



МЕТОД ПОДСТАНОВКИ В РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НАГРЕВА ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ПОДВИЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

В.И. Финягина

Разработанный ранее метод подстановки для расчета распределенных управлений в системах с распределенными параметрами с подвижным управляющим воздействием распространен на двумерный случай. Требуемое температурное поле задается в виде кусочно-постоянных функций в прямоугольной области и аппроксимируется квадратичными функциями. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: система, распределенные параметры, подвижное управление, метод подстановки, температурное поле, поверхность.

ВВЕДЕНИЕ

В современной технологии для обработки и получения новых материалов и изделий широко применяются электронно-лучевые и ионно-лучевые вакуумные установки. В установках такого типа обрабатываемый материал нагревается под действием излучения подвижных источников электронных, ионных или лазерных лучей. Возможность перемещения подвижного источника по произвольному закону позволяет поставить задачу оптимального управления его движением, относящуюся к классу задач управления системами с распределенными параметрами с подвижным управляющим воздействием. Рассматриваются объекты, состояние которых описывается уравнением теплопроводности с концентрированным источником тепла, который перемещается вдоль некоторой траектории на граничной поверхности обрабатываемого изделия. Задача получения в некоторой области и поддержания распределения температур, близких к заданным, сводится к определению траектории движения источника воздействия и скорости перемещения по ней. Для одномерных распределенных систем разработаны соответствующие алгоритмы решения. Подобные задачи возникают при нагреве тонкого стержня с теплоотдачей с боковой поверхности, при нагреве с торца пластины или цилиндра, нагреваемого кольцевым источником тепла и др.

В опубликованных работах предложен метод подстановки для расчета распределенных управле-

ний [1] и метод реализации распределенных управлений при помощи подвижных источников воздействия [2]. Оба эти метода дополняют друг друга и служат для определения такого подвижного управления, которое, будучи приложенным к объекту управления, переводит его из некоторого заданного состояния в требуемое.

Суть этих методов состоит в следующем.

Метод подстановки позволяет рассчитать распределенное управляющее воздействие, при помощи которого достигается и в дальнейшем поддерживается заданное температурное состояние объекта управления. Для этого в уравнение, описывающее состояние объекта, подставляется специальным образом подобранная функция, аппроксимирующая заданное температурное распределение. Эта функция, названная *аппроксимирующей*, согласует начальные и граничные условия с заданным температурным распределением в объекте. Искомое распределенное воздействие определяется непосредственно из уравнения, описывающего состояние объекта.

Метод реализации позволяет определить параметры подвижного источника, которые обеспечивают подвижное воздействие, близкое в определенном смысле к найденному ранее методом подстановки распределенному воздействию.

Данная работа посвящена обобщению метода подстановки для расчета распределенных управлений [1], успешно применяемого для одномерных систем, на двумерные системы нагрева подвижными источниками тепла.

1. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Состояние объекта определяется функцией $Q(x, t)$, $x = (x_1, x_2) \in D$, $t \geq t_0$, описывающей распределение температуры в области D . Функция $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению (вообще говоря, нелинейному) теплопроводности:

$$c_p \frac{\partial Q}{\partial t} - L[Q] + \varphi(Q) = f(x, t), \\ x = (x_1, x_2) \in D, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\left[\alpha Q + \lambda \frac{\partial Q}{\partial n} \right]_{x \in \Gamma} = \alpha Q_\Gamma, \quad \Gamma = \partial D, \\ Q(x, 0) = Q_0(x), \quad x \in D. \quad (1.2)$$

Здесь оператор $L[Q]$, действующий по пространственной переменной x на функцию $Q = Q(x, t)$ определяется как

$$L[Q] = \operatorname{div}[\lambda \operatorname{grad} Q], \quad (1.3)$$

а c , ρ , λ и α — теплотехнические параметры материала объекта, соответственно теплоемкость, плотность, коэффициент теплопроводности и коэффициент теплообмена поверхности и внешней среды, зависящие в общем случае от координат точки x и температуры; $\varphi(Q)$ — функция, описывающая тепловод с поверхности объекта во внешнюю среду; $\frac{\partial Q}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к границе Γ области D . Функция $f(x, t)$ описывает воздействие от подвижного источника, зависящее от параметров источника, таких как интенсивность, форма, т. е. распределение его интенсивности в пространстве и времени, и некоторых других параметров, например, дисперсии.

