УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА НАКОПЛЕНИЕ И ПОТРЕБЛЕНИЕ

Н.С. Дёмин, Е.В. Кулешова

На классе линейно-однородных производственных функций исследована задача оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени при наличии ограничений на накопление и потребление с учетом производственных затрат и налоговых отчислений. Основной результат сформулирован в виде магистральной теоремы. Получено золотое правило накопления, определяющее распределение произведенного экономикой продукта на магистрали. Результаты конкретизируются для случая производственной функции Кобба — Дугласа.

Ключевые слова: управление, односекторная экономика, производственная функция, магистральная теорема, золотое правило накопления.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе динамических моделей макроэкономики экономическое развитие рассматривается как научно-технический прогресс [1—6], когда находится производственная функция, соответствующая какому-либо типу научно-технического прогресса (нейтральность по Хиксу, Харроду, Солоу и более сложного вида Ф-нейтральности). Распределение произведенного экономикой продукта рассматривается как некоторая задача оптимизации [7—10] — на заданном классе производственных функций решается некоторая задача оптимального управления.

Основной задачей управления односекторной (агрегированной, однопродуктовой) экономикой на конечном интервале времени является задача максимизации потребления за весь плановый период при выполнении условия экономического горизонта в конечный момент времени. При этом решение ищется в предположении, что на отдельных временных интервалах планового периода на накопление может направляться весь произведенный экономикой продукт либо не направляться вообще, когда весь продукт направляется на потребление. Решение получается в форме «магистральной теоремы» [7, 8, 10], суть которой состоит в том, что выход экономики на магистраль и сход экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта происходит максимально быстро за счет направления всего продукта целиком либо только на потребление, либо только на накопление, а нахождению экономики на магистрали соответствует распределение валового продукта на накопление и потребление согласно принципу «золотого правила накопления» [4, 6].

В данной работе рассматривается задача максимизации интегрального (т. е. за весь плановый период) потребления с дисконтированием при предположениях, в большей мере соответствующих сути макроэкономического процесса, а именно:

— накопление и потребление ограничены сверху и снизу, т. е. даже на отдельных интервалах планового периода целиком весь произведенный продукт не может направляться только на накопление либо только на потребление;

— суммарно на накопление и потребление идет только часть произведенного экономикой продукта после изъятия из него некоторой части на налоги и производственные затраты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на интервале времени $t \in [0, T]$, составляющем плановый период, задано соотношение $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где $Y(t)$ — произведенный экономикой продукт, $K(t)$ — основные фонды (капитал), $L(t)$ — трудовые ресурсы, $F(K, L)$ — линейнооднородная производственная функция [5, 7, 10], причем $L(t) = L_0\exp\{\lambda t\}$, $L_0 > 0$, $\lambda > 0$. Весь продукт делится на четыре части в виде

$$Y(t) = \Psi(t) + I(t) + C(t) + N(t), \qquad (1.1)$$

где $I(t)$ — накопление, $C(t)$ — потребление, $N(t)$ — налоговые отчисления, $\Psi(t)$ — производственные затраты с нормой материалоемкости γ, т. е. $\Psi(t) = \gamma Y(t)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Пусть $D(t)$ — прибыль, облагаемая налогом со ставкой u, такой, что $0 \leqslant u < 1$. Тогда $D(t) = Y(t) - \Psi(t) = (1 - \gamma)Y(t)$, $N(t) = uD(t) = (1 - \gamma)uY(t)$, а $G(t) = D(t) - N(t) = (1 - \gamma)(1 - u)Y(t)$ является прибылью, которая осталась после выплаты налогов и которая направляется на накопление и потребление, т. е.

$$G(t) = I(t) + C(t) = (1 - \gamma)(1 - u)Y(t). \qquad (1.2)$$

Пусть $s(t)$ — норма накопления, $0 \leqslant s_0 \leqslant s(t) \leqslant s_1 \leqslant 1$, а $\tilde{s}(t) = (1 - s(t))$ — норма потребления, т. е.

$$I(t) = s(t)G(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s(t)Y(t),$$
$$C(t) = (1 - s(t))G(t) = (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s(t))Y(t). \qquad (1.3)$$

Если $\mu > 0$ есть коэффициент амортизации основных фондов, то для $K(t)$ справедливо дифференциальное уравнение $\dot{K}(t) = I(t) - \mu K(t)$ [5, 7, 8], которое с учетом выражений (1.3) принимает вид

$$\dot{K}(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s(t)F(K(t), L(t)) - \mu K(t). \qquad (1.4)$$

Перейдя к нормированным (удельным) относительно трудовых ресурсов величинам, получаем с учетом линейной однородности $F(K(t), L(t))$ [5, 7, 10]:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = f(k(t)), \quad k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)},$$
$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad n(t) = \frac{N(t)}{L(t)}. \qquad (1.5)$$

Тогда балансовое соотношение (1.1) с учетом выражений (1.3) и (1.5) преобразуется к виду

$$y(t) = \gamma y(t) + i(t) + c(t) + n(t), \qquad (1.6)$$

$$i(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s(t)y(t), \ c(t) = (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s(t))y(t), \ n(t) = (1 - \gamma)uy(t). \qquad (1.7)$$

