



МЕТОДЫ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.С. Епифанов

Дан анализ эффективности классических методов интерполяции Ньютона и Лагранжа применительно к интерполяции законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов), представленных частично заданными геометрическими образами в форме числовых графиков. Рассмотрены геометрические образы автоматов из классов (4, 2, 2)-автоматов, (8, 2, 2)-автоматов и (16, 2, 2)-автоматов длиной до 254 знаков. Исследована эффективность доопределения законов функционирования автоматов при различных числе и методах выбора узлов интерполяции.

Ключевые слова: дискретный детерминированный автомат, геометрический образ, закон функционирования, интерполяция, рекуррентная форма.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления, технического диагностирования, синтеза поведения систем и многие другие в случае сложных систем, как правило, не обеспечены полной и точной информацией, необходимой для их решения. Теория экспериментов по распознаванию поведения автоматов (см., например, работу [1]) нашла эффективное применение в техническом диагностировании отдельных элементов, узлов, агрегатов и других технических объектов, допускающих задание явно представленными дискретными математическими структурами: таблицами, матрицами, графами, логическими уравнениями и т. п. В этих случаях модели объектов диагностирования задаются, как правило, явно и точно, средства диагностирования определены полностью, а решаемые вопросы сводятся к проверке работоспособности и локализации неисправности по местоположению или функциям. Принципиально отличается техническое диагностирование сложных систем. В работе [2] приведена таблица, характеризующая специфику технического диагностирования сложных систем. В частности, для сложной системы имеется только частично определенная модель в смешанной структурной, символьной или числовой форме, объект диагностирования из-за сложных функций, сложной структуры, наличия неопределенности в поведении и неучтенных связях с внешней средой и т. п. изме-

няется как на интервале времени диагностирования, так и на интервале прогнозируемой работоспособности. Неустраняемая для сложных систем неполнота исходной и фактически получаемой контрольным и диагностическим экспериментами информации делает задачи доопределения информации актуальными. В данной работе исследуется эффективность доопределения частично заданных законов функционирования автоматов из классов (4, 2, 2)-автоматов (т. е. автоматов с четырьмя состояниями, двумя входными и двумя выходными сигналами), (8, 2, 2)-автоматов, (16, 2, 2)-автоматов и классов автоматов, законы функционирования которых представлены частично заданными последовательностями вторых координат точек геометрических образов. Выбор для исследования классов (4, 2, 2)-автоматов, (8, 2, 2)-автоматов и (16, 2, 2)-автоматов определяется тем, что они являются автоматными моделями в исходном базисе технических элементов для синтеза систем. Синтез систем из базовых элементов позволяет строить такие системы, законы, функционирования которых существенно более сложные, чем законы функционирования отдельных элементов, и определены с меньшей полнотой.

Проблема оценки сложности представлена задачами для различных математических структур: алгоритмов, классов задач, процессов, конкретных реализаций алгоритмов и т. п. Существуют различные средства и критерии оценки сложности:

NP классы задач, NP-полные классы задач, классы полиномиально разрешимых задач, оценки по наилучшему, наихудшему или среднему варианту решения задач, оценки по числу вхождений в процесс вычислений наиболее сложных операций и т. д. (см., например, работу [3]) В статье исследуются оценки сложности законов функционирования конечных детерминированных автоматов. Предполагается, что законы функционирования автоматов заданы последовательностями вторых координат точек геометрических образов. Числовые показатели, используемые для построения оценки сложности, определяются на основе рекуррентных описаний последовательностей. Такой подход, одновременно с введением спектра показателей рекуррентных описаний, впервые был представлен в работах [4, 5].

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Геометрический образ γ_s законов функционирования [4, 5] (функции переходов $\delta: S \times X \rightarrow S$ и функции выходов $\lambda: S \times X \rightarrow Y$) инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ с множествами состояний S , входных X и выходных Y сигналов определяется на основе введения линейного порядка ω в автоматном отображении $\rho'_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s, p))\}$, где $\lambda'(s, p) = \lambda(\delta(s, p'), x)$, $s \in S$, $p, p' \in X^*$, $x \in X$, при $p = p'x$.

