

МНОГОЦИКЛОВОЕ ПОДВИЖНОЕ УПРАВЛЯЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ В РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НАГРЕВА ТЕЛ

В.И. Финягина

Дано математическое описание внешнего подвижного управляющего воздействия. Приведены примеры расчета различных траекторий его движения на плоскости. Показано, что при многоцикловом управляющем воздействии обеспечивается переход к квазистатическому уравнению теплопроводности, т. е. к расчету усредненного распределения температуры на поверхности объекта.

Ключевые слова: система, распределенные параметры, многоцикловое подвижное управляющее воздействие, траектория, концентрированный источник воздействия, поверхность.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах управления системами с распределенными параметрами и подвижным управляющим воздействием рассматриваются объекты, состояние которых описывается двумерным уравнением теплопроводности с концентрированным источником тепла, который перемещается вдоль некоторой траектории на граничной поверхности обрабатываемого изделия [1, 2]. Эффективные размеры источника воздействия значительно меньше размеров объекта управления, а закон движения источника — периодический или близкий к периодическому. С помощью таких источников при высокой скорости их движения можно создать аналог управляющего пространственно распределенного воздействия на объект. Подобные воздействия требуются во многих процессах и устройствах для компенсации краевых эффектов, для обеспечения заданного пространственного распределения механических, физико-химических и других свойств объекта, для компенсации локальных возмущений [3]. Физически источники — это электронные, ионные или лазерные лучи, создаваемые управляемыми «пушками». Процессы, как правило, происходят в вакууме, в соответствующих установках.

Пробегание концентрированным источником всей фиксированной траектории с заданным зако-

ном движения составляет один цикл подвижного воздействия, многократное повторение которого будем называть многоцикловым подвижным управляющим воздействием. Рассмотрению особенностей такого управляющего воздействия в двумерных задачах нагрева тел и посвящена настоящая статья.

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА

Пусть требуется получить заданное распределение температуры (температурное поле) на фиксированной двумерной открытой плоской области D с границей $\Gamma = \partial D$ на поверхности некоторого изделия путем подачи на область D определенного количества тепла (заданной интенсивности), доставляемого посредством подвижных управляемых источников. Сначала рассмотрим один подвижный источник, хотя существуют установки с несколькими подвижными источниками, как правило, их не более двух или трех.

Введем некоторую подходящую систему координат, например, декартову прямоугольную и прямолинейную (рис. 1). Область D часто имеет вид прямоугольника, квадрата или круга. Для определенности будем считать область D прямоугольной (рис. 2).

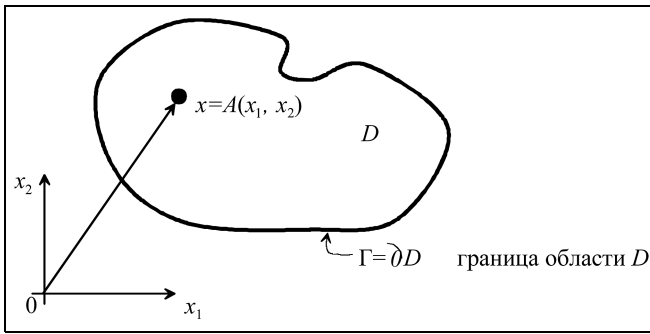


Рис. 1. Двумерная открытая плоская область поверхности

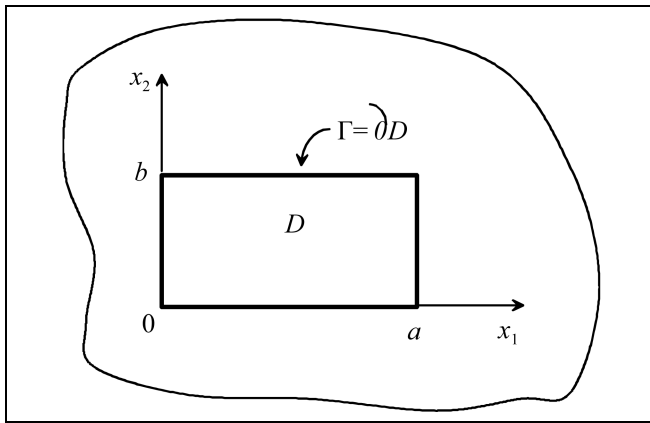


Рис. 2. Двумерная ограниченная плоская область поверхности

Распределение температуры в области D будем описывать функцией $Q = Q(x_1, x_2, t)$, $(x_1, x_2) \in D$, t — время. В области D она удовлетворяет нестационарному уравнению теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} \right) - \varphi(Q) + f(x_1, x_2, t),$$

