

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ НА ЭТАПЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА<sup>1</sup>

С.А. Федосеев, М.Б. Гитман, В.Ю. Столбов

Рассмотрен один из возможных подходов к управлению качеством продукции путем более точного учета интересов потребителей на этапе планирования производства. Предложены модели формирования оптимального портфеля заказов с учетом их важности и составления главного календарного и операционного планов производства, снижающих риски нарушения сроков поставки продукции.

**Ключевые слова:** качество продукции, модели управления качеством, планирование производства, дискретная оптимизация.

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие *качества продукции* в своем развитии претерпевало ряд изменений. На первом этапе (первая половина XX в.) доминирующим критерием была *цена*, т. е. количество денег, в обмен на которые продавец готов продать, а покупатель согласен купить единицу товара [1]. В этот период сложился *первый* подход к определению качества, закономерно отражающий представления производителей. Согласно данному подходу качество рассматривалось как *соответствие требованиям спецификаций*, составленных самими производителями [2], и качество тем выше, чем меньше у продукта отклонений от заданных технических характеристик и состава изделия. При этом предполагается, что технические характеристики и состав изделия производитель определил правильно.

По мере насыщения рынка и повышения жизненного уровня стало появляться растущее количество потребителей, готовых заплатить большую цену за более качественный продукт (второй этап). В таких условиях производители вынуждены были повышать качество выпускаемых изделий, что неизбежно сопровождалось соразмерным ростом цен. Такая ситуация была характерна для мировой

экономики в 1960-е гг. В это время сформировался *второй* подход, определяющий *экономически оптимальное* качество [2] и учитывающий взаимосвязь между качеством и затратами на его достижение.

Начиная с 1970-х гг. и по настоящее время (третий этап), производители конкурируют друг с другом именно в условиях, характерных для так называемого *рынка потребителя*. Вполне естественно, что далеко не все требования потребителей могут быть выполнены в силу реально существующих физических или технологических ограничений, а также в силу того, что результат может получиться чрезвычайно дорогим. Но чтобы выжить на рынке потребителя производители вынуждены обеспечивать максимальное соответствие своих продуктов его запросам, оставаясь при этом, как минимум, в рамках существующих рыночных цен, а в идеале уменьшая верхние границы имеющихся ценовых ограничений. В этих условиях сформировался *третий* подход, определяющий качество как *соответствие требованиям потребителей* [2] и в соответствии с которым качество — это степень, с которой продукт удовлетворяет установленным или предполагаемым требованиям покупателя. Такой подход подразумевает, что требования покупателей можно идентифицировать и четко описать. Это особенно важно на этапе *проектирования* продукта, так как в противном случае требования покупателей в принципе невозможно претворить в жизнь.

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-08-00539а, и при государственной поддержке развития кооперации вузов и промышленных предприятий, договор с Минобрнауки России № 13.G25. 31.0093.



Понимание производителями того, что их основная цель — производство продукции, удовлетворяющей не их внутренним требованиям, а внешним запросам потребителей, породило необходимость в определениях качества, выражающих одновременно интересы и производителей, и потребителей. Отметим, что производство может влиять на проектирование товаров для того, чтобы обеспечить выполнение спецификаций. Однако за несоответствие спецификации требованиям рынка вряд ли можно винить производство. Преобладание интересов потребителей зафиксировано и в определении качества, данном в стандарте ISO 9000:2000 [3]:

«*Качество* — это степень соответствия реально существующих у продукта характеристик тем требованиям или ожиданиям потребителей, которые заявлены, обычно предполагаются или являются обязательными».

Таким образом, развитие экономики привело к тому, что доминирующим критерием при выборе товаров и услуг стало качество, определяемое как соответствие требованиям или ожиданиям потребителей. Цена как критерий выбора сохранилась, но ее влияние существенно уменьшилось. Отметим, что именно на третьем этапе пересеклись методы управления качеством и методы управления производством, направленные на максимально полное удовлетворение требований и ожиданий потребителей, что нашло свое выражение в основных составляющих и принципах TQM [3].

Современное понимание качества (четвертый этап) определяется степенью соответствия продук-

ции следующим *требованиям потребителей: ноль дефектов, точно в заданный срок, минимальная стоимость, максимальная полезность, максимальная безопасность*.