При построении аппроксимирующей функции будем рассматривать установившийся режим, *многочастотный* режим движения источника, при котором состояние объекта $Q(x, t)$ по прошествии достаточно большого числа периодов становится функцией, близкой к периодической по времени при любом фиксированном $x \in D$ с тем же периодом T , что и период движения источника. В работах [3, 4] показано, что в установившемся режиме $\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = 0$, и уравнение объекта (1.1) упрощается и принимает вид

$$-L[Q] + \varphi(Q) = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in D, \\ t > 0. \quad (1.4)$$

Обозначим желаемое состояние объекта $Q^*(x)$, а аппроксимирующую функцию $Q_A^*(x)$. Подставив ее в уравнение (1.1), получим требуемое распределенное воздействие:

$$f^*(x) = -L[Q_A^*(x)] + \varphi(Q_A^*). \quad (1.5)$$

К аппроксимирующей функции $Q_A^*(x)$ предъявляются следующие требования:

- 1) удовлетворять граничным и начальным условиям (1.2);
- 2) быть дважды кусочно-дифференцируемой;
- 3) аппроксимировать желаемое состояние $Q^*(x)$ в области D_1 с требуемой точностью;
- 4) функция (1.5), полученная из уравнения (1.1), должна быть кусочно-непрерывной и удовлетворять в области D условиям: $f^*(x) \geq 0$, $\int_D f^*(x) dx \leq U_{\max}$

($U_{\max}$ — максимальная интенсивность (мощность) источника) и быть равной нулю вне области D .

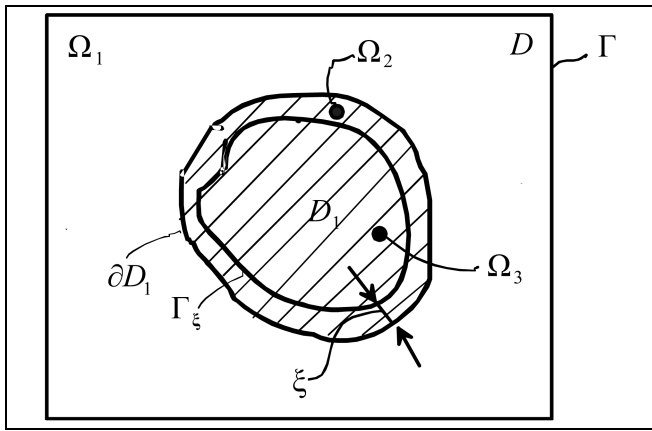
Требования 1 и 2 необходимы для того, чтобы функция $Q_A^*(x)$ удовлетворяла уравнению (1.4) с граничными и начальными условиями (1.2). Это и делает возможным расчет воздействия $f^*(x)$ по формуле (1.5).

Основную трудность в методе подстановки составляет построение аппроксимирующей функции $Q_A^*(x)$, удовлетворяющей требованиям 1—4. Одна из особенностей состоит в том, что функция $Q_A^*(x)$ должна быть построена в области D , в то время как желаемое состояние $Q^*(x)$ определено в области $D_1 \subset D$. Поэтому функция $Q_A^*(x)$ строится отдельно в области D_1 и в области $D \setminus D_1$ с последующим сопряжением этих функций.

Другая особенность состоит в том, что способ построения функции $Q_A^*(x)$ в области D существенно зависит от способа задания состояния $Q^*(x)$, $x \in D_1$. В частности, оно может быть задано в явном виде (например, аналитически) или в виде сеточной функции, определенной в области D_1 значениями в каждом узле и т. п. Практически состояние $Q^*(x)$ часто удобно задавать в виде кусочно-постоянной функции. В каждом случае требуется соответствующий способ построения аппроксимирующей функции. Эти способы обсудим далее.

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Так как состояние $Q^*(x)$ задано в области D_1 , а функция $Q_A^*(x)$ определена в области D ($D_1 \subset D$), то

Рис. 1. Схема разбиения области D

построить функцию $Q_A^*(x)$ означает аппроксимировать состояние $Q^*(x)$ в области D_1 и продолжить аппроксимированную функцию на область D , выполняя при этом требования 1–4.