$$x = (x_1, x_2) \in D. \quad (1.1)$$

Здесь c , ρ , λ и α — теплотехнические параметры материала изделия, соответственно теплоемкость, плотность, теплопроводность и коэффициент теплообмена поверхности и внешней среды, зависящие в общем случае от координат точки x и температуры Q , а $f(x_1, x_2, t)$ — внешнее управляющее воздействие, которое подробно опишем далее. Функция $\varphi(Q)$ характеризует отток тепла (теплоотвод) со всей области D во внешнюю среду по закону Стефана—Больцмана $\varphi[Q] = \varepsilon\sigma[Q^4 - Q_0^4]$, где ε — относительная излучательная способность (степень черноты) поверхности, σ — постоянная

Стефана—Больцмана, Q_0 — температура окружающей среды.

Уравнение (1.1) для однозначности его решения дополняется граничными и начальными условиями, соответствующими условиям процесса в установке. Например, начальное условие при $t = 0$ имеет вид:

$$Q(x_1, x_2, 0) = Q_0(x_1, x_2) = Q_0 = \text{const},$$

а граничное условие в точках границы Γ области D выглядит, например, так:

$$\left[\alpha Q + \lambda \frac{\partial Q}{\partial n} \right]_{x \in \Gamma} = \alpha Q_\Gamma, \quad \Gamma = \partial D,$$

$\frac{\partial Q}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к границе Γ области D .

2. ВНЕШНЕЕ ПОДВИЖНОЕ УПРАВЛЯЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В общем виде функцию $f(x_1, x_2, t)$, представляющую внешнее подвижное управляющее воздействие, можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, t) = u(t)\psi[x_1 - x_{1\text{ц}}(t), x_2 - x_{2\text{ц}}(t), p],$$

$$(x_1, x_2) \in D, t \geq t_0.$$

Здесь $u(t)$ — интенсивность источника, измеряемая в единицах мощности, $x_{\text{ц}}(t) = [x_{1\text{ц}}(t), x_{2\text{ц}}(t)]$ — положение подвижного центра источника в каждый момент времени, $\psi[x_1 - x_{1\text{ц}}(t), x_2 - x_{2\text{ц}}(t), p]$ — безразмерная функция формы, характеризующая закон распределения интенсивности источника в области $D \subset R^2$, p — некоторый, вообще говоря, векторный параметр.

Воздействие образуется в результате суммирования большого числа элементарных воздействий, например, в результате воздействия множества электронов в электронном пучке или фотонов в оптическом луче, претерпевающих некоторое рассеяние. Примем, что имеет место закон нормального (гауссова) распределения интенсивности источника воздействия по плоскости R^2 :

$$\Psi(x_1 - x_{1\text{ц}}(t), x_2 - x_{2\text{ц}}(t), p_1, p_2) =$$

$$= \frac{1}{p_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_1 - x_{1\text{ц}})^2}{2p_1^2} \right] \frac{1}{p_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_2 - x_{2\text{ц}})^2}{2p_2^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi p_1 p_2} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_{1\text{ц}})^2 + (x_2 - x_{2\text{ц}})^2}{p_1^2 p_2^2} \right].$$

Здесь параметры p_1 и p_2 играют роль средне-квадратических отклонений по соответствующим осям x_1 и x_2 . В частности, если $p_1 = p_2 = p$, то закон двумерного симметричного нормального распределения принимает вид:

$$\Psi[x_1 - x_{1ц}(t), x_2 - x_{2ц}(t), p] = \frac{1}{2\pi p^2} \exp\left[-\frac{(x_1 - x_{1ц})^2 + (x_2 - x_{2ц})^2}{2p^2}\right],$$

где $x_{1ц} = x_{1ц}(t)$ и $x_{2ц} = x_{2ц}(t)$ — координаты центра распределения интенсивности подвижного источника. Подвижная точка $M = M(x_{1ц}(t), x_{2ц}(t)) = M(t) \in D$ — это центр нормального симметричного распределения интенсивности подвижного источника.

Но гауссово распределение не является финитным. По известному «правилу трех σ » для гауссовского распределения, 99 % излучения подвижного источника тепла будет лежать в круге радиуса $R = 3p$ с центром в точке M . Этот круг назовем «пятном воздействия», а точку M — центром пятна воздействия (ЦПВ).

При перемещении центра источника пятно воздействия, жестко с ним связанное, также перемещается по области D (рис. 3).

Область G назовем областью допустимых положений точки M внутри области D . Граница ∂G области G определяется как внутренняя эквидистанта по отношению к границе ∂D области D , причем расстояние между границами ∂G и ∂D должно быть не меньше радиуса пятна воздействия (рис. 4).