Приняв в качестве критерия оптимальности удельное потребление с дисконтированием за весь плановый период, приходим к следующей задаче оптимального управления [11]:

$$\dot{k}(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s(t)f(k(t)) - \nu k(t); \quad t \in [0, T],$$
$$k(0) = k_0, \quad k(T) \geqslant k_T > 0; \quad \nu = \mu + \lambda; \qquad (1.8)$$

$$J = \int_0^T (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s(t))f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt \to \max_{s_0 \leq \{s(t)\} \leq s_1}. \qquad (1.9)$$

Уравнение (1.8) следует из уравнения (1.4) с учетом соотношений (1.5) и того, что $L(t) = L_0\exp\{\lambda t\}$. Критерий (1.9), где $\delta > 0$ — коэффициент дисконтирования, следует из соотношений (1.5) и (1.7). Условие $k(T) \geqslant k_T > 0$ в выражении (1.8) представляет собой условие экономического горизонта, которое определяет, что к моменту окончания планового периода T уровень фондовооруженности $k(T)$ не может опуститься ниже величины k_T.

Замечание. Считаем, что для функции $f(k)$ выполняются неоклассические условия [5, 7, 8, 10]:

$$1)\ f(k) > 0, \quad k > 0; \quad f(k) = 0, \quad k = 0;$$
$$2)\ f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0;$$
$$3)\ f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0. \qquad (1.10)$$

Кроме того, потребуем выполнения дополнительно условий

$$0 \leqslant s_0 < \nu(\nu + \delta)^{-1}\alpha(k) < \nu(\nu + \delta)^{-1} < s_1 \leqslant 1, \qquad (1.11)$$

где $\alpha(k) = kf'(k)/f(k)$ является коэффициентом эластичности по основным фондам. Так как для линейно-однородных производственных функций $\alpha(k)$ обладает свойством $0 < \alpha(k) < 1$, то условия (1.11) являются корректными.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Если $s(t)$ оптимальное управление, то*:

$$s(t) = s_1, \quad q(t) > 1; \quad s(t) = s_0, \quad q(t) < 1;$$
$$s(t) \in [s_0; s_1], \quad q(t) = 1. \qquad (2.1)$$

Функция $q(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{q}(t) = [(\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s(t)f'(k(t))]q(t) - (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s(t))f'(k(t)), \qquad (2.2)$$

где $f'(k(t)) = df(k)/dk|_{k = k(t)}$, решения которого удовлетворяют условиям

$$q(T) \geqslant 0, \quad q(T)[k(T) - k_T] = 0. \ \blacklozenge \qquad (2.3)$$

Доказательства леммы 1 и других утверждений приведены в Приложении.

Лемма 2. *Функция* $q(t)$ *неотрицательная, т. е.* $q(t) \geqslant 0$, $t \in [0, T]$. ♦

Лемма 3. *Если* $q(t) > 1$, *чему соответствует значение* $s(t) = s_1$, *то области знакопостоянства производных* $\dot{k}(t)$ *и* $\dot{q}(t)$ *имеют вид*:

$$\dot{k} = 0, \quad k = k_1; \quad \dot{k} > 0, \quad k < k_1;$$
$$\dot{k} < 0, \quad k > k_1; \qquad (2.4)$$

$$\dot{q} = 0, \quad q = \Phi_1(k); \quad \dot{q} < 0, \quad q < \Phi_1(k), \quad k < k^*;$$
$$\dot{q} > 0, \quad q > \Phi_1(k), \quad k < k^*; \quad \dot{q} > 0, \quad k > k^*. \qquad (2.5)$$

Значения $k = k_1$ *и* $k = k^*$ *такие, что* $k^* < k_1$, *являются единственными корнями уравнений*

$$k_1\colon f(k) = \nu[(1 - \gamma)(1 - u)s_1]^{-1}k;$$
$$k^*\colon f'(k) = (\nu + \delta)[(1 - \gamma)(1 - u)]^{-1}. \qquad (2.6)$$

Для $k \leqslant k^*$ *функция*

$$\Phi_1(k) = [(1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_1)f'(k)] \times$$
$$\times [(\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_1 f'(k)]^{-1} \qquad (2.7)$$

убывающая, и при этом $\Phi_1(k) > 1$ *для* $k \in [0; k^*)$, $\Phi_1(k^*) = 1$. ♦

Лемма 4. *Если* $q(t) < 1$, *чему соответствует значение* $s(t) = s_0$, *то области знакопостоянства* $\dot{k}(t)$ *и* $\dot{q}(t)$ *имеют вид*:

$$\dot{k} = 0, k = k_2; \ \dot{k} < 0, k > k_2; \ \dot{k} > 0, k < k_2; \qquad (2.8)$$

$$\dot{q} = 0, \quad q = \Phi_0(k); \quad \dot{q} > 0, \quad q > \Phi_0(k), \quad k > k^*;$$
$$\dot{q} < 0, \quad q < \Phi_0(k), \quad k > k^*; \quad \dot{q} < 0, \quad k < k^*. \qquad (2.9)$$

