УДК 622.276.1

ОПТИМИЗАЦИЯ И ВЫБОР СИСТЕМ РАЗРАБОТКИ ГРУППЫ ЗАЛЕЖЕЙ НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

А.И. Ермолаев, А.В. Ахметзянов, О.С. Гребенник

Предложены постановки задач оптимизации и выбора систем разработки нефтяного или газового месторождения, состоящего из нескольких изолированных залежей, связанных ограничением по ресурсам или общим планом по добыче нефти или газа, разработаны алгоритмы их решения. Обозначены перспективные варианты многоуровневой декомпозиции резервуаров месторождений в целях разработки эффективных методов решения задач рассматриваемого типа.

Ключевые слова: выбор системы разработки, задача оптимизации, оптимальное распределение ограниченного ресурса, группа залежей нефти и газа.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается предпроектная стадия технико-экономического обоснования разработки нескольких залежей нефти (газа), связанных либо ресурсными ограничениями, либо требованиями к суммарным объемам добычи. Необходимость в анализе и оптимизации разработки взаимосвязанных залежей возникает, например, если залежи принадлежат одной нефтегазодобывающей компании. Поэтому компания заинтересована в получении наилучших результатов не по отдельной залежи, а по всей группе в целом. В этом случае для технико-экономического обоснования требуется выбрать наилучшую систему (технологию) разработки, провести оптимизацию технологических параметров для каждой залежи и распределить ресурсы между залежами.

Разные технологии в разных природных условиях и при разных значениях технологических параметров требуют разных затрат ресурсов и обеспечивают разные уровни добычи. Поэтому, с одной стороны, выбрать рациональные технологии возможно лишь при известных значениях технологических параметров каждой залежи. С другой стороны, выбор оптимальных значений технологических параметров для каждой залежи возможен лишь при известном распределении ресурсов и технологий (систем разработки) по залежам. Это означает, что объемы ресурсов, значения технологических параметров и номера выбранных технологий, т. е. основные характеристики, определяющие варианты разработки, должны представлять собой компоненты вектора, который является решением единой задачи оптимизации.

Применяемые в настоящее время алгоритмы формирования и выбора вариантов разработки группы залежей в значительной мере не соответствуют указанному требованию. С их помощью или определяются оптимальные значения технологических параметров для каждой залежи при заданном распределении технологий по залежам, или определяется оптимальное распределение технологий при заданных значениях технологических параметров на каждой залежи. Это приводит, в конечном итоге, к выбору вариантов разработки залежей, обладающих низкими значениями технико-экономических показателей эффективности систем разработки.

Далее предлагается подход, основанный на применении моделей и методов частично-целочисленного программирования, в существенной степени свободный от указанных недостатков. Возможности этого подхода демонстрируются на примере решения двух задач, связанных с формированием предпроектных вариантов разработки залежей углеводородов, что позволяет перейти к стадии технико-экономического обоснования их освоения.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ ПО ЗАЛЕЖАМ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Рассмотрим задачу оптимизации и выбора систем разработки по группе залежей, связанных общим планом по добыче. Это означает, что, в данном случае, под общим ресурсным ограничением понимается выполнение требования к суммарному по всем залежам объему накопленной добычи нефти. Под залежами будем понимать отдельные нефтеносные пласты многопластового месторождения при их раздельной эксплуатации.

Рассматривается стратегия разработки залежей, соответствующая постоянным отборам жидкости из пласта в единицу времени. Предполагается, что для каждой залежи задан перечень исходных предварительных вариантов разработки, содержащих неполные наборы технологических параметров. Варианты отличаются друг от друга дебитами добывающих и нагнетательных скважин, их числом и взаимным расположением (схемой размещения скважин и системой заводнения), т. е., по существу, определяются технологией разработки. Таким образом, для j-й залежи, $j = \overline{1, J}$, i-й вариант (технология), $i = \overline{1, I}$, представляет собой набор $\{m_{ij}, n_{ij}, q_{ij}^o, q_{ij}^w\}$, в котором m_{ij} — число добывающих, а n_{ij} — число нагнетательных скважин, q_{ij}^o — дебит по жидкости одной добывающей скважины, а q_{ij}^w — дебит одной нагнетательной скважины. Будем предполагать, что значения дебитов скважин, их число и расположение в каждом из вариантов выбраны с учетом взаимовлияния скважин. Рассмотрим водонапорный режим дренирования залежей, при котором приближенно выполняется балансовое соотношение