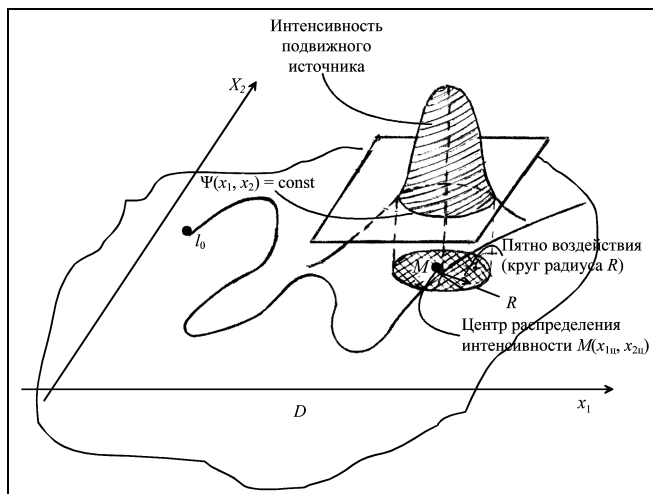


Рис. 3. График нормального симметричного распределения интенсивности источника воздействия на плоскости в фиксированный момент времени

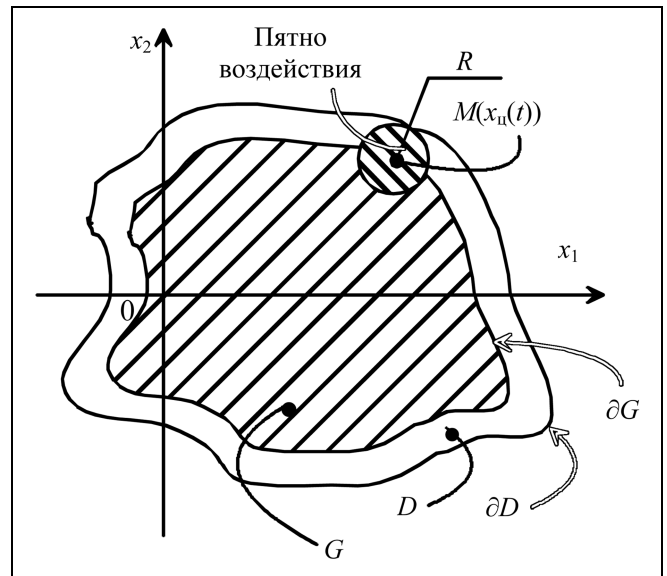


Рис. 4. Область G допустимых положений центра M распределения интенсивности подвижного источника

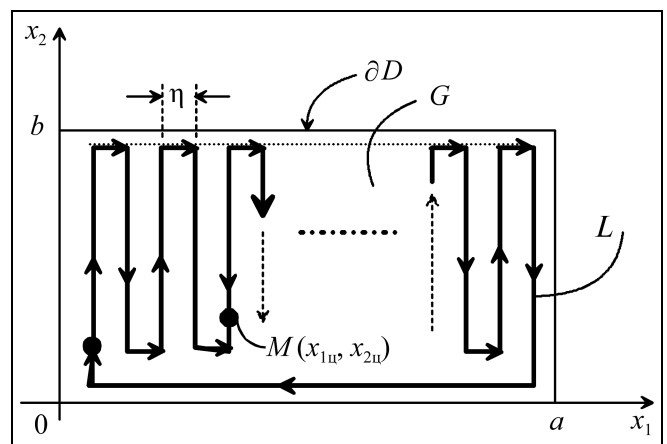


Рис. 5. Пример выбора областей D и G и траектории L движения ЦПВ источника — точки M

В дальнейшем будем считать, что ЦПВ $M(x_{ц}(t))$, $x_{ц}(t) = (x_{1ц}(t), x_{2ц}(t))$ при своем перемещении принадлежит области G .

В качестве примера конкретной области D выберем прямоугольник со сторонами a и b (рис. 5).

Траектория L представляет собой замкнутую кусочно-линейную ломаную несамопересекающуюся линию, достаточно плотно заполняющую область G так, что расстояние любой точки $x \in G$ до траектории L не превышает малой величины $\eta > 0$, причем $\eta \leq 2R$. Область G допустимых положений ЦПВ M источника ограничена пунктиром.

3. ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Пусть ЦПВ источника перемещается вдоль фиксированной траектории L , которая лежит в области $G \subset D$ на плоскости, и точки l_0 и l_1 — концы этой траектории. Если эти точки совпадают, то траектория замкнутая. Зададим траекторию L параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= X(s), \quad 0 \leq s \leq S, \quad x = (x_1, x_2) \in G, \\ X &= (X_1, X_2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где s — переменная длина кривой, отсчитываемая от точки l_0 вдоль кривой L . Положение ЦПВ источника на траектории L будем задавать координатой $s(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $s(t_0) = 0$, $s(t_0 + T) = S$; T — время движения ЦПВ источника от точки l_0 до точки l_1 , S — длина всей траектории. Очевидно,

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (3.2)$$

где $v(t)$ — скорость движения ЦПВ источника вдоль траектории.

Из уравнений (3.1) и (3.2) можно вычислить координаты положения ЦПВ источника в каждый момент времени t :

$$x_i = X_i \left[\int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right], \quad i = 1, 2, \quad x \in G, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Далее, нам будет удобнее задавать траекторию натуральными уравнениями, т. е. зависимостью, которая связывает кривизну χ с длиной s дуги траектории, отсчитываемой от ее начальной точки l_0 . Преимущество такого описания заключается, прежде всего, в том, что натуральное уравнение траектории инвариантно к выбору системы координат. Это позволит, например, раз и навсегда в стандартном виде записать уравнения «типовых» траекторий (окружность, спираль, ломаная и др.) и в дальнейшем пользоваться ими в любой системе координат.

Натуральное уравнение линии (траектории) L на плоскости задается следующей функциональной зависимостью [4]:

$$\chi = \chi(s), \quad 0 \leq s(t) \leq S, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (3.3)$$

где χ — кривизна линии L , переменная $s(t)$ — длина линии, отсчитываемая от фиксированной на-

чальной точки l_0 траектории L до точки $M(t)$. В свою очередь, кривизна определяется выражением

$$\chi = \frac{d\beta(s)}{ds}, \quad (3.4)$$

где $\beta(s)$ — угол наклона касательной к определенной фиксированной оси [5]. Из определения кривизны (3.4) имеем

$$\beta(s) = \beta_0 + \int_0^s \chi(\lambda) d\lambda, \quad 0 \leq s \leq S. \quad (3.5)$$

Для того чтобы зафиксировать кривую, заданную натуральным уравнением (3.3), достаточно, например, выбрать начальную точку $l_0(x_{10}, x_{20})$ этой линии и начальный угол наклона β_0 касательной к этой линии в начальной точке l_0 [6].

Положив $\beta_0 = 0$, из выражений (3.3)—(3.5) получим

$$x_1(t) = x_{10} + \int_{t_0}^t v(t) \cos \beta(t) dt,$$

$$x_2(t) = x_{20} + \int_{t_0}^t v(t) \sin \beta(t) dt, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T. \quad (3.6)$$

Заметим, что здесь $\beta(t)$ — угол наклона касательной к оси $\{x_2 = 0\}$.

В частности, при движении вдоль прямой, параллельной оси x_1 ($\beta_0 = 0$, $\chi = 0$), уравнения (3.6) принимают вид

$$x_1(t) = x_{10} + \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

$$x_2(t) = x_{20}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Для движения ЦПВ источника вдоль окружности (радиуса R с центром в начале координат) из начальной точки $x_{10} = 0$, $x_{20} = -R$ (движение против часовой стрелки) получим

$$x_1(t) = R \sin \left\{ \frac{1}{R} \left[\int_{t_0}^t v(t) dt \right] \right\},$$

$$x_2(t) = -R \cos \left\{ \frac{1}{R} \left[\int_{t_0}^t v(t) dt \right] \right\}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Рассмотрим траекторию, состоящую из сопрягающихся дуг окружностей с кривизной $\chi(s)$, рис. 6, а. Будем аппроксимировать кривизну $\chi(s)$ кусочно-

