



АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫМИ ОБЪЕКТАМИ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА¹

И.Б. Фуртат

Рассмотрена задача адаптивного управления с эталонной моделью определенным классом неминимально-фазовых систем. Предположено, что измерению доступны только скалярные вход и выход объекта. Получены условия, зависящие от параметров модели объекта и системы управления, при которых алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых объектов, работоспособен для неминимально-фазовых систем. Полученные решения обобщены для управления объектами с запаздыванием по состоянию. Приведены примеры моделирования.

Ключевые слова: неминимально-фазовый объект, адаптивное управление, сингулярно возмущенная система.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных предположений при решении задачи управления объектом в условии неопределенности, когда доступны измерению только скалярные вход и выход объекта, является предположение о его минимально-фазовости. Основная причина требования минимально-фазовости объекта при адаптивном или робастном управлении состоит в построении устойчивого регулятора (см. например, работу [1]).

На сегодняшний день предложено мало решений проблемы управления неминимально-фазовыми объектами со скалярными входом и выходом в условии неопределенности. Так, для управления таким классом объектов в работе [2] используется метод шунтирования. Однако, применение метода [2] может быть только для линейных устойчивых объектов. Причем в условиях возмущений метод [2] не всегда оказывается эффективным из-за регулирования по расширенному сигналу. В работе [3] предложен последовательный компенсатор, который позволяет получить расширенную модель объекта с векторным управлением. Аналогичное

решение предложено также в работе [4]. Однако работы [3, 4] эффективны лишь для стабилизации объекта, который не подвержен воздействию внешних неконтролируемых возмущений.

В статье предложено решение задачи адаптивного управления определенным классом неминимально-фазовых объектов. При решении предполагается, что в объекте управления доступны измерению только скалярные вход и выход объекта. Для синтеза закона управления используется модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка [5]. Полученная система управления обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с требуемой точностью. Получены условия, зависящие от параметров объекта и системы управления, при выполнении которых алгоритм, разработанный для минимально-фазовых систем, работоспособен и для неминимально-фазовых объектов. Решение обобщается для управления объектами с запаздыванием по состоянию. Приведены численные примеры, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейный объект управления, динамические процессы в котором описываются дифференциальным уравнением

$$Q(p)y(t) = kR(p)u(t), \quad p^i y(0) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-01183-а), а также в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., выполняемой в ИПМаш РАН (соглашения № 8846, № 8855) и НИУ ИТМО (соглашения 14.B37.21.0871, 14.B37.21.1480).

где $y(t)$ и $u(t)$ — скалярные выход объекта и сигнал управления соответственно, $Q(p)$ и $R(p)$ — линейные нормированные дифференциальные операторы, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $k > 0$ — неизвестный коэффициент, y_i — неизвестные начальные условия.

Качество процессов по выходу определим эталонной моделью

$$Q_m(p)y_m(t) = k_m r(t). \quad (2)$$

Здесь $y_m(t)$ — выход эталонной модели, $r(t)$ — ограниченное задающее воздействие, $Q_m(p)$ — известный линейный нормированный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $k_m > 0$ — известный коэффициент.

Предположения. 1. Коэффициенты операторов $Q(p)$ и $R(p)$ и коэффициент k — неизвестные числа, зависящие от вектора неизвестных параметров $\vartheta \in \Xi$, где Ξ — известное замкнутое множество возможных значений данных коэффициентов. 2. Известны $\deg Q(p) = \deg Q_m(p) = n$, $\deg R(p) = m$, относительная степень $\gamma = n - m > 1$. 3. Многочлен $Q_m(\lambda)$ — гурвицев, где λ — комплексная переменная. 4. В системе управления не доступны измерению производные сигналов $y(t)$ и $r(t)$. ♦

Цель управления состоит в поиске закона регулирования, обеспечивающего ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \geq T \quad (3)$$

для всех $\vartheta \in \Xi$, где $T > 0$ — время, начиная с которого должно быть выполнено неравенство (3), $\delta > 0$ — малое число.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Представим оператор $R(p)$ в виде произведения

$$R(p) = R^+(p)R^-(p), \quad (4)$$

где $R^+(\lambda)$ и $R^-(\lambda)$ — операторы с положительными и отрицательными вещественными частями корней соответственно, $\deg R^+(p) = m_1$, $\deg R^-(p) = m_2$.

