УДК 681.5.015.3;621.311

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

А.Е. Ефимов, О.Л. Опалев, И.Б. Ядыкин

Выполнен анализ устойчивости электроэнергетической системы путем исследования свойств матрицы динамики ее линеаризованной модели. Введена мера устойчивости, зависящая от параметров электроэнергетической системы, решена задача оценивания запаса устойчивости ее режимов. Разработан алгоритм вычисления коэффициентов влияния параметров режима на показатель устойчивости.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, математическая модель, устойчивость по Ляпунову, запас устойчивости, матрица динамики, показатель устойчивости, коэффициент влияния.

ВВЕДЕНИЕ

Электроэнергетическая система (ЭЭС), обеспечивающая работу промышленности, транспорта, быт населения — всю жизнедеятельность охваченных электрической сетью территорий, должна работать надежно, прежде всего, устойчиво [1]. Под устойчивой работой ЭЭС (или, просто, устойчивостью ЭЭС) понимается синхронность работы ее генераторов или, в терминах режимного управления, постоянство относительных фазовых углов их ЭДС.

Исследование устойчивости ЭЭС базируется на математической модели в виде системы дифференциальных уравнений, описывающей ее работу и взаимодействие ее элементов. В данной статье под устойчивостью ЭЭС понимается устойчивость по Ляпунову, а для ее исследования применяется метод первого приближения и теоремы Ляпунова.

При анализе устойчивости ЭЭС важно оценить коэффициенты влияния параметров режима на устойчивость. Под параметрами режима понимаются показатели, количественно определяющие условия работы системы. К ним относятся амплитуды и фазы напряжений, токов, ЭДС, а также активные и реактивные мощности и др.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Описание электроэнергетической системы. Матрица динамики системы

В качестве математической модели ЭЭС рассматривается система дифференциальных уравнений движения роторов генераторов без учета демпфирования, независимыми переменными служат абсолютные и относительные фазовые углы ЭДС генераторов:

$$T_1\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = P_{10} - P_1(\delta_{12}, \delta_{13}, ..., \delta_{1n}),$$
$$\cdots$$
$$T_n\frac{d^2\delta_n}{dt^2} = P_{n0} - P_n(\delta_{12}, \delta_{13}, ..., \delta_{1n}), \qquad (1)$$

где P_{i0} — механическая мощность на валу i-го генератора; $i = 1, ..., n$; P_i — электрическая мощность, отдаваемая в сеть i-м генератором; δ_i — фаза ЭДС i-го генератора; $\delta_{1i} = \delta_1 - \delta_i$ — относительный фазовый угол между фазовыми углами ЭДС первого и i-го генераторов; T_i — постоянная инерции ротора генератора; n — число генераторов. Предполагается, что изменение скорости вращения ротора отдельного генератора на протяжении всего времени рассматриваемого процесса значительно меньше, чем синхронная скорость [1].

Вид системы уравнений (1) позволяет привести ее к нормальной форме Коши и применить метод первого приближения и теоремы Ляпунова об устойчивости.

После линеаризации в окрестности некоторой исходной стационарной точки $\{\delta_i(0), ..., \delta_n(0)\}$ система уравнений (1) примет вид

$$T_1\frac{d^2\Delta\delta_1}{dt^2} + \frac{\partial P_1}{\partial\delta_{12}}\Delta\delta_{12} + ... + \frac{\partial P_1}{\partial\delta_{1n}}\Delta\delta_{1n} = 0,$$

$$T_n\frac{d^2\Delta\delta_n}{dt^2} + \frac{\partial P_n}{\partial\delta_{12}}\Delta\delta_{12} + ... + \frac{\partial P_n}{\partial\delta_{1n}}\Delta\delta_{1n} = 0, \quad (2)$$

где $\Delta\delta_i = \delta_i(t) - \delta_i(0)$.