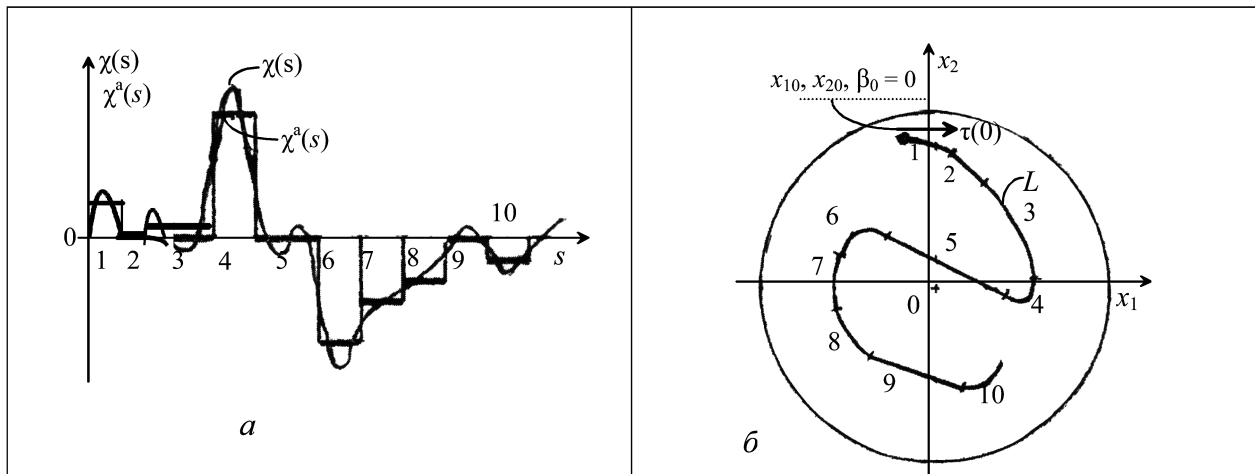


Рис. 6. Пример аппроксимации кривизны траектории: а — кусочно-постоянной функцией $\chi^a(s)$; б — результирующая кривая

постоянной функцией $\chi^a(s)$. Это соответствует разбиению линии L на N участков, каждый из которых аппроксимируется определенной конечной дугой окружности радиуса $R_i = 1/\chi_i^a$, или отрезком прямой, если кривизна достаточно мала (близка к нулю), рис. 6, б.

Для примера рассмотрим систему, в которой обеспечивается перемещение ЦПВ источника вдоль произвольно заданной траектории с заданным распределением скоростей движения вдоль этой траектории. Необходимость в таком режиме может возникнуть, например, при реализации процесса переплава с использованием промежуточной емкости с металлом, расплавляемым электронным лучом. Промежуточная емкость со сливным носком может быть цилиндрической, прямоугольной, или квадратной (в плане) формы. Траекторию движения ЦПВ источника (электронного луча) выберем в соответствии с этой формой.

При аппроксимации этой траектории отрезками прямых ($\chi = 0$) и сопряженных с ними дугами окружностей ($\chi = \text{const} \neq 0$) вся замкнутая траектория общей длины S разбивается на N участков длиной Δs_i , $i = 1, \dots, N$, на каждом из которых значения скорости v_i и кривизны χ_i остаются постоянными.

Далее в соответствии с выражением (3.2) строим (вычисляем) зависимость пройденного пути от времени в виде кусочно-линейной функции $s(t)$, определяющей отрезки времени Δt_i , за которые центр источника проходит i -й участок с соответствующей этому участку скоростью передвижения (рис. 7).

Тангенс угла наклона i -го отрезка равен скорости движения ЦПВ источника на этом отрезке ($\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \equiv \frac{ds}{dt} = v_i$), а длина i -го отрезка s_i при $\chi \neq 0$ зависит от кривизны траектории и равна $s_i = \frac{1}{\chi_i} \cdot \varphi_i$, где φ_i — угол (в радианах) поворота вектора скорости ЦПВ источника на аппроксимационном отрезке дуги окружности, причем $\text{sign} \varphi_i = \text{sign} \chi_i$.

На рис. 8 представлены рассчитанные таким способом траектории движения ЦПВ источника и законы движения его вдоль этих траекторий для промежуточных емкостей различной формы. В табл. 1 для примера приведен массив данных, необходимый для расчета траектории, изображен-

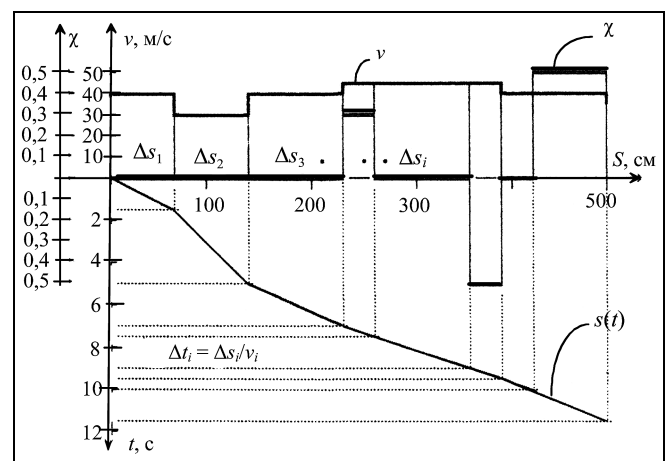


Рис. 7. Графическое отображение вычисления времени Δt_i прохождения ЦПВ источника i -го отрезка траектории

