УДК 517/519:62.50:681.306

ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКА СКЛОННОСТИ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ВЫРОЖДЕНИЮ

Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков

Рассмотрена проблема экспресс-оценки склонности к системному вырождению сложных динамических систем. Предложен алгоритм оценки функционала вырождения с помощью робастных вычислительных процедур. Выдвинутые положения проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: экспресс-оценка, функционал вырождения, сложная система, критериальная матрица, робастная вычислительная процедура.

ВВЕДЕНИЕ

Сложная техническая система (СТС) типа «многомерный вход—многомерный выход» (МВМВ) реализует линейный (локально линейный) оператор, отображающий «пространство намерений» в «пространство осуществляемых реализаций». Математически вырождение линейного оператора означает сокращение размерности его образа [1, 2], т. е. уменьшение ранга этого оператора. Вырождение линейного оператора, реализуемого СТС типа МВМВ, переносится на систему, и далее в таком смысле понимается термин «вырождение сложной системы».

Ранг оператора, который в пользовательской среде заменяется на матрицу оператора, зависящую от базиса представления, является целочисленной характеристикой и изменяется скачкообразно при плавном изменении параметров элементов матрицы оператора. В этой связи возникает потребность в таком инструментарии, который позволил бы непрерывно оценивать появляющуюся в системе тенденцию к возможному ее вырождению. Этот инструментарий строится на использовании сингулярного разложения [1, 2] критериальных матриц, в основном применительно к отношению «вход—выход» СТС типа МВМВ, позволяющего конструировать функционалы вырождения, с помощью которых можно оценить склонность системы к вырождению.

При исследовании вырождения СТС можно выделить три возможных версии его проявления: функциональное вырождение, физическое вырождение и системное вырождение [3, 4].

Первая версия предполагает, что СТС типа МВМВ оказывается вырожденной функционально в силу технологической необходимости функционирования ее агрегатных компонентов как единого целого. Наиболее наглядными примерами служат технологические процессы обработки материальных потоков, состоящие в формировании и подаче ленточного материала в листопрокатном производстве, в производстве бумаги и тканей, в организации заготовительных процессов в составе «бесскладовых» технологических производств, процессы динамической юстировки многокомпонентных оптических и радиооптических систем в режиме рабочей эксплуатации и т. д. [4]. Примерами технологических процессов по обслуживанию потоков могут служить процессы движения строем подвижных технических средств, управляемых антропокомпонентами-операторами (строй самолетов, вертолетов, автомобилей и т. п.), и автономных антропокомпонентов (строй военнослужащих, команда гребцов и т. п.)

Вторая версия проявления вырождения предполагает сохранение способности нормального функционирования технологического оборудования МВМВ-системы в условиях, когда его функционирование физически приостанавливается. Это может произойти при отключении технологического оборудования от энергосистемы (по причинам экономического или техногенного характера), по причинам иссякания экзогенного потока заявок в силу утраты интереса потребительской среды к продукции, производимой данным поколением технологического оборудования. Причиной тому могут быть факторы, сопровождающиеся физическим выпадением некоторого важного компонента из функционального состава МВМВ-системы.

Третья версия проявления вырождения, названная системной, порождается системными факторами, характеризующимися организационными причинами, состоящими в возможности неправильного распределения заявок по входам, в возможности неправильного согласования динамики потоков заявок с динамикой сепаратных каналов. Система может вырождаться по причине структурной и параметрической природы, когда в системе возникают нежелательные межканальные связи или если эти связи являются структурными компонентами, но коэффициенты передачи этих связей назначены неудачно, когда неудачно сформированы полосы пропускания сепаратных каналов, а в случае, если природа системы дискретная, неудачно назначены и распределены по каналам интервалы дискретности и т. д. [3].

Применяемый авторами инструментарий контроля вырождения СТС основан на использовании возможностей аппарата функционалов вырождения, позволяющего дать численную оценку близости сложной МВМВ-системы к вырождению, сопровождающегося частичной или полной потерей ее работоспособности.

