УДК 517/519:62.50:681.306

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ВЫРОЖДЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков

Рассмотрены вопросы формирования функционалов вырождения для сложных технических систем, компоненты векторно-матричного описания динамики которых содержат интервальные параметры. Описано конструирование функционалов вырождения с помощью функций параметрической чувствительности элементов алгебраических и геометрических спектров критериальной матрицы системы. Предложен алгоритм формирования оценок относительной интервальности функционалов вырождения.

Ключевые слова: сложная техническая система, функционал вырождения, интервальный системный параметр, векторно-матричное представление, оценка относительной интервальности.

ВВЕДЕНИЕ

Задача формирования функционалов вырождения [1] сложной технической системы (СТС) управления типа «многомерный вход — многомерный выход» (МВМВ) встречается с неожиданными трудностями, если компоненты их математического описания имеют интервальные системные параметры. Под системными параметрами понимаются коэффициенты полиномов числителей и знаменателей передаточных функций сепаратных каналов СТС в случае использования для их модельного представления отношения «вход — выход» [2]. При описании сложных систем МВМВ-типа в терминах пространства состояний под системными параметрами понимаются элементы матриц входа, состояния и выхода этой системы. Интервальность системных параметров системы МВМВ-типа естественным образом влечет за собой интервальность функционалов вырождения.

Предмет настоящей статьи состоит в поиске аналитических связей интервальности функционалов вырождения с интервальностью системных параметров сложных систем МВМВ-типа, описываемых в терминах пространства состояний.

В своем исследовании авторы опирались на аппарат интервальных представлений, теории параметрической чувствительности применительно к элементам алгебраических спектров собственных значений и сингулярных чисел, геометрического спектра собственных векторов критериальных матриц, а также матричных функций от матриц.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ, СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ И ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

Рассматривается матрица $H(q)_{n\times n}$, элементы которой зависят от вектора q параметров q_j, т. е. $q = \mathrm{col}\{q_j;\ j = \overline{1, p}\}$. Вектор q представим в форме $q = q_0 + \Delta q$, где q_0 — его номинальное значение, а Δq — его вариация относительно q_0.

От параметров q_j $(j = \overline{1, p})$ оказываются зависимыми и элементы $\lambda_i(q)$ алгебраического спектра $\sigma\{H(q)\} = \{\lambda_i(q) : \det[\lambda_i(q)I - H(q)] = 0;\ i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы $H(q)$ и элементы геометрического спектра $\xi_i(q)$ ее собственных векторов

$$H(q)\xi_i(q) = \lambda_i(q)\xi_i(q); \quad i = \overline{1, n}. \qquad (1)$$

Если для матрицы $H(q)$ построить сингулярное разложение, то получим представление

$$H(q) = U(q)\Sigma(q)V^T(q),$$

где $\Sigma(q) = \mathrm{diag}\{\alpha_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$ — диагональная для $\forall q$ матрица сингулярных чисел $\alpha_i(q)$, вычисляемых в силу соотношений

$$\alpha_i(q) = |\mu^{1/2}(q)|\det(\mu_i(q)I - H(q)H^T(q)) = \\ = \det(\mu_i(q)I - H^T(q)H(q)) = 0, \qquad (2)$$

где $\mu_i : \det(\mu I - H^T H) = 0$, $U(q)$, $V(q)$ — ортогональные для $\forall q$ матрицы, образующие левый и правый сингулярный базисы, такие что

$$U(q)U^T(q) = U^T(q)U(q) = I,$$
$$V(q)V^T(q) = V^T(q)V(q) = I.$$

Таким образом, матрица $H(q)$ обладает алгебраическим спектром сингулярных чисел $\sigma_\alpha\{H(q)\} = \{\alpha_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$ и двумя геометрическими спектрами с элементами $U(q)$ и $V(q)$, образующими левый $U(q) = \mathrm{row}\{U_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$ и правый $V(q) = \mathrm{row}\{V_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$ сингулярные базисы, элементы которых связаны соотношением $H(q)V_i(q) = \alpha_i(q)U_i(q)$.

Ставится задача конструирования функций параметрической чувствительности

$$\lambda_{iq_j} = \left.\frac{\partial\lambda_i(q)}{\partial q_j}\right|_{q = q_0}, \quad \xi_{iq_j} = \left.\frac{\partial\xi_i(q)}{\partial\xi_j}\right|_{q = q_0}$$
$$\text{и } \alpha_{iq_j} = \left.\frac{\partial\alpha_i(q)}{\partial\alpha_j}\right|_{q = q_0}$$

соответственно собственных значений, собственных векторов и сингулярных чисел критериальной матрицы $N(q)$.