Включение в понятие качества продукции сроков ее поставки потребителю и минимальной ее стоимости обуславливают необходимость добавления к основным процессам, влияющих на качество продукции, процесса планирования производства.

## 1. ПРОЦЕССНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ

В современных условиях эффективность менеджмента качества в значительной степени зависит от применяемых на предприятии методов общего менеджмента и, в частности, методов управления качеством продукции. Следовательно, управление качеством продукции может быть рассмотрено как совокупность процессов системы менеджмента качества предприятия, представленных на рис. 1.

К основным процессам системы управления качеством продукции можно отнести следующие: проектирование продукции, планирование производства, производство продукции, контроль ее качества и управление дефектной продукцией. В отличие от традиционной процессной модели, в приведенной схеме в качестве основного процесса присутствует процесс планирования производства продукции.

Следует отметить большую роль потребителей, которые влияют как на процессы проектирования

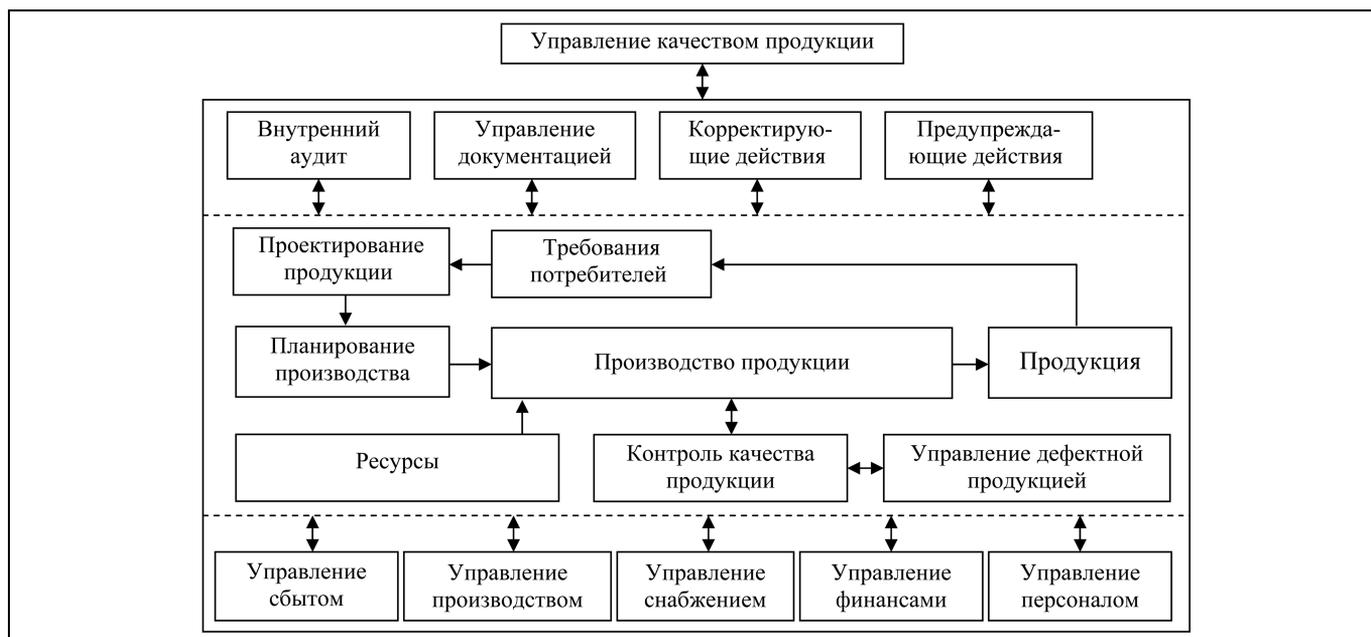


Рис. 1. Процессы системы управления качеством продукции



Рис. 2. Схема процесса планирования производства с учетом требований потребителей

и планирования продукции, так и на процесс оценки качества готовой продукции. Другими словами, в рамках приведенного современного определения качества продукции, потребители следят не только за отсутствием дефектов, но и контролируют к срокам и стоимости выполнения заказа на продукцию. Очевидно, что требования потребителей к срокам и стоимости выполнения заказа должны учитываться в процессе планирования производства. Перейдем к более детальному рассмотрению процесса планирования производства с учетом требований потребителей (рис. 2).