$$m_{ij}q_{ij}^o = n_{ij}q_{ij}^w. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, исследованный в работе [1], когда необходимо учитывать тот факт, что функция Баклея—Леверетта $f(\cdot)$, определяющая долю нефти в добываемой жидкости, может зависеть не только от $Q(t)$ — объема накопленной добычи нефти за период $[0, t]$, но и от числа и схемы размещения скважин. Тогда агрегированная модель разработки j-й залежи i-м вариантом принимает вид:

$$dQ_j/dt = q_j^l(t)f_{ij}(Q_j), \quad 0 \leqslant Q_j(t) \leqslant Q_{ijk}, \quad Q_j(0) = 0, \quad (2)$$

где $q_j^l(t)$ — отбор жидкости в единицу времени из j-й залежи (суммарный дебит по жидкости всех добывающих скважин, равный суммарной закачке реагента на всех нагнетательных скважинах), Q_{ijk} — максимально возможная добыча нефти на j-й залежи при ее разработке i-м вариантом.

В качестве критерия оптимальности примем минимум накопленной добычи жидкости со всех залежей. С учетом сделанных замечаний задачу оптимизации и выбора систем разработки сформулируем следующим образом: найти такие объемы добычи нефти и жидкости, срок разработки и вариант разработки каждой залежи из группы, которые обеспечат минимум суммарной добычи жидкости со всех залежей при выполнении требования к суммарной добыче нефти.

Для математической формулировки задачи введем обозначения. Пусть Q — задание по накопленной добыче нефти со всех залежей, причем из соображений минимизации рисков

$$Q \leqslant \sum_{j=1}^{J} \min_i \{Q_{ijk}\}.$$

Пусть $Q_j(t)$ — объем накопленной добычи нефти за период $[0, t]$ на j-й залежи, $Q_j(0) = 0$, а $f_{ij}(Q_j)$ — доля нефти в добываемой жидкости при разработке j-й залежи i-м вариантом.

Введем искомые переменные: T_j — срок разработки j-й залежи; x_j — отбор жидкости из j-й залежи за весь срок ее разработки; $z_j = Q_j(T_j)$ — объем накопленной добычи нефти за период $[0, T_j]$ на j-й залежи. Кроме этих непрерывных переменных z_j, x_j, T_j $(j = \overline{1, J})$, введем булевы переменные:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если для } j\text{-й залежи выбран } i\text{-й вариант,} \\ 0 \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

Теперь с учетом выражения (2) сформулированная задача принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{J} x_j \to \min_{x, y, z}, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{J} z_j \geqslant Q, \quad (4)$$

$$dQ_j/dt = x_j \sum_{i=1}^{I} y_{ij} f_{ij}(Q_j)/T_j, \quad Q_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, J}, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}, \quad (6)$$

$$z_j = Q_j(T_j), \quad z_j \leqslant \sum_{i=1}^{I} y_{ij} Q_{ijk}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (7)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}. \quad (8)$$

Соотношения (5)—(8) позволяют выразить переменные x_j через другие переменные по формуле:

$$x_j = \int_0^{z_j} dz / \sum_{i=1}^{I} y_{ij} f_{ij}(z) = \sum_{i=1}^{I} y_{ij} \int_0^{z_j} dz/f_{ij}(z). \qquad (9)$$