Автоматное отображение ρ'_s (множество пар) упорядочивается линейным порядком ω , определенным на основе порядка ω_1 на множестве X^* и заданным следующими правилами.

Правило 1. На множестве X вводим некоторый линейный порядок ω_1 (который будем обозначать $<_1$).

Правило 2. Порядок ω_1 на X распространим до линейного порядка на множестве X^* , полагая, что для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$

неодинаковой длины ($|p_1| \neq |p_2|$) $|p_1| < |p_2| \rightarrow p_1 <_1 p_2$;

для которых $|p_1| = |p_2|$ и $p_1 \neq p_2$, их отношение по порядку ω_1 повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв слов p_1 и p_2 . ♦

Аналогично определяется порядок ω'_2 на множестве слов Y^* .

После введения на множестве X^* линейного порядка ω_1 получаем линейно упорядоченное множество $\rho_s = (\rho'_s, \omega'_1)$, где ω'_1 — порядок на ρ'_s , индуцированный порядком ω_1 на X^* .

Определив на множестве Y линейный порядок ω_2 и разместив в системе координат D_1 с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осью ординат (Y, ω_2) множество точек ρ_s , получаем геометрический образ γ_s законов функционирования инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$. Необходимо отметить, что линейные порядки ω_1 на X^* и ω_2 на Y в общем случае независимы. Это означает, что конкретный вид геометрического образа γ_s законов функционирования инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ зависит от выбранных порядков ω_1 и ω_2 . Возможны и другие варианты линейных порядков на X^* (см., например, работу [4]). В данной работе исследование законов функционирования автоматов проводится с использованием определенного выше порядка ω_1 на X^* . Линейные порядки ω_1 и ω_2 позволяют заменять элементы множеств X^* и Y их номерами $r_1(p)$ и $r_2(p)$ по этим порядкам. В результате определяются две формы геометрических образов: как символьная структура в системе координат D_1 и как числовая структура в системе координат с целочисленными или вещественными положительными полуосями.

Представление геометрического образа γ_s как числовой структуры позволяет применять для постановки решения задач аппарат непрерывной математики: задание законов функционирования автоматов числовыми уравнениями, использование числовых процедур, интерполяцию и аппроксимацию частично заданных законов функционирования и т. п. Геометрический образ γ_s определяет полностью законы функционирования автомата A_s , т. е. всю фазовую картину связей входных последовательностей с выходными сигналами. Конкретные варианты процессов функционирования, т. е. фазовые траектории, имеют геометрические образы $\gamma_s(p)$, $p \in X^*$, в виде сечений γ_s по отдельным точкам. Геометрические образы также могут задаваться числовыми, а не символьными, уравнениями.

2. СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕКУРРЕНТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе [4] предложен спектр динамических параметров, характеризующих сложность правил порождения последовательностей. Спектр $\Omega = \langle \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_4 \rangle$ вводится как многоуровневая структура, в которой на каждом уровне представлены наборы характеристик использованных ре-



куррентных форм $F_i^m(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$, где m — порядок рекуррентной формы, $m = 1, 2, \dots$. Каждая рекуррентная форма F_i^m с учетом отношения $\xi \in U^*$ (U — конечное множество) определяется функцией $f_i^m: U^m \rightarrow U$ и применяется для определения одного или нескольких отрезков в зависимости от структуры последовательности ξ . Полагается, что рекуррентная форма применяется отдельными вариантами вхождения рекуррентной формы в последовательность правил, определяющих рассматриваемую последовательность ξ . Вариант применения рекуррентной формы F_i^m оканчивается в каждом из следующих случаев:

- применение F_i^m не соответствует функции f_i^m ,
- дальнейшее и соответствующее функции f_i^m

применение F_i^m связано с (первым) повторным применением рекуррентной формы к уже использованному для определяемого отрезка набору аргументов.

Во втором случае применение F_i^m рассматривается как новый вариант использования F_i^m . Это условие требуется для выхода из циклов в последовательности отдельных правил определения ξ , образующих общее правило. Следовательно, при счете правил, использованных при определении последовательности ξ , пересчитываются варианты вхождения отдельных правил в общее правило.

