УДК 519.837.3 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.3.8

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ ЦЕЛИ В ЗАДАЧЕ «АТАКУЮЩИЕ — ЦЕЛЬ — ЗАЩИТНИКИ»[1]

М.Э. Бузиков, А.А. Галяев

Аннотация. Задача «атакующие — цель — защитники» сформулирована и формализована в виде конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией. Предложен метод оценки вероятности выживания цели при известных оценках динамических возможностей атакующих и получены рекуррентные соотношения для ее вычисления, на основе которых произведены численные оценки вероятности выживания цели при оптимальном поведении игроков. Защитникам в игре приписываются три различные роли: роль ложной цели, роль сопровождающего цели и роль перехватывающего атакующего. Проанализировано поведение вероятности выживания как функции параметров задачи «атакующие — цель — защитники». Полученные оценки вероятности могут служить эвристической оценкой качества структуры динамической системы, а полученные оптимальные стратегии — эвристиками для решения дифференциальной игры «атакующие — цель — защитники». Оптимальные стратегии содержат приказы для участников игры с указанием их текущей роли. Средствами языка «Python» разработан программный модуль, позволяющий вычислять вероятность выживания цели по известным параметрам задачи.

Ключевые слова: атакующие-цель-защитники, ложные цели, конечно-шаговая игра, антагонистическая игра, неполная информация, динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Формализация и математический анализ задач коллективного преследования одной цели при наличии защитников вызывают существенные трудности. В настоящее время подобные задачи решены или исследованы лишь для некоторых частных случаев: для одного атакующего, одного защитника и одной цели в случае простых движений [1—3]; для одного атакующего и одной цели в случае наличия ограничений на маневр [4, 5], для нескольких атакующих и одной цели [6—8]. Возникающие оптимизационные задачи крайне сложны даже в этих частных случаях.

В настоящей работе предложены методы оценки вероятности выживания цели, если известны самые огрубленные динамические возможности атакующих, цели и защитников. Такие динамические возможности возникают из решения игр качества [1, 2, 9], когда имеется дискретное число исходов игры (победа или поражение, например). В работах [1, 2], например, игра качества решается построением разбиения пространства игры на две области: если начальные условия игры принадлежат первой области, то игра заканчивается победой атакующего; второй области — выигрывают цель и защитник, т. е. защитник успевает перехватить атакующего. Предваряя решение игры качества, авторы [1, 2] решают игру степени (оптимизационную задачу поиска траекторий с заданным вещественным функционалом качества). Анализ решений игры степени позволяет в их случае свести решение игры качества к задаче поиска геометрического места точек в пространстве игры.

В работах [1, 2] роль защитника состоит в том, чтобы перехватить атакующего либо препятствовать его движению в сторону цели. Популярный сценарий использования защитников состоит в исполнении ложной цели [10, 11], поэтому в настоящей работе полагается, что защитники не только могут перехватывать атакующих, но и быть ложными целями.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН.

В случае многих защитников и атакующих уравнение динамики системы может менять свой вид в процессе эволюции. Так, например, при перехвате одним защитником одного атакующего падает размерность пространства состояний системы, так как далее события происходят без двух участников. Такие качественные изменения могут быть рассмотрены как шаг некоторой многошаговой игры двух игроков, в которой игроки выбирают некоторые действия из конечных множеств действий, пытаясь увеличить свой конечный выигрыш [12]. Предложенный в настоящей работе метод позволяет не только оценить вероятность выживания цели, но и получить макроинструкции по управлению. Такие макроинструкции состоят из «приказов» участникам игры придерживаться некоторой роли на определенных этапах. Полученные оценки вероятности могут быть полезны в виде показателя качества структуры динамической системы при применении оптимальных стратегий поведения игроков на практике [13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем называть цель и защитников убегающими. Каждый защитник может играть роль ложной цели (ЛЦ), перехватывающего атакующего (ПА) и сопровождающего цель. Атакующие видят цель всегда, но не видят защитников, если защитники не стали ЛЦ. Шаг игры состоит в том, чтобы со стороны убегающих назначить ЛЦ и ПА, а со стороны атакующих — выбрать цели для преследования. Назначая роли ЛЦ, убегающие вынуждают атакующих делиться на группы. Предполагается, что образованные группы могут лишь дальше делиться на группы, а их участники не могут переходить в уже существующие группы. В начале игры убегающим известно число атакующих, а атакующим — число убегающих.

Пусть число убегающих $N \in \mathbb{N}$, а число атакующих $M \in \mathbb{N}^0$. Пусть $D \in \mathbb{N}$ — максимальное число групп, на которые могут поделиться убегающие на каждом шаге игры (число делений), причем $D \le N$; $T \in \mathbb{N}^0$ — максимальное число шагов игры, т. е. время, за которое атакующие догонят цели; $p \in (0, 1)$ — вероятность промаха защитника при назначении на роль ПА, которая постоянна в течение всей игры. Параметры D, T и p известны убегающим и атакующим.