Деление каждого из уравнений системы (2) на соответствующее значение T_i и вычитание каждого уравнения из первого позволяют привести ее к виду

$$\frac{d^2\Delta\delta_{12}}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial\delta_{12}} - \frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial\delta_{12}}\right)\Delta\delta_{12} + ...$$
$$... + \left(\frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial\delta_{1n}} - \frac{1}{T_2}\frac{\partial P_2}{\partial\delta_{1n}}\right)\Delta\delta_{1n} = 0,$$

$$\frac{d^2\Delta\delta_{1n}}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial\delta_{12}} - \frac{1}{T_n}\frac{\partial P_n}{\partial\delta_{12}}\right)\Delta\delta_{12} + ...$$
$$... + \left(\frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial\delta_{1n}} - \frac{1}{T_n}\frac{\partial P_n}{\partial\delta_{1n}}\right)\Delta\delta_{1n} = 0, \quad (3)$$

или в матричной форме $\ddot{X} + AX = 0$, где $X = (\Delta\delta_{12}, \Delta\delta_{13}, ..., \Delta\delta_{1n})^T$.

Путем замены $\dot{X} = Y$ система приводится к виду:

$$\begin{vmatrix} \dot{Y} \\ \dot{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -A \\ E & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y \\ X \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Матрица данной системы дифференциальных уравнений является *матрицей динамики* энергосистемы.

2.2. Показатель устойчивости

Система дифференциальных уравнений (4) — линейная однородная система с постоянными коэффициентами, записанная в нормальной форме Коши. Если задать начальное условие, то решение задачи Коши можно найти аналитически. При этом характер движения системы полностью определяется собственными числами матрицы коэффициентов дифференциальных уравнений, т. е. матрицы динамики энергосистемы.

Ответ на вопрос устойчива или неустойчива энергосистема, описываемая системой уравнений (4), дают две теоремы Ляпунова [2], согласно которым степень устойчивости определяется собственным числом с максимальной действительной частью.

Назовем действительную часть такого собственного числа *показателем устойчивости* системы (4) и обозначим его χ:

$$\chi = \max_k(\mathrm{Re}(\lambda_k)) = \mathrm{Re}(\lambda_\chi), \quad k = \overline{1, 2n-2},$$

где λ_k — собственное число матрицы динамики, $2n - 2$ — ее ранг.

Анализ аналитического решения [3] системы (4) показывает, что если показатель устойчивости положителен, то ЭЭС неустойчива и, следовательно, при некотором малом начальном возмущении теряет устойчивость.

Поскольку ненулевые собственные числа матриц систем (3) и (4) совпадают, то показатели устойчивости данных систем также совпадают. Следовательно, для изучения устойчивости ЭЭС достаточно ограничиться рассмотрением матрицы системы (3) — матрицы A. Далее по тексту под матрицей динамики подразумевается A.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЛИЯНИЯ

Для определения коэффициента влияния параметров режима на устойчивость энергосистемы рассмотрим произвольный стационарный режим ее работы, описываемый системой уравнений (3) с соответствующим показателем устойчивости. При малом изменении какого-либо одного параметра режима исходный режим перейдет в другой, близкий ему и тоже стационарный. Показатель устойчивости нового режима при этом будет отличаться от исходного показателя устойчивости на некую малую величину. Таким образом, можно определить коэффициент влияния данного параметра режима как коэффициент пропорциональности между малым изменением параметра режима и соответствующим малым изменением показателя устойчивости энергосистемы.

Другими словами коэффициент влияния параметра режима на устойчивость энергосистемы есть частная производная показателя устойчивости по данному параметру при квазистационарном изменении режима: $k_{p_g} = \partial\chi/\partial p_g$, где p_g — параметр режима энергосистемы.

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$k_{p_g} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial\chi}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_g}, \qquad (5)$$

где a_{ij} — элемент матрицы A динамики энергосистемы ранга $n - 1$ (n — число генераторов системы) с показателем устойчивости χ.

3.1. Лемма о вычислении частных производных собственного числа матрицы динамики по элементам матрицы

Выражение (5) для расчета коэффициента влияния параметра режима включает в себя частные производные действительной части собственного числа матрицы динамики A по элементам этой матрицы a_{ij}. Так как все элементы матрицы динамики числа действительные, то для данных частных производных справедливо

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(\lambda_k)}{\partial a_{ij}} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{ij}}\right).$$

Для вычисления частной производной в правой части данного равенства сформулируем следующую лемму.

