УДК 65.01 + 330.4 + 519.86

СОГЛАСОВАННЫЕ РАЗБИЕНИЯ В СЕТЕВЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУРАХ

А.К. Еналеев

Рассмотрена задача согласования границ полигонов управления в крупномасштабных сетевых структурах между различными типами разбиений сети на полигоны. Определены условия, обеспечивающие меньшие затраты на управление при совпадении границ полигонов одного типа разбиения с границами полигонов другого типа разбиения. Отмечено, что решение такого рода задач актуально при исследовании задач управления движением и обслуживанием инфраструктуры в транспортных, в частности, железнодорожных сетях.

Ключевые слова: иерархия, полигон управления, информационная сложность управления, разбиение сети, согласованность разбиений, равновесные системы разбиений, оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Организация деятельности крупномасштабных сетевых структур (транспортных сетей, трубопроводных сетей, электросетей, больших логистических структур, вычислительных сетей и др.), в силу их сложности и пространственной распределенности, приводит к необходимости децентрализации управления. Децентрализация, по сути, заключается в разбиении сети на полигоны управления. Таким образом, над сетью возникают иерархические структуры, в которых необходимо согласование решений и интересов, как по вертикали, так и по горизонтали.

Существует еще один аспект проблемы согласования. Разбиение на полигоны во многих сложных организационных системах является многовариантным. Например, в такого рода системах часто управление осуществляется как на основе пространственной (региональной) децентрализации, так и на основе различного функционального разделения. В частности, в транспортных сетевых структурах это управление техническим обслуживанием дорог и управление движением.

Учитывая взаимозависимость различных функций управления, необходимо согласовывать структуры разных типов разбиений сети, относящихся к этим функциям в целях обеспечения максимальной эффективности функционирования сетевой структуры.

Задача разбиения крупномасштабной сети (в частности, железнодорожной сети) на полигоны управления рассмотрена в работах [1—10].

В работах [1, 2] введено понятие сложности управления и сформулирован принцип равносложности информационного управления, на основе которого предложено проводить разбиение сети на полигоны с минимальными различиями в сложности управления.

В работах [4, 5] предложены методы формирования оценок сложности полигонов, в виде комплексной свертки технико-экономических показателей элементов рассматриваемой системы.

В работах [1, 2, 6, 10] предложены методы и алгоритмы разбиения на полигоны, в которых используется так называемая процедура редукции сети. Алгоритмы позволяют находить локально-оптимальные решения задачи разбиения сети на полигоны.

Основные принципы формирования границ полигонов управления для железнодорожных сетей представлены в работе [7]. Там же, в частности, сформулирован принцип кратного вложения структуры полигонов обслуживания сети в структуру полигонов управления движением в сети.

В работах [8, 9] приведены матричное представление процедур последовательной редукции сети и геометрическая интерпретация реализации принципа равносложности управления.

В статье [10] сформулированы задачи анализа и синтеза структур и механизмов информационного управления в крупномасштабных сетевых системах, представлены постановки задач согласования различных разбиений сети.

Результаты исследований [1—13] лежат в основе задач, рассматриваемых в настоящей работе.

При формировании математической модели и постановки задачи (см. § 1) применялась методология синтеза оптимальных иерархических структур [14—17].

Отметим, что в работах [18, 19] задачи разбиения сети рассматривалась для других приложений, в том числе для задач организации параллельных вычислений. Хотя эти задачи решались на основе других критериев эффективности разбиения, отличающихся от информационной равносложности, результаты решения задач разбиения для вычислительных и транспортных сетей могут взаимно дополнять друг друга.

В настоящей работе определены условия согласованности (совпадения) границ полигонов различных типов разбиений и условия существования оптимальной согласованной равновесной по Нэшу системы разбиений.

1. МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

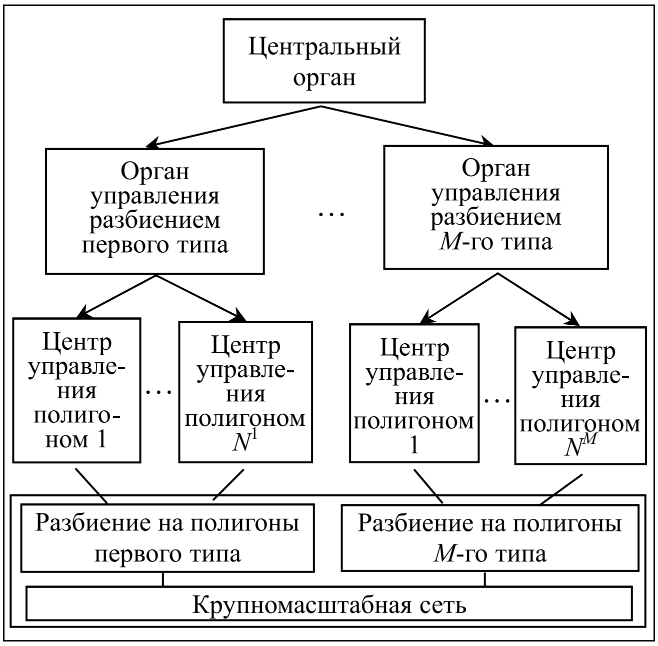
1.1. Модель

Рассмотрим сеть S, состоящую из n вершин. Предположим, что имеется несколько органов управления различными функциональными типами деятельности на сети. Примем, что таких органов и, соответственно, типов деятельности имеется в количестве M. Для каждого из органов необходимо разбить сеть на полигоны управления. Пусть $g^1 = \{g_i^1\}$ — разбиение сети S первым функциональным органом управления на N^1 полигонов первого типа ($i = 1, , N^1$), $g^2 = \{g_i^2\}$ — разбиение сети S вторым органом управления на N^2 полигонов второго типа и так далее, $g^m = \{g_i^m\}$ — разбиение сети m-м органом на N^m полигонов m-го типа, $m = 1, ..., M$, $i = 1, ..., N^m$.