Конфигурация области D_1 может быть различной и зависит от условий задачи, от вида траектории (кольцевой, спиралевидной, пилообразной, построчной) перемещения источника теплового воздействия. Область D удобно разбить на три непересекающиеся области (рис. 1). На рисунке обозначено: ∂D_1 — граница области D_1 ; Γ_ξ — линия, отстоящая на заданное расстояние ξ от границы ∂D_1 ; Ω_2 — область, ограниченная линиями ∂D_1 и Γ_ξ ; $\Omega_3 = D_1 \setminus \Omega_2$; $\Omega_1 = D \setminus D_1$. Функция $Q_A^*(x)$

строится отдельно для областей Ω_1 и Ω_3 , а область Ω_2 используется для «сшивки» функций, построенных в областях Ω_1 и Ω_3 .

Тогда аппроксимирующую функцию можно представить в виде $Q_A^*(x) = \sum_{i=1}^3 Q_i(x) \chi_i(x)$, где функция $Q_i(x)$ определена в области Ω_i , $\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_i, \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega_i, \end{cases} i = 1, 2, 3$.

Функция $Q_1(x)$, $x \in \Omega_1$, определяется как решение краевой задачи (1.1), (1.2) в области Ω_1 , с граничным условием вида $Q_1(x)|_{x \in \partial D_1} = \mu(x)|_{x \in \partial D_1}$, где функция $\mu(x)$, $x \in \partial D_1$, может быть выбрана достаточно произвольно, но так, чтобы не нарушались перечисленные в § 1 условия 1–4.

Способ построения функции $Q_3(x)$, $x \in \Omega_3$, зависит от способа задания состояния $Q^*(x)$, $x \in D_1$.

Если функция $Q^*(x)$ задана в явном виде (например, аналитически) и удовлетворяет требованиям 2 и 3, то функция $Q_3(x)$ совпадает с ней.

Если функция $Q^*(x)$ задана приближенно, например, в виде сеточной функции в области D_1 со значениями в каждом узле, то для построения функции $Q(x)$ во всей области применяются методы аппроксимации (сплайнами, методом наименьших квадратов, тригонометрическими полиномами, поверхностями Кунса [5, 6] и др.).

Часто состояние $Q^*(x)$ задается в виде кусочно-постоянной функции следующим образом.