При планировании производства на стратегическом и тактическом уровнях осуществляется переход от долгосрочного плана производства к главному календарному плану производства (ГКПП) и, в конечном итоге, к операционному планированию с учетом всех ограничений на производственные мощности и ресурсы предприятия, а также требований рынка сбыта продукции и основных внешних заказчиков. В настоящее время большинство крупных предприятий стремится перейти к работе «под заказ», что резко снижает риски предприятия. В этом случае реализуется в большей степени правая часть схемы (см. рис. 2). При этом резко возрастает роль планирования производства, которое и позволяет учесть основные требования и

пожелания заказчиков на качество продукции, включая ее стоимость и сроки изготовления.

Основной участник процесса планирования производства — лицо, принимающее решения (ЛПР), под которым понимается индивидум или группа индивидумов, имеющих право принимать окончательные решения по выбору управляющих воздействий. Именно от ЛПР зависит эффективность решений задач управления.

В настоящей статье рассматривается модель планирования производства на базе имеющихся заказов на определенный срок. Реализация данной модели сводится к решению четырех связанных задач — задачи формирования оптимального портфеля заказов, нахождения оптимального объемного плана производства, составления ГКПП и операционного плана производства.

Первоначально рассмотрим задачи формирования оптимального портфеля заказов и нахождения оптимального объемного плана производства.

## 2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАКАЗОВ С УЧЕТОМ ВАЖНОСТИ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Пусть на предприятии имеется некоторое множество заказов, которое необходимо выполнить за определенный срок. Разобьем все заказы на отгрузочные партии (ОП). Цель данной модели заклю-



чается в формировании оптимального набора заказов, элементами которого служат отгрузочные партии и который позволяет получить наибольшую прибыль и при этом удовлетворить требованиям наибольшего числа «важных» заказчиков.

Пусть при этом имеются  $N$  отгрузочных партий,  $M$  типов оборудования и  $K$  отслеживаемых материалов. Введем булевый вектор  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  — вектор неизвестных, который и будет определять состав набора заказов. Каждая компонента вектора  $y_i$  определяет включение  $i$ -й ОП в портфель заказов и может принимать только значения 0 или 1, т. е.:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{— данная ОП не включена в портфель} \\ & \text{заказов,} \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть заданы:  $\gamma$  — период перепланирования;  $c_{ij}^*$  — себестоимость единицы продукции  $j$ -й позиции в  $i$ -й ОП;  $c_{ij}$  — цена продажи единицы продукции;  $q_{ij}$  — объем заказа;  $D_{ij}^{\text{вып}}$  и  $d_{ij}$  — дата поставки клиенту и длительность производства продукции  $j$ -й позиции в  $i$ -й ОП соответственно.

Требования на сроки изготовления будем учитывать с помощью функции штрафа  $F_i$  (за нарушение сроков выполнения  $i$ -й позиции заказа);  $d_{ij}^B = D_{ij}^{\text{вып}} - D$  — срок до поставки продукции клиенту, где  $D$  — начальная дата.

Тогда критерий прибыльности набора заказов можно определить следующим образом:

$$\sum_i y_i \sum_j q_{ij} (c_{ij} - c_{ij}^*) - (1 - y_i) F_i(d_{ij}^B, \gamma) \rightarrow \max. \quad (1)$$

Для учета важности потребителя и его заказа введем две вспомогательные функции:  $V_{ij}$  — важность производства в срок  $j$ -й позиции в  $i$ -й ОП;  $W_i$  — важность клиента, оформившего заказ на  $i$ -ю ОП.

В этом случае критерий важности заказа можно представить следующим образом:

$$\sum_i y_i W_i \max_j (V_{ij}) \rightarrow \max. \quad (2)$$

В качестве ранжирования по важности клиентов и заказов можно использовать следующие интервалы:  $W_i \in [1...10]$ ,  $V_{ij} \in [1...2]$ . Внутри этих интервалов возможно произвольное ранжирование, которое, например, принято на предприятии. Если такого нет, то в качестве ранжирования важности позиции можно принять следующую шкалу: 2 —

очень важно; 1,75 — важно; 1,5 — нейтрально; 1,25 — не важно; 1 — совсем не важно.