Лемма. Если λ_k — собственное число матрицы $A = \|a_{ij}\|$,

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial a_{ij}} = \frac{x_{ji}}{\mathrm{tr}(X)}, \qquad (6)$$

где X — присоединенная (союзная) матрица к характеристической матрице матрицы A: $X = \mathrm{adj}(A - \lambda_k E)$. ♦

Отметим, что частные производные собственных чисел по элементам матрицы могут иметь точки разрыва. Однако они находятся за областью существования режимов физической системы, описываемой представленной в статье моделью, и поэтому здесь не рассматриваются.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

3.2. Расчет элементов матрицы динамики

Следующий шаг расчета коэффициентов влияния состоит в определении элементов матрицы динамики энергосистемы. Для этого необходимо выразить активную мощность, отдаваемую в сеть k-м генератором, через относительные фазовые углы ЭДС. Такую зависимость принято называть характеристикой мощности генератора [1, 4].

Для расчета электрического тока через k-й генератор применяется метод наложения, в соответствии с которым

$$I_k = E_1 Y_{k1} + E_2 Y_{k2} + \ldots + E_n Y_{kn} = \sum_{i=1}^{n} E_i Y_{ki}.$$

Собственные и взаимные проводимости электрической системы (Y_{ii} и Y_{ki}) находятся путем комбинации метода единичных ЭДС [1] и решения системы уравнений баланса мощностей.

Комплексное значение мощности, отдаваемой генератором в сеть, определяется как произведение комплексного напряжения, действующего на шинах генератора, на сопряженный комплексный ток:

$$S_k = U_k \overline{I_k} = U_k \overline{E_1 Y_{k1}} + U_k \overline{E_2 Y_{k2}} + \ldots$$
$$\ldots + U_k \overline{E_n Y_{kn}} = U_k \sum_{t=1}^{n} \overline{E_t Y_{kt}}.$$

Если перейти к экспоненциальной форме записи $U_1 = U_1 e^{j\gamma_1}$, $E_k = E_k e^{j\delta_k}$, $Y_{pq} = Y_{pq} e^{f\Psi_{pq}}$, то

$$S_k = U_k \sum_{i=1}^{n} \overline{E_t Y_{kt}} = U_k e^{j\gamma_k} \sum_{i=1}^{n} E_t e^{-j\delta_i} Y_{ki} e^{f\Psi_{ki}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} U_k E_i Y_{ki} e^{j(\gamma_k - \delta_i - \Psi_{ki})}.$$

Соответственно, отдаваемая активная мощность генератора

$$P_k = \sum_{i=1}^{n} U_k E_i Y_{ki} \cos(\gamma_k - \delta_i - \Psi_{ki}).$$

После замены аргументов Ψ_{pq} дополняющими их до 90° аргументами $\alpha_{pq} = 90° - \Psi_{pq}$ и введения разности фаз между напряжением и ЭДС k-го генератора ($\delta_k^0 = \gamma_k - \delta_k$) и разности фаз между ЭДС k-го и i-го генераторов ($\delta_{ki} = \delta_k - \delta_i$) характеристика мощности в относительных фазовых углах принимает вид

$$P_k(\delta_{11}, \ldots, \delta_{1n}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} U_k E_t Y_{ki} \sin(\delta_k^0 + (\delta_{1i} - \delta_{1k}) + \alpha_{ki}). \qquad (7)$$

Расчет частных производных полученных функций мощностей генераторов позволяет получить в аналитическом виде элементы матрицы динамики энергосистемы (см. систему (3)):

$$a_{j,\,k} = \frac{1}{T_1}\frac{\partial P_1}{\partial \delta_{1,\,k+1}} - \frac{1}{T_{j+1}}\frac{\partial P_{j+1}}{\partial \delta_{1,\,k+1}} =$$
$$= \frac{1}{T_1}U_1E_{k+1}Y_{1,\,k+1}\cos(\delta_1^0 + \delta_{1,\,k+1}) -$$
$$- \frac{1}{T_{j+1}}U_{j+1}E_{k+1}Y_{j+1,\,k+1}\cos(\delta_{j+1}^0 +$$
$$+ (\delta_{1,\,k+1} - \delta_{1,\,j+1}) + \alpha_{j+1,\,k+1}) +$$
$$+ \delta(j,\,k)\frac{1}{T_{j+1}}\sum_{i=1}^{n}U_{j+1}E_iY_{j+1,\,i}\cos(\delta_{j+1}^0 +$$
$$+ (\delta_{1i} - \delta_{1,\,j+1}) + \alpha_{j+1,\,i}), \qquad (8)$$