Пусть

$$\psi_{ij}(z_j) \equiv \int_0^{z_j} dz/f_{ij}(z). \qquad (10)$$

Тогда с учетом формул (6), (8)—(10), а также, что $f_{ij}(z) \geqslant 0$ при $z \geqslant 0$, исходная задача (3)—(8) преобразуется к виду:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} y_{ij} \psi_{ij}(z_j) \to \min_{y,\, z}, \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} y_{ij} z_j \geqslant Q, \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}, \qquad (13)$$

$$0 \leqslant z_j \leqslant \sum_{i=1}^{I} y_{ij} Q_{ijk}, \quad y_{ij} \in \{0, 1\},$$
$$i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}. \qquad (14)$$

Для приближенного решения полученной задачи (11)—(14) можно применить алгоритм, подробное описание и обоснование которого дано в работе [1]. На n-й итерации алгоритма необходимо выполнить следующие операции.

Шаг 1. Для каждой пары индексов (i, j) решается задача со строго выпуклой функцией цели (так как $f_{ij}(\cdot)$ — убывающая функция)

$$\varphi_{ijn}(z_j) \equiv \psi_{ij}(z_j) - \xi_n z_j \to \min \qquad (15)$$

и ограничением

$$0 \leqslant z_j \leqslant Q_{ijk}. \qquad (16)$$

Функция $\psi_{ij}(z_j)$ выражается формулой (10), а $\xi_n \geqslant 0$ — значение штрафного коэффициента (множителя Лагранжа) на n-й итерации (выбор коэффициента ξ_n рассмотрен далее). Задача (15), (16) должна быть решена для каждого индекса j, т. е. отдельно для каждой залежи, и каждого индекса i. Пусть s_{ijn} — оптимальное решение задачи (15), (16). Тогда

$$s_{ijn} = \begin{cases} 0, z_{ij}^{o} < 0, \\ z_{ij}^{o}, 0 \le z_{ij}^{o} \le Q_{ijk}, \\ Q_{ijk}, z_{ij}^{o} > Q_{ijk}, \end{cases}$$

где z_{ij}^{o} — корень уравнения $1 - \xi_n f_{ij}(z_{ij}^{o}) = 0$.

Из этого уравнения следует, что в данной задаче множитель Лагранжа имеет смысл величины, обратно пропорциональной доли нефти в добываемой жидкости. Так как $f(\cdot)$ — убывающая функция, то из последнего уравнения следует, что, с увеличением ξ_n будет увеличиваться и z_{ij}^{o}, а, следовательно, и s_{ijn}. Поэтому увеличение ξ_n приведет в итоге к выполнению ограничения (12).

Шаг 2. Определяется набор $\{y_{ijn}\}$ — n-е приближение к оптимальному решению по булевым переменным:

$$y_{ijn} = \begin{cases} 1, c_{ijn} = \min\limits_{1 \le l \le I}\{c_{ljn}\}, \\ 0, c_{ijn} > \min\limits_{1 \le l \le I}\{c_{ljn}\}, \end{cases}$$

где $c_{ljn} \equiv \varphi_{ljn}(z_{ljn})$, $l \in \{1, ..., I\}$, $j = \overline{1, J}$, $n = 1, 2, ...$

Если в j-м столбце матрицы $\{c_{ijn}\}_{I \times J}$ окажется несколько c_{ijn} таких, что $c_{ijn} = \min\limits_{1 \le l \le I}\{c_{ljn}\}$, то один из таких элементов, например, соответствующий наименьшему значению $\psi_{ij}(z_{ijn})$, принимается за минимальный элемент j-го столбца матрицы $\{c_{ijn}\}_{I \times J}$, чтобы выполнить ограничения (13).

Шаг 3. Определяются z_{jn} — n-е приближения по непрерывным переменным

$$z_{jn} = \sum_i y_{ijn} s_{ijn}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Шаг 4. Проверяется выполнение ограничения (4) для набора $\{z_{in}\}$. Если это ограничение выполнено, то необходимо перейти к шагу 5 алгоритма. В ином случае необходимо перейти к шагу 6.

Шаг 5. Проверяется выполнение условия оптимальности допустимого решения $\{z_{ijn}, y_{ijn}\}$:

$$d_n = Q, \qquad (17)$$

где $d_n \equiv \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} y_{ijn} z_{ijn}$.