Технология контроля системного вырождения СТС сформировалась как двухфазный процесс. В первой фазе конструируются критериальные матрицы, чаще всего применительно к отношению «вход—выход» при различных способах задания «динамических намерений». Во второй фазе конструируются функционалы вырождения как инструмент численной оценки вырождения.

В работе основное внимание сосредоточено на вычислительных проблемах экспресс-оценки системной версии проявления вырождения сложной МВМВ-системы с помощью аппарата функционалов вырождения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим задачу конструирования критериальных матриц для случая конечномерного задания «динамических намерений». Пусть сложная динамическая МВМВ-система задана векторно-матричным описанием

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); \quad x(0) = x(t)|_{t=0},$$
$$y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где x, g и y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно: $x \in R^n$, $g, y \in R^m$, F, G и C — матрицы, размерности которых согласованы с размерностями векторов x, g и y так, что $F \in R^{n\times n}G$, $C^T \in R^{m\times n}$.

Непрерывная динамическая МВМВ-система, представленная в виде (1), предназначена для обработки входных заявок $g(t)$, моделируемых векторной выходной переменной автономной системы

$$\dot{z}(t) = Ez(t), \quad z(0) = z(t)|_{t=0}, \quad g(t) = Pz(t), \tag{2}$$

именуемой источником конечномерного задающего воздействия, в котором $z \in R^l$, $E \in R^{l\times l}$, $P \in R^{l\times l}$ — соответственно векторы, согласованные по размерностям матрицы источника задающего воздействия, который выбирается минимальной размерности, но такой, чтобы его выход

$$g(t) = Pz(t), \tag{3}$$

где $z(t) = e^{Et}z(0)$, на множестве начальных состояний $z(0)$ адекватно представлял весь класс конечномерных задающих воздействий системы. Для целей дальнейших исследований воспользуемся следующими утверждениями.

Утверждение 1. *Если матрицы описаний* (1) *и* (2) *связаны матричным уравнением Сильвестра*

$$TE - FT = GP, \tag{4}$$

то решение системы (1) *может быть представлено в форме*

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + (Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0),$$

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0). \ \blacklozenge$$

Доказательство утверждения 1 можно найти в работе [5].

Если в движении по выходу $y(t)$ выделить все компоненты: свободное $y_{св}(t)$ и вынужденное $y_в(t)$, переходное $y_п(t)$ и установившееся $y_у(t)$ движения, то по этим компонентам можно сформировать четыре линейные алгебраические задачи (ЛАЗ), параметризованные непрерывным временем t и имеющие представления:

$$\left.\begin{aligned}
y_{св}(t) &= Ce^{Ft}x(0) = N_{св}(t)x(0),\\
y_в(t) &= C(Te^{Et} - e^{Ft}T)z(0) = N_в(t)z(0),\\
y_п(t) &= -Ce^{Ft}Tz(0) = N_п(t)z(0),\\
y_у(t) &= CTe^{Et}z(0) = N_у(t)z(0).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Вид каждой критериальной матрицы из банка (5) определяется следующими факторами: модель МВМВ-системы (1), вид конечномерного задающего воздействия, определяемого парой матриц (E, P), и решение матричного уравнения Сильвестра (4) в виде матрицы T. Конкретный выбор критериальной матрицы из банка (5) определяется предметом исследования.

Поставим задачу конструирования функционалов вырождения критериальных матриц банка ЛАЗ (5), полученных применительно к сложной динамической МВМВ-системе (1) путем приведенных векторно-матричных преобразований.

Для придания результатам большей общности запишем ЛАЗ в форме

$$\eta(w) = N(w)\chi(w), \tag{6}$$

где $N(w)$ — $m \times m$ критериальная матрица параметризована переменной w; w принимает смысл непрерывного времени t, когда ЛАЗ (6) параметризована непрерывным временем, и смысл дискретного времени k, выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt, когда ЛАЗ (6) параметризована дискретным временем; $\eta(w)$, $\chi(w)$ — m-мерные векторы, причем $\chi(w)$ может принимать смысл $\chi(0)$.