Положим, что каждое разбиение на полигоны удовлетворяет условиям

$$\bigcup_{i=1}^{N^m} g_i^m = S \text{ и } g_i^m \cap g_j^m = \varnothing, \qquad (1)$$

где $i \neq j$, $i, j = 1, ..., N^m$, m — номер типа разбиения, $m = 1, ..., M$. Границы разбиений проходят через вершины сети. Предположим, что в каждой вершине рассматриваемой сети имеется ребро, представляющее собой петлю. При этом для каждого типа разбиения петля, соответствующая вершине, через которую проходит граница, может относиться только к одному полигону соответствующего типа. У каждого полигона имеется центр управления полигоном, т. е. для каждого разбиения m-го типа имеем N^m полигонов m-го типа, $m = 1, ..., M$.



Структура управления при разбиении сети на полигоны

На рисунке изображена структура управления при разбиении рассматриваемой сети на различные типы полигонов.

Центральный орган (ЦО) в первом варианте осуществляет централизованное управление, а именно, определяет приоритетность органов управления разбиениями (ОУР) и, соответственно, типов разбиения, и таким образом задает порядок «ходов», т. е. определяет очередность выбора разбиений различных типов. В другом варианте организации он может не вмешиваться в порядок разбиений, предоставляя ОУР самостоятельно осуществлять, и согласовывать друг с другом разбиения. Далее сначала будет преимущественно рассматриваться задача согласования типов разбиений для первого варианта организации — централизованного управления разбиениями, а затем и для децентрализованного управления.

Для каждой вершины и ребра сети заданы показатели сложности соответствующие каждому ОУР, т. е. типу разбиения сети. Обозначим l_{ij}^m показатели сложности ребра (i, j) в данной сети для каждого m-го вида разбиения (пример формул для расчета сложности дуг и вершин приведен в работах [2, 5, 8]). Положим, что $l_{ij}^m = l_{ji}^m$. В случае, если в рассматриваемой сети i-я вершина не соединена с j-й вершиной ребром, дополним сеть ребром (i, j) нулевой сложности, т. е. $l_{ij}^m = 0$. Сложность i-й вершины сети ($i = 1, ..., n$) для разбиения m-го типа определяется как $w_i^m = l_{ii}^m$, где l_{ii}^m — сложность петли, соответствующей i-й вершине, $m = 1, ..., M$.

Обозначим $Q_{k^m}^m$ множество ребер (i, j) полигона с номером k^m для m-го типа разбиения g^m. Число k^m соответствуют номеру центра управления соответствующего полигона (далее номеру полигона) m-го типа разбиения. Определим сложность управления k^m-м полигоном. Примем что, сложность управления полигоном складывается из сложности управления элементами («ребрами») этого полигона и сложностей согласования работ с полигонами других разбиений, имеющим общие элементы сети с k^m-м полигоном[1].

Первую составляющую *сложности управления* полигоном определим в виде $L^m(Q_{k^m}^m) = \Lambda^m\left(\sum_{(i,j)\in Q_{k^m}^m} l_{ij}^m\right)$, где $\Lambda^m(\cdot)$ — заданные выпуклые, неубывающие функции. Сложность управления полигоном возрастает с увеличением его «масштаба».

Вторую составляющую, *сложность согласования* работ k^m-го полигона m-го типа разбиения со всеми полигонами всех имеющихся типов разбиений, обозначим $Z_{k^m}^m(Q_{k^m}^m, \overline{Q}^{-m})$. Здесь $\overline{Q}^{-m} = \{\hat{Q}^1, ..., \hat{Q}^{m-1}, \hat{Q}^{m+1}, ..., \hat{Q}^M\}$ — совокупность всех типов разбиений, кроме m-го типа, разделенная на группы по типам разбиений $\hat{Q}^p$. Набор (группа) $\hat{Q}^p = \{Q_1^p, ..., Q_{N^p}^p\}$ определяет p-й тип разбиения g^p; Q_i^p представляет собой совокупность ребер i-го полигона в p-м типе разбиения, где $p = 1, ..., M$. Далее тип разбиения g^p будем отождествлять с совокупностью $\hat{Q}^p = \{Q_1^p, ..., Q_{N^p}^p\}$.

Для описания *сложности согласования* работ полигона k^m m-го типа разбиения с остальными полигонами $Z_{k^m}^m(Q_{k^m}^m, \overline{Q}^{-m})$ примем, что она складывается из сложности согласования работ $z_{k^m k^p}^{mp} = z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, Q_{k^p}^p)$ полигона k^m m-го типа с полигоном k^p p-го типа, $p \ne m$.