Если равенство (17) выполнено, то наборы $\{z_{ijn}, y_{ijn}\}$, как показано в работе [2], являются оптимальным решением задачи (11)—(14). На этом все вычислительные операции заканчиваются. В ином случае необходимо перейти к шагу 6.

Шаг 6. Определяется значение штрафного коэффициента ξ_{n+1} по правилу, указанному в работе [2]:

$$\xi_{n+1} = \max\{0, \xi_n + \theta_{n+1}(Q - d_n)\},$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_n \theta_n = \infty$, $\theta_n > 0$, $\theta_n \to 0$.

После этого следует положить $n \equiv n + 1$ и вернуться к шагу 1. Кроме выполнения условия оптимальности, другим правилом остановки итерационной процедуры может служить выполнение для допустимого решения $\{z_{jn}, y_{jn}\}$, например, неравенства:

$$|F_n - F_{n-1}| \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

где F_n и F_{n-1} — значения функции цели (11) на n-й и $(n - 1)$-й итерациях.

Итак, пусть оптимальное (или приближенное) решение задачи (11)—(14) обозначено через наборы $\{z_j^*\}$, $\{y_{ij}^*\}$. Тогда m_j^* — число добывающих и n_j^* — число нагнетательных скважин для j-й залежи, а также дебит q_j^o по жидкости одной добывающей скважины и дебит q_j^w одной нагнетательной скважины будут определяться из выражений:

$$m_j^* = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* m_{ij}^*, \quad n_j^* = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* n_{ij}^*, \qquad (18)$$

$$q_j^o = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* q_{ij}^o, \quad q_j^w = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* q_{ij}^w. \qquad (19)$$

Объем добычи жидкости x_j^* за весь срок разработки j-й залежи получим по формуле (9):

$$x_j^* = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* \int_0^{z_j^*} dz/f_{ij}(z). \qquad (20)$$

Откуда T_j^* — срок разработки j-й залежи будет вычисляться по формуле (см. соотношение (1)):

$$T_j^* = x_j^*/m_j^* q_j^o = x_j^*/n_j^* q_j^w. \qquad (21)$$

Исходя из найденных значений m_j^*, q_j^w, $j = \overline{1, J}$, можно для каждой залежи построить $Q_j(t)$ — зависимость накопленной добычи нефти от времени. Для этого одним из известных численных или аналитических способов при $t \in [0, T_j]$ необходимо решить дифференциальное уравнение, подобное уравнению (2):

$$dQ_j/dt = q_j^l(t) f_j(Q_j(t))$$

с учетом условий $Q_j(0) = 0$, $Q_j(t) \leqslant Q_{jk}$, где $q_j^l(t) = m_j^* q_j^o$,

$$f_j(Q_j(t)) = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* f_{ij}(Q_j(t)),$$

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^{I} y_{ij}^* Q_{ijk}.$$

Кроме этого, можно построить $q_j^o(t)$ — зависимость от времени суммарного дебита нефти всех добывающих скважин, которая в соответствии с моделью (2) имеет вид $q_j^o(t) = q_j^l(t) f_j(Q_j(t))$.

Таким образом, решение задачи (3)—(8) позволяет не только выбрать для каждой залежи наилучший вариант ее разработки, но и дополнить этот вариант рациональными значениями объемов добычи нефти и жидкости за весь срок и на каждый год разработки. Тем самым расширяется объем исходной проектной информации, что способствует принятию более обоснованных решений по выбору систем разработки группы взаимосвязанных по добыче залежей нефти.

Отметим также, что при использовании модели (3)—(8) можно учесть случай, когда какую-либо залежь не следует разрабатывать. Например, если в оптимальном решении $z_r^* = 0$, то это означает, что в разработке r-й залежи нет необходимости. Если же для оптимального решения есть возможность расчета прибыли от разработки группы залежей, то ее отрицательное значение указывает на то, что при использованных значениях цены на нефть (и/или стоимости оборудования) задание по суммарной накопленной добыче нефти завышенное.

