

ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМОЙ РАЗНОРОДНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ: ОДИН СЕНСОР – ГРУППА ДЕТЕКТОРОВ¹

А.А. Галяев

Рассмотрена задача об уклонении на плоскости подвижного объекта от обнаружения системой разнородных наблюдателей, состоящей из одного сенсора и группы детекторов. Для случая степенной зависимости уровня излучаемого сигнала от скорости движения уклоняющегося объекта в явном виде найден оптимальный закон уклонения. Построены траектории обхода системы наблюдателей и прорыва через систему.

Ключевые слова: поиск, подвижный объект, система разнородных наблюдателей, оптимальный закон, уклонение от обнаружения.

ВВЕДЕНИЕ

Скрытное применение автономных и беспилотных аппаратов в целях проникновения на охраняемую территорию требует решения новых задач управления автономными подвижными объектами (ПО). В последнее время среди общего многообразия задач сформировался класс задач управления подвижными объектами в конфликтной среде, где цель управления объектом, при движении его в конфликтной среде, заключается в минимизации негативного воздействия конфликтующих объектов на управляемый ПО путем выбора его маршрута и параметров движения. Обнаружение объекта принято относить к негативным воздействиям. Задачи об оптимизации уклонения подвижного объекта от обнаружения рассматривались в ряде работ. Постановки задач отличаются предположениями о характеристиках информационных полей, в которых происходит обнаружение, классами допустимых законов управления, видом критериев качества, числом обнаружителей, объемом и характером информации, доступной конфликтующим сторонам — см. статьи [1–9] и библиографию к ним.

Для описания механизмов обнаружения наиболее часто применяются два подхода. Первый из

них состоит в оценке интегрального уровня сигнала, поступившего на вход относительно большой информационно-наблюдательной системы за все время наблюдения. В литературе такую систему принято называть сенсором. Оценка интегрального уровня сигнала на входе сенсора определяется с учетом решения задачи об оптимизации закона управления подвижным объектом, перемещающимся в течение заданного промежутка времени T из фиксированной начальной точки $A(x_A, y_A)$ в фиксированную конечную точку $B(x_B, y_B)$ маршрута, и уклоняющегося при этом от обнаружения наблюдателем (группой наблюдателей), расположенных в районе.

Например, было показано [7, 10], что для практически важного случая малых отношений сигнал/помеха на входе неподвижного сенсора задача о минимизации вероятности обнаружения сводится к минимизации функционала (риска),

$$R = \int_0^T \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x^2 + y^2} dt \rightarrow \min_{(x, y)}, \quad (1)$$

где $x(t), y(t)$ — текущие координаты уклоняющегося объекта в декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией наблюдателя; точками сверху обозначены производные по времени; граничные условия задаются соотношениями

$$x(0) = x_A, \quad y(0) = y_A; \quad x(T) = x_B, \quad y(T) = y_B.$$

Функционал (1) имеет следующую физическую интерпретацию. Риск — это величина, пропорци-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 14 ОЭММПУ РАН.



ональная интегральному уровню принятого наблюдателем сигнала, излученного подвижным объектом и прошедшего через среду распространения за время движения объекта по маршруту.

Второй подход к описанию механизма обнаружения состоит в том, что наблюдатель отождествляется с точечным объектом, снабженным круговой зоной обнаружения фиксированного радиуса, центр которой совпадает с текущей позицией наблюдателя. В литературе такого наблюдателя принято называть информационным детектором (или просто детектором). Цели, попавшие внутрь круга, обнаруживаются достоверно; цели, не попавшие в круг, не обнаруживаются. Задача уклонения от системы наблюдателей, состоящей из сенсора и детектора, решена в работе [6]. Численное решение задачи уклонения от системы наблюдателей, состоящей из групп сенсоров и детекторов, приведено в статье [11].