где $\delta(j,\,k)$ — символ Кронекера, T_i — постоянная инерции i-го генератора, P_i — активная мощность i-го генератора, U_i — напряжение в узле, к которому присоединен i-й генератор, E_i — ЭДС i-го генератора, Y_{jk} — элемент матрицы проводимостей, α_{jk} — величина, дополняющая до 90° фазовый угол проводимости Y_{jk}, δ_i^0 — угол между напряжением и ЭДС i-го генератора, $\delta_{1i} = \delta_1 - \delta_i$ — относительный угол между ЭДС 1-го и i-го генераторов, n — число генераторов.

3.3. Алгоритм поиска коэффициентов влияния

Алгоритм поиска коэффициентов влияния параметров p_g режима на устойчивость электрической энергосистемы состоит из следующих основных шагов.

Шаг 1. Определение базиса независимых переменных, однозначно описывающих режим энергосистемы при известных системных параметрах, таких как проводимости линий, собственные сопротивления генераторов и др. Например, в качестве такого базиса можно использовать амплитуды и фазы ЭДС всех генераторов системы либо активные и реактивные мощности генераторов:

$$b = \{E_1,\,...,\,E_n,\,\delta_1,\,...,\,\delta_n\} \text{ или}$$
$$b = \{P_1,\,...,\,P_n,\,Q_1,\,...,\,Q_n\}.$$

Шаг 2. Вычисление частных производных параметров режима, входящих в характеристики мощности генераторов (7), и параметров p_g режима по выбранным базисным переменным. Для этого необходимо записать уравнения балансов активных и реактивных мощностей в узлах ЭЭС (уравнения установившегося режима [5]) в базисных переменных и выразить из них искомые частные производные $\partial U_k/\partial b_l$, $\partial \delta_k^0/\partial b_l$, $\partial E_k/\partial b_l$, $\partial \delta_{1k}/\partial b_l$, $\partial p_g/\partial b_l$.

Шаг 3. Вычисление частных производных элементов матрицы динамики по базисным переменным в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_l} = \sum_k\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial U_k}\frac{\partial U_k}{\partial b_l} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial b_l} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial a_{ij}}{\partial \delta_k^0}\frac{\partial \delta_k^0}{\partial b_l} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial \delta_{1k}}\frac{\partial \delta_{1k}}{\partial b_l}\right), \qquad (9)$$

где частные производные $\frac{\partial a_{ij}}{\partial U_k}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial E_k}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \delta_k^0}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \delta_{1k}}$ рассчитываются из выражения (8).

Шаг 4. Вычисление частных производных элементов матрицы динамики по параметрам p_g режима:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_g} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_l}\left(\frac{\partial p_g}{\partial b_l}\right)^{-1}.$$

Шаг 5. Определение коэффициентов влияния

$$k_{p_g} = \frac{\partial \chi}{\partial p_g} = \sum_{i,\,j=1}^{n-1}\frac{\partial \chi}{\partial a_{ij}}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_g} =$$
$$= \sum_{i,\,j=1}^{n-1}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \lambda_\chi}{\partial a_{ij}}\right)\sum_{l=1}^{2n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_l}\left(\frac{\partial p_g}{\partial b_l}\right)^{-1}, \qquad (10)$$

где λ_χ — собственное число матрицы динамики с максимальной действительной частью.

Итак, коэффициенты влияния параметров режима на устойчивость энергосистемы вычисляются по выражению (10) через частные производные (6) собственного числа матрицы динамики по элементам матрицы (8) и частные производные элементов матрицы динамики по базисным переменным (9).