Будем считать, что если $M = 0$ (цель никто не атакует), то вероятность выживания цели равна единице; если $M \ge 1$ и $N = 1$ (атакована цель без защитников) или $M \ge 1$ и $T = 0$ (атакующие догнали убегающих), то вероятность выживания цели равна нулю. Описанные условия являются терминальными. Будем называть игру тривиальной, если она начинается из терминальных условий.

Опишем первый шаг нетривиальной игры (последующие шаги могут отличаться информацией о знании текущих параметров задачи со стороны атакующих). В начале шага убегающие выбирают $n \in \{0, ..., \min(N - 1, M)\}$ ролей ПА для защитников. Эти защитники в роли ПА перехватывают $m \in \{0, ..., n\}$ атакующих и далее игра происходит без n защитников и m атакующих. Затем убегающие делятся на $i \in \{1, ..., \min(N - n, D)\}$ групп таким способом, что назначают $i - 1$ роль ЛЦ защитникам. Следующие действия убегающие и атакующие производят одновременно: убегающие выбирают численный состав групп, выбирая индекс k, которым нумеруются возможные численные составы групп, и номер группы $j \in \{1, ..., i\}$, в которой будет находиться цель, а догоняющие, фиксируя индекс k', выбирают свой численный состав групп. В итоге, группу j убегающих атакует группа $j' \in \{1, ..., i\}$ атакующих, возможно, пустая. На этом первый шаг заканчивается и в его конце возникает задача для следующего шага игры для группы, в которой находится цель (остальные группы убегающих и атакующих выходят из игры, так как по условию участникам запрещено менять группы и в них нет цели).

Значения индексов n, i, j, k назначаются убегающими, k' — атакующими. Индексы m и j' в ходе игры принимают свои значения случайным образом. Всюду далее употребление индексов n, i, j, k и k' ассоциировано с описанными выше действиями игроков, а пометка «o» означает, что фиксировано оптимальное значение индекса. Критерием служит вероятность выживания цели: убегающие максимизируют, а атакующие минимизируют эту вероятность.

Будем различать два типа игр в зависимости от того, знают ли атакующие в начале второго шага игры, какое число убегающих они преследуют. Если атакующим известно это число, то такую игру будем обозначать как (N, M, D, T, p), если неизвестно, то $(N, M, D, T, p)^*$. Будем считать, что (N, M, D, T, p) — игра с полной информацией, так как все значения параметров игры для всех игроков полагаются известными в течение игры, а в игре $(N, M, D, T, p)^*$ неполнота информации для атакующих появляется со второго шага, поскольку им становится неизвестно точное число убегающих в группе цели. Далее будет показано, что оптимальные поведения и значения этих игр существуют и совпадают. Значение критерия этих игр, т. е. выигрыш убегающих, будем обозначать как $v(N, M, D, T, p)$ и $v^*(N, M, D, T, p)$ соответственно. В про-

цессе решения игры $(N, M, D, T, p)^*$ может возникнуть игра, когда атакующие не знают числа убегающих уже на первом шаге. Такую игру мы будем обозначать как $(N, M, D, T, p)^{\#}$, а ее значение, если оно существует, как $v^{\#}(N, M, D, T, p)$.

Подыгрой нетривиальной игры (N, M, D, T, p) будем называть всякую игру (N', M', D, T', p), у которой $N' \le N$, $M' \le M$ и $T' \le T$. Подыгрой нетривиальной игры $(N, M, D, T, p)^*$ будем называть всякую игру $(N', M', D, T', p)^{\#}$, у которой $N' \le N$, $M' \le M$ и $T' \le T$.

2. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ ЦЕЛИ

Вероятность перехватить m атакующих n защитниками в роли ПА подчиняется биномиальному закону распределения. Обозначим

$$b_{nm}(p) \overset{\text{def}}{=} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Лемма 1. *Пусть в нетривиальной игре (N, M, D, T, p) существует равновесие и $A_{nm}(N, M, D, T, p)$ — вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после назначения убегающими n ролей ПА и m перехваченных ими атакующих на первом шаге. Тогда значение этой игры вычисляется как*

$$v(N, M, D, T, p) = \max_{n \in \{0, \ldots, \min(N-1, M)\}} \sum_{m=0}^{n} b_{nm}(p) \times \times A_{nm}(N, M, D, T, p). \quad (1)$$