В настоящей статье аналитически решается задача уклонения от системы разнородных наблюдателей при ограничениях на траекторию движения ПО. Систему разнородных наблюдателей образуют сенсор и группа детекторов — в том информационном смысле, который был им придан выше. Так как попадание подвижного объекта в круговую зону обнаружения детектора с неизбежностью приводит к его мгновенному обнаружению, то задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к задаче уклонения от обнаружения сенсором при наличии круговых запретных зон (кругового ограничения) — зон обнаружения детекторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем полярную систему координат (ρ, ψ) , полюс которой совпадает с положением сенсора, а полярная ось проходит через начальную точку маршрута $A(x_A, y_A)$.

Уравнение круговой зоны обнаружения i -го детектора в полярной системе координат имеет вид:

$$\rho_{id}^2(\psi) - 2\rho_{id}(\psi)l_i \cos(\psi - \theta_i) + l_i^2 = r_i^2, \quad (2)$$

где $\rho_{id}(\psi)$ — полярный радиус точки окружности — границы круговой зоны обнаружения i -го детектора, (l_i, θ_i) — полярные координаты i -го детектора — центра зоны обнаружения; r_i — радиус зоны обнаружения, $i = 1, \dots, q$ — номер детектора, q — число детекторов.

Решим уравнения (2) относительно полярного радиуса:

$$\rho_{id}(\psi) = l_i \cos(\psi - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi - \theta_i)},$$

$$\rho_{id_1}(\psi) \geq \rho_{id_2}(\psi).$$

Попадание уклоняющегося объекта с полярными координатами (ρ, ψ) в пределы круговой зоны обнаружения детектора возможно лишь при выполнении системы неравенств

$$\rho_{id_1}(\psi) > \rho(\psi) > \rho_{id_2}(\psi).$$

Запрещенные области задаются строгими неравенствами:

$$Q_i = \{\rho(\psi) : \rho^2(\psi) - 2\rho(\psi)l_i \cos(\psi - \theta_i) + l_i^2 < r_i^2\}. \quad (3)$$

Во введенной полярной системе координат задача об оптимизации закона уклонения от обнаружения системой разнородных наблюдателей сводится к минимизации функционала

$$R = \int_0^T \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2}{\rho^2} dt \rightarrow \min_{(\psi, \rho)}, \quad (4)$$

при граничных условиях

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \psi(0) = 0, \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \psi(T) = \psi_B \quad (5)$$

и ограничениях

$$(\rho, \psi) \notin Q_i; \quad i = 1, \dots, q; \quad \psi \in [\psi(0), \psi(T)]. \quad (6)$$

2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЕ

В основе подхода к решению задачи лежит конформная замена переменных в функционале риска. Так как управляемый объект движется в пространстве \mathbb{R}^2 , то предлагается отождествить вещественную плоскость в этом пространстве с комплексной плоскостью \mathbb{C} , ввести комплексную переменную $z = x + iy$, где $z = (x, y)$ — двумерный вектор координат объекта на вещественной плоскости, и оптимизировать функционал (4) в плоскости \mathbb{C} .

После замены переменной функционал (4) приобретает вид:

$$R(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \int_0^T \frac{\dot{z}\dot{\bar{z}}}{z\bar{z}} dt = \int_0^T \dot{z} \overline{\left(\frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{z}}\right)} dt. \quad (7)$$

Подынтегральное выражение здесь является произведением некоторой функции и комплексно-сопряженной к ней функции. Дифференциальная замена $dw = z^{-1}dz$ приводит функционал (7) к виду

$$R(w, \bar{w}, \dot{w}, \dot{\bar{w}}) = \int_0^T \dot{w} \bar{w} dt.$$

Вариационная задача об оптимизации исходного функционала (4)–(6) сводится к задаче минимизации

$$R(w, \bar{w}, \dot{w}, \bar{\dot{w}}) = \int_0^T \dot{w} \bar{\dot{w}} dt \rightarrow \min_{w, \dot{w}}. \quad (8)$$