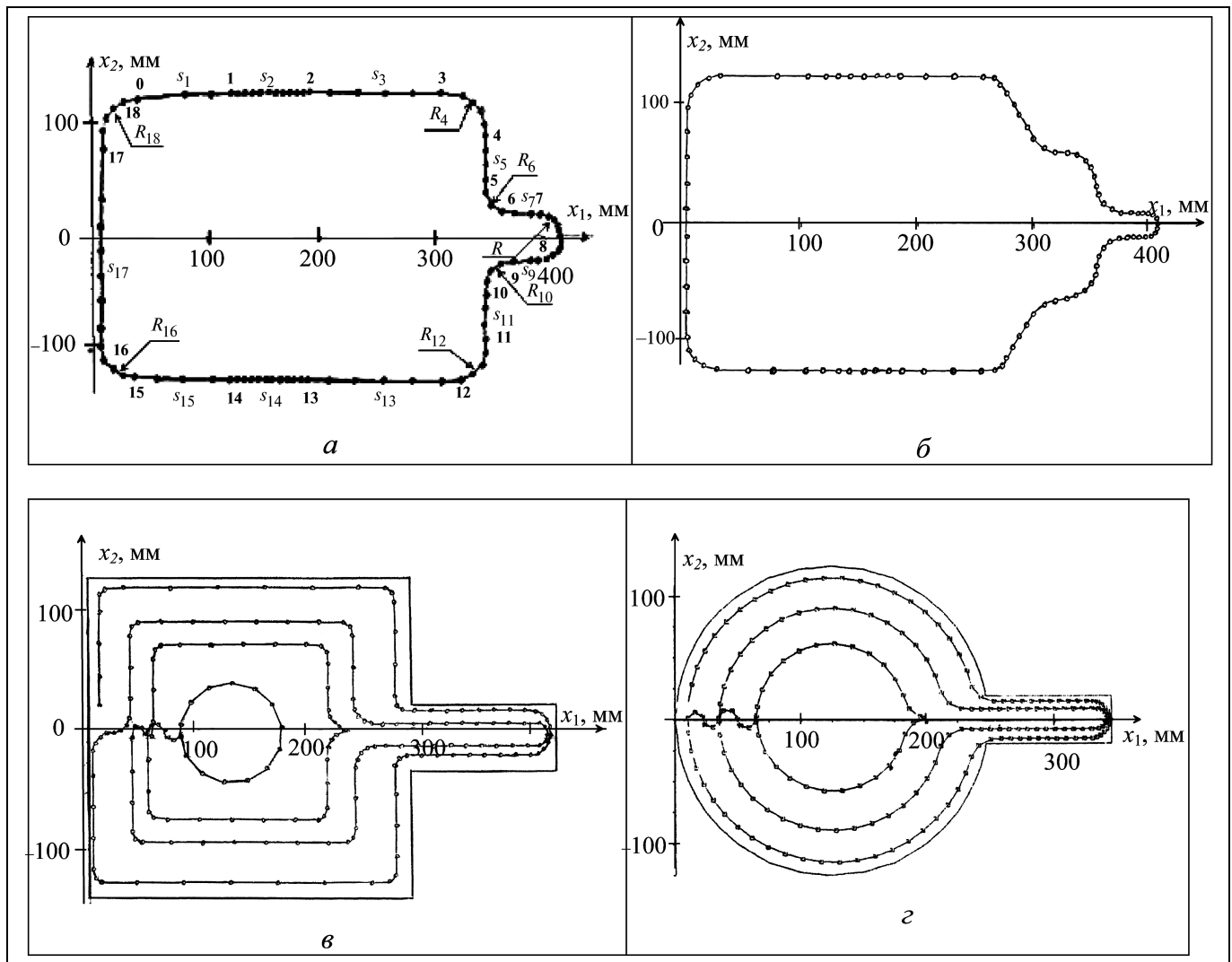


Рис. 8. Примеры рассчитанных траекторий для промежуточных емкостей различной формы

ной на рис. 8, а. На рисунках точками отмечено положение ЦПВ источника через равные промежутки времени, т. е. скорость его движения вдоль траектории отображается сгущением (уменьшение скорости) или разрежением (увеличение скорости движения) точек, соответствующих положению ЦПВ источника.

Представляет интерес оценка относительных погрешностей вычислений координат точек траектории x_1 и x_2 в зависимости от формы траектории и абсолютных значений скоростей:

$$\delta_{x_1} = \frac{\max \Delta x_1}{\max x_1}, \quad \delta_{x_2} = \frac{\max \Delta x_2}{\max x_2}, \quad (3.7)$$

где $\max \Delta x_1$ и $\max \Delta x_2$ — максимальные абсолютные погрешности вычисления координат x_1 и x_2 , $\max \Delta x_1$

и $\max \Delta x_2$ — максимальные размеры (габариты) траектории по осям x_1 и x_2 .