Положим, что функция сложности согласования $z_{k^m k^p}^{mp} = z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, Q_{k^p}^p)$ полигона m-го типа с номером k^m с полигоном k p-го типа обладает следующими свойствами.

А. Для случаев, когда $Q_{k^m}^m \cap Q_{k^p}^p = \varnothing$, т. е. полигоны с номерами k^m и k^p не пересекаются, сложность согласования этих полигонов равна нулю, $z_{k^m k^p}^{mp} = 0$. Считается, что в этом случае нет оснований для согласования работ.

Б. Для случаев $Q_{k^m}^m \cap Q_{k^p}^p \ne \varnothing$ сложность согласования этих полигонов $z_{k^m k^p}^{mp} > 0$. Таким образом, затраты на согласование действий могут возникать только для тех элементов сети, которые принадлежат множеству $Q_{k^m}^m \cap Q_{k^p}^p$.

В. Сложность согласования полигона k^m внутри разбиения m-го типа с самим собой $z_{k^m k^m}^{mm} = 0$, так как считается, что она учтена в первой составляющей сложности, $L^m(Q_{k^m}^m)$ — сложности управления полигоном,

$$z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, Q_{k^p}^p) > z_{k^m k^m}(Q_{k^m}^m, Q_{k^m}^m) = 0$$

$$\text{при условии } Q_{k^m}^m \cap Q_{k^p}^p \ne \varnothing.$$

Г. В случае «полного» пересечения, когда $Q_{k^m}^m \cap \underline{Q}_{k^p}^p = Q_{k^m}^m$, сложность согласования полигонов не больше по сравнению со случаем неполного пересечения $Q_{k^m}^m \cap Q_{k^p}^p \ne \varnothing$, т. е.

$$z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, Q_{k^p}^p) \ge z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, \underline{Q}_{k^p}^p).$$

Далее для упрощения примем, что в случае полного пересечения полигонов $Q_{k^m}^m \cap \underline{Q}_{k^p}^p = Q_{k^m}^m$ затраты на согласование между ними $z_{k^m k^p}(Q_{k^m}^m, \underline{Q}_{k^p}^p) = 0$.

Замечание. Условие Г отражает тот факт, что в случае совпадения границ полигонов разных типов руководству этих полигонов легче планировать и координировать свои действия, так как отсутствует или, по крайней мере, уменьшается влияние соседних полигонов. Именно такие обстоятельства были обнаружены и отмечены при исследовании и разработке вертикально-интегрированных структур управления железнодорожными перевозками [7]. ♦

[1] Учет сложности взаимодействия с соседними полигонами в рамках одного и того же разбиения исследовался в работе [6]. В настоящей статье в целях упрощения анализа задачи это взаимодействие не рассматривается.

Таким образом, общая сложность управления k^m-м полигоном с учетом сложности согласования

$$W^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = L^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) + Z^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = $$
$$= L^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) + \sum_{p=1}^{M}\sum_{k^p=1}^{N^p} z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p}).$$

Соответственно, сложность управления m-м разбиением сети $\overline{W}^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}) = \sum_{k^m=1}^{N^m} W^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m})$.

Возможны различные варианты представления функций сложности согласования. Приведем три примера описания этих функций.

Пример 1.

$$z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p}) =$$
$$= \left(\sum_{(i,j)\in Q^m_{k^m}\cap Q^p_{k^p}} z_{ij}^{k^m k^p}\right)\left(\sum_{(i,j)\in Q^p_{k^p}\setminus\left(Q^m_{k^m}\cap Q^p_{k^p}\right)} v_{ij}^{k^m k^p}\right), \quad (2)$$

где $z_{ij}^{k^m k^p}$ — сложность согласования действий по ребру (i, j) управляющим органом k^m-го полигона m-го типа с управляющим органом k^p-го полигона p-го типа, $v_{ij}^{k^m k^p}$ — заданные веса элементов (i, j) k^p-го полигона, не входящих в состав k^m-го полигона. Здесь m, $p = 1, ..., M$. Первый множитель в выражении (2) определяет сложность согласования между центрами полигонов по всем элементам сети, общими для k^p-го и k^m-го полигонов соответствующих типов. Второй множитель характеризует степень рассогласования (несовпадения) k^p-го и k^m-го полигонов. Заметим, что если k^p-й и k^m-й полигоны полностью совпадают, второй множитель равен нулю.

Пример 2.

$$z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p}) = \sum_{(i,j)\in Q^p_{k^p}\setminus\left(Q^m_{k^m}\cap Q^p_{k^p}\right)} v_{ij}^{k^m k^p}.$$

Пример 3.

$$z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p}) = \begin{cases} C, \text{ если } Q^m_{k^m} \ne Q^p_{k^p}, \\ 0, \text{ если } Q^m_{k^m} = Q^p_{k^p}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь C — заданная константа. ♦

Пусть функции полезности для каждого полигона с номером k^m имеют вид $f^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = d^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) - W^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = d^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) - L^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) - \sum_{p=1}^{M}\sum_{k^p=1}^{N^p} z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m}, Q^p_{k^p})$, где $d^m_{k^m}(Q^m_{k^m})$ — заданные функции дохода для соответствующего полигона. Обозначим $h^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) = d^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) - L^m_{k^m}(Q^m_{k^m})$ и назовем $h^m_{k^m}(Q^m_{k^m})$ «внутренней» прибылью полигона, тогда $f^m_{k^m}(Q^m_{k^m}, \overline{Q}^{-m}) = h^m_{k^m}(Q^m_{k^m}) - \sum_{p=1}^{M}\sum_{k^p=1}^{N^p} z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p})$.