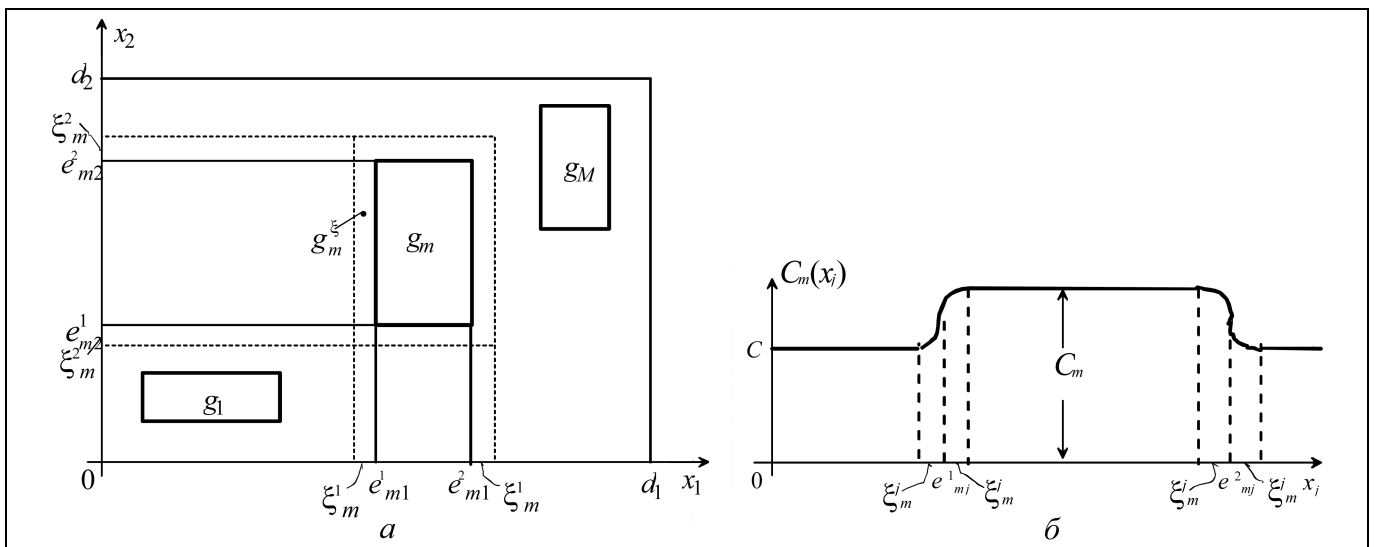


Рис. 2. Схема расчета сопряжений кусочно-постоянной функции:

a — пример расположения прямоугольных областей; b — график перехода температуры от начального значения к требуемому

В области D_1 выделяются прямоугольные области g_m , $m = 1, 2, \dots, M$ (рис. 2, а). Местонахождение, взаимное расположение, а также число этих областей может быть любым, что определяется условиями задачи: в каком месте объекта и до какого значения нужно довести температуру поверхности. Эти области могут как соприкасаться, так и быть достаточно разрежены. В каждой из этих областей g_m функция $Q^*(x)$ постоянна и равна C_m . В других точках области D_1 функция $Q^*(x)$ равна $C = \min\{C_m\}_{m=1,2,\dots,M}$.

Тогда функция $Q_A^*(x)$ строится следующим образом. Назначаются некоторые окрестности каждой области g_m (например, шириной ξ_m), т. е. определяется область «сшивки» Ω_2 . Далее производится сглаживание функции $Q^*(x)$ в ξ_m — окрестностях каждой области g_m так, чтобы обеспечить непрерывный переход функции $Q_A^*(x)$ от значения C к значению C_m при выполнении требований 2 и 3 (рис. 2, б).

Аппроксимирующую функцию представим в виде:

$$Q_A^*(x) = \begin{cases} C_m(x_1, x_2) & \text{при } x \in g_m^{\xi}, \\ C & \text{при } x \notin g_m^{\xi}, m = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь через g_m^{ξ} обозначены ξ_m -окрестности областей g_m , а $C_m(x_1, x_2) = C_m^{(1)}(x_1) C_m^{(2)}(x_2)$. Функции $C_m^{(j)}(x_j)$, $j = 1, 2$ определяются по формулам

$$C_m^{(j)}(x_j) = \begin{cases} k_m[x_j - (e_{mj}^{(1)} - \xi_m)]^2 + P^{(1)} & \text{при } e_{mj}^{(1)} - \xi_m \leq x_j \leq e_{mj}^{(1)}, \\ -k_m[x_j - (e_{mj}^{(1)} + \xi_m)]^2 + P_m^{(2)} & \text{при } e_{mj}^{(1)} \leq x_j \leq e_{mj}^{(1)} + \xi_m, \\ P_m^{(2)} & \text{при } e_{mj}^{(1)} + \xi_m \leq x_j \leq e_{mj}^{(2)} - \xi_m, \\ -k_m[x_j - (e_{mj}^{(2)} - \xi_m)]^2 + P_m^{(2)} & \text{при } e_{mj}^{(2)} - \xi_m \leq x_j \leq e_{mj}^{(2)}, \\ k_m[x_j - (e_{mj}^{(2)} + \xi_m)]^2 + P^{(1)} & \text{при } e_{mj}^{(2)} \leq x_j \leq e_{mj}^{(2)} + \xi_m, \end{cases}$$

$$j = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, M \text{ и}$$

$$k_m = (P^{(1)} - P_m^{(2)}) / 2\xi_m^2, \quad P^{(1)} = \sqrt{C},$$

$$P_m^{(2)} = \sqrt{C_m} \quad (2.2)$$

Сглаживание разрывов функции $Q^*(x)$ с помощью функций вида (2.2) удобно, ибо достаточно просто реализуются условия аппроксимации.