Доказательство. Согласно определению условной вероятности величина $b_{n^o m}(p) A_{n^o m}(N, M, D, T, p)$ представляет собой вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков и назначении убегающими n^o ролей ПА и m перехваченных ими атакующих в игре (N, M, D, T, p) на первом шаге, где $m \in \{0, \ldots, n^o\}$. Согласно формуле полной вероятности

$$v(N, M, D, T, p) = \sum_{m=0}^{n^o} b_{n^o m}(p) A_{n^o m}(N, M, D, T, p),$$

что эквивалентно выражению (1) в силу определения числа n^o. Лемма доказана. ♦

Далее нам понадобится операция разбиения числа $s \in \mathbb{N}^0$ на сумму $i \in \mathbb{N}$ чисел, не меньших числа $r \in \mathbb{N}^0$ [14]. Само разбиение представляет собой кортеж из i элементов. Например, для $s = 6$, $i = 3$ и $r = 1$ кортеж (1, 2, 3) является разбиением, так как $6 = 1 + 2 + 3$. Кортежи, у которых слева есть значения бо́льшие, чем справа, не будем считать за разбиения, т. е. (3, 2, 1) не является разбиением числа 6, так как $3 > 2$ и 3 стоит левее 2. Обозначим как p^s_{ri} число таких разбиений (такое обозначение корректно, так как множество указанных разбиений конечно).

Зададим порядок на множестве разбиений по следующему правилу: $(a_1, \ldots, a_i) < (b_1, \ldots, b_i)$ тогда и только тогда, когда найдется $j \in \{1, \ldots, i\}$ при котором $a_j < b_j$ и $(a_1, \ldots, a_{j-1}) = (b_1, \ldots, b_{j-1})$. Например, $(1, 2, 3) < (2, 2, 2)$, так как $a_1 < b_1$; $(1, 1, 4) < (1, 2, 3)$, так как $a_2 < b_2$ и $a_1 = b_1$. Множество разбиений с указанным отношением порядка включает в себя свою точную нижнюю грань. Перенумеруем множество разбиений индексом $k \in \{1, \ldots, p^s_{ri}\}$, начиная с точной нижней грани. Обозначим j-й элемент k-го разбиения как p^s_{rijk}.

Проиллюстрируем процесс вычисления p^s_{ri} и p^s_{rijk} на примере. Пусть $s = 6$, $i = 3$ и $r = 1$. Выпишем все разбиения по порядку: (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2). Число разбиений равно 3, поэтому $p^6_{13} = 3$.

$$(p^6_{1311}, p^6_{1321}, p^6_{1331}) = (1, 1, 4),$$

$$(p^6_{1312}, p^6_{1322}, p^6_{1332}) = (1, 2, 3),$$

$$(p^6_{1313}, p^6_{1323}, p^6_{1333}) = (2, 2, 2).$$

Лемма 2. *Пусть в нетривиальной игре (N, M, D, T, p) и всякой ее подыгре существует равновесие и $E_{nmijkk'}(N, M, D, T, p)$ — вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после первого шага, при условии назначения убегающими n ролей ПА и m перехваченных ими атакующих, назначения $i - 1$-й роли ЛЦ убегающими, выбора j-й группы для цели, k-го разбиения на группы убегающими и k' разбиения атакующими на первом шаге, где $k \in \{1, \ldots, p^{N-n}_{1i}\}$, $k' \in \{1, \ldots, p^{M-m}_{0i}\}$. Тогда*

$$E_{nmijkk'}(N, M, D, T, p) = \sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i} v(p^{N-n}_{1ijk}, p^{M-m}_{0ij'k'}, \min(D, p^{N-n}_{1ijk}), T-1, p), \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим игры

$$(p^{N-n}_{1ijk}, p^{M-m}_{0ij'k'}, \min(D, p^{N-n}_{1ijk}), T-1, p), \quad (3)$$

где $j' \in \{1, \ldots, i\}$. Число p^{N-n}_{1ijk} представляет собой количество убегающих назначенных после деления $N - n$ убегающих на i групп в j-ю группу убегающих, если выбрано k-е разбиение (число убегающих $N - n$, так как n

защитников назначены на роль ПА). Числа $p_{0ij'k'}^{M-m}$ представляют собой числа атакующих в группах, которые будут преследовать i групп убегающих, если выбрано k'-е разбиение (число атакующих $M - m$, так как m атакующих перехвачены защитниками в роли ПА). Число $\min(D, p_{1ijk}^{N-n})$ является максимальным возможным числом делений для семейства задач (3), так как убегающие не могут поделиться на число групп большее, чем D (по условиям задачи) и p_{1ijk}^{N-n} (их число). Так как в j-й группе находится цель, то задачи (3) представляют собой подзадачи для игры (N, M, D, T, p) после назначения n ролей ПА, перехвата m атакующих ими, деления на i групп, помещения цели в j-ю группу, выбор k-го разбиения по группам убегающими и k'-го атакующими и назначения j'-й группы атакующих на атаку j-й группы. Так как атакующие не знают число j, то группа j' назначается случайным образом на одну из i групп, поэтому вероятность погони j'-й группы атакующих за j-й группой убегающих есть $1/i$. По формуле полной вероятности получаем выражение (2). Лемма доказана. ♦

Всюду далее подразумевается, что $k \in \{1, ..., p_{1i}^{N-n}\}$, $k' \in \{1, ..., p_{0i}^{M-m}\}$.