Полезность разбиения $\hat{Q}^m$ m-го типа представим как

$$F^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}) = \sum_{k^m=1}^{N^m} f^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = D^m(\hat{Q}^m) - $$
$$- W^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}) = H^m(\hat{Q}^m) - Z^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}), \quad (4)$$

где $D^m(\hat{Q}^m) = \sum_{k^m=1}^{N^m} d^m_{k^m}(Q^m_{k^m})$,

$$H^m(\hat{Q}^m) = \sum_{k^m=1}^{N^m} h^m_{k^m}(Q^m_{k^m}),$$

$$Z^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}) = \sum_{k^m=1}^{N^m} Z^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}),$$

$$Z^m_{k^m}(Q^m_{k^m},\ \overline{Q}^{-m}) = \sum_{p=1}^{M}\sum_{k^p=1}^{N^p} z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m},\ Q^p_{k^p}).$$

Соответственно, назовем $H^m(\hat{Q}^m)$ «внутренней» прибылью разбиения m-го типа.

Примем, что полезность разбиения $\hat{Q}^m$ m-го типа $F^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m})$ определяет целевую функцию m-го ОУР, $m = 1, ..., M$.

Заданное множество возможных разбиений в $\mathbb{Q}$ и заданный на этом множестве набор функций полезностей $F^m(\overline{Q}) = F^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m}) = H^m(\hat{Q}^m) - Z^m(\hat{Q}^m,\ \overline{Q}^{-m})$ будем называть *системой разбиений m-го типа*.

Целевую функцию ЦО обозначим $\Phi(\overline{Q})$, где $\overline{Q} = \{\hat{Q}^1, ..., \hat{Q}^M\}$.

1.2. Постановка задачи

Представим функционирование описанной системы как игру M лиц на множестве допустимых разбиений, в которой функции полезности игроков имеют вид $F^m(\overline{Q})$, стратегия каждого m-го игрока (т. е. ОУР) заключается в выборе разбиения $g^m = \{g^m_i\}$ при ограничении на совокупность множеств $\overline{Q} = \{\hat{Q}^1, ..., \hat{Q}^M\}$: $\overline{Q} \subset \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — заданное множество допустимых множеств $\overline{Q}$. Задача заключается в исследовании существования и единственности равновесных разбиений различных типов в этой игре и определении условий, при которых границы соответствующих полигонов разных типов разбиений совпадают, а также в нахождении оптимальных для ЦО равновесных разбиений (критерии оптимальности, определяющие значения целевой функции ЦО на множестве равновесных распределений описаны далее).

Задача в такой общей постановке, с учетом ее дискретности и размерности, представляется сложной для решения. Поэтому предлагается сначала рассмотреть частные постановки на основе фиксации приоритетности выбора определенных типов разбиений (задания порядка ходов), ограничения числа типов разбиений до двух и принятия равными числа полигонов в каждом разбиении.

2. СОГЛАСОВАНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ ТИПОВ РАЗБИЕНИЙ

2.1. Максимальное согласование

Сначала для простоты анализа предположим, что имеется всего два типа разбиений и число полигонов для обоих типов разбиений одинаково, т. е. $M = 2$ и $N^1 = N^2 = N$. Пусть $\mathbb{Q}$ множество допустимых разбиений сети на N полигонов, удовлетворяющих условию (1).

Зафиксируем некоторое разбиение g^1 первого типа. Рассмотрим все выгодные для второго ОУР разбиения g^{2*}, доставляющие максимум его целевой функции при фиксированном разбиении первого типа g^1,

$$\hat{Q}^{2^*} \in R^2(\hat{Q}^1) = \operatorname{Arg}\max_{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}} F^2(\hat{Q}^2,\ \overline{Q}^{-2}) =$$
$$= \operatorname{Arg}\max_{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}} F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1) =$$
$$= \operatorname{Arg}\max_{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}} (H^2(\hat{Q}^2) - Z^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1)).$$

Рассмотрим множество $P^{12} = \{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q} \mid F^2(\hat{Q}^2, \hat{Q}^1) \le F^2(\hat{Q}^1,\ \hat{Q}^1),\ \forall \hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}\}$ разбиений первого ОУР, которые выгодны для второго ОУР в том смысле, что он заинтересован выбрать свое разбиение таким же: $\hat{Q}^2 = \hat{Q}^1$. Множество P^{12} назовем множеством согласованных разбиений второго типа. Множество $T^{12} = \bigcup_{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}} R^2(\hat{Q}^1)$ обозначает все выгодные для второго ОУР разбиения при всевозможных разбиениях первого типа.