3. РАСЧЕТ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

В соответствии с приведенной схемой рассмотрим конкретный пример. Методом подстановки найдем распределенное воздействие $f^*(x)$, $x = (x_1, x_2) \in D$, которое обеспечит в установившемся режиме уклонение состояния объекта $Q(x, t)$ от заданного состояния $Q^*(x, t)$, не превышающее некоторой заданной величины. В качестве меры уклонения можно принять некоторый функционал $\mathfrak{Z}$, конкретный вид которого определяется практической задачей, например, $\mathfrak{Z} = \int_D |Q^*(x) - Q(x)|^2 dx$.

Пусть объектом нагрева будет плоская ограниченная тонкая прямоугольная пластина с размерами a и b по осям x и y соответственно и толщиной h , $h \ll a$, $h \ll b$ (чтобы избавиться от «лишних» индексов, положим для удобства $x_1 = x$ и $x_2 = y$). Распределением температуры по толщине пренебрегаем. Пусть область D_1 совпадает с областью D и представляет собой прямоугольник со сторонами a и b . Нелинейный член $\varphi(Q)$ в уравнении (1.4) описывает теплоотдачу с поверхности объекта по закону Стефана—Больцмана $\varphi(Q) = \varepsilon\sigma[Q^4 - Q_c^4]$, Q_c — температура окружающей среды и $\alpha \ll \lambda$ (см. 1.2), что соответствует граничным условиям первого рода $Q|_{x=0} = Q_{Гх}$; $Q|_{y=0} = Q_{Гy}$.

Желаемое состояние объекта $Q^*(x, y)$ задано в виде кусочно-постоянной функции, а оператор $L[Q]$ имеет вид (при условии $\lambda = \text{const}$) $L[Q] = \lambda \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right)$.

Уравнение теплопроводности (1.1) и начальные условия (1.2) для такого объекта запишутся как

$$c\rho \frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{h} f(x, y, t) - \frac{\varepsilon\sigma}{h} [Q^4 - Q_c^4],$$

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$Q(x, y, 0) = Q_0(x, y).$$

Рассмотрим установившийся режим $\frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial t} = 0$ и будем считать, что распределение температуры по поверхности объекта от воздействия $f^*(x, y)$ распределенного источника описывается некото-



рой аппроксимирующей функцией $Q_A^*(x, y)$, обоснование вида которой приведем далее. Подставив $Q_A^*(x, y)$ вместо Q в уравнение (3.1), получим

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{h} f^*(x, y) - \frac{\varepsilon \sigma}{4} [(Q_A^* + 273)^4 - (Q_0 + 273)^4] = 0.$$

Отсюда находим выражение для распределенного воздействия:

$$f^*(x, y) = \lambda h \left(\frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial y^2} \right) + \varepsilon \sigma [(Q_A^* + 273)^4 - (Q_0 + 273)^4],$$

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad Q_{\Gamma x} = Q_{\Gamma y} = Q_{\Gamma} = 0. \quad (3.2)$$

Для определения воздействия $f^*(x, y)$ по формуле (3.2) сначала выберем вид аппроксимирующей функции и построим её. Далее приводятся примеры таких построений.

4. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Пусть на поверхности объекта требуется создать равномерное температурное распределение (рис. 3, а). Область Ω_1 совпадает с областью определения объекта и является прямоугольником со сторонами a и b . На границе этой области температура $Q^* = 0$; в области Ω_3 температура $Q^* = C = \text{const}$,

а в области Ω_2 (области «сшивки») переход от граничных условий Q_{Γ} на некоторых отрезках длиной ξ_1 (по оси x) и ξ_2 (по оси y) аппроксимируем параболой, как показано на рис. 3, б.