Для экспресс-оценки склонности к системному вырождению исследуем сложную динамическую систему в алгебраической постановке вида (6) с критериальной матрицей N с помощью аппарата функционалов вырождения J_{Dv} [4].

Аппарат функционалов вырождения J_{Dv} строится на спектре $\sigma_\alpha\{N\}$ сингулярных чисел [1, 2] α_j, $j = \overline{1, m}$, критериальной матрицы N, так что они задаются с помощью соотношения

$$J_{Dv} = \alpha_v/\alpha_1; \quad v = \overline{m, 1}, \tag{7}$$

$$\sigma_\alpha(N) = \{\alpha_j = |\mu_j^{1/2}| : \mu_i : \det(\mu I - N^T N) = 0; \\ j = \overline{1, m}\}.$$

Функционалы вырождения (7) обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Функционалы вырождения J_{Dv} критериальной матрицы N удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant J_{Dv}(N) \leqslant 1$, $v = \overline{1, m}$.

Свойство 2. Функционалы вырождения J_{Dv} критериальной матрицы N не зависят от умножения этой матрицы на скаляр α, в общем случае параметризованный некоторым параметром γ, так что $\alpha = \alpha(\gamma)$, что представимо в форме $J_{Dv}(\alpha(\gamma)N) = J_{Dv}(N) = J_{Dv}$, $v = \overline{1, m}$.

Свойство 3. Функционалы вырождения J_{Dv} критериальной матрицы N не зависят от умножения критериальной матрицы слева или справа на ортогональную матрицу [1, 2].

Свойство 4. Глобальный функционал вырождения $J_G(N)$ является обратным числу обусловленности $C(N)$:

$$J_G(N) = C^{-1}(N). \tag{8}$$

Свойство 5. Глобальные функционалы вырождения J_G матриц N и N^{-1} совпадают, т. е. $J_G(N) = J_G(N^{-1})$. ♦

В завершение рассмотрения свойств функционалов вырождения отметим важное алгебраическое свойство глобального функционала вырождения $J_G(N)$, которое оформим в виде утверждения.

Утверждение 2. *Величина J_G^{-1}, обратная глобальному функционалу J_G вырождения, — число обусловленности $C(N)$ выступает в качестве коэффициента усиления относительных погрешностей задания δ_N и δ_χ матрицы N и вектора χ ЛАЗ* (8) *в задаче оценки относительной погрешности $\delta_к$ решения ЛАЗ в форме*

$$\delta_к \leqslant J_G^{-1}\{N\}(\delta_N + \delta_\chi + \delta_N\delta_\chi) = \\ = C\{N\}(\delta_N + \delta_\chi + \delta_N\delta_\chi). ♦$$

Доказательство можно найти в работах [2, 6, 7].

У алгебраического свойства глобального функционала вырождения $J_G(N)$ широкие возможности применения. Например, если $\delta_\chi = 0$, $\delta_N = 0{,}01$ (1 %) при $J_G(N) = 0{,}01$, то оценка $\hat{\delta}_к = J_G^{-1}(N)(\delta_N + \delta_\chi + \delta_N\delta_\chi)$ относительной ошибки $\delta_к$ решения ЛАЗ составит величину $\hat{\delta}_к = 1$ (100 %).

Из полученных выражений для функционалов вырождения нетрудно видеть, что они количественно зависят от вида критериальной матрицы, которая конструируется на основе свойств динамических МВМВ-систем, вида входных заявок и сформулированной задачи исследования: параметризованной временем в случае, когда интерес представляют временные показатели процесса вырождения, или не параметризованной, когда интерес представляет проблема правильного распределения заявок по каналам системы. Далее задача решается в предположении, что критериальная матрица задана и параметр $w = t$ фиксирован.