Утверждение 1. *Пусть матрица $H(q)$ имеет простую структуру и вещественный спектр $\sigma\{H(q)\} = \{\lambda_i(\lambda_i = 0;\ i = \overline{1, n})\}$, тогда*

$$\lambda_{iq_j} = (M^{-1})^i H_{q_j} M_i = (M^{-1}H_{q_j}M)_{ii}, \qquad (3)$$

где $M = M(q)|_{q = q_0}$ — матрица приведения матрицы $H(q)$ к диагональному виду, M_i — i-й столбец матрицы M, $(M^{-1})^i$ — i-я строка матрицы M^{-1}, H_{q_j} — матрица чувствительности матрицы $H(q)$, получаемая дифференцированием всех ее элементов по параметру q_j. ♦

Доказательство утверждения 1 можно найти в книге [3].

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности собственных значений λ_{iq_j} матрицы простой структуры $H(q)$, именуемых также функциями модальной чувствительности [4], может быть сконструирована матрица $S_\lambda = S_\lambda(q_0)$ модальной чувствительности [5]

$$S_\lambda = \mathrm{row}\{\mathrm{col}\{\lambda_{iq_j};\ i = \overline{1, n}\};\ j = \overline{1, p}\}.$$

Столбцы матрицы модальной чувствительности S_λ составлены из функций чувствительности всех собственных значений (мод) λ_{iq_j} к вариациям одного параметра q_j, $j = \overline{1, p}$, строки этой матрицы составлены из функций чувствительности одного собственного значения $\lambda_i(q)$ к вариациям всех параметров q_j. Если на векторе $\Delta q = \mathrm{col}\{\Delta q_j;\ j = \overline{1, p}\}$ вариаций вектора параметров q относительно номинального значения q_0 сконструировать вектор $\Delta\lambda = \mathrm{col}\{\Delta\lambda_i;\ i = \overline{1, n}\}$ вариаций собственных значений, то эти векторы оказываются связанными соотношением

$$\Delta\lambda(q_0, \Delta q) = S_\lambda(q_0)\Delta q. \qquad (4)$$

Векторно-матричное соотношение (4) решает задачу оценки вариации собственных значений матрицы $H(q)$. Тогда, если воспользоваться сингулярным разложением матрицы модальной чувствительности $S_\lambda = U_\lambda\Sigma_\lambda V_\lambda^T$, при этом выделить согласованные тройки $\{U_{\lambda\max}\alpha_{\lambda\max}V_{\lambda\max}\}$, $\{U_{\lambda\min}\alpha_{\lambda\min}V_{\lambda\min}\}$, то на фиксированной сфере $\|\Delta q\| = \mathrm{const}$ в пространстве параметров могут быть получены оценки

$$\max_{\Delta q}\|\Delta\lambda\| = \alpha_{\lambda M}\|\Delta q\|, \qquad (5)$$

$$\max_{\Delta q}\|\Delta\lambda\| = \alpha_{\lambda m}\|\Delta q\| \qquad (6)$$

соответственно максимальной и минимальной по норме вариации собственных значений. Правые сингулярные векторы $V_{\lambda\max}$ и $V_{\lambda\min}$ задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетания параметров, порождающих соответственно вариации (5) и (6).

Если задача оценки вариации собственных значений матрицы $H(q)$ с помощью векторно-матричного соотношения (4) решается покомпонентно, то для оценок максимально достижимой вариации $\Delta\lambda_i$ собственного значения λ_i при вариации Δq вектора параметров можно воспользоваться соотношением

$$\max_{\Delta q}\|\Delta\lambda_i\| = \sum_{j=1}^{p}|\lambda_{iq_j}\Delta q_j|; \quad i = \overline{1, n}.$$

Для вычисления функций чувствительности $\xi_{iq_j} = \left.\frac{\partial\xi_i(q)}{\partial\xi j}\right|_{q = q_0}$ нам потребуется

Утверждение 2. *Матрица $M(q)$ приведения матрицы $H(q)$ к диагональному виду $\Lambda(q)$ [6, 7] составлена из собственных векторов $\xi_i(q)$ (1) диагонализируемой матрицы $H(q)$ так, что*

$$\xi_i(q) = M_i(q); \quad i = \overline{1, n}. \ \blacklozenge \tag{7}$$

Доказательство следует из матричного условия подобия $M(q)\Lambda(q) = H(q)M(q)$, записанного в форме $M(q)\mathrm{row}\{\Lambda_i(q);\ i = \overline{1, n}\} = H(q)\mathrm{row}\{M_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$.