Остановимся на «мотивах» применения минимума суммарной добычи жидкости со всех залежей в качестве критерия эффективности (3). Такой выбор оправдан тем, что минимум накопленной добычи жидкости соответствует, во многих случаях, минимуму затрат на эксплуатацию объектов добычи нефти. Кроме этого, при его использовании не требуется знать значения экономических нормативов, получение которых, в некоторых случаях, крайне затруднено. Задача (15)—(21) решается на предпроектной стадии. Ее решение может быть реализовано только через некоторый промежуток времени. При использовании вместо функции цели (15) какого-либо экономического показателя возникает необходимость в учете и прогнозировании цены на нефть, затрат на основные технологические операции, стоимости технических средств на момент реализации проекта по разработке группы залежей, что представляет собой сложную проблему. Ошибки в оценке значений этих параметров могут привести к принятию нерациональных проектных решений.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОБЫЧИ ГАЗА ПО ЗАЛЕЖАМ ГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Перейдем к исследованию возможностей предложенных алгоритмов в решении задач оптимизации и выбора систем разработки газовых залежей. В качестве показателя эффективности систем разработки выберем объем суммарной добычи газа со всех залежей за плановый период T. В качестве ограничения по ресурсам, связывающего залежи между собой, рассмотрим ограничение на допустимый размер суммарных затрат b, выделяемых на разработку всех залежей в течение планового периода. Как и в предыдущей задаче, будем считать, что по каждой залежи задан перечень предварительных вариантов разработки, которые можно рассматривать в качестве технологий разработки. Каждый вариант содержит неполный список технологических параметров. Варианты (технологии) отличаются друг от друга значениями максимально допустимой депрессии на пласт, минимально допустимым устьевым давлением, диаметром насосно-компрессорных труб, т. е. отличаются типом применяемого скважинного оборудования. Нагнетательные скважины, что типично для разработки газовых залежей, отсутствуют.

Задача формулируется следующим образом: для каждой залежи найти такие объем добычи газа, число скважин и вариант разработки, которые обеспечат максимальную суммарную по всем залежам добычу газа за плановый период при выполнении ограничения на суммарные затраты.

Введем обозначения переменных: z_j — конечная газоотдача на j-й залежи, $j = \overline{1, J}$; x_j — число скважин на j-й залежи, постоянное во времени (рассматривается мгновенный ввод скважин);

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если для } j\text{-й залежи выбран } i\text{-й вариант,} \\ 0 \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

Введем обозначения исходных параметров: V_j — балансовые запасы j-й залежи; η_{ijk} — предельное значение конечной газоотдачи для j-й залежи при i-м варианте ее разработки.

Предположим, что зависимость затрат на разработку каждой залежи в каждом варианте можно считать линейной: $g_{ij}(x_j) \equiv (\alpha_{ij}^b + \alpha_{ij}^o T)x_j + \beta_{ij}$, где α_{ij}^b — затраты на строительство одной скважины, α_{ij}^o — затраты на обслуживание в единицу времени одной скважины для j-й залежи при i-м варианте ее разработки, β_{ij} — условно-постоянные затраты, не зависящие от числа скважин. Будем считать, что

$$\sum_{j=1}^{J} \max_i \{\beta_{ij}\} < b.$$

Пусть $\alpha_{ij} \equiv \alpha_{ij}^b + \alpha_{ij}^o T$. Будем предполагать, что взаимовлиянием скважин можно пренебречь. Учитывая более редкие сетки скважин, при которых разрабатываются газовые залежи, по сравнению с нефтяными месторождениями, такое допущение вполне оправдано на стадии предварительных проектных расчетов. В качестве модели разработки газовой залежи можно воспользоваться предложенной в работе [1] агрегированной моделью, аналогичной модели (2) для нефтяной залежи:

$$V_j d\eta_j/dt = x_j q_{ij}(\eta_j(t)), \quad 0 \leqslant \eta_j(t) \leqslant \eta_{ijk}, \quad \eta_j(0) = 0,$$

где $\eta_j(t)$ — текущее значение газоотдачи на j-й залежи, $q_{ij}(\eta_j(t))$ — зависимость дебита одной скважины от газоотдачи для j-й залежи при i-м варианте ее разработки (вид этой функции можно найти в работе [1]).