Спектр предназначен для строгого представления свойств последовательности, фундаментальной характеристики последовательности по взаимосвязям (взаиморасположению) элементов в ней. Определим понятие спектра.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ — конечное множество и ξ — последовательность элементов из множества U : $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$. Множества всех конечных последовательностей, всех конечных последовательностей длины ν и бесконечных последовательностей элементов из множества U будем обозначать соответственно U^* , U^ν и U^∞ . Спектр $\Omega(\xi)$ динамических характеристик последовательности $\xi \in U^* \cup U^\infty$ имеет иерархическую структуру, состоящую из уровней $\Omega(\xi) = (\Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$. Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня $\Omega_i(\xi)$ определяет разбиение каждого из множеств U^* , U^ν и U^∞ на подмножества по свойствам совпадения характеристик, соответствующих уровню. Подмножества такого раз-

биения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей.

Введем следующие обозначения.

Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^\nu$:

$m_0(\bar{\xi})$ — наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\bar{\xi}$;

и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$, определяемого рекуррентной формой порядка m , $d^m(\bar{\xi})$ — наибольшая длина начального отрезка последовательности $\bar{\xi}$;

и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq |\bar{\xi}| - 1$, $r^m(\bar{\xi})$ — число смен рекуррентных форм порядка m , требующихся для определения последовательности $\bar{\xi}$;

и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$, и j , $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$, $d_j^m(\bar{\xi})$ — длина j -го отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$.

Определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

$$\begin{aligned} \Omega_0(\bar{\xi}) &= \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle; \quad \Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_2(\bar{\xi}) &= \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle; \\ \Omega_3(\bar{\xi}) &= \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle, \end{aligned}$$

где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$

($\alpha = m_0(\bar{\xi})$, а n_j — номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j);

$\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ — оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ значений длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвертый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ добавляет к характеристикам в предшествующих уровнях оценку сложности правил и вариантов применения правил.

3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Выбор и применение метода интерполяции по смыслу соответствуют принятию и реализации гипотезы о том, что метод интерполяции, применяемый к числовому графику, представляющему час-

точно заданный геометрический образ автомата, достаточно точно восстанавливает точки геометрического образа, т. е. достаточно точно доопределяет частично заданные законы функционирования автомата. Следовательно, обоснованность результатов, полученных с помощью выбранного метода интерполяции, сведена к обоснованию правильности гипотезы. Далее исследуются методы выбора гипотезы (выбора конкретного метода интерполяции) для конкретных классов автоматов (класс (4, 2, 2)-автоматов, класс (8, 2, 2)-автоматов и класс (16, 2, 2)-автоматов) на примере выбора более точного метода интерполяции из двух методов интерполяции: Ньютона и Лагранжа. Методы выбора гипотезы включают в себя следующие этапы.

Этап 1. Определяется и конкретно строится класс автоматов U , в котором частично заданные автоматы методом интерполяции их частичных геометрических образов доопределяются до полных геометрических образов. Выбирается для исследования набор методов интерполяции (в данном случае набор состоит из методов Ньютона и Лагранжа).

Этап 2. Для интерполяции определяются узлы интерполяции (здесь рассматриваются два варианта выбора узлов интерполяции: в качестве узлов интерполяции служат вершины геометрических образов автономных подавтоматов либо те вершины геометрических образов законов функционирования автоматов, которые расположены на прямых, параллельных оси абсцисс).

Этап 3. Выбирается длина d геометрического образа, по частичному заданию которого интерполируется геометрический образ законов функционирования автомата.

Этап 4. К выбранным на этапе 2 узлам интерполяции применяются методы интерполяции Ньютона и Лагранжа.