Соотношение (7) сводит задачу конструирования функций чувствительности $\xi_{iq_j}(q)$ к задаче формирования функций чувствительности M_{iq_j} i-го столбца матрицы $M(q)$. Эта задача решается с учетом того обстоятельства, что собственный вектор матрицы задается с точностью до его нормы [8, 9], а потому становится справедливым следующее

Утверждение 3. *Функция чувствительности $\xi_{iq_j} = M_{iq_j}$ i-го элемента $\{\xi_i(q) = M_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$ геометрического спектра собственных векторов матрицы $H(q)$ представима в форме*

$$\xi_{iq_j} = M_{iq_j} = \sum_{\substack{k = 1 \\ k \neq i}}^{n} \gamma_{ik}^{j} M_k; \quad \gamma_{ii}^{j} = 0,$$

где коэффициенты γ_{ik}^{j} линейного разложения M_{iq_j} по собственным векторам M_k; $k = \overline{1, n}$; $k \neq i$ определяются соотношением

$$\gamma_{ik}^{j} = \frac{(M^{-1})^i H_{q_j} M_k}{\lambda_i - \lambda_k}; \quad k \neq i; \quad \gamma_{ik}^{j} = 0,$$

которое имеет эквивалентное представление

$$\gamma_{ik}^{j} = \frac{(M^{-1} H_{q_j} M)_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}; \quad k \neq i; \quad \gamma_{ik}^{j} = 0. \ \blacklozenge$$

Доказательство приведено в работе [2].

Обратимся теперь к вычислению функций чувствительности $\alpha_{iq_j} = \left.\dfrac{\partial \alpha_i(q)}{\partial \alpha_j}\right|_{q = q_0}$ элементов $\alpha_i(q)$ алгебраического спектра сингулярных чисел матрицы $H(q)$, формируемого в силу соотношений (2).

Утверждение 4. *Пусть $(n \times n)$-матрица $H(q)$ характеризуется алгебраическим спектром сингулярных чисел $\sigma_\alpha\{H(q)\} = \{\alpha_i(q);\ i = \overline{1, n}\}$, тогда функция чувствительности α_{iq_j} сингулярного числа α_i, $i = \overline{1, n}$ к вариации компоненты q_j, $j = \overline{1, p}$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_0 записывается в виде*

$$\alpha_{iq_j} = (U^T)^i H_{q_j} V_i = (U^T H_{q_j} V)_{ii}. \ \blacklozenge$$

Доказательство приведено в работе [10].

На функциях чувствительности α_{iq_j} сингулярных чисел $H(q)$ может быть построена матрица $S_\alpha = S_\alpha(q_0)$ сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = \mathrm{row}\{\mathrm{col}\{\alpha_{iq_j};\ i = \overline{1, n}\}\},$$

где строки S_α^i — функции чувствительности α_{iq_j} сингулярного числа $\alpha_i(q)$ к вариации всех компонентов q_j вектора q; столбцы $S_{\alpha l}$ — функции чувствительности α_{lq_j}; $l = \overline{1, n}$ всех сингулярных чисел к вариации одного компонента q_j вектора параметров.

Для оценки α^* наиболее чувствительного сингулярного числа воспользуемся функционалом $J_{S\lambda}^i = \|S_\alpha^i\|_i$, $i = \overline{1, n}$. Получим:

$$\alpha^* = \arg\max_i J_{S\alpha}^i.$$

Оценку доминирующего параметра q^* можно получить с помощью функционала

$$J_{S\alpha j} = \|S_{\alpha j}\|,\ j = \overline{1, p}, \text{ в форме } q^* = \arg\max_j J_{S\lambda j}.$$