Выделим задачу, в которой не требуется исследование тонкой природы процесса вырождения, а достаточно сформировать экспресс-оценку склонности сложной МВМВ-системы к системному вырождению. Для этого достаточно воспользоваться глобальным функционалом вырождения $J_G(N)$, определяемого выражением (8). Если его значение зафиксировано на уровне $J_G(N) \cong 0{,}01$, то разработчик должен насторожиться, если же его значение существенно меньше указанного, то следует запретить эксплуатацию системы.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ ВЫРОЖДЕНИЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

Вычислительные проблемы экспресс-оценки склонности сложной динамической МВМВ-системы к вырождению связаны с представлением глобального функционала в форме (8). В силу свойства 4 глобальный функционал вырождения $J_G(N)$ обратен числу обусловленности матрицы N, определяемому [1, 2] выражением

$$C(N) = \|N\| \cdot \|N^{-1}\|. \tag{9}$$

Для нахождения числа обусловленности требуется обращение матрицы и может быть использована любая матричная норма. Обращение матрицы, в случае близости критериальной матрицы к вырождению, может представлять собой сложную вычислительную проблему. Поэтому робастные вычислительные процедуры в целях экспресс-оценки склонности сложных динамических систем к вырождению на первом этапе сосредоточены на возможности исключения процедуры обращения матрицы при расчетах. Полезно воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение 3. *Обратная матрица N^{-1} может быть представлена конечным степенным рядом по положительным степеням матрицы N в форме*

$$N^{-1} = a_n^{-1}\left(N^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i N^{n-1-i}\right), \tag{10}$$

где a_n, a_i, $i = \overline{1, n}$, — коэффициенты характеристического полинома

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - N) =$$
$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Доказательство строится на использовании теоремы Гамильтона—Кэли [1], в соответствии с которой квадратная матрица обнуляет свой характеристический полином, т. е.

$$D(N) = \det(\lambda I - N)|_{\lambda = N} = N^n + a_1N^{n-1} +$$
$$+ a_2N^{n-2} + \ldots + a_{n-1}N + a_nI = 0, \tag{11}$$

где 0 — $n \times n$ нулевая матрица.

Умножим матричный полином (11) на матрицу N^{-1}, в результате получим выражение

$$N^{(n-1)} + a_1N^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}I + a_nN^{-1} = 0,$$

разрешаемое относительно матрицы N^{-1} в форме соотношения

$$a_nN^{-1} = -\left(N^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i N^{n-1-i}\right),$$

приводимого к виду (10). ♦

Примечание. Если матрица N обладает минимальным аннулирующим многочленом $\psi(\lambda)$ [1], степень n_ψ которого меньше степени n характеристического полинома $D(\lambda)$, то он позволяет упростить вычисление обратной матрицы N^{-1} в виде матричного полинома по положительным степеням матрицы N_c меньшим числом членов в силу выполнения неравенства $n_\psi < n$. ♦

Представление обратной матрицы N^{-1} в форме (10) порождает дополнительную проблему, связанную с вычислением коэффициентов a_i характеристического полинома матрицы N, которая особенно остро встает в случае ее высокой размерности. Эта проблема удачно решается с помощью алгоритма Фаддеева—Леверье [1] разложения резольвенты матрицы. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 4. *Резольвента $(\lambda I - N)^{-1}$ матрицы N представима разложением по положительным целым степеням скалярной переменной λ с матричными $n \times n$ коэффициентами H_i, $i = \overline{0, n-1}$ вида*

$$(\lambda I - N)^{-1} = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a^{n-1}\lambda + a_n)^{-1} \times$$
$$\times (\lambda^{n-1}H_0 + \lambda^{n-2}H_1 + \ldots + H_{n-1}),$$

в котором элементы H_i и a_{i+1}, $i = \overline{0, n-1}$ вычисляются с помощью рекуррентной процедуры Фаддеева—Леверье

$$\begin{aligned}
&H_0 = I, && a_1 = -\mathrm{tr}(NH_0),\\
&H_1 = NH_0 + a_1I, && a_2 = -\mathrm{tr}(NH_1)/2,\\
&\vdots && \vdots\\
&H_k = NH_{k-1} + a_kI, && a_{k+1} = -\mathrm{tr}(NH_k)/k,\\
& && k = \overline{0, n-1}. \;\blacklozenge
\end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство утверждения 4 можно найти в работе [1].