Лемма 3. *Пусть в играх* $(N + 1, M, D, T, p)$ *и* (N, M, D, T, p) *существует равновесие, тогда*

$$v(N + 1, M, D, T, p) \geq v(N, M, D, T, p). \quad (4)$$

Доказательство. Сначала покажем, что указанное неравенство выполняется, если (N, M, D, T, p) — тривиальная игра. Если игра тривиальна по причине $M = 0$, то

$$1 = v(N + 1, 0, D, T, p) \geq \alpha = v(N, 0, D, T, p) = 1;$$

если по причине $T = 0$ и $M \geq 1$, то

$$0 = v(N + 1, M, D, 0, p) \geq v(N, M, D, 0, p) = 0;$$

если по причине $N = 1$ и $M \geq 1$, то

$$v(2, M, D, T, p) \geq v(1, M, D, T, p) = 0,$$

а это верно в силу того, что вероятность $v(2, M, D, T, p)$ неотрицательна. В случае нетривиальной игры достаточно рассмотреть неоптимальную стратегию игры $(N + 1, M, D, T, p)$ убегающих, которая состоит в том, что убегающие придерживаются оптимальной стратегии для игры (N, M, D, T, p), помещая «дополнительного» защитника в ту же группу, где находится цель. Если вероятность выживания цели в такой игре α, то

$$v(N + 1, M, D, T, p) \geq v(N, M, D, T, p).$$

Лемма доказана. ♦

Неравенство (4) нетрудно обобщить на случай натуральных $N_2 \geq N_1$:

$$v(N_2, M, D, T, p) \geq v(N_1, M, D, T, p). \quad (5)$$

Лемма 4. *Пусть в игре* (N, M, D, T, p) *и всякой ее подыгре существует равновесие, тогда при оптимальной стратегии убегающие выбирают распределение по группам, в котором во всех группах по одному убегающему, кроме, возможно, одной, причем цель принадлежит этой самой группе.*

Доказательство. Заметим, что $p_{1ijk}^{N-n} \leq N - n - i + 1$, так как для разбиения числа $N - n$ на сумму i натуральных слагаемых как минимум $i - 1$ единица уйдет на оставшееся $i - 1$ число. Пользуясь выражениями (2) и (5), можно записать:

$$\sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i} v(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T - 1, p) \leq$$

$$\leq \sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i} v(N - n - i + 1, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, N - n - i + 1),$$

$$T - 1, p).$$

Поскольку в правую часть не входят j и k, можно записать:

$$E_{nmij^o(n,i)k^o(n,i)k'}(N, M, D, T, p) = \sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i} v(N - n - i + 1,$$

$$p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, N - n - i + 1), T - 1, p),$$

причем оптимальный выбор чисел $j = j^o(n, i)$ и $k = k^o(n, i)$ для убегающих обусловлен равенством

$$p_{1ijk}^{N-n} = N - n - i + 1,$$

которое и означает, что убегающие помещают в одну из групп цель и максимально возможное для данных i и n число убегающих. Лемма доказана. ♦

Указанное разложение числа $N - n$ на сумму $i - 1$-й единицы и числа $N - n - i + 1$ обладает тем свойством, что k для него равно единице. Действительно, так как нумерация множества разбиений начиналась с точной нижней грани, а разбиение $(1, ..., 1, N - n - i + 1)$ и представляет собой точную нижнюю грань множества разбиений числа $N - n$ на сумму i натуральных слагаемых, то $k^o(n, i) = 1$. В свою очередь, поскольку наибольшее из слагаемых разбиения всегда стоит на последнем месте, то $j^o(n, i) = i$.

Предложение 1. *Значение* $v(N, M, D, T, p)$ *нетривиальной игры* (n, m, N, T, p) *существует и вычисляется по рекуррентной схеме*

$$v(N, M, D, T, p) =$$

$$= \max_{n \in \{0, ..., \min(N-1, M)\}} \sum_{m=0}^{n} b_{nm}(p) A_{nm}(N, M, D, T, p),$$

$$A_{nm}(N, M, D, T, p) =$$

$$= \max_{i \in \{1, ..., \min(N-n, D)\}} B_{nmi}(N, M, D, T, p),$$

$$B_{nmi}(N, M, D, T, p) =$$

$$= \min_{k' \in \{1, ..., p_{0i}^{M-m}\}} C_{nmik'}(N, M, D, T, p),$$

$$C_{nmik'}(N,\ M,\ D,\ T,\ p) = \sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i}\, v(N - n - i + 1,$$

$$p_{0ij'k'}^{M-m},\ \min(D,\ N - n - i + 1),\ T - 1,\ p).$$

Доказательство. Поскольку j и k назначаются одновременно с назначением k', а при оптимальной игре, в силу леммы 4, j и k полностью определяются значениями n и i, поиск оптимальных стратегий в искомой игре сводится к поиску оптимальных стратегий в конечно-шаговой антагонистической игре с полной информацией последовательного выбора n, i и k' на каждом шаге. Так как любая конечно-шаговая игра с полной информацией имеет абсолютное равновесие (subgame perfect equilibrium) по Нэшу в чистых стратегиях [12], то значение соответствующей игры существует. В силу лемм 1 и 2, а также определения оптимальности, приведенная рекуррентная схема дает значение этой игры, а значит и искомой конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией. Предложение доказано. ♦