Если на векторе $\Delta q = \mathrm{col}\{\Delta q_j;\ j = \overline{1, p}\}$ вариаций параметров q относительно номинального значения q_0 построить вектор $\Delta\alpha = \mathrm{col}\{\Delta\alpha_i;\ i = \overline{1, n}\}$ вариаций сингулярных чисел, то эти векторы оказываются связанными соотношением

$$\Delta\alpha(q_0, \Delta q) = S_\alpha \Delta q. \tag{8}$$

Построим сингулярное разложение матрицы S_α сингулярной чувствительности $S_\alpha = U_\alpha \Sigma_\alpha V_\alpha^T$. Если выделить согласованные тройки $\{U_{\alpha\max}, \alpha_{\alpha\max}, V_{\alpha\max}\}$ и $\{U_{\alpha\min}, \alpha_{\alpha\min}, V_{\alpha\min}\}$, то на фиксированной сфере $\|\Delta q\| = \mathrm{const}$ в пространстве вариаций сингулярных чисел могут быть сконструированы оценки

$$\max_{\Delta q}\|\Delta\alpha\| = \alpha_{\alpha M}\|\Delta q\|, \quad \min_{\Delta q}\|\Delta\alpha\| = \alpha_{\alpha m}\|\Delta q\|$$

максимальной и минимальной по норме вариации $\Delta\alpha$ вектора сингулярных чисел матрицы $H(q)$. Правые сингулярные векторы $V_{\alpha\max}$ и $V_{\alpha\min}$ задают соответственно наиболее неблагоприятное $(\Delta q)_M = V_{\alpha\max}\|\Delta q\|$ и наименее неблагоприятное $(\Delta q)_m = V_{\alpha\min}\|\Delta q\|$ сочетания вариаций Δq_j, $j = \overline{1, p}$, параметров.

Если задача (8) решается покомпонентно, то максимальная вариация $\Delta\alpha_i$, достижимая на векторе $\Delta q = \mathrm{col}\{\Delta q_i; j = \overline{1, p}\}$ определяется соотношением

$$\max_{\Delta q}\|\Delta\alpha_i\| = \sum_{j=1}^{p}|\alpha_{iq_j}\Delta q_j|, \quad i = \overline{1, n}.$$

2. ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ КРИТЕРИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть СТС с интервальной матрицей $[F]$ состояния и фиксированными матрицами G входа и C выхода задана векторно-матричным описанием

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); \quad y(t) = Cx(t), \qquad (9)$$

где $g(t)$ — конечномерное экзогенное воздействие на СТС, формируемое с помощью автономной системы — источника экзогенного воздействия

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \quad z(0) = z(t)|_{t=0}; \quad g(t) = Pz(t),$$

$x(t)$, $z(t)$ — соответственно векторы состояния СТС и источника экзогенного воздействия; $y(t)$ — вектор выхода СТС, его компоненты: свободное $y_{\text{св}}(t)$, вынужденное $y_{\text{в}}(t)$, переходное $y_{\text{п}}(t)$ и установившееся $y_{\text{у}}(t)$ движения. E, P — соответственно матрицы состояний и выхода источника экзогенного воздействия, представимые в виде $E = \mathrm{diag}\left\{E_j = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{bmatrix}; j = \overline{1, m}\right\}$ $P = \mathrm{diag}\{P_j = [1\ \ 0];$ $j = \overline{1, m}\}$. Появляется возможность сформировать четыре линейные алгебраические задачи, параметризованные непрерывным временем t с интервальными параметрами и имеющие представления:

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{св}}(t) &= Ce^{[F]t}x(0) = [N_{\text{св}}](t)x(0), \\ y_{\text{в}}(t) &= C([T]e^{Et} - e^{[F]t}[T])z(0) = [N_{\text{в}}(t)]z(0), \\ y_{\text{п}}(t) &= -Ce^{[F]t}[T]z(0) = [N_{\text{п}}(t)]z(0), \\ y_{\text{у}}(t) &= C[T]e^{Et}z(0) = [N_{\text{у}}(t)]z(0) \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

в которых интервальная матрица $[T]$ преобразования подобия удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра с интервальными матричными компонентами [11]