Нетрудно видеть, что рекуррентная процедура Фаддеева—Леверье (12) в части, описывающей процесс формирования коэффициентов характеристического уравнения матрицы N, позволяет воспользоваться выражением (10) для формирования матрицы N^{-1}.

Обозначим еще одну вычислительную проблему. Строго говоря, глобальный функционал вырождения $J_G(N)$ обладает свойством 4 только тогда, когда в выражении для числа обусловленности (9) используется спектральная норма $\|(\cdot)\|_2$, т. е.

$$J_G(N) = (\{C_2(N) = \|N\|_2\|N^{-1}\|_2\})^{-1}. \qquad (13)$$

Известно, что спектральная норма матрицы достаточно трудно вычисляется [8]. Для ее вычисления обычно прибегают к сингулярному разложению матрицы с помощью SVD-процедуры [9, 10], обладающей своими вычислительными трудностями.

Поставим задачу перехода от точного значения функционала вырождения в форме (11) к его оценке, которая строится на оценках спектральных норм матриц N и N^{-1}. Для спектральной нормы $\|N\|_2$ произвольной квадратной матрицы N справедлива оценка [2]

$$\|N\|_2 \leqslant (\|N\|_1\|N\|_\infty)^{1/2}, \qquad (14)$$

где $\|N\|_1$ и $\|N\|_\infty$ — соответственно столбцовая и строчная нормы матрицы N [8], определяемые как максимум суммы абсолютных значений элементов соответственно по столбцам и строкам матрицы N. Выражение (14) позволяет ввести в рассмотрение оценку $\|\hat{N}\|_2$ нормы $\|N\|_2$ в форме

$$\|\hat{N}\|_2 = (\|N\|_1\|N\|_\infty)^{1/2} \qquad (15)$$

и аналогичную оценку

$$\|\hat{N}^{-1}\|_2 = (\|N^{-1}\|_1\|N^{-1}\|_\infty)^{1/2}. \qquad (16)$$

С помощью оценок (15) и (16) можно ввести в рассмотрение оценку $\hat{J}_G\{N\}$ глобального функционала $J_G\{N\}$, задаваемой в силу формулы (13) выражением

$$\hat{J}_G\{N\} = (\|\hat{N}\|_2\|\hat{N}^{-1}\|_2)^{-1}. \qquad (17)$$

Робастная вычислительная процедура применительно к оценке $\|\hat{N}^{-1}\|_2$ в силу выражения (10) принимает вид

$$\|\hat{N}^{-1}\|_2 = \left\{\left\|a_n^{-1}\left(N^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{(n-1)} a_i N^{(n-1-i)}\right)\right\|_1 \times \right.$$
$$\left. \times \left\|a_n^{-1}\left(N^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{(n-1)} a_i N^{(n-1-i)}\right)\right\|_\infty\right\}^{1/2}. \qquad (18)$$

Соотношения (10), (12), (16)—(18) позволяют сформировать алгоритм формирования оценки глобального функционала вырождения, который опирается на робастные вычислительные процедуры в задаче экспресс-оценки склонности сложных динамических систем к вырождению.

3. АЛГОРИТМ ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ

Алгоритм экспресс-оценки склонности сложной динамической системы к вырождению с помощью робастных вычислительных процедур состоит в следующем.

1. Сформировать (или получить от заказчика) критериальную матрицу N на основе векторно-матричного описания сложной динамической системы вида (1), аналитического представления (2), (3) механизма формирования «динамических намерений» и их распределения по сепаратным входам системы.

2. Вычислить коэффициенты характеристического полинома матрицы N с помощью рекуррентной процедуры Фаддеева—Леверье (12).

3. Представить матрицу N^{-1} в виде конечного ряда по положительным степеням матрицы N в форме (10), используя коэффициенты ее характеристического полинома, вычисленные в п. 2.

4. Вычислить столбцовые и строчные нормы матриц N и N^{-1} в соответствии с определением [10].

5. Вычислить оценки спектральных норм $\|\hat{N}\|_2$ и $\|\hat{N}^{-1}\|_2$ в форме (15) и (18).