Учитывая, что число скважин на залежи принимает большие значения, отбросим условие целочисленности x_j, заменив его, как обычно, неравенством $x_j \geqslant 0$. Тогда математическая формулировка поставленной задачи принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{J} V_j z_j \to \max_{x, y, z}, \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} (\alpha_{ij} x_{ij} + \beta_{ij}) y_{ij} \leqslant b, \tag{23}$$

$$V_j d\eta_j/dt = x_j \sum_{i=1}^{I} q_{ij}(\eta_j(t)) y_{ij}, \quad \eta_j(0) = 0, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}, \tag{25}$$

$$z_j = \eta_j(T), \quad 0 \leqslant z_j \leqslant \sum_{i=1}^{I} y_{ij}\eta_{ijk}, \quad j = \overline{1, J}, \tag{26}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \tag{27}$$

где через $\eta_j(t)$ обозначено текущее значение газоотдачи на j-й залежи, а через $q_j(\eta_j(t))$ — зависимость дебита скважины от $\eta_j(t)$.

Выразим x_j через остальные искомые переменные, воспользовавшись уравнениями (24) и условиями (25) и (27):

$$x_j = \frac{V_j}{T} \int_0^{z_j} \frac{d\eta}{\sum_{i=1}^{I} y_{ij} q_{ij}(\eta)} = \frac{V_j}{T} \sum_{i=1}^{I} y_{ij} \int_0^{z_j} \frac{d\eta}{q_{ij}(\eta)}. \tag{28}$$

Подставим формулу (28) в ограничение (23):

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \left\{ \alpha_{ij} \frac{V_j}{T} \left[\sum_{m=1}^{I} y_{mj} \int_0^{z_j} \frac{d\eta}{q_{mj}(\eta)} \right] + \beta_{ij} \right\} y_{ij} \leqslant b. \tag{29}$$

Преобразуем полученное соотношение к виду:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \left\{ \alpha_{ij} \frac{V_j}{T} \left[\sum_{m=1}^{I} y_{mj} \int_0^{z_j} \frac{d\eta}{q_{mj}(\eta)} \right] + \beta_{ij} y_{ij} \right\} \leqslant b.$$

Поскольку из ограничений (25), наложенных на булевы переменные, следует, что

$$y_{ij}y_{mj} = \begin{cases} 1, m = i, \\ 0, m \neq i, \end{cases}$$

то, формулу (29) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left\{\alpha_{ij}\frac{V_j}{T}\left[\int_0^{z_j}\frac{d\eta}{q_{ij}(\eta)}\right] + \beta_{ij}\right\}y_{ij} \leqslant b. \qquad (30)$$

Пусть

$$\psi_{ij}(z_j) \equiv \alpha_{ij}\frac{V_j}{T}\left[\int_0^{z_j}\frac{d\eta}{q_{ij}(\eta)}\right] + \beta_{ij}. \qquad (31)$$

С учетом формул (25), (27), (28), (30) и (31) исходная задача (22)—(27) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}V_{ij}z_j \to \max_{z,\,y}, \qquad (32)$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} y_{ij}\psi_{ij}(z_j) \leqslant b, \qquad (33)$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}, \qquad (34)$$

$$0 \leqslant z_j \leqslant \sum_{i=1}^{I} y_{ij}\eta_{ijk}, \quad j = \overline{1, J}, \qquad (35)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}. \qquad (36)$$