Предположим, что оператор $R^+(p)$ можно представить в виде следующей суммы

$$R^+(p) = R_0(p) + \theta p \Delta R_0(p), \quad (5)$$

где $R_0(\lambda)$ — произвольный известный гурвицевый многочлен, $\deg R_0(p) = m_1$, $\theta > 0$ — малый пара-

метр. Подставим формулы (4) и (5) в уравнение (1) и перепишем его в виде

$$Q(p)y(t) = kR^-(p)R_0(p) \left[1 + \frac{\theta p \Delta R_0(p)}{R_0(p)} \right] u(t). \quad (6)$$

Преобразуем модель (6) к форме уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \sigma(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{\theta} Fz(t) + Nu(t), \quad \sigma(t) = L_2 z(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^{m_1}$ — векторы состояния медленных и быстрых составляющих соответственно, A , B , F , N , L_1 и L_2 — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (6) к уравнениям (7). При $\sigma(t) = 0$ передаточная функция первого уравнения системы (7) содержит только отрицательные нули, так как A , B и L_1 зависят от коэффициентов устойчивых многочленов $Q(\lambda)$ и $kR^-(\lambda)R_0(\lambda)$. Передаточная функция второго уравнения системы (7) содержит положительные нули, поскольку F , N и L_2 зависят от коэффициентов устойчивого $R_0(\lambda)$ и неустойчивого $\Delta R_0(\lambda)$ многочленов. Выясним, каким должно быть возмущение $\sigma(t)$, чтобы поведение системы (7) было бы близко к ее поведению при $\sigma(t) = 0$. Для этого воспользуемся первой леммой [6], в соответствии с которой перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \sigma(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \theta_1 \dot{z}(t) &= Fz(t) + \theta_2 Nu(t), \quad \sigma(t) = L_2 z(t). \end{aligned}$$

Согласно лемме [6], рассмотрим сначала редуцированную модель последней системы при $\theta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + \bar{\sigma}(t)), \quad y(t) = L_1 x(t), \\ \dot{\bar{z}}(t) &= \frac{1}{\theta_1} F\bar{z}(t), \quad \bar{\sigma}(t) = L_2 \bar{z}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что второе уравнение (8) асимптотически устойчиво, так как матрица F — гурвицева (в силу гурвицевости полинома $R_0(\lambda)$) и $\theta_1 > 0$. Преобразуем первое уравнение системы (8) к виду

$$Q(p)y(t) = kR^-(p)R_0(p)[u(t) + \bar{\sigma}(t)]. \quad (9)$$

Представим операторы $R^-(p)R_0(p)$ и $Q(p)$ в виде сумм:

$$\begin{aligned} R^-(p)R_0(p) &= 1 + \Delta R(p), \\ Q(p) &= Q_m(p) + \Delta Q(p). \end{aligned} \quad (10)$$



Здесь $\Delta R(p)$ и $\Delta Q(p)$ — остатки разложения, $\deg \Delta Q(p) < n$, $\deg \Delta R(p) = m$. Принимая во внимание выражения (2), (9) и (10), сформируем ошибку слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q_m(p)e(t) = k \left(u(t) + \Delta R(p)u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{k} y(t) - \frac{k_m}{k} r(t) \right) + \varphi(t), \quad (11)$$

где $Q_m(p)\varphi(t) = R^-(p)R_0(p)\bar{\sigma}(t)$, $\varphi(t)$ — экспоненциально убывающая функция в силу гурвицевости многочлена $Q_m(\lambda)$ и асимптотической устойчивости второго уравнения системы (8).

Для синтеза закона управления, необходимого для выполнения цели управления (3), можно воспользоваться любым из существующих алгоритмов управления объектами в условиях неопределенности (см., например, книгу [1]). Применим модифицированный алгоритм адаптации высокого порядка [5]. В соответствии с работой [5], зададим закон управления $u(t)$ в виде

$$u(t) = T(p)\bar{v}(t) = T\xi(t), \quad v(t) = c^T(t)w(t), \quad (12)$$

где $T(p)$ — линейный дифференциальный оператор, полином $T(\lambda)$ — гурвицев, $\deg T(p) = n - 1$, $\bar{v}(t)$ — оценка вспомогательного управляющего воздействия $v(t)$, T — матрица-строка, составленная из коэффициентов оператора $T(p)$, $\xi(t) = [\bar{v}(t), \dot{\bar{v}}(t), \dots, \bar{v}^{(n-1)}(t)]^T$, $c(t)$ — вектор настраиваемых параметров, $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), y(t), v_r(t)]^T$ — вектор регрессии, сформированный с помощью фильтров