Аппроксимирующую функцию (2.1) для данной задачи можно записать в виде $Q_A^*(x, y) = k C_1(x) C_2(y)$, где k — заданное число,

$$C_1(x) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\xi_1^2}(x - \xi_1)^2 + 1 = A(x) & \text{при } 0 \leq x \leq \xi_1, \\ 1 = B(x) & \text{при } \xi_1 \leq x \leq a - \xi_1, \\ -\frac{1}{\xi_1^2}[x - (a - \xi_1)]^2 + 1 = C(x) & \text{при } a - \xi_1 \leq x \leq a, \end{cases}$$

$$C_2(y) = \quad (4.1)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\xi_2^2}(y - \xi_2)^2 + 1 = D(y) & \text{при } 0 \leq y \leq \xi_2, \\ 1 = E(y) & \text{при } \xi_2 \leq y \leq b - \xi_2, \\ -\frac{1}{\xi_2^2}[y - (b - \xi_2)]^2 + 1 = F(y) & \text{при } b - \xi_2 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Для наглядности представим поле объекта в виде нескольких участков, в каждом из которых значения функций $C_1(x)$ и $C_2(y)$ будут неизменны (рис. 3, в), и в дальнейшем расчет аппроксимирующей функции $Q_A^*(x, y)$ и следом за ней — распределенного воздействия $f^*(x, y)$ будем вести по этим участкам. В рассматриваемом примере таких участков девять: I—IX.

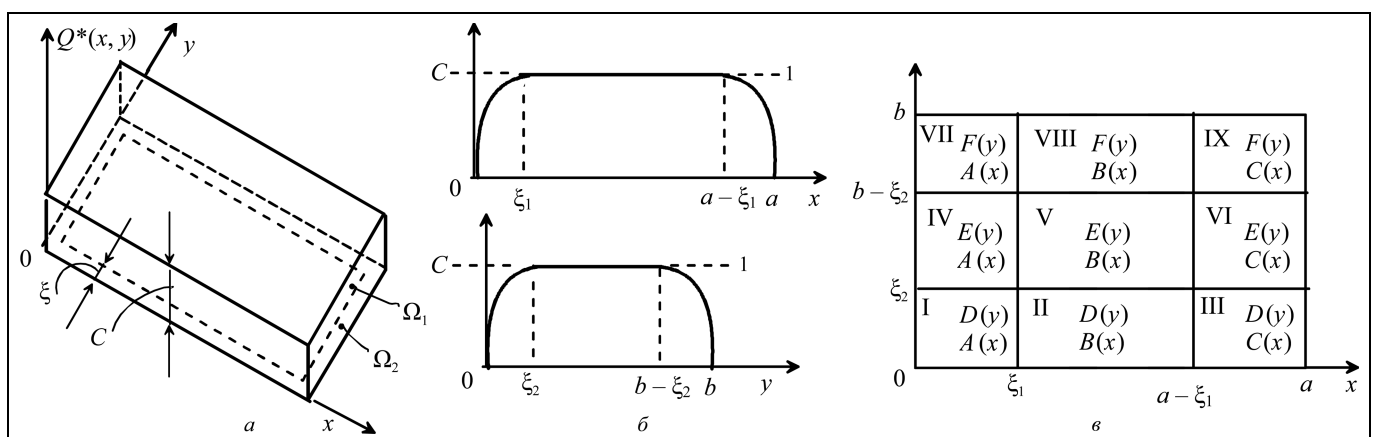


Рис. 3. К расчету равномерного температурного распределения:

а — требуемое температурное поле; б — представление аппроксимирующей функции по осям x и y ; в — схематическое представление формулы (4.1)

Выражения для аппроксимирующей функции на этих участках будут иметь вид:

$$Q_A^*(x, y) = \begin{cases} D(y)A(x), & \text{если } (x, y) \in I, \\ D(y), & \text{если } (x, y) \in II, \\ D(y)C(x), & \text{если } (x, y) \in III, \\ E(y)A(x), & \text{если } (x, y) \in IV, \\ 1, & \text{если } (x, y) \in V, \\ E(y)C(x), & \text{если } (x, y) \in VI, \\ F(y)A(x), & \text{если } (x, y) \in VII, \\ F(y), & \text{если } (x, y) \in VIII, \\ F(y)C(x), & \text{если } (x, y) \in IX. \end{cases}$$