Далее предполагается выполнение условия *«благожелательности»*: «Если при заданном разбиении $\hat{Q}^1$ первого типа существует разбиение $\hat{Q}^2$ такое, что выполняется равенство $F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1) = F^2(\hat{Q}^1,\ \hat{Q}^1)$, то второй ОУР между разбиениями $\hat{Q}^1$ и $\hat{Q}^2$ выберет $\hat{Q}^1$».

Определение 1. Система разбиений второго типа является *максимально согласованной* с системой разбиения первого типа, если $T^{12} = P^{12}$. ♦

Максимальная согласованность типов разбиений означает, что множество согласованных разбиений, обеспечивающих совпадение разбиения второго типа с разбиением первого типа, «максимально широкое».

2.2. Достаточные условия максимальной согласованности

Теорема 1. *Для максимальной согласованности разбиения второго типа с разбиением первого типа достаточно выполнения «неравенства треугольника» для функций сложности согласования разбиений второго типа:*

$$Z^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1) \le Z^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}) + Z^2(\hat{Q},\ \hat{Q}^1)$$
$$\text{для всех } \hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1,\ \hat{Q} \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся подходом, изложенным в работах [12, 13]. Так как в множество всех выгодных разбиений для второго ОУР входят согласованные разбиения, то $P^{12} \subseteq T^{12}$, следовательно, для справедливости равенства $T^{12} = P^{12}$ достаточно показать, что справедливо соотношение $T^{12} \subseteq P^{12}$. Предположим противное, а именно, для некоторого разбиения первого типа $\hat{Q}$ такого, что $\hat{Q} \in T^{12} \backslash P^{12} \in \varnothing$, второй ОУР выберет разбиение второго типа $\hat{Q}^2$ и $\hat{Q}^2 \ne \hat{Q}$, что означает

$$F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}) > F^2(\hat{Q},\ \hat{Q}), \tag{6}$$

так как $\overline{Q}^{-2} = \hat{Q}$. Строгое неравенство в выражении (6) записано в силу предположения о «благожелательности».

По определению множества T^{12}, а также в силу $\hat{Q} \in T^{12}$, существует разбиение первого типа $\hat{Q}^1$, при котором второй ОУР выберет разбиение $\hat{Q}$, т. е.

$$F^1(\hat{Q},\ \hat{Q}^1) \ge F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1). \tag{7}$$

Складывая неравенства (7) и (8) получаем неравенство

$$F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}) + F^2(\hat{Q},\ \hat{Q}^1) > F^2(\hat{Q},\ \hat{Q}) + F^2(\hat{Q}^2,\ \hat{Q}^1). \tag{8}$$

Подставляя в полученное неравенство (8) выражение для функции полезности (4) и учитывая свойства функции сложности, получаем неравенство $Z^2(\hat{Q}^2, \hat{Q}^1) > Z^2(\hat{Q}^2, \hat{Q}) + Z^2(\hat{Q}, \hat{Q}^1)$, которое противоречит условию (5). Следовательно, равенство $T^{12} = P^{12}$ выполняется. ♦

Определение 2. Система разбиения второго типа, удовлетворяющая условию (5), называется *сильно согласованной* с системой разбиения первого типа. ♦

Таким образом, теорема 1 показывает, что для максимальной согласованности достаточно сильной согласованности соответствующей системы разбиения.

Нетрудно проверить, что функции сложности (3), удовлетворяют условиям теоремы 1.

Аналогично рассмотренному выше варианту согласованности разбиения второго типа с разбиением первого типа можно рассмотреть симметричный вариант согласованности разбиения первого типа с разбиением второго типа.

В этом случае система разбиений первого типа называется *максимально согласованной* с системой разбиения второго типа, если $T^{21} = P^{21}$, где $T^{21} = \bigcup_{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}} R^1(\hat{Q}^2)$, $P^{21} = \{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q} \mid F^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \le F^1(\hat{Q}^2, \hat{Q}^2), \forall \hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}\}$, $R^1(\hat{Q}^2) = \operatorname{Arg}\max_{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}} F^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) = \operatorname{Arg}\max_{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}} (H^1(\hat{Q}^1) - Z^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2))$.

Определение 3. Системы разбиений первого и второго типов назовем *взаимно согласованными*, если $T^{21} = P^{21}$ и $T^{12} = P^{12}$, а $\overline{P} = P^{21} \cap P^{12}$ является множеством *взаимного согласования*. ♦

Пара разбиений $\hat{Q}^1$ первого типа и $\hat{Q}^2$ второго типа является равновесной по Нэшу, если выполняются соотношения

$$\hat{Q}^1 \in R^1(\hat{Q}^2) \text{ и } \hat{Q}^2 \in R^2(\hat{Q}^1). \qquad (9)$$

Теорема 2. *Если система двух типов разбиений взаимно согласована, то множество равновесий по Нэшу содержится в множестве* $\underline{P} = P^{21} \cup P^{12}$. *Если* $\overline{P} \ne \varnothing$, *то* $\overline{P}$ *определяет множество равновесных по Нэшу совпадающих разбиений* $\hat{Q}^{1*}$, $\hat{Q}^{2*}$ *первого и второго типов таких, что* $\hat{Q}^{1*} = \hat{Q}^{2*} = \hat{Q}^*$ *и* $\hat{Q}^* \in \overline{P}$.