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(t) &= KV_u(t) + bu(t), \quad V_u(0) = 0; \\ \dot{V}_y(t) &= KV_y(t) + by(t), \quad V_y(0) = 0; \\ \dot{V}_r(t) &= KV_r(t) + br(t), \quad v_r(t) = LV_r(t), \\ &V_r(0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $V_u(t), V_y(t), V_r(t) \in R^{n-1}$ — векторы состояния фильтров, K — матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $T(\lambda)$, $b = [0, \dots, 0, 1]^T$ и $L = [1, 0, \dots, 0]$ — вектор и матрица соответствующих размерностей.

Принимая во внимание выражения (12) и (13), уравнение ошибки слежения (11) преобразуем к виду

$$Q_m(p)e(t) = kT(p)[(c(t) - c_0)^T w(t) + \bar{v}(t) - v(t)] + \varphi(t),$$

где c_0 — вектор неизвестных параметров, зависящий от коэффициентов операторов $\Delta R(p)$, $\Delta Q(p)/k$ и отношения k_m/k . Для реализации закона управления (12) введем наблюдатель [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= G_0\xi(t) + D_0(\bar{v}(t) - v(t)), \quad \bar{v}(t) = L\xi(t), \\ \xi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\xi(t) \in R^n$, $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, I_{n-1} — квадратная единичная матрица порядка $n - 1$ (здесь и далее I_t означает квадратную единичную матрицу порядка t), $D_0 = -[d_1\mu^{-1}, d_2\mu^{-2}, \dots, d_n\mu^{-n}]^T$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина, значения d_1, \dots, d_n выбираются из условий гурвицевости матрицы $G = G_0 - \bar{D}L$, $\bar{D} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$.

Введем в рассмотрение вектор ошибки оценки производных $\bar{\eta}(t) = \Gamma^{-1}[\xi(t) - \zeta(t)]$, $\Gamma = \text{diag}\{\mu^{n-1}, \mu^{n-2}, \dots, \mu, 1\}$, $\zeta(t) = [v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(n-1)}(t)]^T$. Взяв производную по времени от $\bar{\eta}(t)$, с учетом выражения (14) получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}}(t) &= \mu^{-1}G\bar{\eta}(t) + b v^{(n+1)}(t), \\ \bar{v}(t) - v(t) &= \mu^{n-1}L\bar{\eta}(t). \end{aligned}$$

Преобразуем последнюю систему относительно выходной переменной:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \mu^{-1}G\eta(t) + \bar{b} \dot{v}(t), \\ \bar{v}(t) - v(t) &= \mu^{n-1}L\eta(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\eta_i(t) = \bar{\eta}_i(t) - \mu^{i-n}v^{(i)}(t)$, $i = 2, \dots, n - 1$, $\eta_1(t) = \bar{\eta}_1(t)$, $\bar{b} = [\mu^{1-n}, 0, \dots, 0]^T$. Принимая во внимание формулы (15), преобразуем уравнение ошибки (11) к форме

$$Q_m(p)e(t) = kT(p)[(c(t) - c_0)^T w(t) + \mu^{n-1}L\eta(t)] + \varphi(t), \quad (16)$$

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений 1—4. Тогда существуют матрица $\Lambda = \Lambda^T > 0$ и числа $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$ такие, что при $\mu < \mu_0$ и $\theta_2 = 0$ система (12)—(16), вместе с алгоритмом адаптации

$$\dot{c}(t) = -\Lambda e(t)w(t) - \alpha c(t), \quad c(0) = c_0, \quad (17)$$

диссипативна и выполнено целевое условие (3). ♦

Поскольку $\varphi(t)$ — ограниченная затухающая функция, то доказательство работоспособности редуцированной системы (12)—(17) аналогично доказательству в работе [5].

Однако, из постановки задачи, объект управления (1) может быть неминимально-фазовым. Поэтому получим условия работоспособности алгоритма (12)—(14) для исходной (нередуцированной) модели (7).