Этап 5. Результаты интерполяции представляются следующими числовыми показателями:

— для каждого инициального автомата и каждого метода интерполяции определяется число правильно восстановленных вершин геометрического образа законов функционирования автомата;

— для рассматриваемого класса автоматов и заданной длины геометрических образов законов функционирования автоматов вычисляются величины n_d^N — число автоматов в рассматриваемом классе, для которых методом Ньютона правильно восстановлено больше точек, чем методом Лагранжа, n_d^L — число автоматов в рассматриваемом классе, для которых методом Лагранжа правильно восстановлено больше точек, чем методом Ньютона и n_d^{NL} — число автоматов в рассматриваемом

классе, для которых методы Ньютона и Лагранжа одинаково эффективны.

Этап 6. Выбирается функция для оценки эффективности методов интерполяции, т. е. для определения в исследуемом наборе методов интерполяции наиболее эффективного метода. ♦

В настоящей работе используется функция

$$F(n_d^N, n_d^L, n_d^{NL}) = 1 - \frac{\min(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}}{\max(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}}, \quad (1)$$

по значениям которой сравниваются по эффективности методы интерполяции Ньютона и Лагранжа.

Исследованные инициальные автоматы вида $A_{s_0} = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где S, X и Y — множества состояний, входных и выходных сигналов, δ и λ — функции переходов и выходов вида $\delta : S \times X \rightarrow S$, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$, а $s_0 \in S$ — начальное состояние, представлены следующими классами автоматов: классами (n, m, l) -автоматов, где $n = |S|$, $m = |X|$, $l = |Y|$, и классами $(n, m, l)_d$ начальных отрезков геометрических образов длины d , определяющих автоматы из класса (n, m, l) -автоматов. Проведен сравнительный анализ точности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа, а также модифицированными методами Ньютона и Лагранжа. Модификация методов интерполяции состоит в том, что узлами интерполяции служат точки геометрических образов автономных подавтоматов вида $A_1 = (S, \{0\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ и $A_2 = (S, \{1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$. Введем для сравнения эффективности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа функцию (1) при условии $n_d^N + n_d^L + n_d^{NL} \neq 0$, где n_d^N (n_d^L) — число автоматов, для которых методом Ньютона (методом Лагранжа) восстановлено больше точек, чем методом Лагранжа (чем методом Ньютона), а n_d^{NL} — число автоматов, для которых совпадает число правильно восстановленных точек методом Ньютона и методом Лагранжа. Используются следующие свойства введенной таким образом функции F :

- область значений функции F — отрезок $[0, 1]$;
- функция F принимает значение:
 - 0, если методы интерполяции Ньютона и Лагранжа имеют одинаковую точность;
 - отличное от 0 только в том случае, когда интерполяция одним из методов более точная;
 - 1, когда только один из методов правильно восстанавливает некоторые точки графика.

Результаты анализа эффективности применения методов интерполяции Ньютона и Лагранжа по отношению к частично заданным геометрическими образами автономных подавтоматов автоматов класса (4, 2, 2)-автоматов при различных зна-



Сравнение эффективности методов интерполяции Ньютона и Лагранжа

d	F	Вывод
30 62	0,65 0,44	Метод Ньютона точнее
126 254	0,14	Методы выравниваются по точности

чениях длины начального отрезка геометрического образа представлены в таблице.

Видно, что при небольших длинах частично заданных геометрических образов законов функционирования автоматов из класса (4, 2, 2)-автоматов следует применять метод интерполяции Ньютона, а при длинах геометрических образов от 126 до 254 интерполяция методами Ньютона и Лагранжа выравнивается по точности.

4. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЬЮТОНА И ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, РАСПОЛОЖЕННЫМ НА ПРЯМЫХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСИ АБСЦИСС

Выбор узлов интерполяции характеризуется их числом узлов и расположением. Классический вариант — узлы интерполяции расположены равномерно по оси абсцисс. В § 3 выбор узлов интерполяции определялся критерием, учитывающим интерпретацию точек интерполируемого графика: узлами интерполяции полагались вершины геометрических образов автономных подавтоматов $A_0 = (S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1 = (S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата $A = (S, \{0, 1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$. Координаты таких узлов удобно вычислять, так как они соответствуют приложению к исследуемому автомату периодических (тактирующих) входных последовательностей, элементами которых служат только входные сигналы 0 (для автомата A_0) и только входные сигналы 1 (для автомата A_1). Можно предложить следующий критерий выбора узлов интерполяции: в качестве узлов интерполяции для доопределения графика, представляющего собой частично заданные законы функционирования автомата, использовать узлы, расположенные на прямых, параллельных оси абсцисс. Такие узлы удобно определять экспериментально с помощью простых устройств, выделяющих только один заданный сигнал — 0 или 1.