Доказательство. Вследствие максимальной согласованности: $P^{21} = T^{21}$ и $P^{12} = T^{12}$. Множества T^{21} и T^{12} содержат все множества $R^1(\hat{Q}^2)$, $R^2(\hat{Q}^1)$ выборов первого и второго ОУР. Таким образом, все равновесные разбиения принадлежат множеству $\underline{P}$.

Рассмотрим некоторое разбиение $\hat{Q}^{1*} \in \overline{P}$. Из взаимной согласованности следует $\hat{Q}^{1*} \in P^{12} = T^{12}$ и $\hat{Q}^{1*} \in P^{21} = T^{21}$, но тогда для разбиения первого типа $\hat{Q}^{1*}$ вторым ОУР будет выбрано разбиение второго типа $\hat{Q}^{2*} \in R^2(\hat{Q}^{1*})$, равное $\hat{Q}^{1*}$. Аналогично доказывается, что $\hat{Q}^{1*} \in R^1(\hat{Q}^{2*})$. Следовательно, $\hat{Q}^{1*} = \hat{Q}^{2*}$. ♦

2.3. Оптимальность согласованных разбиений

Рассмотрим два варианта постановки задачи выбора оптимальных разбиений.

В первом варианте установим приоритетность типов разбиений в соответствии с их нумерацией, т. е. первый тип разбиений имеет наибольший приоритет. В соответствии с приоритетностью, установим последовательность решения задачи разбиения сети. Сначала решается задача разбиения сети на полигоны первого типа, затем второго. При разбиении на полигоны первый ОУР прогнозирует и учитывает выбор вторым ОУР своего разбиения.

Во втором варианте рассмотрим случай, когда ЦО и все ОУР договариваются о выборе некоторой равновесной совокупности всех типов разбиений. При этом ЦО из множества равновесных для ОУР совокупностей разбиений всех типов может устанавливать наиболее для себя предпочтительную совокупность разбиений всех типов.

Для первого варианта в соответствии с последовательностью приоритетов примем, что целевая функция ЦО обладает свойством [20]:

$$\Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^1) \ge \Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \qquad (10)$$

для всех допустимых значений аргументов.

Свойство (10) означает, что ЦО может нести потери, равные $\Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^1) - \Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2)$, при несовпадении $\hat{Q}^1$-го разбиения с разбиением $\hat{Q}^2$.

При рассмотрении первого варианта предположим, что первый ОУР является агентом ЦО и выбирает разбиение первого типа, исходя из условия максимизации целевой функции ЦО. В этом варианте можно считать, что $\Phi(\overline{Q}) = F^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2)$. Таким образом условие (10) имеет вид

$$F^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^1) \ge F^1(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2). \qquad (11)$$

Заметим, что в этом случае условия (10), или (11), наличия потерь в целевой функции ЦО при несовпадении выбора второго ОУР $\hat{Q}^2$ с $\hat{Q}^1$, в силу предположения о наличии в целевой функции первого ОУР затрат на согласование разбиений и условий А — Г, автоматически выполняется.

Определим условия оптимальности выбора $\hat{Q}^1$.

Представим критерий эффективности системы разбиений в виде гарантированного значения целевой функции ЦО $\Phi(\overline{Q})$ на множестве локально-оптимальных разбиений для второго ОУР:

$$K(\hat{Q}^1) = \min_{\hat{Q}^2 \in R^2(\hat{Q}^1)} \Phi(\overline{Q}).$$

Задача определения оптимального разбиения первого типа заключается в нахождении разбиения $\hat{Q}^{1*}$, доставляющего максимум критерия $K(\hat{Q}^{1*})$:

$$K(\hat{Q}^{1*}) = \Phi(\hat{Q}^{1*}, \hat{Q}^{2*}(\hat{Q}^{1*})) = \\ = \max_{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}} \min_{\hat{Q}^2 \in R^2(\hat{Q}^1)} \Phi(\overline{Q}). \quad (12)$$

Теорема 3. *Если система разбиений второго типа является максимально согласованной с системой разбиения первого типа, выполняется условие* (10), *то оптимальное разбиение* $\hat{Q}^{1*}$, $\hat{Q}^{2*}(\hat{Q}^{1*})$ *в задаче* (12) *определяется как решение задачи* $K(\hat{Q}^*) = \max_{\hat{Q} \in P^{12}} \Phi(\hat{Q}, \hat{Q})$, *и* $\hat{Q}^{1*} = \hat{Q}^{2*} = \hat{Q}^*$.

Доказательство. Так как множество всех разбиений $R^2(\hat{Q}^{1*})$, «выгодных» для второго ОУР при любых допустимых выборах разбиений первым ОУР содержится в множестве T^{12}, максимальная согласованность означает $T^{12} = P^{12}$, следовательно, справедливо равенство $\max_{\hat{Q}^1 \in \mathbb{Q}} \min_{\hat{Q}^2 \in R^2(\hat{Q}^1)} \Phi(\overline{Q}) = \max_{\hat{Q} \in P^{12}} \Phi(\hat{Q}, \hat{Q})$. ♦

Во втором варианте постановки задачи предполагается, что ЦО выбирает лучшие для себя разбиения среди равновесных по Нэшу разбиений (9) первого и второго типов.