Введем вектор отклонений $\Delta z(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ для быстрых составляющих (7) и (8):

$$\Delta \dot{z}(t) = \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) + N \dot{u}(t), \quad \Delta \sigma(t) = L_2 \Delta z(t). \quad (18)$$

Тогда уравнение ошибки слежения $e(t)$, записанной в форме уравнений состояния, будет выглядеть как

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + k B_m [(c(t) - c_0)^T w(t) + \mu^{n-1} L \eta(t)] + B_{m1} \psi(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t). \quad (19)$$

Здесь $\varepsilon(t) \in R^n$, A_m , B_m и B_{m1} — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (16) к уравнению (19) с учетом результатов (18) и $Q_m(p)\psi(t) = R^-(p)R_0(p)\sigma(t)$.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений 1—4. Существуют числа $\mu > 0$ и $\theta_0 > 0$ такие, что решениями матричных неравенств:

$$\begin{aligned} A_m^T H_1 + H_1 A_m + 2\bar{k}^2 \mu^{2n-2} H_1 B_m L (H_1 B_m L)^T + \\ + \frac{2}{\mu} H_1 B_{m1} (H_1 B_{m1})^T \leq -Q_1, \\ F^T H_2 + H_2 F + \frac{2\theta_0}{\mu} H_2 N T G_0 (H_2 N T G_0)^T + \\ + 2\theta_0 \mu^{2n-2} H_2 N T D_0 L (H_2 N T D_0 L)^T \leq -Q_2, \\ G^T H_3 + H_3 G + 4\mu I_n + 2H_2 \bar{b} (H_2 \bar{b})^T \leq -Q_3 \end{aligned} \quad (20)$$

являются положительно определенные матрицы H_1 , H_2 и H_3 , где $Q_1 = Q_1^T > 0$, $Q_2 = Q_2^T > 0$, $Q_3 = Q_3^T > 0$, $k \leq \bar{k}$. Тогда при $\theta < \theta_0$ система (12)—(14), (18), (19) диссипативна и выполнено целевое условие (3).

3. ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

Пусть объект управления описывается уравнением:

$$\begin{aligned} Q(p)y(t) + F(p)y(t - \tau) = kR(p)u(t), \\ p^i y(0) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (21)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в уравнении (1), $F(p)$ — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от вектора неизвестных параметров $\vartheta \in \Xi$, $\deg F(p) < n$, $\tau > 0$ — известное время запаздывания.

Эталонная модель определена уравнением (2). Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона управления, обеспечивающего выполнение целевого условия (3).

Применив процедуру (4), (5), (10) к уравнению (21), получим

$$\begin{aligned} Q_m(p)e(t) = k \left(u(t) + \Delta R(p)u(t) - \frac{\Delta Q(p)}{k} y(t) - \right. \\ \left. - \frac{F(p)}{k} y(t - \tau) - \frac{k_m}{k} r(t) \right) + \varphi(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Закон управления зададим в виде (12), где только вектор регрессии формируется как $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), V_\tau^T(t), y(t - \tau), y(t), v_r(t)]^T$, а вектор $V_\tau(t)$ является решением уравнения

$$\dot{V}_\tau(t) = K V_\tau(t) + b y(t - \tau), \quad V_\tau(0) = 0. \quad (23)$$

Воспользовавшись наблюдателем (14) и результатом (18), преобразуем уравнение (22) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + k B_m [(c(t) - c_0)^T w(t) + \\ + \mu^{n-1} L \eta(t)] + B_{m1} \psi(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\varepsilon(t) \in R^n$, A_m , B_m , B_{m1} — числовые матрицы, полученные при переходе от уравнения (22) к уравнению (24) функция $\psi(t)$ аналогична, см. уравнение (19). Структуры уравнений (19) и (24) подобны. Отличия состоят в структуре и размерности векторов $c(t)$, c_0 и $w(t)$. Так, новый вектор неизвестных параметров c_0 зависит от коэффициентов операторов $\Delta R(p)$, $\Delta Q(p)/k$, $F(p)/k$ и отношения k_m/k . Поскольку размерность вектора регрессии $w(t)$ для объектов с запаздыванием, в отличие от объектов без запаздывания, увеличена на n , то и размерность вектора настраиваемых параметров $c(t)$ также увеличена на n .

Утверждение 3. Пусть выполнены условия предположений 1—4 и дополнительные условия, накладываемые на объект управления (21). Существуют числа $\mu > 0$ и $\theta_0 > 0$ такие, что решениями матричных неравенств (20) являются положительно определенные матрицы H_1 , H_2 и H_3 . Тогда при $\theta < \theta_0$ система (12)—(14), (18), (23), (24) диссипативна и выполнено целевое условие (3).



Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2, так как отличия систем управления для объектов (1) и (21) заключаются в дополнительном использовании фильтра (23) и функции $y(t - \tau)$.

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим объект управления

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) = k(1 - \theta p)u(t). \quad (25)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $-5 \leq a_i \leq 5, i = 0, 1, 2, 1 \leq k \leq 2$. Пусть множество значений для $\theta > 0$ подлежит определению.

Эталонную модель определим уравнением

$$(p + 1)^3 y_m(t) = r(t), \quad r(t) = 1 + 2 \sin t. \quad (26)$$

Зададим оператор $T(p)$ в виде $T(p) = p^2 + 2p + 1$ и сформируем фильтры (13) в виде

$$\dot{V}_y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t), \quad V_y(0) = 0;$$

$$\dot{V}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} (t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad V_u(0) = 0;$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_r(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \\ v_r(t) &= [1, 0] V_r(t), \quad V_r(0) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Вектор регрессии зададим как $w(t) = [V_y^T(t), V_u^T(t), y(t), v_r(t)]^T$. Выберем $D = [3, 3, 1]^T$ и $\mu = 0,01$, и сформируем наблюдатель (14) в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-2} \\ -3 \cdot 10^{-4} \\ -1 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} (\bar{v}(t) - v(t)), \\ \bar{v}(t) &= [1 \ 0 \ 0] \xi(t), \quad \xi(0) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть $\Lambda = \text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10\}$ и $\alpha = 0,01$, тогда закон управления (12) и алгоритмы адаптации (17) сформируем в виде

$$u(t) = \xi_1(t) + 2\xi_2(t) + \xi_3(t), \quad v(t) = c^T(t)w(t), \quad (29)$$

$$\dot{c}(t) = -\text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10\}e(t)w(t) - 0,01c(t), \quad c(0) = 0.$$

Оценим интервал изменения для θ с помощью неравенств (20), при котором алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых объектов, будет работоспособен и для неминимально-фазовых систем. Для

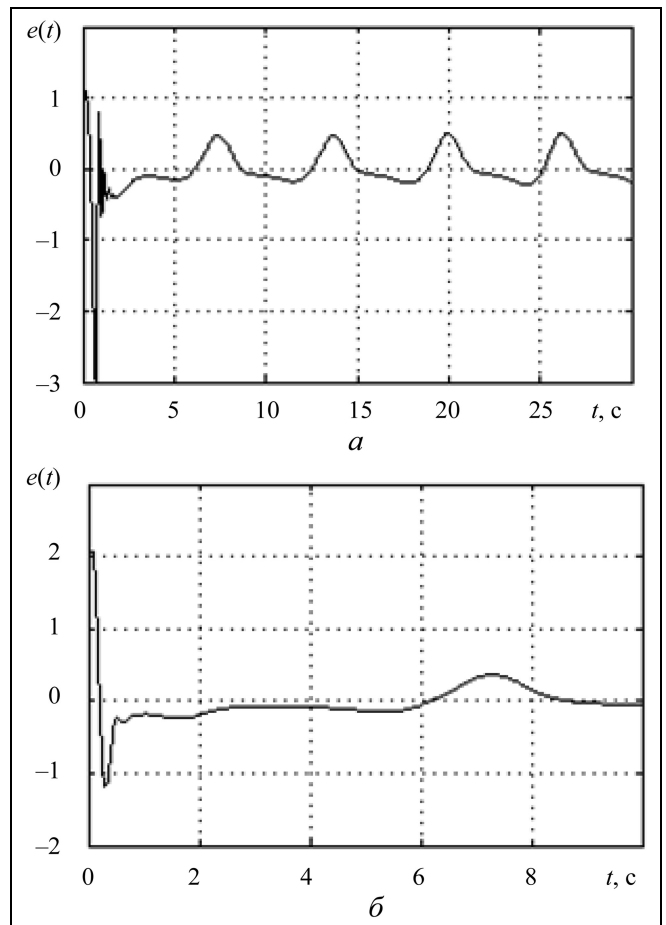


Рис. 1. Переходные процессы по ошибке слежения для объекта (25): а — случай 1; б — случай 2