Пусть также считаются известными:

потребность в мощностях каждого типа оборудования для каждой ОП:  $R_{ji}, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, N}$ , рассчитываемая на основе технологических маршрутов производства;

потребность в ключевых материалах для каждой ОП:  $S_{ki}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, N}$ , рассчитываемая на основе спецификации изделий;

общий ресурс в мощностях для каждого типа оборудования  $P_j, j = \overline{1, M}$ , найденный из расчета средней производительности по всему оборудованию данного типа;

объем доступных ключевых материалов  $L_k, k = \overline{1, K}$ , определенный на основе данных о состоянии склада, данных по возможным заменам материалов и плана закупок;

$\Gamma$  — горизонт планирования, т. е. временной промежуток, который кратен интервалу планирования и на который формируется портфель заказов;

$\bar{C}$  — оборачиваемость средств за период времени  $T$ ;

$D_i^{\text{вып}}$  — временной интервал от момента начала производства формируемого портфеля заказов до требуемой даты выпуска ОП.

$c_i^+$  — стоимость дорогостоящих материалов на единицу продукции для  $i$ -й ОП.

Тогда постановка задачи формирования оптимального портфеля заказов может быть записана в следующем виде: найти вектор  $\bar{y}$ , который бы доставлял максимум критериям (1) и (2) при ограничениях на:

производственные мощности:

$$\sum_{i=1}^N R_{ji} y_i \leq P_j, \quad j = \overline{1, M}; \quad (3)$$

ключевые материалы:

$$\sum_{i=1}^N S_{ki} y_i \leq L_k, \quad k = \overline{1, K}; \quad (4)$$

оборотные средства:

$$\sum_{i=1}^N c_i^+ y_i \leq \frac{\Gamma \bar{C}}{T}; \quad (5)$$

даты выпуска продукции:

$$y_i D_i^{\text{вып}} \in [0; 2\Gamma + \gamma], \quad i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Последнее ограничение вспомогательное и позволяет сузить перечень рассматриваемых заказов.

Верхняя граница интервала равна  $2\Gamma + \gamma$  исходя из предположения, что

- любой элемент должен быть запущен в производство в течение временного промежутка  $\Gamma$ ;
- имеет длительность производственного цикла любого элемента, не превышает  $\Gamma$ ;
- фактический выпуск элемента может быть смещен на интервал планирования  $\gamma$ .

Задача (1)—(6) представляет собой двухкритериальную многопараметрическую задачу нелинейного программирования в булевых переменных с большим числом ограничений. Для ее решения эффективен метод стохастического поиска [4]. Решением задачи будет Парето-множество. Пример решения приведен в статье [5].

Как показали исследования, на некоторых предприятиях не учитывается важность потребителей, что приводит к снижению качества продукции (из-за невыполнения сроков ее изготовления), а в долгосрочной перспективе — к потере важных заказчиков.

Предложенный подход к формированию портфеля заказов позволяет сформировать объемный план производства с учетом требований потребителя. Однако при формировании ГКПП и операционного плана необходимо сохранить учет потребностей заказчиков к качеству продукции, включая сроки и стоимость продукции.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению данной задачи.

### 3. МОДЕЛЬ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Суть ГКПП состоит в определении номенклатуры и объема продукции, которую необходимо произвести в течение планового периода, а также сроки их изготовления. Формирование ГКПП — важный этап планирования производства. Его несложно сформировать на основании найденного оптимального портфеля заказов.

Спецификации продукции считаются заданными. В результате может быть составлен единый номенклатурный перечень всех *компонентов*, входящих в спецификации, от материалов до готовых изделий, включая полуфабрикаты. В этом перечне каждому компоненту присваивается уникальный номер  $i \in \overline{1, C}$ , где  $C$  — суммарное число уникальных компонентов во всех спецификациях. Номенклатурный перечень должен быть отсортирован таким образом, чтобы вначале располагались *изготавливаемые компоненты* (полуфабрикаты и готовые изделия) с номерами  $1 \leq i \leq N$ ,  $N < C$ , а затем *закупаемые компоненты* (материалы) с номерами  $N < i \leq C$ .

Для описания главного календарного плана производства введем матрицу  $g$ . Ее элементы  $g_{id}$  определяют число номенклатурных единиц (компонентов) с номерами  $i \in \overline{1, N}$ , которые необходимо произвести до дня с номером  $d \in \overline{1, T}$ , где  $T$  — число дней в плановом периоде.