Критерий эффективности разбиений в этом случае имеет вид

$$K(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) = \Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2), \quad (13)$$

где $\hat{Q}^1 \in R^1(\hat{Q}^2)$, $\hat{Q}^2 \in R^2(\hat{Q}^1)$.

Обозначим $\tilde{R}$ множество равновесных разбиений $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2)$, удовлетворяющих условию (9).

Задача определения оптимальных разбиений для критерия (13) заключается в нахождении разбиений $\hat{Q}^{1*}$, $\hat{Q}^{2*}$, удовлетворяющих условию:

$$K(\hat{Q}^{1*}, \hat{Q}^{2*}) = \Phi(\hat{Q}^{1*}, \hat{Q}^{2*}) = \\ = \max_{(\hat{Q}^1 \hat{Q}^2) \in \tilde{R}} \Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2). \quad (14)$$

Исследования второго варианта постановки задачи (14) проведем для частного случая, когда целевая функция центра имеет вид

$$\Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) = H^0(\hat{Q}^1) - Z^0(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2), \quad (15)$$

где функция потерь от несовпадения $\hat{Q}^1$ с $\hat{Q}^2$

$$Z^0(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) = \begin{cases} C^0, \text{если } \hat{Q}^1 \neq \hat{Q}^2, \\ 0, \text{если } \hat{Q}^1 = \hat{Q}^2. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $C^0 > 0$. В этом случае целевая функция центра вместо неравенства (10) удовлетворяет более «жесткому» условию максимальной согласованности:

$$T^0 = P^0, \quad (17)$$

где $P^0 = \{\hat{Q} \in \mathbb{Q} \,|\Phi(\hat{Q}, \hat{Q}^2) \le \Phi(\hat{Q}, \hat{Q}), \forall \hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}\} = \{\hat{Q} \in \mathbb{Q} \mid H^0_{\max} - C^0 \le H^0(\hat{Q})\}$,

$H^0_{\max} = \max_{\hat{Q} \in \mathbb{Q}} H^0(\hat{Q})$, $T^0 = \bigcup_{\hat{Q} \in \mathbb{Q}} R^0(\hat{Q})$,

$R^0(\hat{Q}) = \operatorname{Arg} \max_{\hat{Q}^2 \in \mathbb{Q}} \Phi(\hat{Q}^2, \hat{Q})$.

Теорема 4. *Если система разбиений взаимно согласована и* $P^0 \cap \overline{P} \neq \varnothing$, *то для целевой функции центра* (15), (16) *решение задачи*

$$K(\hat{Q}^*, \hat{Q}^*) = \\ = \max_{\hat{Q} \in P^0 \cap \overline{P}} \Phi(\hat{Q}, \hat{Q}) = \max_{\hat{Q} \in P^0 \cap \overline{P}} H^0(\hat{Q}) \quad (18)$$

является решением задачи определения оптимальных равновесных разбиений по критерию (14), *и* $\hat{Q}^{1*} = \hat{Q}^{2*} = \hat{Q}^*$.

Доказательство. Пусть пара разбиений $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2)$ является равновесной, т. е. $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \in \tilde{R}$. По теореме 2 множество равновесных разбиений содержится во множестве $\underline{P} = P^{21} \cup P^{12}$. Рассмотрим пару разбиений $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \in \tilde{R}$ такую, что $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \notin \overline{P} = P^{21} \cap P^{12}$, т. е. $(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \in \underline{P} \backslash \overline{P}$. В этом случае $\hat{Q}^1 \neq \hat{Q}^2$ и, следовательно, $\Phi(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) = H^0(\hat{Q}^1) - Z^0(\hat{Q}^1, \hat{Q}^2) \le H^0_{\max} - C^0$.

Рассмотрим теперь пару разбиений $(\hat{Q}^{1'}, \hat{Q}^{2'}) \in \overline{P} \backslash P^0$. В этом случае $\hat{Q}^{1'} = \hat{Q}^{2'} = \hat{Q}'$. $\Phi(\hat{Q}', \hat{Q}') = H^0(\hat{Q}') - Z^0(\hat{Q}', \hat{Q}') = H^0(\hat{Q}') < H^0_{\max} - C^0$, так как $\hat{Q}' \notin P^0$.

Наконец, в случае $(\hat{Q}^{1*}, \hat{Q}^{2*}) = \hat{Q}^* \in \overline{P} \cap P^0$, так как $\hat{Q}^* \in P^0$, имеем $\Phi(\hat{Q}^*, \hat{Q}^*) = H^0(\hat{Q}^*) \ge H^0_{\max} - C^0$, что доказывает теорему. ♦

Теорема 4 показывает, что при условии непустоты пересечения множеств максимального согласования всех типов разбиений и множества максимального согласования (17) целевой функции ЦО задача (14)—(16) сводится к оптимизационной задаче (18) и в оптимальном решении задачи (14) разбиения всех типов совпадают друг с другом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем полученные результаты:

- описана математическая модель согласования различных типов разбиений сети;
- поставлена задача согласования границ полигонов для различных типов разбиения сети;
- получены достаточные условия максимальной согласованности (совпадения), границ полигонов двух различных типов разбиений;
- определены условия существования согласованных равновесных разбиений по Нэшу;
- исследованы условия оптимальности согласованной равновесной по Нэшу системы разбиений.