этого предположим, что объект (25) можно представить в виде (7):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + k \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + \sigma(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t), \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0]x(t), \\ \dot{z}(t) &= -\frac{1}{\theta}z(t) - 2\dot{u}(t), \quad \sigma(t) = z(t). \end{aligned}$$

Пусть в неравенствах (20) $Q_1 = 10^{-5}I_3, Q_2 = \theta_0$ и $Q_3 = I_3$. Ради простоты заменим матричные неравенства (20) равенствами. Тогда эти уравнения будут иметь решения при $\theta_0 \in (0; 0,006]$. Значения θ_0 , полученные при моделировании для объекта (24) с параметрами для случая 1: $a_2 = a_1 = a_0 = -5, k = 1$ и случая 2: $a_2 = -3, a_1 = -1, a_0 = 3, k = 2$ лежат в интервале $\theta_0 \in (0; 0,02]$.

Для иллюстрации работоспособности предложенной схемы управления примем, что объект управления начинает функционировать с начальными условиями $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$ и $\theta_0 = 0,02$. На рис. 1 приведены графики изменения ошибки $e(t)$ для объекта (25).

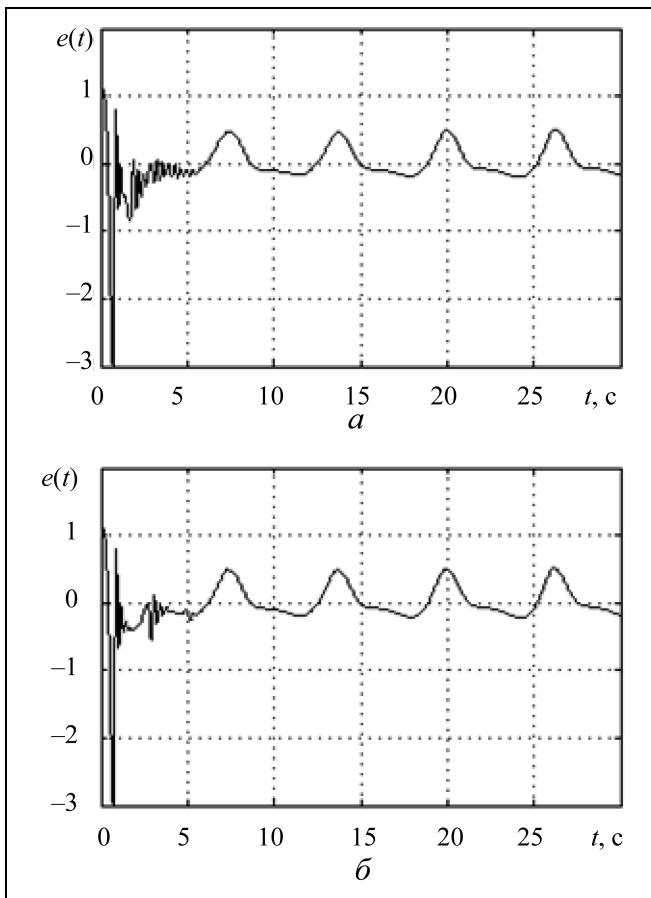


Рис. 2. Переходные процессы по ошибке слежения для объекта (30): а — случай 1; б — случай 2

Пример 2. Рассмотрим объект управления с запаздыванием по состоянию

$$(p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) + (f_2 p^2 + f_1 p + f_0)y(t - \tau) = k(1 - \theta p)u(t). \quad (30)$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами, как в примере 1 и дополнительно $|f_i| \leq 2, i = 0, 1, 2$. Эталонную модель определим уравнением (26).

Сформируем фильтры (27) с дополнительным фильтром

$$\dot{V}_\tau(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} V_\tau(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t - \tau), \quad V_\tau(0) = 0.$$

Тогда вектор регрессии определим в виде $w(t) = [V_u^T(t), V_y^T(t), V_\tau^T(t), y(t - \tau), y(t), v_r(t)]^T$. Наблюдатель и закон управления сформируем в виде (28) и (29). Выберем $\Lambda = \text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10, 10^{-2}I_2\}$ и $\alpha = 0,01$, тогда алгоритмы адаптации (17) примут вид

$$\dot{c}(t) = -\text{diag}\{10I_3, 10^{-5}I_2, 10, 10^{-2}I_2\}e(t)w(t) - 0,01c(t), \quad c(0) = 0.$$