Для расчета распределенного управления запишем следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_A^*}{\partial y^2} = k \frac{\partial^2 C_1(x)}{\partial x^2} C_2(y) + k C_1(x) \frac{\partial^2 C_1(y)}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 C_1(x)}{\partial x^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\xi_1^2} & \text{при } 0 \leq x \leq \xi_1, \\ 0 & \text{при } \xi_1 \leq x \leq a - \xi_1, \\ -\frac{2}{\xi_1^2} & \text{при } a - \xi_1 \leq x \leq a, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 C_1(y)}{\partial y^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\xi_2^2} & \text{при } 0 \leq y \leq \xi_2, \\ 0 & \text{при } \xi_2 \leq y \leq b - \xi_2, \\ -\frac{2}{\xi_2^2} & \text{при } b - \xi_2 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Запишем равенство (4.2) для каждого из участков (см. рис. 3, в).

$$I. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] D(y) + k A(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_1^2} D(y) - \frac{2k}{\xi_2^2} A(x) \\ \text{при } 0 \leq x \leq \xi_1, 0 \leq y \leq \xi_2.$$

$$II. k 0 D(y) + k B(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_2^2} \text{ при } \\ \xi_1 \leq x \leq a - \xi_1, 0 \leq y \leq \xi_2.$$

$$III. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] D(y) + k C(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_1^2} D(y) - \frac{2k}{\xi_2^2} C(x) \\ \text{при } a - \xi_1 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \xi_2.$$

$$IV. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] E(y) + k A(x) 0 = -\frac{2k}{\xi_1^2} \text{ при } 0 \leq x \leq \xi_1, \\ \xi_2 \leq y \leq b - \xi_2.$$

$$V. k 0 E(y) + k B(x) 0 = 0 \text{ при } \xi_1 \leq x \leq a - \xi_1, \\ \xi_2 \leq y \leq b - \xi_2.$$

$$VI. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] E(y) + k C(x) 0 = -\frac{2k}{\xi_1^2} \\ \text{при } a - \xi_1 \leq x \leq a, \xi_2 \leq y \leq b - \xi_2.$$

$$VII. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] F(y) + k A(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_1^2} F(y) - \frac{2k}{\xi_2^2} A(x) \\ \text{при } 0 \leq x \leq \xi_1, b - \xi_2 \leq y \leq b.$$

$$VIII. k 0 F(y) + k B(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_2^2} \text{ при } \\ \xi_1 \leq x \leq a - \xi_1, b - \xi_2 \leq y \leq b.$$

$$IX. k \left[-\frac{2}{\xi_1^2} \right] F(y) + k C(x) \left[-\frac{2}{\xi_2^2} \right] = -\frac{2k}{\xi_1^2} F(y) - \frac{2k}{\xi_2^2} C(x) \\ \text{при } a - \xi_1 \leq x \leq a, b - \xi_2 \leq y \leq b.$$

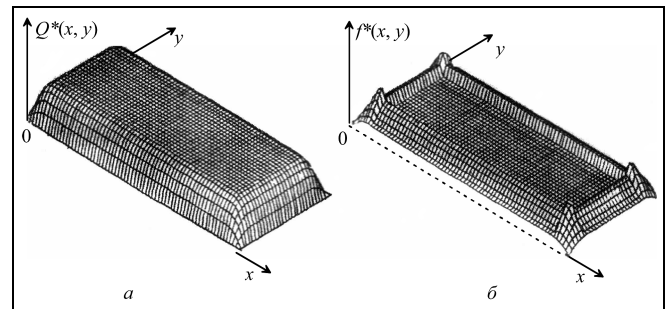


Рис. 4. Аппроксимирующая функция (а) и распределенное воздействие (б) для равномерного температурного распределения