Ранжирование рассчитываемых значений коэффициентов влияния при нахождении показателя устойчивости в зоне минимального запаса устойчивости или переходе в область, соответствующую неустойчивому состоянию системы, позволит идентифицировать наиболее проблемные элементы энергосистемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная методика оценивания устойчивости режимов электроэнергетических систем основана на классической теории устойчивости по Ляпунову и представлении энергосистемы в виде физико-математической модели. На основе теорем Ляпунова предложена мера устойчивости энергосистемы, основанная на вычислении спектра матрицы динамики системы и выделении корня характеристического уравнения с максимальным значением вещественной части. Для построения эффективных законов управления энергосистемой важно определить те параметры режима, которые обеспечивают наибольший отклик на приложенное изменение параметра режима.

Предложенный алгоритм расчета коэффициентов влияния параметров режима на устойчивость электроэнергетической системы может быть применён для определения оптимальных управляющих воздействий, позволяющих выйти из зоны опасной близости к предельному режиму, либо для управления коэффициентом запаса энергосистемы по устойчивости. Ранжирование значений коэффициентов влияния позволит выделить наиболее проблемные в смысле влияния на устойчивость элементы энергосистемы.

При расчете коэффициентов влияния параметров режима на устойчивость электроэнергетической системы важную роль играет лемма о вычислении частных производных собственного числа матрицы по ее элементам. Ввиду большой размерности матрицы динамики энергетической системы, любое решение задачи анализа устойчивости энергосистемы включает в себя решение задачи редукции математической модели.

Опираясь на описанную методику и результаты анализа влияния параметров режима на устойчивость электроэнергетической системы, можно сформировать эквивалентные модели ЭЭС, удобные для анализа ее устойчивости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Обозначим $B = A - \lambda E$ и запишем характеристическое уравнение $\det(B) = 0$, из которого следует $d\det(B) = 0$.

Согласно формуле Якоби [6] $d\det(B) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(B)dB)$.

Из равенства дифференциала детерминанта нулю следует, что

$$\mathrm{tr}(\mathrm{adj}(B)dB) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(A - \lambda E)(dA - d\lambda E)) = 0.$$

Обозначим $X = \mathrm{adj}(A - \lambda E)$, тогда

$$\mathrm{tr}(X(dA - d\lambda E)) = \mathrm{tr}(XdA) - d\lambda\mathrm{tr}(X) = 0. \qquad (11)$$

Если $da_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq r, j \neq s, \\ da_{rs}, & i = r, j = s, \end{cases}$

то

$$(XdA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} da_{kj} = \begin{cases} 0, & j \neq s, \\ x_{ir} da_{rs}, & j = s. \end{cases}$$

Соответственно, в матрице (XdA) только в s-м столбце имеются элементы, отличные от нуля. Из этого следует

$$\mathrm{tr}(XdA) = (XdA)_{s,s} = x_{sr} da_{rs}.$$

Подставив данное выражение в формулу (11), получим

$$x_{sr} da_{rs} - d\lambda\mathrm{tr}(X) = 0.$$

Следовательно

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a_{rs}} = \frac{x_{sr}}{\mathrm{tr}(X)}. \ \blacklozenge$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веников В.А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. — М.: Высшая школа, 1985. — 536 с.
2. *Методы* классической и современной теории управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. *Давыдов В.В., Неуймин В.Г., Сактоев В.Е.* Определение критических сечений энергосистем в предельных режимах // Российская академия наук. Энергетика и транспорт. — Улан-Удэ: 1992. — Том 38.
4. *Куликов Ю.А.* Переходные процессы в электрических системах. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. — 283 с.
5. *Идельчик В.И.* Расчеты установившихся режимов электрических систем. — М.: Энергия, 1977. — 192 с.
6. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1999. — 395 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Ефимов Артем Евгеньевич — аналитик Департамента по развитию, ЗАО «Институт энергетических систем», ✉ efimov.artem@gmail.com,

Опалев Олег Леонидович — вед. специалист, ОАО «Системный оператор Единой энергетической системы», ✉ opalev_oleg@mail.ru,

Ядыкин Игорь Борисович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, ☎ (495) 334-90-31, ✉ Jad@ipu.ru.