Предложение 1 получено с помощью того же приема, что и при применении рекуррентного метода, описанного в работе [15]: оптимальное значение критерия задачи выражено через оптимальное значение критерия подзадач. В этом случае для эффективного получения численных оценок значения игры можно воспользоваться методом динамического программирования [16].

Лемма 5. *Пусть в играх* $(N + 1,\ M,\ D,\ T,\ p)^{\#}$ *и* $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)^{\#}$ *существует равновесие, тогда*

$$v^{\#}(N + 1,\ M,\ D,\ T,\ p) \geq v^{\#}(N,\ M,\ D,\ T,\ p). \quad (6)$$

Доказательство. Так как терминальные условия у игр $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)$ и $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)^{\#}$ совпадают, то доказательство леммы 2 полностью переносится на неравенство (6). Лемма доказана. ♦

Как и в случае (5), справедливо обобщение при $N_2 \geq N_1$:

$$v^{\#}(N_2,\ M,\ D,\ T,\ p) \geq v^{\#}(N_1,\ M,\ D,\ T,\ p). \quad (7)$$

Лемма 6. *Пусть в нетривиальной игре* $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)^{*}$ *и всякой ее подыгре существует равновесие и* $E^{*}_{nmijkk'}(N,\ M,\ D,\ T,\ p)$ *— вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после первого шага, при условии назначения убегающими n ролей ПА и m перехваченных ими атакующих, назначения i − 1-й роли ЛЦ убегающими, выбора j-й группы для цели, k-го разбиения на группы убегающими и k' разбиения атакующими на первом шаге. Тогда*

$$E^{*}_{nmijkk'}(N,\ M,\ D,\ T,\ p) =$$

$$= \sum_{j'=1}^{i} \frac{1}{i}\, v^{\#}(p_{1ijk}^{N-n},\ p_{0ij'k'}^{M-m},\ \min(D,\ p_{1ijk}^{N-n}),\ T - 1,\ p). \ ♦$$

Доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы 2, но только теперь нужно рассмотреть игры

$$(p_{1ijk}^{N-n},\ p_{0ij'k'}^{M-m},\ \min(D,\ p_{1ijk}^{N-n}),\ T - 1,\ p)^{\#},$$

так как после первого шага атакующие не знают числа убегающих в группе цели.

Доказательство леммы 4 опирается только на леммы 2 и 3, поэтому оно справедливо не только для игры $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)$, но и для игры $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)^{*}$, так как справедливы леммы 5 и 6.

Предложение 2. *Значения и оптимальные стратегии игр* $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)$ *и* $(N,\ M,\ D,\ T,\ p)^{*}$ *совпадают.*

Доказательство. В силу леммы 4 для обеих игр $k = 1$ и $j = i$ при оптимальной стратегии игры. Число i известно атакующим на каждом шаге в обеих играх (так как атакующие видят все ЛЦ), поэтому при оптимальной игре убегающих атакующие обладают одинаковой информированностью о составе преследуемых групп в обеих задачах. Предложение доказано. ♦

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИГРЫ

Средствами языка «Python» был разработан программный модуль, позволяющий по заданным N, M, D, T и p вычислять вероятность выживания цели $v(N,\ M,\ D,\ T,\ p)$ с помощью предложения 1.

Фиксируем параметры $D = 3$, $T = 2$, $p = 0{,}5$. Выбор $D = 3$ можно интерпретировать как то, что каждая группа в течение шага может разделиться максимум на три группы, которые продолжат дви-

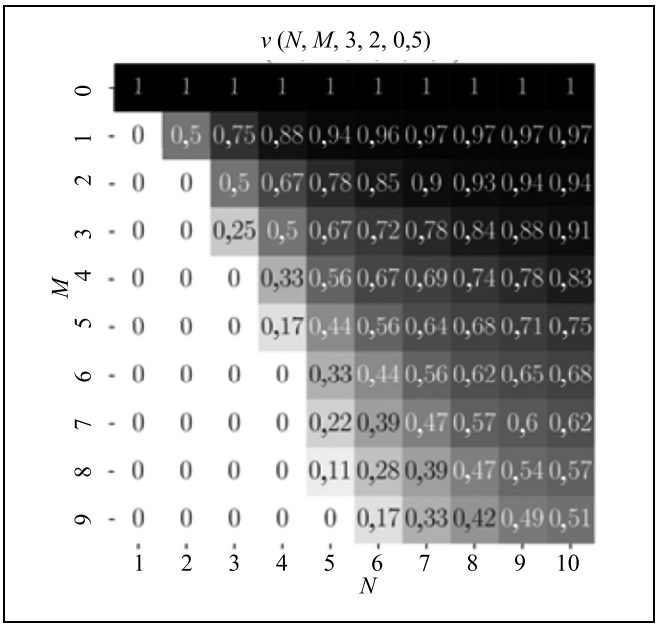


Рис. 1. Тепловая карта вероятности выживания цели в зависимости от числа убегающих *N* и числа атакующих *M*