Для полученной задачи (32)—(36) может быть применен рассмотренный ранее алгоритм. Ее решение вызовет лишь незначительные изменения в алгоритме, связанные с тем, что решается задача на максимум и что связывающее ограничение (33) содержит знак «$\leqslant$» вместо знака «$\geqslant$». Отметим, что выполнение шага 1 сводится к решению задачи со строго вогнутой функцией цели (так как $q_{ij}(\cdot)$ — убывающая функция) для каждой пары индексов (i, j):

$$\varphi_{ijn}(z_j) \equiv V_j z_j - \xi_n\psi_{ij}(z_j) \to \max \qquad (37)$$

и ограничением

$$0 \leqslant z_j \leqslant \eta_{ijk}, \qquad (38)$$

где $\xi_n \geqslant 0$ — значение штрафного коэффициента (множителя Лагранжа) на n-й итерации.

Пусть s_{ijn} — оптимальное решение задачи (37), (38). Тогда s_{ijn} будет определяться из соотношения:

$$s_{ijn} = \begin{cases} 0, \eta_{ij}^{o} < 0, \\ \eta_{ij}^{o}, 0 \leq \eta_{ij}^{o} \leq \eta_{ijk}, \\ \eta_{ijk}, \eta_{ij}^{o} > \eta_{ijk}, \end{cases}$$

где η_{ij}^{o} — корень уравнения $Tq_{ij}(\eta_{ij}^{o}) - \xi_n\alpha_{ij} = 0$.

Поскольку $q_{ij}(\cdot)$ — убывающая функция, то из этого уравнения следует, что с увеличением ξ_n будет уменьшаться η_{ij}^{o}, а, следовательно, и s_{ijn}. Поэтому увеличение ξ_n приведет, в конечном итоге, к выполнению ограничения (33).

Можно скорректировать решение задачи (32)—(36) для ситуации, когда ввод скважин нельзя считать мгновенным. Пусть, например, $x_j(t)$ — зависимость от времени числа скважин на j-й залежи задается функцией:

$$x_j(t) = \begin{cases} tx_j/T_j, 0 \leq t \leq T_j, \\ x_j, T_j \leq t \leq T, \end{cases}$$

где T_j — срок ввода скважин на j-й залежи, а x_j — проектное число скважин, подлежащее определению.

Тогда формула (28) примет вид:

$$x_j = \frac{V_j}{(T - 0{,}5T_j)}\sum_{i=1}^{I} y_{ij}\int_0^{z_j}\frac{d\eta}{q_{ij}(\eta)}.$$

Отсюда следует, что для учета ненулевого срока ввода скважин требуется лишь во всех предыдущих соотношениях вместо планового периода T использовать параметр $(T - 0{,}5T_j)$.

Итак, пусть с помощью основного алгоритма в качестве точного или приближенного решения задачи (32)—(36) получены наборы $\{z_j^*\}$, $\{y_{ij}^*\}$. Зная эти наборы и используя формулу (28), можно определить для каждой залежи рациональное число скважин и соответствующие объемы затрат на разработку. Затем, применяя алгоритмы расчета динамики основных показателей разработки, определить изменение этих показателей во времени.

Таким образом, также как и решение «нефтяной» задачи (3)—(8), решение «газовой» задачи (22)—(27) позволяет выбрать для каждой залежи наилучший вариант ее разработки и дополнить этот вариант рациональными значениями объемов добычи газа и затрат на разработку за плановый период и на каждый год этого периода. Тем самым появляется возможность более обоснованного решения, в том числе, и вопросов, связанных с распределением инвестиций, необходимых на внедрение систем разработки группы залежей, связанных по затратам.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ПЕРСПЕКТИВЫ ОБОБЩЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предлагаемый подход к решению задач выбора оптимальных стратегий разработки нефтяных или газовых месторождений предполагает отсутствие гидродинамической связи между залежами (пластами). Такое допущение не всегда возможно, поэтому в общем случае для вычисления функций Баклея—Леверетта нефте- и газоотдачи для каждого варианта разработки месторождений с фильтрационными потоками между смежными залежами (пластами) необходимы принципиально иные подходы. Например, методы, изложенные в работах [3—6].