В табл. 2 приведены результаты расчетов для траекторий, представленных на рис. 8, а, б. Были исследованы по два закона движения для каждой из приведенных траекторий. Диапазон скоростей для первой (а) траектории 30–45 м/с (I вариант) и 10–90 м/с (II вариант), для второй (б) траектории 30–45 м/с (I вариант) и 20–90 м/с (II вариант).

Можно сделать следующие выводы:

— на прямолинейных участках траектории увеличение скорости не влияет на относительные погрешности (3.7);

— на криволинейных участках с малой кривизной траектории ошибки (3.7) накапливаются только при довольно больших значениях скоростей;



Таблица 1

Исходные данные для расчета траектории

i	v_i	R_i	$\chi_i = \text{sign} \varphi_i / R_i$	φ_i	Δs_i
1	40	∞	0	0	80
2	30	∞	0	0	80
3	40	∞	0	0	110
4	45	30	1/30	$\pi/2$	R_{φ_4}
5	45	∞	0	0	55
6	45	20	-1/20	$-\pi/2$	R_{φ_6}
7	40	∞	0	0	30
8	40	20	1/20	π	R_{φ_8}
9	40	∞	0	0	30
10	45	20	-1/20	$-\pi/2$	$R_{\varphi_{10}}$
11	45	∞	0	0	55
12	45	30	1/20	$\pi/2$	$R_{\varphi_{12}}$
13	40	∞	0	0	110
14	30	∞	0	0	80
15	40	∞	0	0	80
16	45	30	1/30	$\pi/2$	$R_{\varphi_{16}}$
17	45	∞	0	0	190
18	45	30	1/30	$\pi/2$	$R_{\varphi_{18}}$

Таблица 2

Погрешности вычисления координат x_1 и x_2

Траектория	I вариант скоростей		II вариант скоростей	
	$\delta_{x_1}, \%$	$\delta_{x_2}, \%$	$\delta_{x_1}, \%$	$\delta_{x_2}, \%$
I траектория (рис. 7, а) Шаг $DT = 0,3$ с Шаг $DT = 0,06$ с	0,54 0,112	0,604 0,012	3,11 0,21	2,38 0,09
II траектория (рис. 7, б) Шаг $DT = 0,06$ с	0,23	0,15	0,497	0,604

— на криволинейных участках с большой кривизной траектории (например, пилообразной) ошибки резко возрастают даже при малых скоростях.

Точность выбранного способа формирования управляющих сигналов обуславливается диапазоном изменения скорости и кривизны траектории движения источника, точностью используемого метода интегрирования, размером шага по времени DT .

Избежать увеличения относительных погрешностей для пилообразных траекторий можно, заменив криволинейные участки, где кривизна очень велика, ломаными линиями.

4. МНОГОЦИКЛОВОЕ ПОДВИЖНОЕ УПРАВЛЯЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Для определенности рассмотрим случай, когда траектория источника L выбрана, как показано на рис. 5, для прямоугольной области $G \subset D$. Здесь L — замкнутая траектория встречи луча с пластиной, описываемая подвижной точкой M .

Если точка M один раз обегает всю замкнутую траекторию L с постоянной скоростью $v = \text{const}$ при постоянной интенсивности (мощности) источника тепла $u(t) = \text{const}$, возвращаясь в исходную точку, получаем один цикл нагрева поверхности G . Будем повторять этот цикл многократно достаточно большое число раз. Этот режим многократного повторения данного цикла назовем *многоцикловым подвижным воздействием* или *многоцикловым подвижным управлением* лучевым источником тепла.

Рассмотрим его подробнее.

Пусть периодическое движение источника происходит по некоторой замкнутой траектории L (рис. 5) с постоянной (достаточно высокой) скоростью с периодом цикла T (достаточно малым), и это движение повторяется многократно, т. е. имеем многоцикловый режим. Рассмотрим произвольную фиксированную точку M с координатами (x_{M1}, x_{M2}) на замкнутой траектории L . График температуры Q_M в этой точке в зависимости от времени t изображен на рис. 9.

Если скорость движения источника достаточно велика (перед T достаточно мал), то ясно, что размах q_M колебаний температуры в точке M будет достаточно мал, и им можно пренебречь.