гаться влево, вперед и вправо. Выбор $T = 2$ означает, что через два шага атакующие догонят убегающих (расстояние между ними станет нулевым). Тепловая карта для вероятности выживания цели в этом случае представлена на рис. 1 в виде матрицы, столбцы и строки которой обозначают число атакующих и число убегающих, а на пересечении находится значение критерия игры. Нетрудно видеть, что на данной карте (как и на любой другой) выполняется не только неравенство (4), но также справедливо и утверждение о том, что $v(N, M, D, T, p)$ не возрастает по аргументу M. В ходе вычисления элемента такой матрицы можно извлекать оптимальные значения индексов n, i, j, k и k' для каждого шага. Пример оптимальной стратегии для $N = 7$ и $M = 6$ приведен на рис. 2.

На рис. 3 изображены графики зависимости вероятности выживания цели от вероятности перехвата защитником в роли ПА. Каждый излом на графике обусловлен сменой стратегии (с ростом p убегающим становится выгодно назначать больше ролей ПА). При $N = 5$ график имеет участок, где

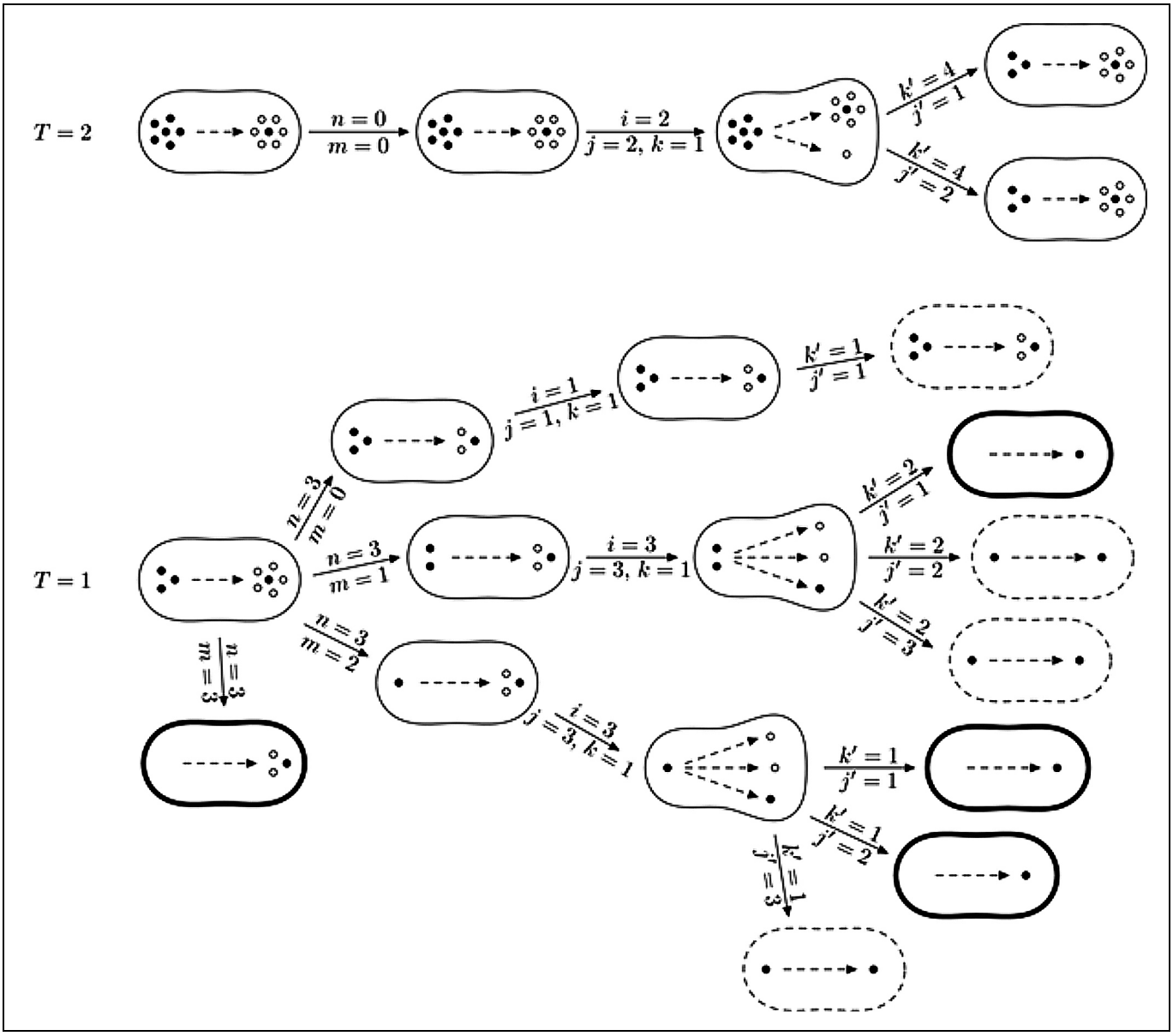


Рис. 2. Оптимальные стратегии убегающих и атакующих в игре (7; 6; 3; 2; 0,5): овалами обведены сложившиеся конфигурации атакующих (слева) и убегающих (справа); атакующие и цель — черные точки, защищающиеся — белые; подписи сплошных стрелок указывают оптимальный выбор индексов игроками внутри шага игры; штриховые овалы заключают в себя проигрышные ситуации для убегающих, а выделенные жирно — выигрышные

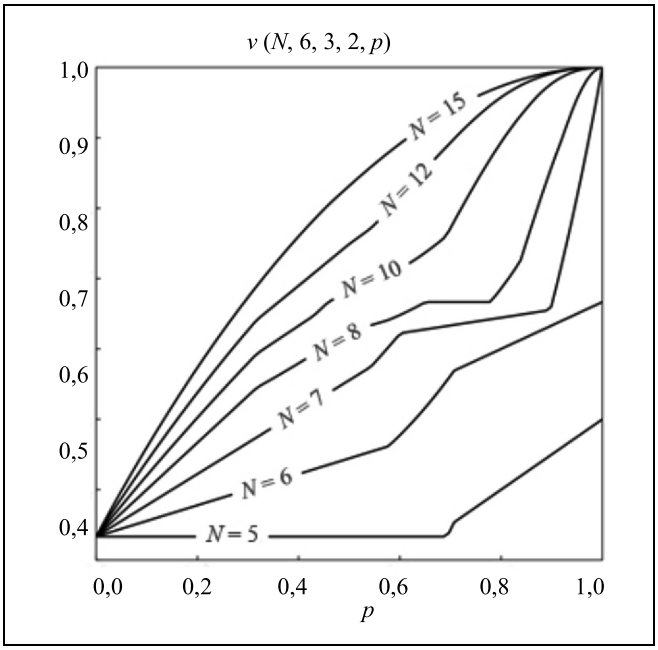