Оценим интервал для θ с помощью неравенств (20). Для этого представим объект (24) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -f_2 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau) + \\ &+ k \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ 1 \end{bmatrix} (u(t) + \sigma(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t), \\ \dot{z}(t) &= -\frac{1}{\theta}z(t) - 2\dot{u}(t), \quad \sigma(t) = z(t). \end{aligned}$$

Как и в примере 1, положим в неравенствах (20) $Q_1 = 10^{-5}I_3, Q_2 = \theta_0$ и $Q_3 = I_3$. Тогда матричные неравенства (20) будут иметь решения при $\theta_0 \in (0; 0,004]$. Значения θ_0 , полученные при моделировании для объекта (30) с параметрами для случая 1 $a_2 = a_1 = a_0 = -5, k = 1, f_2 = f_1 = f_0 = 2, \tau = 1$ с и случая 2 $a_2 = -3, a_1 = -1, a_0 = 3, k = 2, f_2 = f_1 = f_0 = -1, \tau = 2$ с лежат в интервале $\theta_0 \in (0; 0,02]$. Положим, что объект управления начинает функционировать с начальными условиями $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$ и $\theta_0 = 0,02$. Графики изменения ошибки $e(t)$ приведены на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача адаптивного управления линейным неминимально-фазовым динамическим объектом со скалярным входом и выходом. Предполагалось, что объект управления можно представить в виде основного контура, описываемого минимально-фазовым звеном, и действующего на него возмущения, описываемого неминимально-фазовым звеном. Далее модель объекта декомпозировалась на систему сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, где искались ограничения на малый параметр, при которых алгоритм управления работоспособен. Как показали расчеты, эти ограничения зависят от параметров объекта управления и параметров настройки в алгоритме регулирования. Получены условия на нули передаточной функции исходного объекта, при которых алгоритмы, разработанные для минимально-фазовых систем, работоспособны и для неминимально-фазовых объектов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. С учетом уравнений (12) и (14), преобразуем формулу (18) к виду

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}(t) &= \frac{1}{\theta} F \Delta z(t) + bT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)), \\ \Delta \sigma(t) &= L_1 \Delta z(t). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$



Перепишем уравнения (15), (19) и (П.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) + kB_m(c(t) - c_0)^T w(t) + kB_m \mu^{n-1} L \eta(t) + \\ &\quad + B_{m1} \psi(t), \\ \theta_1 \Delta \dot{z}(t) &= F \Delta z(t) + \theta_2 NT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)) \\ \dot{\eta}(t) &= \mu^{-1} G \eta(t) + \bar{b} \dot{v}(t). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Вспользуемся первой леммой [6], взяв в качестве положительно-определенной функции функцию Ляпунова

$$V(t) = \varepsilon^T(t) H_1 \varepsilon(t) + \Delta z^T(t) H_2 \Delta z(t) + \eta^T(t) H_3 \eta(t) + (c(t) - c_0)^T (c(t) - c_0). \quad (\text{П.3})$$

Согласно лемме [6], рассмотрим (П.2) при $\theta_2 = 0$. Тогда второе уравнение (П.2) асимптотически устойчиво в силу гурвицевости матрицы **F**. Значит функция

$\frac{R^-(p)R_0(p)}{Q_m(p)} \sigma(t)$ ограничена в силу гурвицевости много-членов $Q_m(\lambda)$ и $R_0(\lambda)$. В соответствии с утверждением 1, система (П.2) диссипативна, и все переменные в ней ограничены. Тогда $|\psi(t)| < \delta_1$, $|\xi(t)| < \delta_2$, $|\dot{v}(t)| < \delta_3$, $|c(t) - c_0(t)| < \delta_4$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Определим теперь значение θ_0 , при котором исходная система диссипативна. Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Возьмем производную по времени от функции (П.3) вдоль траекторий (17) и (П.2):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \varepsilon^T(t) (A_m^T H_1 + H_1 A_m) \varepsilon(t) + \\ &+ 2\varepsilon^T(t) H_1 k B_m (c(t) - c_0)^T w(t) + 2\varepsilon^T(t) H_1 k \mu^{n-1} B_m L \eta(t) + \\ &+ 2\varepsilon^T(t) H_1 B_{m1} \psi(t) + \frac{1}{\theta_0} \Delta z^T(t) (F^T H_2 + H_2 F) \Delta z(t) + \\ &+ 2\Delta z^T(t) H_2 NT(G_0 \xi(t) + D_0 \mu^{n-1} L \eta(t)) + \\ &+ \frac{1}{\mu} \eta^T(t) (G^T H_3 + H_3 G) \eta(t) + 2\eta^T(t) H_3 \bar{b} \dot{v}(t) + \\ &+ 2\dot{c}^T(t) (c(t) - c_0). \end{aligned}$$

Вспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^T(t) H_1 k \mu^{n-1} B_m L \eta(t) &\leq 2\bar{k}^2 \mu^{2n-2} \varepsilon^T(t) H_1 B_m L (H_1 B_m L)^T \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta^T(t) \eta(t), \\ 2\varepsilon^T(t) H_1 B_{m1} \psi(t) &\leq \frac{2}{\mu} \varepsilon^T(t) (H_1 B_{m1})^T H_1 B_{m1} \varepsilon(t) + 2\mu \delta_1^2, \\ 2\Delta z^T(t) H_2 NTG_0 \xi(t) &\leq \\ &\leq \frac{2}{\mu} \Delta z^T(t) H_2 NTG_0 (H_2 NTG_0)^T \Delta z(t) + 2\mu \delta_2^2, \\ 2\Delta z^T(t) H_2 NTD_0 \mu^{n-1} L \eta(t) &\leq \\ &\leq 2\mu^{2n-2} \Delta z^T(t) H_2 NTD_0 L (H_2 NTD_0 L)^T \Delta z(t) + 2\eta^T(t) \eta(t), \\ 2\eta^T(t) H_3 \bar{b} \dot{v}(t) &\leq \frac{2}{\mu} \eta^T(t) H_3 \bar{b} (H_3 \bar{b})^T \eta(t) + 2\mu \eta \delta_3^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в производную от функции Ляпунова и учитывая условия (20), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\varepsilon^T(t) Q_1 \varepsilon(t) - \frac{1}{\theta_0} \Delta z^T(t) Q_2 \Delta z(t) - \frac{1}{\mu} \eta^T(t) Q_3 \eta(t) - \\ &- 2\mu(c(t) - c_0)^T (c(t) - c_0) + 2\mu \bar{\delta}, \end{aligned}$$

где $\bar{\delta} = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$. С учетом формулы (П.3) оценим последнее выражение в виде

$$\dot{V}(t) \leq -\chi V(t) + 2\mu \bar{\delta},$$

где $\chi = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_2)}{\theta_0 \lambda_{\max}(H_2)}, \frac{\lambda_{\min}(Q_3)}{\mu \lambda_{\max}(H_3)}, 2\mu \right\}$. Решив

данное неравенство, получим $V(t) \leq V(0)e^{-\chi t} + \frac{2\mu}{\chi} (1 - e^{-\chi t}) \bar{\delta}$. Учитывая это выражение, найдем оценку δ в целевом условии (3) при $t = T$:

$$\delta \leq \sqrt{\frac{V(T)}{\lambda_{\min}(H_1)}} \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(H_1)} \left(V(0)e^{-\chi T} + \frac{2\mu}{\chi} (1 - e^{-\chi T}) \bar{\delta} \right)}.$$

Очевидно, что условия (20) грубые, но из них видно, что существует значение θ , при котором алгоритм управления, разработанный для минимально-фазовых систем, работоспособен для определенного класса неминимально-фазовых объектов. Из последнего неравенства очевидно, что уменьшая значение μ , можно получить требуемую точность δ в условии (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
2. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 1999. — 467 с.
3. *Цыкунов А.М.* Применение адаптивного динамического регулятора для управления объектом по выходу // Тр. междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'2005 / ИПУ. — М., 2005. — С. 1349—1357.
4. *Novakimyat N., Yang B.-J., Calise A.J.* An adaptive output feedback control methodology for non-minimum phase systems // 41st IEEE Conf. on Decision and Control. — Las Vegas, 2002. — P. 949—954.
5. *Цыкунов А.М.* Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 8. — С. 143—152.
6. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 4. — С. 119—127.
7. *Atassi A.N., Khalil H.K.* A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — Vol. 44, N 9. — P. 1672—1687.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Игорь Борисович Фургат — канд. техн. наук, доцент, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, ☎ (812) 321-47-66, ✉ cainenash@mail.ru.