Таким образом, ясно, что по прошествии достаточно большого числа циклов $N \gg 1$ (т. е. при достаточно большом значении времени t) и достаточно высокой скорости движения источника v (по сравнению со скоростью распространения тепла в области G) в области G установится опре-

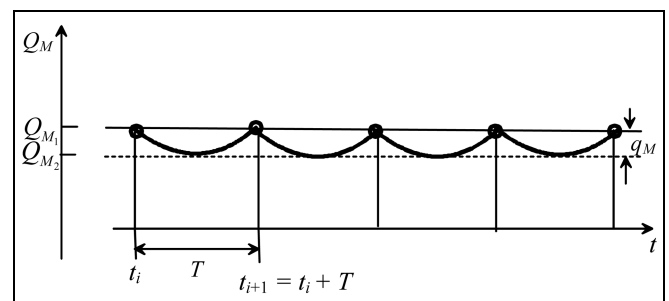


Рис. 9. График температуры в произвольной фиксированной точке траектории

деленное статическое распределение температуры $Q_{\text{стат}} = \bar{Q}(x_1, x_2) = \bar{Q}(x)$, $x = (x_1, x_2)$, не зависящее от времени t . Это распределение удовлетворяет квазистатическому уравнению теплопроводности:

$$-\lambda \left[\frac{\partial^2 \bar{Q}(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}(x)}{\partial x_2^2} \right] + \varphi[\bar{Q}(x)] = f(x, t),$$
$$x = (x_1, x_2) \in D. \quad (4.1)$$

Поскольку левая часть не зависит от времени t , то процесс, описываемый этим уравнением, будет уже квазистатическим, а время t входит как внешний параметр в функцию $f(x, t)$. Эта функция $f(x, t)$ зависит от времени t только через изменение интенсивности источника $u(t)$. Поскольку в данном случае интенсивность источника принята нами постоянной $u(t) = \text{const}$, то уравнение (4.1) принимает вид

$$-\lambda \left[\frac{\partial^2 \bar{Q}(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}(x)}{\partial x_2^2} \right] + \varphi[\bar{Q}(x)] = f(x),$$
$$x = (x_1, x_2) \in D. \quad (4.2)$$

Это уравнение описывает установившийся статический режим и позволяет рассчитать усредненное распределение температуры $\bar{Q}(x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается подвижное управляющее воздействие в виде нормального симметричного распределения интенсивности подвижного источника воздействия на плоскости.

Для построения траектории движения ЦПВ источника предложен подход, при котором понятие собственно траектории движения ЦПВ M источника отделено от понятия закона его движения вдоль этой траектории. Разделение этих понятий позволяет независимо задавать траекторию L движения ЦПВ источника и закон его движения вдоль траектории L . Стандартные траектории L рассчитываются в терминах *натуральных уравнений*. Преимущество такого подхода в том, что уравнения траекторий L становятся *инвариантными* по отношению к выбору системы координат.

Приведены примеры расчета различных траекторий движения ЦПВ источника и анализ относительной погрешности вычисления координат точек этих траекторий.

Рассмотрено понятие *многоциклового режима подвижного управляющего воздействия*, при котором ЦПВ источника многократно обегает неизменную замкнутую траекторию. Закон движения ЦПВ источника при этом остается неизменным от цикла к циклу, период прохождения всей траектории T достаточно мал, а средняя скорость передвижения достаточно высока.

Показано, что уравнение для температурного поля объекта соответствует установившемуся (статическому) режиму. Другими словами, при многоцикловом режиме подвижного управляющего воздействия появляется возможность рассчитать усредненное температурное поле $\bar{Q}(x)$, $x = (x_1, x_2) \in D$ на поверхности объекта нагрева (см. формулу).

Автор выражает благодарность ведущему математику Н.С. Поликарповой за действенную помощь, оказанную при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Управление распределенными системами с подвижным воздействием: Сб. ст. / Под ред. А.Г. Бутковского. — М.: Наука, 1979. — 264 с.
3. Применение скользящих режимов для управления объектами с распределенными параметрами с подвижным многоцикловым воздействием / А.М. Брегер, А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, В.И. Уткин // Автоматика и телемеханика. — 1980. - № 3. — С. 72—83.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Курс лекций. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 428 с.
5. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. — М.: МГУ, 1961. — 343 с.
6. Савелов А.А. Плоские кривые. — М.: Наука, 1977. — 479 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии [А.Г. Бутковским].

Финягина Валерия Ивановна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-76-90, ✉ fler@ipu.ru.

Поздравляет

члена редколлегии нашего журнала
доктора технических наук, профессора **Евгения Анатольевича МИКРИНА**
с избранием действительным членом Российской академии наук.

Желаем ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов!

Редколлегия и редакция
журнала «Проблемы управления»