Аппарат геометрических образов позволяет рассматривать в «автоматной» интерпретации геометрические кривые на плоскости и числовые последовательности. Последовательность элементов

из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата).

В работе [4] предложен новый тип автомата — $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автомат законы функционирования которого задаются числовой последовательностью α , которая полагается последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Рассматривается начальный отрезок длины $d(\alpha)$ последовательности α . Величина m — мощность входного алфавита автомата, число выходящих сигналов определяется спецификой начального отрезка последовательности α длины $d(\alpha)$ (число различных значений элементов в начальном отрезке длины $d(\alpha)$).

Далее излагаются результаты исследования эффективности применения классических методов интерполяции для доопределения законов функционирования автоматов в 10-ти классах $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автоматов. Для этого из банка фундаментальных математических величин [6] извлечено множество последовательностей H_d , состоящее из 10-ти последовательностей длины $d = 1000$, задающих приближения следующих фундамен-

тальных математических величин: $\pi, e, \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(так называемое «золотое сечение»), $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ln 2,$

$\ln 10$, дзета-функции Римана $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$, кон-

станты Каталана $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, константы Эйле-

ра $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$.

Множество последовательностей H_d рассматривается как множество начальных отрезков последовательностей вторых координат точек геометрического образа законов функционирования автоматов. Соответствующие последовательности первых координат точек геометрического образа определялись вариантами выбора числа входных сигналов автомата и линейным порядком ω_1 на множестве входных последовательностей. Рассматриваются множества входных сигналов, содержащие 2, 5, 10, 20 и 50 элементов. Методы синтеза законов функционирования автоматов по заданным последовательностям, включая последовательности чисел, описаны в работе [4].

Рассмотрим метод, предлагаемый нами для выбора гипотезы (выбора метода интерполяции Ньютона или метода интерполяции Лагранжа), принятие которой дает более точный результат интерпо-

ляции. Для частично заданного геометрического образа длины d автомата A множество правильно восстановленных точек методом Ньютона будем обозначать Z_N , а методом Лагранжа — Z_L . Число элементов в множестве $Z_N \cap Z_L$ будем обозначать t_d^{NL} . Через t_d^N (t_d^L) будем обозначать число правильно восстановленных точек только методом Ньютона (только методом Лагранжа). Для сравнения эффективности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа введем функцию

$$F_1(t_d^N, t_d^L, t_d^{NL}) = 1 - \frac{\min(t_d^N, t_d^L) + t_d^{NL}}{\max(t_d^N, t_d^L) + t_d^{NL}}$$

при условии $t_d^N + t_d^L + t_d^{NL} \neq 0$, где t_d^N (t_d^L) — число правильно восстановленных точек только методом Ньютона (только методом Лагранжа), а t_d^{NL} — число правильно восстановленных точек обоими методами. Результат сравнения методов интерполяции Ньютона и Лагранжа представляется одним из выполняющихся отношений $t_d^N > t_d^L$ или $t_d^N < t_d^L$ и значением функции F_1 . Обоснованность выбора метода интерполяции характеризуется значениями функции F_1 , близкими к:

- единице, показывается существенно бóльшая эффективность одного из методов (того, который представлен отношением величин t_d^N и t_d^L);
- нулю, представляется близкая по эффективности интерполяция методами Ньютона и Лагранжа.

Значения функции F_1 , близкие к нулю, возможны как в случае большого числа одинаково восстановленных обоими методами точек, так и в случае, когда оба метода восстанавливают (возможно, с небольшим числом точек) различные множества точек, но близкие по числу элементов в них.

Предлагаемый метод состоит из следующих этапов.

Этап 1. Для оценки эффективности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа выбираются $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автомат и длина d используемого геометрического образа законов функционирования этого автомата. Для автомата строится геометрический образ длины d законов функционирования.