$$[T]E - [F][T] = GP. \qquad (11)$$

Линейные алгебраические задачи (10) допускают обобщенное представление в форме

$$\eta_{(*)}(t) = [N_{(*)}(t)]\chi(0), \qquad (12)$$

где $[N_{(*)}(t)]$ — $(m \times w)$-интервальная критериальная матрица, параметризованная непрерывным временем t, индекс $(*)$ принимает смысл индексов «св», «в», «п» и «у» соответствующих компонентам движения: свободное, вынужденное, переходное и установившееся; w применительно к системе (9) принимает значения $w = \dim x = n$, $w = \dim z = l$; $\eta_{(*)}(t) = y_{(*)}(t)$ — m-мерный вектор выхода системы (9), где индекс $(*)$ принимает смысл индексов «св», «в», «п» и «у»; $\chi(0)$ — принимает смысл векторов $\chi(0) = x(0)$, $\chi(0) = z(0)$ в соответствии с выражениями (10). Конкретная реализация каждой интервальной критериальной матрицы $[N_{(*)}(t)]$ из банка (10) определяется реализациями матриц системы (9), видом экзогенного воздействия $g(t)$, определяемого реализацией матриц E и P и решением $[T]$ уравнения (11). Конкретный выбор критериальной матрицы $[N_{(*)}(t)]$ из банка (10) определяется предметом исследования.

Представление (12) позволяет формировать функционалы вырождения в соответствии с технологией, описанной в работах [1, 10].

3. ФУНКЦИОНАЛЫ ВЫРОЖДЕНИЯ. ОЦЕНКА ИХ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ

Для количественной оценки вырождения сложных динамических систем используется аппарат функционалов вырождения [1, 11], определяемых выражением

$$J_\nu(N) = \alpha_\nu\{N\}/\alpha_1\{N\} = \alpha_\nu\{q\}\alpha_1^{-1}\{q\};$$
$$\nu = \overline{1, m}, \qquad (13)$$

где N — критериальная матрица СТС ранга m, а $\alpha_\nu\{N\}$ — элементы алгебраического спектра сингулярных чисел этой матрицы. Если критериальная матрица СТС оказывается интервальной, то ее целесообразно представить в форме

$$[N] = N_0 + [\Delta N], \qquad (14)$$

где N_0 — медианный матричный компонент матрицы $[N]$ с фиксированными скалярными элементами, а $[\Delta N]$ — ее интервальный матричный компонент с симметричными скалярными матричными элементами. Функционал вырождения, конструируемый на этой матрице, также интервальный и представим в форме, подобной форме (14):

$$J\nu\{[N]\} \overset{\Delta}{=} [J_\nu(N)] = J_{\nu 0}(N) + [\Delta J_\nu(N)] =$$
$$= J_{\nu 0}(N) + [\underline{\Delta J_\nu(N)};\ \overline{\Delta J_\nu(N)}], \qquad (15)$$

где $\underline{\Delta J_\nu(N)} = -\overline{\Delta J_\nu(N)}$. Представление интервального функционала вырождения позволяет охарактеризовать его оценкой относительной интервальности,

$$\delta_I J_\nu = |[\Delta J_\nu]|/|J_{\nu 0}|, \qquad (16)$$

в соответствии с которой

$$J_\nu\{[N]\} = J_{\nu 0}(N)(1 + [\delta_I J_\nu]) = \\ = J_{\nu 0}(N)(1 \pm \delta_I J_\nu). \qquad (17)$$

4. ОЦЕНКА КОМПОНЕНТОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ВЫРОЖДЕНИЯ СТС С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ

Для использования возможностей аппарата теории параметрической чувствительности [3, 4] произведем параметризацию, применимую для произвольного интервального элемента $[(\cdot)]$векторно-матричного описания СТС с помощью скалярного параметра q и в развитие выражения (17) сформируем цепочку равенств:

$$[(\cdot)] = (\cdot)_0(1 + [\delta_I(\cdot)] = (\cdot)_0(1 \pm \delta_I(\cdot)) = \\ = (\cdot)_0(1 \pm q|_{q = \delta_I(\cdot)}) = (\cdot)_0(1 + q|_{q = \pm\delta_I(\cdot)}),$$

приняв гипотезу, что параметр q принимает значения из интервала $q \in [-\delta_I(\cdot), \delta_I(\cdot)]$.

Примечание. Будем полагать, что каждый интервальный системный параметр, представляемый в форме (14), параметризуется своим параметром q_j, $j = \overline{1, p}$, и они образуют p-мерный вектор параметров q. ♦

Представим интервальный функционал вырождения $[J_\nu(N)]$ на основе соотношений (15) и (16) в форме

$$[J_\nu(N)] = J_{\nu 0}(N)(1 + q) = J_\nu(N, q) \triangleq J_\nu(q).$$

Утверждение 5. Функция чувствительности сингулярного числа $\alpha_i(q) \in \sigma_\alpha\{N(q)\}$ критериальной матрицы $N(q)$ к вариации компоненты q_j, $j = \overline{1, p}$; $1 \leqslant p \leqslant m$, вектора параметров q относительно его номинального значения $q_0 = 0$

$$\alpha_{iq_j} = (U^T)^i N_{q_j} V_i = (U^T N_{q_j} V)_{ii}. \ ♦ \qquad (18)$$

Справедливость этого утверждения следует из положений утверждения 4, если в нем матрицу $H(q)$ заменить на матрицу $N(q)$.