Представленные результаты могут быть полезны при анализе систем управления крупномасштабными сетями в различных прикладных задачах, где присутствуют различные типы разбиений. Основой для постановок и начала исследования рассмотренных выше задач послужили разработки систем управления сетью российских железных дорог [3, 7, 9] и ряд результатов теории активных систем [11—13].

Дальнейшее развитие исследований видится в направлении детализации условий сильного согласования не только для разбиений (6), но и функций затрат полигонов, входящих в эти разбиения. Это позволило бы свести анализ согласованности к анализу более простых функций $z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m}, Q^p_{k^p})$ пересекающихся полигонов k^m и k^p по сравнению с анализом функций затрат разбиений $Z^m(\hat{Q}^m, \overline{Q}^{-m}) = \sum_{k^m=1}^{N^m} Z^m_{k^m}(Q^m_{k^m}, \overline{Q}^{-m})$, где $Z^m_{k^m}(Q^m_{k^m}, \overline{Q}^{-m}) = \sum_{p=1}^{M} \sum_{k^p=1}^{N^p} z_{k^m k^p}(Q^m_{k^m}, Q^p_{k^p})$.

Следующее направление развития исследований состоит в обобщении результатов на случаи, когда имеется более двух типов разбиений и когда число полигонов в разных разбиениях различно, т. е. $N^m \neq N^p$. Здесь следует рассмотреть условия согласования для вариантов кратно вложенных полигонов, когда полигон одного разбиения может складывается как объединение нескольких полигонов другого разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Полигоны информационного управления в больших социальных и экономических сетях // Информационные войны. — 2013. — № 4. — С. 62—68.
2. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Формирование полигонов управления движением // Информационные технологии в науке, социологии и бизнесе: Материалы XLI междунар. конф. IT + S & E'13. Осенняя сессия, Ялта — Гурзуф, 2—10 окт. 2013 г. — С. 54—56.
3. *Математические* модели оптимизации структуры системы управления крупномасштабной транспортной корпорации / Белый О.В и др. // Транспорт: Наука, Техника, Управление. — 2014. — № 1. — С. 7—16.
4. *Белый О.В., Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Оценка сложности управления движением // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе: Материалы XLII междунар. конф. IT + SE'14. Майская сессия, Крым, Ялта — Гурзуф, 22 мая — 1 июня 2014 г. — С. 158—160.
5. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Оценка показателей сложности регионального управления в сетевых структурах. // Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Теория активных систем» (ТАС-2014). Москва, ИПУ РАН, 2014. — М., 2014. — С. 148—149.
6. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Полигоны управления в крупномасштабных сетевых организациях // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. ВСПУ-2014, Москва, 16—19 июня 2014 г., ИПУ РАН.— С. 5159—5170.
7. *Проблемы* оптимизации структуры регионального управления движением, инфраструктурой, железнодорожными перевозками / Белый О.В и др. / В кн.: «Научное обеспечение инновационного развития и повышения эффективности деятельности железнодорожного транспорта: коллективная монография членов и научных партнеров Объединенного ученого совета ОАО «РЖД» / под ред. Б.М. Лапидуса. — М.: MittelPress, 2014. — С. 39—55.
8. *Еналеев А.К., Цыганов В.В., Кузнецов Н.И.* Разработка полигонов управления в организационных сетевых структурах // Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе: Материалы XLII междунар. конф. IT + SE'14. Осенняя сессия. Ялта — Гурзуф, 1—10 окт. 2014 г. — С. 55—57.
9. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Модели и методы реформирования структуры регионального управления железнодорожным транспортом // Управление развитием крупномасштабных систем, MLSD'2014: Сб. науч. тр. / под общ. ред. С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. — М., 2014. — С. 263—273.
10. *Еналеев А.К., Цыганов В.В.* Организационные структуры информационного управления крупномасштабными сетями // Информационные войны. — 2015. — № 4. — С. 59—67.
11. *Еналеев А.К.* Разработка механизмов стимулирования и управления в двухуровневых активных системах: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: МФТИ, 1980. — 18 с.
12. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В.* Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 6. — С. 110—116.
13. *Большие* системы: моделирование организационных механизмов / Бурков В.Н. и др. — М.: Наука, 1989. — 245 с.
14. *Механизмы* управления / Под ред. Д.А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2011. — 192 с.
15. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — М.: Физматлит, 2007. — 584 с.
16. *Мишин С.П.* Оптимальные иерархии управления в экономических системах. — М.: ПМСОФТ, 2004. — 205 с.
17. *Губко М.В.* Математические модели оптимизации иерархических структур. — М.: ЛЕНАНД, 2006. — 264 с.
18. *Каляев И.А., Левин И.И.* Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные системы для решения потоковых задач обработки информации и управления // Пленарные доклады 5-й междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» (PACO'10). — М., 2010. — С. 23—37.
19. *Курейчик В.М., Глушань В.М., Щербаков Л.И.* Комбинаторные аппаратные модели и алгоритмы в САПР. — М.: Радио и связь, 1990. — 216 с.
20. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 256 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Еналеев Анвер Касимович — канд. техн. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ anverena@mail.ru.