Этап 2. Выбирается подмножество $Y' \subset Y$ множества выходных сигналов Y и предполагается, что узлами интерполяции являются такие вершины геометрического образа автомата, вторые координаты которых принадлежат подмножеству Y' . (Из рассмотрения исключаются случаи, когда множество вторых координат точек геометрического образа автомата, содержащихся в подмножестве Y' ,

или пусто, или определяет множество всех точек геометрического образа.)

Этап 3. По узлам интерполяции, определенным на этапе 2, методами Ньютона и Лагранжа строится геометрический образ законов функционирования $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автомата.

Этап 4. Вычисляются число t_d^N правильно восстановленных точек только методом Ньютона, число t_d^L правильно восстановленных точек только методом Лагранжа и число t_d^{NL} правильно восстановленных точек обоими методами.

Этап 5. По результатам этапа 4 определяется отношение между величинами t_d^N и t_d^L и вычисляется значение функции F_1 . ♦

Были исследованы классы $(\alpha, m, d(\alpha))$ -автоматов, где $\alpha \in H_d$, $m \in \{2, 5, 10, 20, 50\}$, $d \in \{100, 200, 300, 400, 500\}$. Эффективность интерполяции методами Ньютона и Лагранжа оценивается по числам правильно восстановленных при интерполяции точек не в классе автоматов, как это сделано в § 3, а в одном конкретном $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автомате.

В следующем утверждении оценивается эффективность методов для $R(\pi, 2, 100)$ -автомата. Для каждого $R(\alpha, m, d(\alpha))$ -автомата, и конкретно $R(\pi, 2, 100)$ -автомата существует метод построения геометрического образа, задающего законы функционирования автомата. На основании этого числовые показатели, по которым осуществляется оценка эффективности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа, вычисляются по правилам, которые использовались для получения промежуточных данных при сравнении эффективности методов в классах автоматов (см. § 3). В данном утверждении конкретные значения величин t_d^N , t_d^L и t_d^{NL} рассматриваются не как промежуточные данные, а как числовые показатели, непосредственно определяющие отношение между величинами t_d^N и t_d^L и значением функции $F_1(t_d^N, t_d^L, t_d^{NL})$.

Утверждение 1. Пусть автомат $A = (S, \{x_1, x_2\}, \{0, 1, \dots, 9\}, \delta, \lambda, s_0)$ является $R(\pi, 2, 100)$ -автоматом и множество узлов интерполяции для частично заданного геометрического образа γ законов функционирования автомата A представлено точками со вторыми координатами из множества $\{1, 2, 5\}$ полного геометрического образа. Тогда для интерполяции методами Ньютона и Лагранжа частично заданного геометрического образа γ выполняется отношение $t_d^N < t_d^L$ и $F_1(t_{100}^N, t_{100}^L, t_{100}^{NL}) = 1$. ♦

При доказательстве утверждения 1 использовались следующие полученные конкретные значения: $t_{100}^N = 0$, $t_{100}^L = 8$ и $t_{100}^{NL} = 0$.



5. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТОВ

Рассматривая произвольную последовательность как последовательность вторых координат точек геометрического образа автомата, с помощью спектра можно оценивать сложность законов функционирования автоматов. Высказанное в 1953 г. А.А. Ляпуновым предположение о том, что алгоритмы, представимые непланарными графами, могут быть представлены линейными структурами в виде последовательностей, было подтверждено в 1958 г. в диссертации Ю.И. Янова. В дальнейшем линейные структуры алгоритмов получили название, по предложению А.П. Ершова, схем Янова. Такой подход позволяет применять для исследования сложности с помощью спектра показателей и алгоритмы в их классическом понимании.