Геодезической линией для задачи (8) в отсутствие ограничений на скорость объекта служит прямая, проходящая через точки w_A и w_B — образы в пространстве комплексной переменной w граничных точек A и B в исходной задаче. При наличии координатных ограничений геодезической линией также является кривая наименьшей длины. В плоскости w при отсутствии ограничений движение между точкой w_A и произвольными точками w_1 и w_2 происходит по отрезкам прямых.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При решении задачи (4)–(6) будем пользоваться результатами работы [6], где было показано, что при наличии ограничений в виде неравенств на функции координат ПО оптимальная траектория состоит из участков, часть из которых лежит на границе допустимой области, а остальные — внутри допустимой области. В точках сопряжения отдельные отрезки оптимальной траектории сшиваются гладко. Переход ПО с границы одного ограничения на границу другого ограничения в плоскости w происходит по отрезкам прямых, которые являются касательными к границам. Там же доказана

Лемма 1. *Прямолинейные участки траектории, доставляющей минимум функционалу вида (8) при наличии координатного ограничения вида (3), касаются криволинейного ограничения.* ♦

Для произвольных двух запрещенных областей Q_1 и Q_2 и отрезков прямых касательных к обеим областям существует только две возможности расположения этих областей относительно касательных, а именно, области Q_1 и Q_2 могут лежать либо по одну сторону от касательной, либо по разные стороны. В свою очередь существует только четыре различных касательных к обеим этим областям. Приведенные выше факты усанавливает

Лемма 2. *Пусть выпуклые открытые области Q_1 и Q_2 заданы на плоскости и $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \emptyset$. Тогда на плоскости существуют четыре различные прямые L_j , $j = 1, 2, 3, 4$, такие что $Q_1 \cap L_j = \emptyset$, $Q_2 \cap L_j = \emptyset$, $\partial Q_1 \cap L_j = \emptyset$, $\partial Q_2 \cap L_j = \emptyset$.*

Доказательство леммы 2. Так как множества Q_1 и Q_2 открытые с гладкими границами, то в каждой точке границ ∂Q_1 и ∂Q_2 существуют опорные функционалы (касательные прямые), поскольку в любой гранич-

ной точке тела, т. е. замкнутого выпуклого множества с внутренними точками, существует опорный функционал. По геометрической теореме Хана — Банаха множества Q_1 и Q_2 являются полностью отделимыми. Далее воспользуемся теоремой Люстерника, которая дает совокупность касательных направлений к множеству $\partial Q = \{(x, y): P(x, y) = 0\}$ в точке (x_0, y_0) в виде подпространства $K = \{h: P'(x_0, y_0)h = 0\}$ (линейный функционал). Это означает, что угол, задающий направления всевозможных касательных, пробегает значения от 0 до π при движении точки, например, против часовой стрелки по границе ∂Q_1 . Поэтому существует ровно четыре касательных, проведенных одновременно к множествам Q_1 и Q_2 . Прямые L_j являются опорными функционалами сразу для обоих множеств Q_1 и Q_2 . Две прямые отвечают ситуации, когда множества Q_1 и Q_2 полностью расположены по одну сторону от прямых. Две прямые соответствуют случаю, когда множества Q_1 и Q_2 полностью расположены по разные стороны от этих прямых. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Области вида (3), заданные в плоскости z при $(0; 0) \in Q_i$, $i = 1, \dots, q$, в плоскости w являются открытыми и выпуклыми множествами.*

Доказательство леммы 3. Будем рассматривать точки, лежащие на границе множества Q_i . Действительно, если для отрезка, концами которого являются внутренние точки множества, нарушается определение выпуклости, то отрезок можно продолжить в обе стороны по прямой до пересечения с границей множества. Выберем две произвольные точки z_1 и z_2 на границе одного из множеств Q_i , т. е. $|z_1 - z_0| = r$, $|z_2 - z_0| = r$. Получим точки w_1 и w_2 в плоскости w . Составим отрезок $w = \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2$, $\alpha \in [0; 1]$. Без потери общности можно считать, что $z_0 = 1$ (благодаря выбору системы координат). Для доказательства леммы нужно показать, что этот отрезок целиком находится в образе множества Q_i плоскости w . Обратное преобразование точки w дает точку z в виде $z = z_1^\alpha z_2^{1-\alpha}$. Составим функцию