Рис. 3. Зависимость вероятности выживания цели от вероятности перехвата атакующего защитником в роли перехватывающего атакующего: изломы соответствуют сменам стратегий

значение вероятности выживания цели постоянно. В этой области назначение ролей ПА не происходит вообще. С помощью этого графика для $N = 5$ можно оценить пороговое значение вероятности $p_{\min} \approx 0{,}7$, выше которого имеет смысл решать задачу исполнения роли ПА защитником. Для $N \geq 6$ ее имеет смысл решать всегда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача «атакующие — цель — защитники» как конечно-шаговая антагонистическая игра с неполной информацией. Получен рекурсивный алгоритм нахождения вероятности выживания цели и оптимальных стратегий атакующих, цели и защитников при заданной вероятности промаха защитника по атакующему. Разработан программный модуль и выполнено численное моделирование для некоторых частных случаев.

Поскольку реальные динамические системы для класса задач «атакующие — цели —защитники» обычно подчинены системам дифференциальных уравнений и управление в них входит в виде некоторой функции позиций игроков и времени, полученные в конечно-шаговой антагонистической игре с неполной информацией оптимальные стратегии не могут быть напрямую применены для получения оптимального управления в таких системах. Однако полученные результаты могут быть применены для получения субоптимальных решений в последовательности задач оптимизации, когда вместо соответствующей дифференциальной игры решаются подзадачи исполнения ролей (перехватить атакующего, разойтись с ложной целью и др.).