Определение. Сравнимые по входам инициальные автоматы $A_1 = (S_1, X, Y_1, \delta_1, \lambda_1, s_{01})$, где $s_{01} \in S_1$, и $A_2 = (S_2, X, Y_2, \delta_2, \lambda_2, s_{02})$, где $s_{02} \in S_2$, будем называть изоморфными по выходам, если $|Y_1| = |Y_2|$ и существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi : Y_1 \xrightarrow{\text{на}} Y_2$, для которого выполняется условие: $(\forall p \in X^*)\{ |p| = v \rightarrow \lambda_2(s_{02}, p) = \varphi(\lambda_1(s_{01}, pr_1 p)) \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_1 p), pr_2 p)) \dots \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_{v-1} p), pr_v p)) \}$, где $pr_d p$ — префикс длины d последовательности p . ♦

Каждый инициальный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где $|Y| = l$, и каждое семейство не тождественных взаимно однозначных отображений вида $\varphi : Y \xrightarrow{\text{на}} Y$ определяют множество из $l!$ изоморфных по выходам автоматов. Это означает, что каждая оценка сложности законов функционирования инициального автомата распространяется на весь класс изоморфных по выходам автоматов.

Пусть H_d — множество начальных отрезков длины d последовательностей, определяющих приближения математических величин $\pi, e, \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \sqrt{2},$

$\sqrt[3]{2}, \ln 2, \ln 10$, дзета-функции Римана $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$,

константы Каталана $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, константы

Эйлера $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$. Пусть

далее $\alpha^z(H_d) = \{ A_d^z(e), A_d^z(\pi), A_d^z(\varphi), A_d^z(\sqrt{2}), A_d^z(\sqrt[3]{2}), A_d^z(\ln 2), A_d^z(\ln 10), A_d^z(\zeta(3)), A_d^z(C), A_d^z(\gamma) \}$,

где $A_d^z(\beta), \beta \in H_d$ — дискретный детерминированный автомат с числом входных сигналов z и β , является последовательностью вторых координат точек геометрического образа автомата.

Пример. С помощью разработанного алгоритма и программы построения показателей спектра были вычислены показатели для начальных отрезков приближений чисел π и e , а также чисел $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

и $\sqrt[3]{2}$. Результаты представлены на рис. 1 и 2. На оси абсцисс показаны наименьшие порядки рекуррентных форм, а на оси ординат — длины начальных отрезков последовательностей. Точками

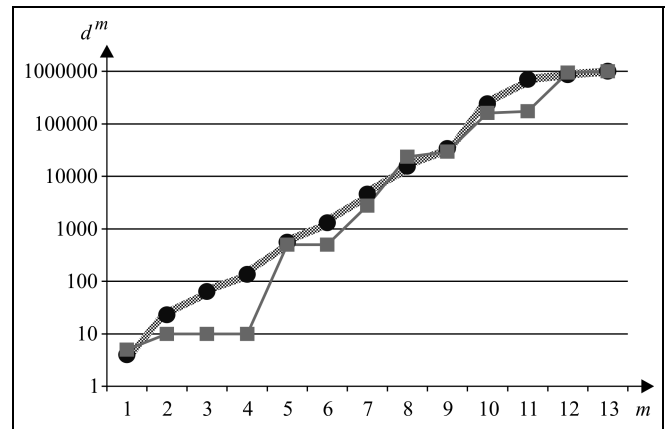


Рис. 1. Зависимости длин d^m начальных отрезков последовательностей, представляющих приближения чисел π (—●—) и e (—■—) от роста минимального порядка m рекуррентных форм, определяющих отрезки

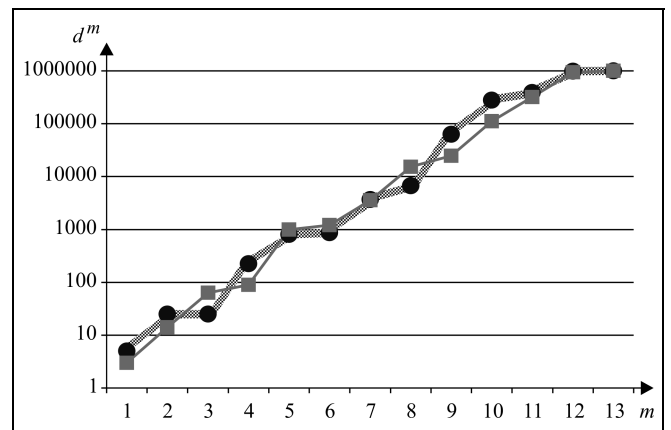


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для чисел $\sqrt[3]{2}$ (—●—) и $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (—■—)