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, r) = |(1 + re^{i\varphi_1})^\alpha (1 + re^{i\varphi_2})^{1-\alpha} - 1| - r.$$

Если выполняется неравенство $F(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, r) \leq 0$, $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$, $\varphi_2 \in [0; 2\pi]$, $\alpha \in [0; 1]$, $r \in (0, 1)$, (это ограничение отвечает условию леммы $(0; 0) \notin Q_i$), то $|z - z_0| \leq r$. Исследование максимума функции $F(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, r)$ при ограничениях $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$, $\varphi_2 \in [0; 2\pi]$, $\alpha \in [0; 1]$, $r \in (0, 1)$ посредством математического пакета Maple, дает
$$\max_{\varphi_1 \in [0; 2\pi], \varphi_2 \in [0; 2\pi], \alpha \in [0; 1], r \in [0; r_0]} F(\varphi_1, \varphi_2, \alpha, r) = 0,$$
 где $r_0 < 1$. Максимум достигается на границе множества Q_i , при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, α, r — любые, удовлетворяющие ограничениям. В случае, когда точки z_1 и z_2 являются внутренними точками множества Q_i , они лежат в круге с центром в точке z_0 , меньшего радиуса чем r , и точки спирали, соединяющей эти точки, не выходят на границу круга радиуса r . Значит, в плоскости w образы множеств



Q_i являются выпуклыми и открытыми множествами. Доказательство завершено. ♦

Лемма 3 может быть доказана и другим способом. Например, можно показать, что кривизна любой логарифмической спирали, соединяющей две внутренние точки z_1 и z_2 множества Q_i , меньше кривизны окружности с центром в точке z_0 радиуса r .

Результаты лемм 2 и 3 объединяет

Теорема 1. Пусть $\bar{Q}_i \cap \bar{Q}_j, i, j = 1, \dots, q, i \neq j$. Решение задачи (4)–(7) в плоскости w состоит из последовательно чередующихся отрезков прямых и криволинейных участков движения по границам множеств Q_i . Причем в точках сопряжения участки оптимальной траектории сшиваются гладко, а сама траектория содержит не более чем один участок границы любого множества Q_i .

Доказательство теоремы 1. Доказательство опирается на леммы 2 и 3. Утверждение, что сама траектория включает не более чем один участок границы любого множества Q_i , доказывается аналогично лемме 3.

Из теоремы 1 следует, что оптимальная траектория состоит не более чем из $2q + 1$ участков, где q — число детекторов и соответственно запрещенных множеств.

Остается решить задачу сопряжения участков оптимальной траектории. Пусть участки оптимальной траектории (спирали, начинающейся из точки D_{ik} дуги окружности Q_i и заканчивающейся в точке D_{ki} дуги окружности Q_k) сопрягаются с дугами окружностей Q_i и Q_k в точках D_{ik} и D_{ki} . Так как участки траектории сшиваются гладко, то полярные углы точек касания подчиняются системе уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mp l_i \sin(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}{\sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}} = \\ & \frac{\ln\left(l_i \cos(\psi_{D_{ik}} - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}\right)}{\psi_{D_{ik}} - \psi_{D_{ki}}} - \\ & \frac{\ln\left(l_k \cos(\psi_{D_{ki}} - \theta_k) \pm \sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}\right)}{\psi_{D_{ik}} - \psi_{D_{ki}}}; \\ & \frac{\mp l_k \sin(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}{\sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}} = \\ & \frac{\ln\left(l_k \cos(\psi_{D_{ki}} - \theta_k) \pm \sqrt{r_k^2 - l_k^2 \sin^2(\psi_{D_{ki}} - \theta_k)}\right)}{\psi_{D_{ki}} - \psi_{D_{ik}}} - \\ & \frac{\ln\left(l_i \cos(\psi_{D_{ik}} - \theta_i) \pm \sqrt{r_i^2 - l_i^2 \sin^2(\psi_{D_{ik}} - \theta_i)}\right)}{\psi_{D_{ki}} - \psi_{D_{ik}}}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