Соотношения (18) позволяют сконструировать функцию чувствительности $J_{\nu q_j} \triangleq \left.\dfrac{\partial J_\nu(q)}{\partial q_j}\right|_{q = q_0}$, $j = \overline{1, p}$. Прямое дифференцирование по q_j выражения (13) приводит к представлению функцию чувствительности $J_{\nu q_j}$ в форме

$$J_{\nu q_j} = \alpha_{\nu q_j}\alpha_1^{-1} - \alpha_\nu \alpha_1^{-2}\alpha_{\nu 1 q_j},$$

учет соотношений (18), в которой приводит к пользовательскому результату

$$J_{\nu q_j} = (U^T N_{q_j} V)_{\nu\nu}\alpha_1^{-1} - \alpha_\nu \alpha_1^{-2}(U^T N_{q_j} V)_{11}. \qquad (19)$$

Этот результат позволяет для функционала вырождения $J_\nu(q)$ записать его полную вариацию $\Delta J_\nu = S_\nu \Delta q$, где $S_\nu = \mathrm{row}\{J_{\nu q_j};\ j = \overline{1, p}\}$ — матрица-строка функций чувствительности функционала вырождения $J_\nu(q)$, $\Delta q = \mathrm{col}\{\Delta q_j;\ j = \overline{1, p}\}$ — вектор-столбец полных вариаций системных параметров.

Если вернуться к интервальной природе вектора полных вариаций системных параметров Δq, записав его в форме $[\Delta q]$, то тем самым осуществится переход к интервальной природе и полной вариации $\Delta J_\nu = \Delta J_\nu(\Delta q)$ функционала вырождения так, что будет справедливой запись

$$\Delta J_\nu = \Delta J_\nu[(\Delta q)) = [\Delta J_\nu] = [\underline{\Delta J_\nu}, \overline{\Delta J_\nu}],$$

при этом угловые значения вариации функционала вырождения

$$\underline{\Delta J_\nu} = -\overline{\Delta J_\nu},$$

$$\overline{\Delta J_\nu} = \max_{\Delta q}\|\Delta J(\Delta q)\| = \sum_{i=1}^{p} J_{\nu q_j}|\Delta q_j| \mathrm{sgn} J_{\nu q_j}.$$

5. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА ВЫРОЖДЕНИЯ

Шаг 1. Составить матричные компоненты $[F] = F_0 + [\Delta F]$, G и C векторно-матричного описания (9) исследуемой системы и задать требуемое значение $\delta_{IK}J_\nu$ оценки относительной интервальности функционалов вырождения J_ν, $\nu = \overline{1, m}$.

Шаг 2. В зависимости от решаемой задачи исследования вырождения системы выбрать критериальную матрицу из банка (10).

Шаг 3. Записать соотношения (10) в параметризованной параметром q форме:

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{св}}(t, q) &= Ce^{F(q)t}x(0) = N_{\text{св}}(t, q)x(0), \\ y_{\text{в}}(t, q) &= C(T(q)e^{Et} - e^{F(q)t}T(q))z(0) = N_{\text{в}}(t, q)z(0), \\ y_{\text{п}}(t, q) &= -Ce^{F(q)t}T(q)z(0) = N_{\text{п}}(t, q)z(0), \\ y_{\text{у}}(t, q) &= CT(q)e^{Et}z(0) = N_{\text{у}}(t, q)z(0). \end{aligned}\right\}$$