В частности, для газовых месторождений рассматриваемого класса предлагаемая постановка задачи может быть принята, если для вычисления текущего значения газоотдачи воспользоваться многоуровневыми методами моделирования процессов фильтрации реального газа в пористых средах залежей [6]. Рассмотрим вкратце принципиальную методологию. Выделим смежные залежи, связанные между собой фильтрационными потоками, и пронумеруем их, согласно двух/четырех и более цветному разбиению резервуара, и построим два/четыре и более независимых подмножества залежей. Эти подмножества вместе с исходно несвязанными залежами образуют верхний уровень декомпозиции резервуара газового месторождения. На этом уровне иерархии функции газоотдачи для каждого подмножества могут вычисляться независимо и параллельно. Далее в каждом элементе этих независимых подмножеств залежей (пластов) вокруг каждой добывающей скважины могут быть построены области Дирихле (суперэлементы), которые после аналогичной двух/четырех и более цветных разбиений образуют независимые подмножества следующего уровня иерархии распараллеливания вычислений. И, наконец, газоотдача для каждого суперэлемента может быть вычислена с помощью консервативных квазиравномерных многосеточных методов, например, методом контрольных объемов.

При таком подходе сама задача оптимизации выбора стратегии и алгоритмы ее решения естественным образом подвергаются многоуровневой декомпозиции, благодаря чему становится возможным иерархическое расщепление и распараллеливание вычислений на многопроцессорных вычислительных системах кластерного типа.

Наибольшая эффективность и универсальность предлагаемого обобщенного подхода достигается путем применения методов теории возмущений для решения нелинейных уравнений фильтрации реальных газов с учетом их сжимаемости в деформируемых пористых средах газовых залежей. В этом случае исходное нелинейное уравнение сводится к последовательности линейных уравнений, состоящей из одного невозмущенного и последовательности возмущенных уравнений.

Для нефтяных месторождений аналогичные результаты достигаются с помощью метода расщепления по физическим процессам, позволяющего решение системы квазилинейных уравнений фильтрации свести к решению последовательности линейных систем консервативных сеточных уравнений.

Таким образом, создаются все необходимые условия для решения не только предпроектных задач выбора оптимальной стратегии, но и задач проектирования и управления процессами добычи нефти или газа в самой общей постановке; в частности, с учетом особенностей геологического строения залежей (пластов) резервуаров нефтяных и газовых месторождений и нелинейных фильтрационных процессов даже в деформируемых пористых средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ермолаев А.И.* Системный анализ и модели формирования вариантов разработки группы залежей нефти и газа: дисс. д-ра техн. наук — М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2001. — 284 с.
2. *Михалевич В.С., Кукса А.И.* Методы последовательной оптимизации. — М.: Наука, 1983. — 207 с.
3. *Ахметзянов А.В.* Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // Автоматика и телемеханика. — 2008. — Т. 69, № 1. — С. 3—15.
4. *Akhmetzyanov A.V.* Large-Scale Nonlinear Multivariable Systems (Decomposition, Modeling and Control Problems) // Proc. of the 17th IFAC World Congress. — Seoul, Korea, 2008. — ID: 2217.
5. *Ахметзянов А.В., Ермолаев А.И.* Проблемы интеграции моделей систем сбора и добычи при управлении разработкой газовых месторождений // Наука и техника в газовой промышленности. — 2008. — № 2. — С. 67—75.
6. *Akhmetzyanov A.V., Ermolaev A.I.* Simulation of Hydrocarbon Filtration Processes in Porous Media Using the Decomposition of Simulation Zone. Proc. of the 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR XI). — Bergen, Norway, 2008. — ID: 4350.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Д. Цвиркуном.

Ермолаев Александр Иосифович — д-р техн. наук,
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва,
☎ (499) 135-79-36, ✉ aier@gubkin.ru,

Ахметзянов Атлас Валиевич — канд. техн. наук,
зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-92-11, ✉ awa@ipu.ru,

Гребенник Олег Сергеевич — науч. сотрудник,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-87-69, ✉ gos@ipu.ru.