На основании ГКПП на крупных предприятиях строится операционный план производства (ОПП) путем дальнейшего разузлования номенклатурных единиц с помощью некоторой матрицы  $A$ , элементы  $a_{ij}$  которой определяют число номенклатурных единиц (компонентов) продукции с номерами  $i \in \overline{1, C}$ , необходимых для производства номенклатурных единиц с номерами  $j \in \overline{1, N}$ .

Пусть считается заданным вектор  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_C)$ , где  $r_i$  — остаток  $i$ -го компонента на цеховых складах на начало планового периода,  $i \in \overline{1, C}$ . Введем вектор  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ , где  $n_i$  — число запланированных технологических этапов вида  $i \in \overline{1, N}$ . Компоненты вектора  $\bar{n}$  могут быть найдены по формуле:

$$n_i = \sum_{d=1}^T g_{id} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} n_j - r_i.$$

Для каждого технологического этапа определен набор технологических операций (далее операции), которые должны быть выполнены, чтобы технологический этап считался завершенным. Технологическая операция содержит информацию о рабочем центре, на котором она должна быть совершена, а также нормы времени для подготовки и обработки. Таким образом, определен вектор  $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ , где  $w_i$  — число операций в технологическом этапе  $i \in \overline{1, N}$ .

Вид операции определяется следующим набором данных: номер операции, номер номенклатурной единицы, тип рабочего центра, трудоемкость. При таком определении виды операций, выполняемые технически эквивалентно на одном и том же оборудовании, но для разных номенклатурных единиц, считаются различными. Поэтому общее число видов операций можно определить по формуле

$$W = \sum_{i=1}^N w_i.$$

Виды операций пронумеруем индексом  $l \in \overline{1, W}$ . Все операции можно отсортировать по номеру технологического этапа, а затем по номеру операции внутри технологического этапа. Таким образом, первая операция принадлежит первому технологическому этапу и выполняется первой, соответствен-



но вторая операция принадлежит первому технологическому этапу и выполняется второй и т. д.

Введем вектор  $\bar{o} = (o_1, \dots, o_{w_1}, o_{w_1+1}, \dots, o_{w_1+w_2}, \dots, o_w)$ , где  $o_l$  — число операций, которые необходимо выполнить в плановом периоде,  $l \in \overline{1, W}$ . Также введем последовательность чисел  $s_1, \dots, s_N$ , где  $s_i$  определяет значение индекса  $l$  для первой операции  $i$ -го технологического этапа, тогда числа  $s_i$  могут быть определены по формуле

$$s_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ s_{i-1} + w_{i-1}, & i \in \overline{2, N}. \end{cases}$$

Отметим, что значение индекса  $l$  для последней операции  $i$ -го технологического этапа можно определить как  $s_i + w_i - 1$ . Тогда нумерацию компонент вектора  $\bar{o}$  можно представить в виде  $\bar{o} = (o_{s_1}, \dots, o_{s_1+w_1-1}, o_{s_2}, \dots, o_{s_2+w_2-1}, o_{s_3}, \dots, o_w)$ .

Примем, что для каждой операции, входящей в состав технологического этапа  $i$ -го вида,  $o_l = n_p$ , где  $l \in \overline{s_p, s_p + w_i - 1}$ .

Для каждой операции определена трудоемкость, в данной задаче имеющая смысл времени, которое тратит рабочий центр на ее выполнение. Исходя из трудоемкости будет рассчитываться загрузка оборудования и длительность операций технологического этапа при планировании. Введем вектор трудоемкости операций  $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_w)$ , где  $t_l$  — трудоемкость операции  $l$ -го вида, выраженная в рабочих сменах,  $t_l \in [0, 1]$ ,  $l \in \overline{1, W}$ . Пусть вектор  $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_w)$ , где  $e_l \in \overline{1, E}$ ,  $l \in \overline{1, W}$ , определяет, на рабочих центрах какого типа выполняется операция  $l$ -го вида.

В соответствии с изложенными рассуждениями производство продукции представляется последовательностью технологических операций в цехах и переходах между цехами. Известен общий объем операций, которые необходимо оптимальным образом распределить по рабочим сменам и рабочим центрам при соблюдении имеющихся ограничений.