Шаг 4. Составить аналитические выражения матриц чувствительности $N_{(*)qj}(t)$ для банка критериальных матриц (10), в которых индекс (*) принимает смысл индексов «св», «в», «п» и «у»:

$$N_{\text{св}q_j}(t) = C\frac{\partial}{\partial q_j}(e^{F(q)t}) = C(e^{F(q)t})_{q_j} =$$

$$= C\{(M_{q_j}M^{-1}e^{F_0t} - e^{F_0t}M_{q_j}M^{-1}) +$$

$$+ M\text{diag}(te^{\lambda_i t}\lambda_{iq_j};\ i = \overline{1, n})M^{-1}\}, \qquad (20)$$

$$N_{\text{св}q_j}(t) = C\frac{\partial}{\partial q_j}\{C(T(q)e^{Et} - e^{F(q)t}T(q))\} =$$

$$= C(T_{q_j}e^{Et} - (e^{F(q)t})_{q_j}T_0 - e^{Ft}T_{q_j}), \qquad (21)$$

$$N_{\text{п}q_j}(t) = -C\Big(\frac{\partial}{\partial q_j}(e^{F(q)t}T(q))\Big) =$$

$$= -C\{(e^{F(q)t})_{q_j}T_0 - e^{F_0t}\,T_{q_j}\}, \qquad (22)$$

$$N_{\text{у}q_j}(t) = -C\left\{\frac{\partial}{\partial q_j}T(q)e^{Et}\right\} = C\{T_{q_j}e^{Ft}\}, \qquad (23)$$

в которых $M_{q_j} = \text{row}\{M_{iq_j};\ i = \overline{1, n}\}$ — функции параметрической чувствительности матрицы приведения медианного компонента F_0 интервальной матрицы $[F]$ к диагональному виду.

Шаг 5. Записать параметризованное q параметром матричное уравнение Сильвестра (11) $T(q)E - F(q)T(q) = GP$, продифференцировать его по параметру q_j и далее упорядочить в целях получения уравнения Сильвестра относительно матрицы чувствительности T_{q_j}

$$T_{q_j}E - F_0T_{q_j} = F_{q_j}T_0.$$

Шаг 6. Составить реализации матриц чувствительности $N_{(*)q_j}(t)$ критериальных матриц из банка (10) в силу соотношений (20—23), для чего вычислить функции чувствительности λ_{iq_j} собственных значений матрицы $F(q)$, собственных векторов M_{q_j} и матрицу чувствительности T_{q_j}.

Шаг 7. Вычислить функции чувствительности $J_{\nu q_j}$ функционалов вырождения в силу соотношения (19), подставив в него реализации матриц чувствительности $N_{(*)q_j}(t)$, сформированных на шаге 6.

Шаг 8. Сформировать угловые реализации функционалов вырождения $J_{D\nu_c}(t)$ на угловых реализациях параметров $q_{j_c} = \delta_I(\cdot)$ в целях последующего формирования интервального представления $[J_{D\nu}(t)]$ функционала вырождения $J_{D\nu}(t)$ в форме (15).

Шаг 9. Сформировать оценку $\delta_I J_\nu = |[\Delta J_\nu]|/|J_{\nu 0}|$ относительной интервальности функционала вырождения J_ν и проверить выполнение неравенства $\delta_I J_\nu \leqslant \delta_{IR} J_\nu$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе композиции возможностей аппарата теории параметрической чувствительности и интервальных представлений предложен алгоритм, позволяющий формировать оценки относительной интервальности функционалов вырождения сложных технических систем, матричные компоненты математического описания которых в процессе эксплуатации претерпевают вариации параметров в некоторых пределах. Полученный результат позволяет оценить пределы вариации функционала вырождения, а, следовательно, интервальных элементов матричных компонентов описания систем, обнаруживающих заметную склонность к вырождению и, как следствие, к потере ее работоспособности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В.*. Экспресс-оценка склонности сложных динамических систем к вырождению // Проблемы управления. — 2010. — № 2. — С. 19—24.
2. *Синтез* дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. — Л.: Машиностроение, 1983. — 245 с.
3. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. — М.: Советское радио, 1972.
4. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
5. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
6. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
7. *Райс Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение. — М.: Мир, 1984. — 264 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
9. *Акунов Т.А., Ушаков А.В.* Анализ чувствительности эллипсоидных оценок многомерных процессов управления // Изв. вузов СССР. Приборостроение. — 1991. — Т. 34, № 8. — С. 21—27.
10. *Ушаков А.В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 11. — С. 72—82.
11. *Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В.* Алгебраическая постановка задачи контроля системного вырождения сложных технических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2010. — № 5. — С. 18—20.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Дударенко Наталия Александровна — канд. техн. наук, доцент, ✉ dudarenko@yandex.ru,

Полякова Майя Вячеславовна — аспирантка, ✉ 12noch@mail.ru;

Ушаков Анатолий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, ✉ Ushakov-AVG@yandex.ru,

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий механики и оптики, ☎ (812) 595-41-28.