В системе (9) знаку плюс в левой части каждого уравнения соответствует знак минус в правой части и наоборот.

Комбинируя знаки плюс и минус, получаем четыре системы (9), дающие четыре пары решений $(\psi_{D_{ik}}, \psi_{D_{ki}})$, и соответственно четыре пары точек (D_{ik}, D_{ki}) . Как и должно быть по теореме 1. ♦

Формулой $R_i = \sigma_i / T_i$, где i — порядковый номер участка оптимальной траектории, а $\sigma_i = [(\psi_k - \psi_n)^2 + \ln^2(\rho_k / \rho_n)]_i$ — некоторые константы, определяемые через координаты начальной и конечной точек i -го участка траектории, задаются явные выражения для рисков, соответствующих различным участкам оптимальной траектории.

Решение задачи (4)–(7) определяет

Теорема 2. Пусть функция $R = R(T_1, \dots, T_N)$ задается формулой

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{T_i},$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^N T_i = T.$$

Тогда функция R достигает минимума на значениях

$$T_i = \frac{\sqrt{\sigma_i}}{\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}} T. \quad (10)$$

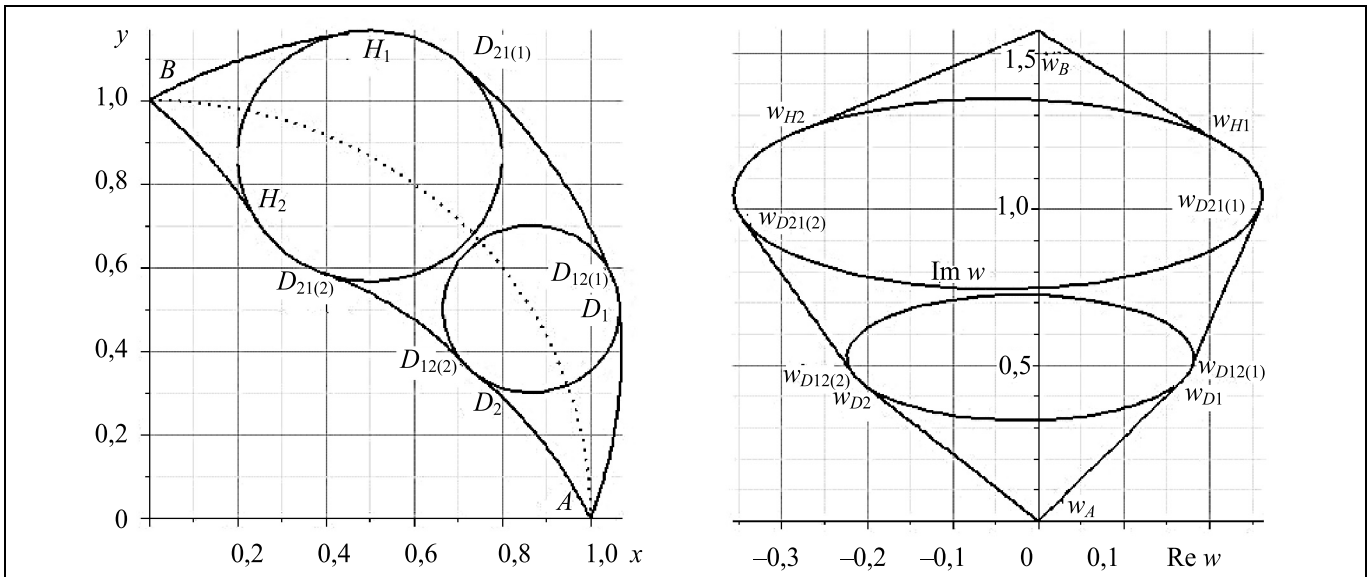
Минимальное значение

$$R = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}\right)^2}{T}. \quad (11)$$