Дальнейшее развитие результатов работы состоит в получении решения задачи «атакующие — цель — защитники» как дифференциальной игры и сравнении решений с полученными оптимальными стратегиями для рассмотренной конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pachter, M., Garcia, E., Casbeer, D.W.* Toward a Solution of the Active Target Defense Differential Game // Dyn. Games Appl. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 165—216.
2. *Garcia, E., Casbeer, D.W., Pachter, M.* Pursuit in the Presence of a Defender // Ibid, no. 3. — P. 652—670.
3. *Rubinovich, E.Ya.* Missile—Target—Defender Problem with Incomplete a Priori Information // Ibid. — P. 851—857.
4. *Теория* управления (дополнительные главы): учеб. пособие / под ред. Д.А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 552 с. [*Teoriya* upravleniya (dopolnitel'nye glavy): ucheb. posobie / pod red. D.A. Novikova. — Moscow: LENAND, 2019. — 552 p. (In Russian)]
5. *Pachter, M., Coates, S.* The Classical Homicidal Chauffeur Game // Dyn. Games Appl. — 2019. — Vol. 9, no. 3. — P. 800—850.
6. *Salimi, M., Ferrara, M.* Differential game of optimal pursuit of one evader by many pursuers // Int. J. Game Theory. — 2019. — Vol. 48, no. 2. — P. 481—490.
7. *Salimi, M., Ibragimov, G.I.* Pursuit-evasion differential game with many inertial players // Math. Probl. Eng. — Sept. 2009. doi.org/10.1155/2009/653723.
8. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. — 197 с. [*Grigorenko, N.L.* Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami. — Moscow: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1990. — 197 s. (In Russian)]
9. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с. [*Isaacs, R.* Differential Games: A Mathematical Theory with Application to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 1965. — 416 p.]
10. *Rubinovich, E.Ya.* Two Targets Pursuit-Evasion Differential Game with a Restriction on the Targets Turning // IFAC-PapersOnLine. — Berlin: Elsevier, 2018. — 51-32. — P. 503—508.
11. *Рубинович Е.Я.* Дифференциальная игра поочередного преследования с критерием «промах по истинной цели» // Изв. Южного Федерального ун-та. Технические науки. — 2019. — № 1 (203). — С. 165—177. [*Rubinovich, E.Ya.* Differentsial'naya igra poocherednogo presledovaniya s kriteriem «promakh po istinnoi tselI» // Izv. Yuzhnogo Federal'nogo un-ta. Tekhnicheskie nauki. — 2019. — No. 1 (203). — P. 165—177. (In Russian)]
12. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. — М.: Высш. шк., Кн. дом «Университет», 1998. — 304 с. [*Petrosyan, L.A., Zenkevich, N.A., Semina, E.A.* Teoriya igr. — Moscow: Vyssh. shk., Kn. dom «Universitet», 1998. — 304 p. (In Russian)]
13. *Новиков Д.А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. —

С. 25—62. [*Novikov, D.A.* Hierarchical Models of Combat // Large-Scale Systems Control. — 2012. — No. 37. — P. 25—62. (In Russian)]
14. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. — М.: Наука, 1982. — 256 с. [*Andrews, G.E.* The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 2. — London: Addison-Wesley Publishing Co., 1976. — 255 p.]
15. *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1964. — 193 с. [*Hovard, R.A.* Dynamic Programming and Markov Processes. — Cambridge: MIT Press, 1960. — 136 p.]
16. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л.* Алгоритмы: построение и анализ / 2-е изд. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. — 1296 с. [*Cormen, T.H.,* et al. Introduction to algorithms, 2nd ed. — Cambridge: MIT Press, 2001. — 1180 p.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 21.01.2020, после доработки 5.03.2020.
Принята к публикации 18.03.2020.

Бузиков Максим Эмонайевич — аспирант,
✉ me.buzikov@physics.msu.ru,

Галяев Андрей Алексеевич — чл.-корр. РАН, д-р техн. наук,
✉ galaev@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

TARGET SURVIVAL PROBABILITY ESTIMATION FOR THE ATTACKERS — TARGET — DEFENDERS PROBLEM

M.E. Buzikov[1], A.A. Galayev[2]

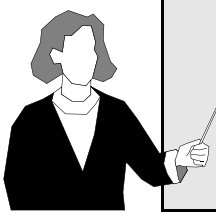
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[1]✉ me.buzikov@physics.msu.ru, [2]✉ galaev@ipu.ru

Abstract. The attackers-target-defenders problem is formulated and formalized as a positional antagonistic game with incomplete information. A method of target survival probability estimation with known estimates of the dynamic capabilities of attackers is proposed. Recurrence expressions for its calculation are obtained. Corresponding numerical target survival probability estimations with optimal behavior of the players are made. Defenders in the game are assigned three different roles: the role of a false goal, the role of a goal accompanying, and the role of an intercepting attacker. Survival probability considered as function of the attackers-target-defenders problem parameters is analyzed. The obtained probability estimations could be used as heuristic estimations of quality for corresponding dynamic system. Obtained optimal strategies could be considered as heuristics for the corresponding attackers-target-defender differential game. Optimal strategies contain orders for players indicating their current role. Using the Python language, a software module was developed that allows to calculate the survival probability of a target based on known task parameters.

Keywords: attackers-target-defenders, false targets, positional game, antagonistic game, incomplete information, dynamic programming.

Funding. The work was performed with partial financial support of Presidium of Russian Academy of Sciences.



Читайте в следующем номере

- ✓ **Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г.** Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей
- ✓ **Еремин В.В., Бауэр В.П., Райков А.Н.** Управление конкурентоспособностью в системе цифровых платформ
- ✓ **Корепанов В.О.** Константное поведение в деловых играх распределения ресурса: устойчивость к дизайну игр и модель