyaev A.A. Optimal pulse control of dynamic systems in the shock phase // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67, N 1. — P. 65—77.]
5. Галаев А.А. Об одной задаче оптимального управления в фазе удара и унификации моментов окончания взаимодействия // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 10—21.
6. Галаев А.А. Об одномерном ударе цепочки тел, обладающей вязкоупругими свойствами // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 10. — С. 40—49.
7. Боровин Г.К., Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная модель коллинеарного удара с сухим трением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2014. — № 46. — С. 1—14.
8. Miller B.M., Rubinovich E.Ya., Bentsman J.G. Singular Space-Time Transformations. Method for Solving the Painleve Problem // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, N 2. — С. 208—219.
9. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. — 119 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Галаев Андрей Алексеевич — чл.-корр. РАН, гл. науч. сотрудник, ✉ galyaev@ipu.ru,

Лысенко Павел Владимирович — математик, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.