Доказательство теоремы 2. Для нахождения решения задачи на условный экстремум воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим функцию $R + \lambda \sum_{i=1}^N T_i$ и найдем точки ее экстремума.

Необходимо выполнены равенства $\lambda - \frac{\sigma_i}{T_i^2} = 0$ для каждого $i = 1, \dots, N$. Учитывая ограничение на сумму T_i , получим, что $T_i = \sqrt{\sigma_i} / \sqrt{\lambda}$ и $\sqrt{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}$. Из этих двух равенств получаем формулу (10). Подставляя значения T_i в формулу, определяющую значение полного риска R , находим экстремальное значение функции

$$R = \left(\sum_{i=1}^N \sqrt{\sigma_i}\right)^2 / T.$$



Построение оптимальной траектории уклонения в системе «сенсор — два детектора»

Так как для любых наборов $(T_1, \dots, T_N) \neq (0, \dots, 0)$

$$\text{справедливы соотношения: } \frac{\partial^2 \left(R + \lambda \sum_{i=1}^N T_i \right)}{\partial^2 T_i} = \frac{2\sigma_i}{T_i^2} > 0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 \left(R + \lambda \sum_{i=1}^N T_i \right)}{\partial T_i \partial T_j} = 0, \quad i \neq j, \text{ то в точке экстремума вида (10)}$$

функция R достигает своего условного минимума (11). Доказательство завершено.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Далее рассмотрим задачу перехода ПО из начальной точки $A(1; 0)$ в конечную точку $B(0; 1)$. Сенсор расположен в точке $O(0; 0)$. Детекторы находятся в точках $(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$, $(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ и обладают разными радиусами зон обнаружения, равными $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$ соответственно, как показано на рисунке.

На рисунке приведены две траектории — кандидаты на оптимальную траекторию, а именно, траектория, проходящая через точки $A, D_1, D_{12(1)}, D_{21(1)}, H_1, B$ и ее образ в плоскости w , проходящий через точки $w_A, w_{D_1}, w_{D_{12(1)}}, w_{D_{21(1)}}, w_{H_1}, w_B$, и траектория, проходящая через точки $A, D_2, D_{12(2)}, D_{21(2)}, H_2, B$ и ее образ в плоскости w , проходящий через точки $w_A, w_{D_2}, w_{D_{12(2)}}, w_{D_{21(2)}}, w_{H_2}, w_B$. Пунктирной линией показана оптимальная траектория при отсутствии детекторов.

Сначала находим координаты точек D_1 и D_2 . Получаем значения координат (ρ, ψ) : $D_1 = (1,185; 0,454)$, $D_2 = (0,815; 0,439)$. Аналогично получаем координаты точек

H_1 и H_2 : $H_1 = (1,246; 1,199)$, $H_2 = (0,754; 1,245)$. Координаты точек $D_{12(1)} = (1,195; 0,493)$, $D_{21(1)} = (1,295; 1,001)$, $D_{12(2)} = (0,805; 0,473)$ и $D_{21(2)} = (0,707; 0,972)$ получаем из решения системы уравнений (9).

Затем вычисляем константы σ_i для траектории, проходящей через точки $A, D_1, D_{12(1)}, D_{21(1)}, H_1, B$. Получаем, что $\sigma_1 = \sigma_{AD_1} = 0,234$, $\sigma_2 = \sigma_{D_1 D_{12(1)}} = 0,003$, $\sigma_3 = \sigma_{D_{12(1)} D_{21(1)}} = 0,264$, $\sigma_4 = \sigma_{D_{21(1)} H_1} = 0,042$, $\sigma_5 = \sigma_{H_1 B} = 0,187$.