на ломаных линиях показаны результаты совмещения наименьших порядков рекуррентных форм и длины, определяемых ими начальных отрезков. ♦

В утверждении 2 используются результаты вычислений показателей спектра для двух уровней Ω_0 и Ω_1 , определяющих классы сложности для автоматов из множества $\alpha^z(H_d)$. Напомним, что оценка сложности для каждого автомата из множества автоматов $\alpha^z(H_d)$ распространяется на целый класс изоморфных по выходам автоматов (3 628 800 автоматов).

Утверждение 2. *Законы функционирования автоматов из множества $\alpha^z(H_d)$, где $d = 1\,000\,000$:*

— по сложности, определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω , образуют два класса эквивалентности: $\{A_d^z(e), A_d^z(\pi), A_d^z(\varphi), A_d^z(\sqrt[3]{2}), A_d^z(\zeta(3))$ и $\{A_d^z(\sqrt{2}), A_d^z(\ln 2), A_d^z(\ln 10), A_d^z(C), A_d^z(\gamma)\}$;

— по сложности, определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω , образуют одноэлементные классы эквивалентности. ♦

Исследуемая математическая структура имеет большую размерность (множество из 10-ти последовательностей по d ($d = 1\,000\,000$) элементов в каждой). Анализ свойств последовательностей, который должен быть проведен для доказательства утверждения 2, необходимо предполагает рассмотрение каждого элемента каждой последовательности. Требующиеся показатели свойств последовательностей определяются на основе многократных построений и анализа отрезков последовательностей при поиске минимальных по порядку рекуррентных форм, определяющих последовательности и их префиксы. Провести рекуррентные определения последовательностей и всех их префиксов, используя задание последовательностей только формулами, без применения быстродействующих и имеющих большой объем памяти вычислительных систем невозможно, так как в формулах конкретные элементы последовательностей представлены неявно. В связи с этим для доказательства утверждения 2 требующиеся математические структуры большой, интуитивно не обозримой размерности, во-первых, строились явно, с использованием ЭВМ, а, во-вторых, поиск и подбор рекуррентных форм наименьших порядков также производился с помощью ЭВМ. При доказательстве утверждения 2 формулировки утверждений, выделение вариантов

случаев, требующих рассмотрения, построения логических выводов производились по общепринятым для доказательств правилам. (Программная реализация используемых процедур для вычисления на ЭВМ тщательно разработана и проверена на правильность.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны методы интерполяции частично заданных законов функционирования автоматов, представленных геометрическими образами. В качестве узлов интерполяции используются узлы, вторые координаты которых получены сечениями геометрических образов прямыми линиями, параллельными оси абсцисс, и узлы, выделенные первыми элементами некоторых вершин геометрических образов. Получены оценки сравнения по точности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа для частично заданных законов функционирования автоматов, последовательности вторых координат вершин геометрических образов которых определены числовыми последовательностями из банка целочисленных последовательностей [6]. Получены оценки сложности законов функционирования автоматов в классе (4, 2, 2)-автоматов и его подклассах, классе линейных (8, 2, 2)-автоматов, в некоторых подклассах класса (16, 2, 2)-автоматов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Наука, 1966. — 272 с.
2. Твердохлебов В.А. Особенности диагностирования человеко-машинных систем // Тр. конф. «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-10) / ИПУ РАН. — М., 2010. — С. 146–156.
3. Абрамов С.А. Лекции о сложности алгоритмов. — М.: МЦНМО, 2009. — 252 с.
4. Твердохлебов В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов. — Саратов: Научная книга, 2008. — 183 с.
5. Твердохлебов В.А. Методы интерполяции в техническом диагностировании // Проблемы управления. — 2007. — № 2. — С. 28–34.
6. <http://oeis.org/Seis.html> (дата обращения 23.12.2010).

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко.

Епифанов Антон Сергеевич — аспирант, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ☎ (8452) 22-23-76, ✉ epifanovas@list.ru.