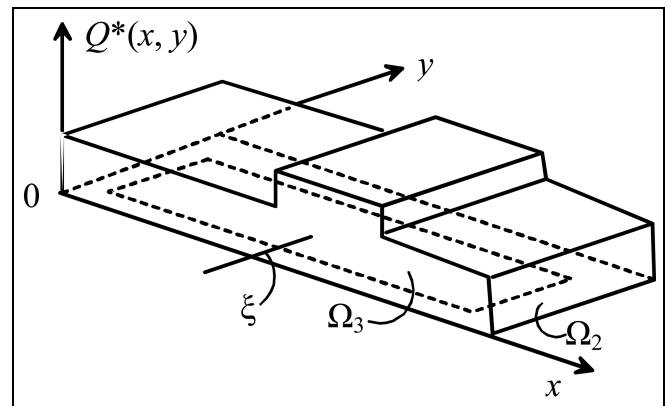


Рис. 5. Схема неравномерного температурного поля

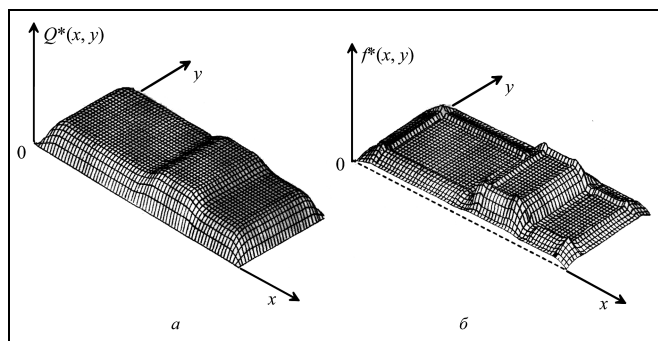


Рис. 6. Аппроксимирующая функция (а) и распределенное воздействие (б) для неравномерного температурного распределения

Вычисленная таким образом аппроксимирующая функция для равномерного температурного распределения представлена на рис. 4, а. На рис. 4, б представлен вид распределенного воздействия $f^*(x, y)$, найденного по формуле (3.2) и соответствующего этой аппроксимирующей функции.

В практических задачах зачастую требуется создавать и неравномерные распределения температуры, например, вида, изображенного на рис. 5. Предлагаемый способ построения аппроксимирующей функции позволяет это сделать. Графический результат расчета представлен на рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод подстановки для расчета распределенных управлений в системах с распределенными параметрами с подвижным воздействием [1] распространен на двумерный случай.

Предложен алгоритм расчета функции, аппроксимирующей требуемое распределение температуры на поверхности объекта. Для примера проведена квадратичная аппроксимация кусочно-посто-

янной функции на двумерной поверхности для двух видов требуемого распределения температуры. Предложенный алгоритм реализован на специально разработанном программном обеспечении — стационарной модели для расчета распределенных управлений.

Отметим, что сглаживание разрывов $Q^*(x, y)$ с помощью функций вида (4.1), хотя и несколько громоздко, но удобно, так как достаточно просто выполняются требования 1–4.

Автор выражает благодарность ведущему математику лаборатории Н.С. Поликарповой за помощь, оказанную в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метод подстановки для расчета распределенных управлений / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, А.Г. Смирнов, Е.С. Твердохлебов, Е.П. Чубаров // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 9. — С. 52–61.
2. Реализация распределенных управлений при помощи подвижных источников воздействия / А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, Е.С. Твердохлебов, Е.П. Чубаров. // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 4. — С. 5–12.
3. Применение скользящих режимов для управления объектами с распределенными параметрами с подвижным многоцикловым воздействием / А.М. Брегер, А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, В.И. Уткин // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 3. — С. 72–83.
4. Управление распределенными системами с подвижным воздействием / Сб. статей под ред. А.Г. Бутковского. — М.: Наука, 1979. — 264 с.
5. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
6. Функциональный анализ. — Под ред. С.Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Финягина Валерия Ивановна — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-76-90, ✉ fler@ipu.ru.

Новая книга

Виктор Иванович Шестаков и открытие логического моделирования в технике / Под ред. В.И. Левина. — Пенза: Изд-во Пензенской гос. технол. академии, 2009. — 367 с.

Настоящая книга — дань уважения к заслугам выдающегося отечественного логика и математика Виктора Ивановича Шестакова, которому 28 октября 2007 года исполнилось 100 лет. Это первая в мире книга по данной тематике.

В книгу вошли материалы, освещающие жизненный и творческий путь и логико-математические результаты В.И. Шестакова, несколько неопубликованных работ самого ученого, статьи и отзывы его учеников и коллег, воспоминания его родственников и знакомых. Дана экспозиция жизненного и научного пути ученого, приведено генеалогическое древо рода Шестаковых, описан архив ученого.

Для логиков, математиков, физиков, инженеров и историков науки, интересующихся историей возникновения отечественной логической теории релейно-контактных и вообще дискретных схем, а также общей проблемой взаимоотношения логики и техники.

Книгу можно заказать по e-mail: f_os@pgta.ru.