Для описания ОПП введем матрицу  $\mathbf{P}$ . Ее элементы  $p_{ld}$  определяют число операций  $l$ -го вида, запланированных на день с номером  $d$ ,  $l \in \overline{1, W}$ ,  $d \in \overline{1, T}$ , где  $T$  — число дней в плановом периоде, т. е. без нарушения общности предполагается, что предприятие работает в одну смену. Если предприятие работает в две или три смены, то  $T$  будет обозначать число смен в плановом периоде.

Введем матрицу баланса номенклатурных единиц  $\mathbf{B}$ . Ее элементы  $b_{id}$  определяют число номенклатурных единиц с номерами  $i \in \overline{1, C}$ , находящихся на цеховых складах на конец дня с номером  $d \in \overline{1, T}$ , значение индекса  $d = 0$  используется в матрице баланса для определения остатков номенклатурных единиц на начало планируемого периода. Очевидно, что значения элементов матрицы напрямую зависят от плана производства  $\mathbf{P}$  и от начального значения остатков на складе  $\bar{r}$ . Отметим, что эта матрица зависит от ГКПП — в дни, когда запланирован выпуск продукции, со склада автоматически отгружается готовая продукция. Элементы матрицы  $\mathbf{B}$  можно определить следующим образом:

$$b_{id} = \begin{cases} r_i, & i \in \overline{1, C}, d = 0, \\ b_{id-1} + p_{s_i+w_i-1, d} - g_{id} - \sum_{j=1}^N p_{s_j, d} a_{ij}, & \\ i \in \overline{1, N}, d \in \overline{1, T}, & \\ b_{id-1} - \sum_{j=1}^N p_{s_j, d} a_{ij}, & N < i \leq C, d \in \overline{1, T}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь учтено предположение о том, что произведенное количество  $i$ -й номенклатурной единицы совпадает с числом выполнений последней операции  $i$ -го технологического этапа.

Очевидно, что при составлении ОПП должны учитываться следующие ограничения.

- Суммарное число операций одного вида в календарном плане должно быть равно общему числу операций данного вида, которые необходимо выполнить в плановом периоде согласно ГКПП:

$$\sum_{d=1}^T p_{ld} = o_p \quad \text{где } l \in \overline{1, W}. \quad (8)$$

- В каждый из планируемых дней максимальная загрузка рабочих центров не должна превышать максимально возможную:

$$\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk} \leq t_k^* q_k, \quad \text{где } d \in \overline{1, T}, \quad \beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k, \end{cases} \\ l \in \overline{1, W}, \quad k \in \overline{1, E}. \quad (9)$$

- В любой момент времени остаток номенклатурных единиц не может быть отрицательным. Все детали должны быть отгружены в срок, т. е. к моменту, запланированному в ГКПП на складе должны быть остатки:

$$b_{id} \geq 0, \quad \text{где } i \in \overline{1, C}, \quad d \in \overline{1, T}. \quad (10)$$

- В реальных условиях всегда существует возможность срыва плана производства, один из необходимых компонентов может быть произведен позже намеченного срока, что вызовет проблему на следующем этапе и т. д. Эскалация проблем со сроками производства продукции может привести к тому, что в запланированный день ее отгрузки клиенту, она может быть еще не готова. При таком исходе событий крупные убытки практически гарантированы, что недопустимо. Таким образом, при формировании плана производства необходимо учитывать и все возможные риски. Риском срыва плана производства будем называть возможность того, что по тем или иным причинам план производства не будет выполнен в срок.

Основная цель работы предприятия — получение прибыли. В условиях реального предприятия цель решения любой оптимизационной задачи состоит, в конечном итоге, в увеличении прибыли. В данной работе рассматривается возможность увеличения прибыли предприятия путем повышения эффективности производства. Однако эффективность производства может быть определена по-разному. Разные подразделения предприятия (сбыт, поставки, производство) в условиях ограниченности ресурсов преследуют свои цели, часто противоречащие друг другу. Поэтому можно определить множество различных критериев эффективности производства. Эффективность работы предприятия должна быть заложена, в первую очередь, в плане производства, поэтому критерии оптимальности производственного процесса напрямую применимы к плану производства. Однако при планировании производства необходимо учитывать еще и риски возможного несоответствия плана и его будущей реализации.