Далее вычисляем относительные времена движения T_i/T , значения функционала риска R_i на отдельных участках траектории и полное значения функционала риска R . По теореме 2 получаем, что $T_1/T = T_{AD_1}/T = 0,286$, $T_2/T = T_{D_1 D_{12(1)}}/T = 0,033$, $T_3/T = T_{D_{12(1)} D_{21(1)}}/T = 0,304$, $T_4/T = T_{D_{21(1)} H_1}/T = 0,121$, $T_5/T = T_{H_1 B}/T = 0,255$, $R_3 = \sigma_{AD_2}/T_{AD_2} = 0,820/T$, $R_2 = \sigma_{D_2 D_{12(2)}}/T_{D_2 D_{12(2)}} = 0,096/T$, $R_3 = \sigma_{D_{12(2)} D_{21(2)}}/T_{D_{12(2)} D_{21(2)}} = 0,870/T$, $R_4 = \sigma_{D_{21(2)} H_2}/T_{D_{21(2)} H_2} = 0,347/T$, $R_5 = \sigma_{H_2 B}/T_{H_2 B} = 0,731/T$ и $R = R_{AD_2 D_{12(2)} D_{21(2)} H_2 B} = 2,864/T$.

Теперь вычисляем константы σ_i для траектории проходящей через точки $A, D_2, D_{12(2)}, D_{21(2)}, H_2$ и B . Получаем, что $\sigma_1 = \sigma_{AD_2} = 0,235$, $\sigma_2 = \sigma_{D_2 D_{12(2)}} = 0,001$, $\sigma_3 = \sigma_{D_{12(2)} D_{21(2)}} = 0,266$, $\sigma_4 = \sigma_{D_{21(2)} H_2} = 0,085$, $\sigma_5 = \sigma_{H_2 B} = 0,186$.

Далее вычисляем относительные времена движения T_i/T , значения функционала риска R_i на отдельных участках траектории и полное значения функционала риска R .



По теореме 2 получаем, что $T_1/T = T_{AD_2}/T = 0,275$,
 $T_2/T = T_{D_2D_{12(2)}}/T = 0,021$, $T_3/T = T_{D_{12(2)}D_{21(2)}}/T = 0,293$,
 $T_4/T = T_{D_{21(2)}H_2}/T = 0,166$, $T_5/T = T_{H_2B}/T = 0,245$,
 $R_1 = \sigma_{AD_2}/T_{AD_2} = 0,852/T$, $R_2 = \sigma_{D_2D_{12(2)}}/T_{D_2D_{12(2)}} =$
 $= 0,064/T$, $R_3 = \sigma_{D_{12(2)}D_{21(2)}}/T_{D_{12(2)}D_{21(2)}} = 0,907/T$,
 $R_4 = \sigma_{D_{21(2)}H_2}/T_{D_{21(2)}H_2} = 0,513/T$, $R_5 = \sigma_{H_2B}/T_{H_2B} =$
 $= 0,758/T$ и $R = R_{AD_2D_{12(2)}D_{21(2)}H_2B} = 3,094/T$.

Сравнивая значения риска $R = R_{AD_1D_{12(1)}D_{21(1)}H_1B} =$
 $= 2,864/T$ на траектории, проходящей через точки A ,
 D_1 , $D_{12(2)}$, $D_{21(2)}$, H_1 , B , со значением риска $R =$
 $= R_{AD_2D_{12(2)}D_{21(2)}H_2B} = 3,094/T$ на траектории, проходящей
 через точки A , D_2 , $D_{12(2)}$, $D_{21(2)}$, H_2 , B , делаем вывод,
 что оптимальной является первая траектория, которая
 огибает сенсор и оба детектора. Такая траектория пред-
 ставляет собой траекторию уклонения от системы на-
 блюдателей, состоящей из сенсора и двух детекторов. По
 второй траектории ПО осуществляет прорыв через систе-
 му наблюдателей, состоящей из сенсора и двух детек-
 торов.