6. Вычислить значение оценки $\hat{J}_G\{N\}$ (17) глобального функционала вырождения.

7. Передать полученное значение оценки $\hat{J}_G\{N\}$ системному аналитику на предмет экспресс-оценки склонности сложной динамической системы к вырождению.

Пример. Проиллюстрируем разработанный алгоритм.

1. Сформируем (получим от заказчика на исследование) критериальную матрицу

$$N = \begin{bmatrix} 33 & -160 & 175 & 270 \\ 9 & 175 & -750 & 200 \\ 1 & 270 & 200 & -11000 \\ 70800 & 63850 & 18000 & 1900 \end{bmatrix}.$$

2. Вычислим коэффициенты характеристического полинома матрицы N с помощью алгоритма Фаддеева—Леверье: $a_1 = -2308$; $a_2 = 167140340$; $a_3 = -420864811625$; $a_4 = 838609761624995$.

3. Вычислим матрицу N^{-1} с помощью формулы (10), используя результаты п. 2:

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0067 & 0{,}00187 & 0{,}0002 & 0{,}000011 \\ -0{,}00695 & -0{,}0016 & -0{,}0002 & 0{,}0000034 \\ -0{,}0016 & -0{,}0017 & -0{,}00007 & 0{,}00000096 \\ -0{,}0002 & -0{,}00007 & -0{,}0001 & 0{,}0000001 \end{bmatrix}.$$

4. Вычислим столбцовые и строчные нормы матриц N и N^{-1}: $\|N\|_1 = 70843$, $\|N\|_\infty = 154550$, $\|N^{-1}\|_1 = 0{,}0142$, $\|N^{-1}\|_\infty = 0{,}0088$.

5. Вычислим оценки спектральных норм $\|\hat{N}\|_2$ и $\|\hat{N}^{-1}\|_2$: $\|\hat{N}\|_2 = 1{,}0464 \cdot 10^5$; $\|\hat{N}^{-1}\|_2 = 0{,}0116$.

6. Вычислим значение оценки (17): $\hat{J}\{N\} = 0{,}008$

7. Передать полученное значение оценки $\hat{J}_G\{N\}$ глобального функционала $J_G\{N\}$ вырождения системному аналитику на предмет экспресс-оценки склонности сложной динамической системы к вырождению, дав рекомендацию на приостановку эксплуатации сложной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оболочка Matlab любых версий, которая стала рабочим инструментом исследователя динамических систем, с ростом размерности последних, обнаруживает свои вычислительные слабости [11]. Это заметно проявляется, начиная с размерности выше шестой, при осуществлении матричных преобразований, особенно при решении матричных уравнений [8]. В таких случаях исследователю приходится составлять авторские программы. Авторы надеются, что материалы, предлагаемые вниманию читателей статьи, могут оказаться полезными при решении задач оценки склонности динамической системы к вырождению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
2. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 548 с.
3. *Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В.* Проблема вырождения производственной динамической системы, порождаемой фактором усталости ее антропокомпонентов // Изв. вузов. Приборостроение. — 2009. — Т. 52. — № 11. — С. 62—67.
4. *Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В.* Достаточные алгебраические условия обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2009. —№ 5. — С. 17—20.
5. *Ушаков А.В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 11. — С. 72—82.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 584 с.
7. *Райс Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 264 с.
8. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений / Под ред. Д.К. Фаддеева. — М.: Наука, 1984. — 192 с.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц / Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. — 464 с.
10. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 280 с.
11. *Чертков К.Г., Петров Ю.П.* Ошибки, обнаружившиеся в пакете MATLAB // Тр. второй всерос. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB» / ИПУ РАН, 2004. — М., 2004. — С. 318—324.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Дударенко Наталия Александровна — канд. техн. наук, доцент, ✉ dudarenko@yandex.ru,

Полякова Майя Вячеславовна — аспирантка, ✉ 12noch@mail.ru;

Ушаков Анатолий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, ✉ Ushakov-AVG@yandex.ru,

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий механики и оптики, ☎ (812) 595-41-28.