Введем четыре основных критерия оптимальности ОПП [6].

- Критерий комфортности производства, т. е. календарный план производства должен быть скомпонован таким образом, что операции одного вида запускаются в производство как можно большими партиями. Таким образом, переналадка оборудования не потребует при переходе от одной операции к другой.
- Производство должно быть равномерным, т. е. нагрузка на рабочие центры в течение планового периода должна изменяться постепенно, без резких перепадов.
- Срок выполнения ГКПП должен быть минимальным. При этом ГКПП считается выполненным только в том случае, если все операции завершены, т. е. дата совершения последней операции и будет сроком исполнения всего ГКПП.
- Риск срыва плана производства должен быть минимален. Относительная загрузка оборудо-

вания (суммарная трудоемкость, отнесенная к максимальной загрузке данного типа оборудования), попадающая в  $\tau/2$  области перед отгрузкой готовой продукции, должна быть минимальной (интервал  $\tau/2$  выбран из практических соображений). Здесь  $\tau$  — максимальное опережение плана производства, которое устанавливается экспертами и измеряется в днях. При этом загрузка оборудования в день отгрузки учитывается с коэффициентом 1, за день до отгрузки  $1/2$ , за два дня до отгрузки  $1/3$  и т. д.

С позиций современного понимания качества продукции, в котором важную роль играет выполнение сроков поставки продукции потребителям, на первое место по значимости выходит последний из перечисленных критериев, отвечающий за минимизацию срыва плана производства. Поэтому необходимо учесть важность заказов при выборе оптимального ОПП.

Для этого введем вектор  $\bar{m}$ , характеризующий количество планируемой продукции  $i$ -й номенклатуры с учетом «важности» каждого заказчика. При этом может быть использована информация, полученная при формировании оптимального портфеля заказов.

Построим нечеткое множество  $M = \bigcup_{i=1}^m \mu_i^*/m_i$ ,

где  $\mu_i^*$  — важность  $i$ -й продукции. Для всех определенных  $\alpha$ -уровневых подмножеств нечеткого множества  $M$  можно определить ГКПП, в который включается только продукция, важность которой не менее заданного уровня  $\alpha$ .

Математическая постановка задачи может быть записана в следующем виде: считая заданным совокупность ГКПП, характеризуемую нечетким множеством  $M = \bigcup_{i=1}^m \mu_i^*/m_i$ , требуется определить оптимальный операционный план производства  $\mathbf{P}^*$ , при котором достигается минимум риска срыва плана производства для выполнения в срок наиболее важных заказов и минимум допустимой степени важности номенклатур продукции  $\alpha^*$  для выполнения заказов наибольшего числа потребителей, т. е.

$$J_4 = \sum_{d=1}^T \sum_{d^*=1}^{d^* < \tau/2} \frac{1}{d^*} \chi_d \sum_{l=1}^W \frac{p_{ld-d^*} t_l}{q_{e_l} t_{e_l}} \rightarrow \min,$$

$$\text{где } \chi_d = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^N g_{id} \neq 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^N g_{id} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\alpha^* \rightarrow \min \quad (12)$$



и выполняются ограничения на:

— важность номенклатуры продукции

$$\mu_i^* \geq \alpha^*, \quad i = \overline{1, N}; \quad (13)$$

— комфортность производства

$$J_1 = \sum_{l=1}^W \sum_{d=1}^T \beta_{ld} \leq J_1^*, \quad \text{где } \beta_{ld} = \begin{cases} 1, & p_{ld} \neq 0, \\ 0, & p_{ld} = 0; \end{cases} \quad (14)$$

— равномерность производства

$$J_2 = \sum_{d=1}^{T-1} \sum_{k=1}^E |z_{kd} - z_{kd+1}| \leq J_2^*, \quad \text{где } z_{kd} = \frac{\sum_{l=1}^W p_{ld} t_l \beta_{lk}}{i_k^* q_k},$$

$$\beta_{lk} = \begin{cases} 1, & e_l = k, \\ 0, & e_l \neq k; \end{cases} \quad (15)$$

— срок завершения выполнения ОПП

$$J_3 = \max_{d \in \overline{1, T}} \omega(d) \leq J_3^*,$$

$$\text{где } \omega(d) = \begin{cases} d, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} \neq 0, \\ 0, & \sum_{l=1}^W \sum_{u=d}^T p_{lu} = 0; \end{cases} \quad (16)$$

— остаток компонентов  $i = \overline{1, C}$  в день  $d = \overline{1, T}$  (7);

— суммарное число операций одного вида в календарном плане (8);

— максимальную загрузку рабочих центров (9);

— остаток номенклатурных единиц (10).