При движении ПО по оптимальной траектории с
 использованием оптимального закона изменения моду-
 ля скорости значение функционала обнаружения полу-
 чается больше оптимального значения функционала
 при отсутствии детекторов примерно на 16 % и на 5 %
 лучше значения функционала на траектории, проходящей
 через точки A , D_2 , $D_{12(2)}$, $D_{21(2)}$, H_2 и B .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложены результаты решения задачи
 об оптимизации закона уклонения подвижного
 (ПО) на плоскости от обнаружения системой раз-
 нородных наблюдателей, состоящей из одного сен-
 сора и нескольких детекторов. В явном виде найде-
 ны оптимальные законы управления ПО в задаче
 развертывания. Доказана теорема о свойствах оп-
 тимальной траектории, дающая алгоритм постро-
 ения оптимальной траектории движения ПО.

Оптимальная траектория движения ПО состоит
 из последовательно чередующихся участков дви-
 жения ПО по свободным от ограничений област-
 ем плоскости и участкам, представляющим собой
 дуги окружностей зон обнаружения детекторов.
 В исходном пространстве участками пути свобод-
 ными от ограничений являются спирали и дуги ок-
 ружности, отвечающие движению по границам ог-
 раничений. В точках сопряжения участки траек-
 тории сшиваются гладко. Существует множество
 траекторий, доставляющих локальный минимум
 функционалу обнаружения, а именно, множество
 траекторий прорыва между сенсором и детектора-
 ми и единственная траектория уклонения от всех

наблюдателей системы. Оптимальная траектория
 выбирается путем сравнения значений функцио-
 нала обнаружения на траекториях его локального
 минимума. Глобальный минимум функционала со-
 ответствует его минимальному значению среди зна-
 чений, принимаемых на множестве траекторий —
 кандидатах на экстремум.

Изложенные в работе методы построения тра-
 ектории движения ПО могут быть обобщены на
 систему обнаружителей, состоящей из детекто-
 ров, обладающих более сложной областью обна-
 ружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. Ch. 1 / Eds. R. Murphey, P. Pardalos. — Dordrecht: Kluwer Acad., 2002. — P. 271–303.
2. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing under the Risk of Detection // Naval Research Logistics. — 2006. — Vol. 53, N 8. — P. 728–747.
3. *Szechtmann R., Kress M., Lin R., et al.* Models of Sensor operations for border Surveillance // Naval Research Logistic. — 2008. — Vol. 55, N 3. — P. 27–41.
4. *Yang G., Zhou W., Oiao D.* Defending against Barrier Intrusions with Mobile Sensors // Proc. Int. Conf. on Wireless Algorithms, Systems and Applications. — Atlanta, 2007. — P. 113–120.
5. *Воронин А.Н., Ясинский А.Г., Шворов С.А.* Синтез компромиссно-оптимальных траекторий мобильных роботов в конфликтной среде // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 12–18.
6. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* Уклонение в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 4. — С. 18–27.
7. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 4. — С. 52–62.
8. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* О патрулировании барьера сетью мобильных сенсоров // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 2. — С. 167–173.
9. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 83–94.
10. *Сысоев Л.П.* Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Проблемы управления. — 2010. — № 6. — С. 65–72.
11. *Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой разнородных наблюдателей / Т.Г. Абрамянц, А.А. Галеев, Е.П. Маслов и др. // Проблемы управления. — 2015. — № 2. — С. 31–37.*

Статья представлена к публикации членом редколлегии
 Б.В. Павловым.

Галеев Андрей Алексеевич — д-р техн. наук,
 вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления
 им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
 ✉ galaev@ipu.ru.