Отметим, что для реального производства максимально допустимые значения критериев комфортности  $J_1^*$ ,  $J_2^*$  и  $J_3^*$  должны быть установлены ЛПР.

Задача (11)—(16) с дополнительными ограничениями (7)—(10) представляет собой двухкритериальную многопараметрическую задачу дискретной оптимизации, для решения которой обычно применяются различные эвристические алгоритмы. Особенность ее постановки состоит в наличии в ограничении (13) неизвестной величины  $\alpha^*$ . Одним из возможных методов решения такой задачи может быть сведение двухкритериальной задачи оптимизации к последовательности однокритериальных задач при различных значениях  $\alpha^*$ , постепенно уменьшающихся от 1 до 0 с заданным дискретным шагом. На каждом шаге по  $\alpha^*$  решаются задачи минимизации критерия (11) при ограничениях (7)—(10) и (13)—(16). В результате решения этих частных задач оптимизации находится последовательность оптимальных (по критерию  $J_4$ ) операционных планов производства для уменьшающихся значений  $\alpha^*$  (очевидно, что при  $\alpha^* = 1$  такой план существует). Поиск производится до тех пор,

пока не нарушится ограничение (13). В качестве решения исходной двухкритериальной задачи оптимизации выбирается тот ОПП, который соответствует минимально возможному значению  $\alpha^*$ , при котором выполняются все ограничения задачи. Частные примеры решения данной задачи оптимизации приведены в работах [6, 7], где приведены результаты формирования оптимальных операционных планов производства, позволяющих снизить сроки производства продукции и, тем самым, гарантировать выполнение требований потребителей по поставкам готовой продукции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современном понимании качество продукции определяется степенью ее соответствия требованиям покупателей. Поэтому актуальны исследования, направленные на разработку новых механизмов и инструментов управления производством, позволяющих на этапе планирования производства максимально полно учесть интересы как можно большего числа заказчиков предприятия.

В работе предложены модели формирования планов производства на стратегическом и тактическом уровнях управления, дающие возможность минимизировать риски нарушения сроков поставки продукции для максимального числа покупателей с учетом их важности для предприятия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Салимжанова И.К. Ценообразование: Учебник для вузов. — М.: КноРус, 2010. — 299 с.
2. Производственный менеджмент: Учебник / Под ред. В.А. Козловского. — М.: ИНФРА-М, 2003. — 574 с.
3. Липидус В.А. Всеобщее качество (TQM) в российских компаниях. — М.: ОАО «Типография «Новости»», 2000. — 432 с.
4. Gelfand S.B., Mitter S.K. Simulated annealing with noisy or imprecise energy measurements // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1989. — Vol. 62, N 1. — P. 49–62.
5. Жирнов В.И., Федосеев С.А., Азарков А.И. Модель управления заказами в рамках единой информационной системы предприятия // Проблемы управления. — 2007. — № 6. — С. 57–63.
6. Федосеев С.А., Вожаков А.В., Гитман М.Б. Модель календарного планирования производства с нечеткими целями и ограничениями // Системы управления и информационные технологии. — 2009. — № 3. — С. 21–24.
7. Вожаков А.В., Гитман М.Б., Федосеев С.А. Комплексное оценивание при выборе оптимального плана производства на тактическом уровне с учетом нечетких критериев и ограничений / Управление большими системами. — 2010. — Вып. 30. — С. 164–179.

Статья представлена к публикации руководителем РРС А.К. Погодаевым.

**Федосеев Сергей Анатольевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент,  
✉ fsa@gelicon.biz,

**Гитман Михаил Борисович** — д-р физ.-мат. наук, профессор,  
✉ gmb@matmod.pstu.ac.ru,

**Столбов Валерий Юрьевич** — д-р техн. наук, профессор,  
✉ svu@matmod.pstu.ac.ru,

Пермский государственный технический университет.