Значение $k = k_2$ *такое, что* $k^* > k_2$ *и является единственным корнем уравнения*

$$k_2\colon f(k) = [\nu/(1 - \gamma)(1 - u)s_0]k. \qquad (2.10)$$

Для $k \geqslant k^*$ *функция*

$$F_0(k) = [(1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_0)f'(k)] \times$$
$$\times [(\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_0 f'(k)]^{-1} \qquad (2.11)$$

убывающая и при этом $\Phi_0(k) < 1$ *для* $k > k^*$, $\Phi_0(k^*) = 1$. ♦

Лемма 5. *На плоскости* (k, q) *особая точка* $X^* = (k^*; 1)$ *является стационарным решением системы* (1.8), (2.2). *При этом* $s(t) \equiv s^* = \text{const}$ *определяется двумя эквивалентными формулами*

$$s^* = \nu k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1},$$
$$s^* = [k^* f'(k^*)/f(k^*)] -$$
$$- \delta k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1} \qquad (2.12)$$

и удовлетворяет условию $s_0 < s^* < s_1$, *которое раскрывает неопределенность третьего из соотношений* (2.1). ♦

Следствие 1. Пусть $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ являются коэффициентами эластичности соответственно по основным фондам и трудовым ресурсам. Тогда s^* имеет следующие эквивалентные формулам (2.12) представления:

$$s^* = \alpha(k^*) - \delta k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1},$$
$$s^* = \nu(\nu + \delta)^{-1}\alpha(k^*). \qquad (2.13)$$

Так как для линейно-однородных производственных функций [5] $\alpha(k) = kf'(k)/f(k)$, $\beta(k) = 1 - \alpha(k)$, то формулы (2.13) следуют непосредственно из выражений (2.6) и (2.12). ♦

Следствие 2. Норма потребления $\tilde{s}(t) = 1 - s(t)$, для которой выполняются условия $0 \leqslant \tilde{s}_0 \leqslant \tilde{s}(t) \leqslant \tilde{s}_1 \leqslant 1$, $\tilde{s}_0 = 1 - s_1$, $\tilde{s}_1 = 1 - s_0$, в особой точке определяется следующими эквивалентными формулами

$$\tilde{s}^* = 1 - \nu k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1},$$
$$\tilde{s}^* = [1 - (k^* f'(k^*)/f(k^*))] +$$
$$+ \delta k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1}, \qquad (2.14)$$

$$\tilde{s}^* = \beta(k^*) + \delta k^*[(1 - \gamma)(1 - u)f(k^*)]^{-1},$$
$$\tilde{s}^* = [\delta/(\nu + \delta)] + [\nu/(\nu + \delta)]\beta(k^*) \qquad (2.15)$$

и удовлетворяет условию $\tilde{s}_0 \leqslant \tilde{s}^* \leqslant \tilde{s}_1$.

Соотношения (2.14) и (2.15) очевидным образом следуют из соотношений (2.12) и (2.13). ♦

3. МАГИСТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Исходя из доказанных результатов, сформулируем для рассматриваемой задачи магистральную теорему, предполагая достаточно общие условия: время управления T достаточно большое (см. § 5); интервал принадлежности фондовооруженности $k \in [0, k_1]$; величины k_0, k^* и k_T находятся между собой в произвольных соотношениях с дополнительным условием $k_T > k_2$.

На рис. 1 в соответствии с проведенными исследованиями жирными линиями выделены области знакопостоянства $\dot{k}$ и $\dot{q}$ (области *I—V*), а также изображены типовые фазовые траектории (экстремали) $X(t) = \{k(t); q(t)\}$ под номерами *1—7*. Траектории, входящие в особую точку $X^* = (k^*; 1)$ и выходящие из нее, обозначены соответственно Γ_0 и Γ_T и при этом $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^3$, $\Gamma_T = \Gamma_T^2 \cup \Gamma_T^4$.

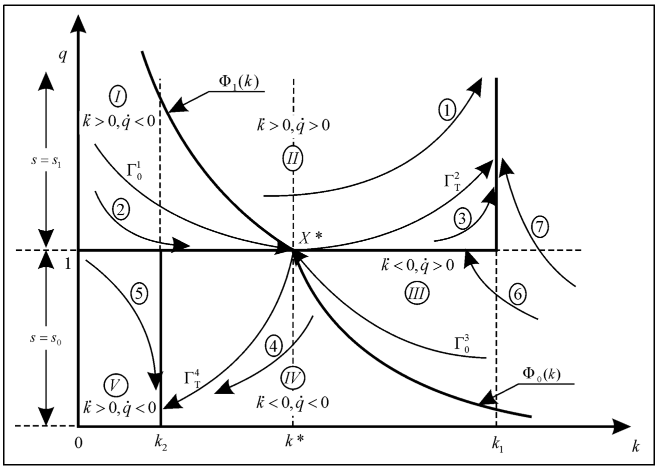

Рис. 1. Типовые фазовые траектории

Введем для $k < k$, $\tau_1 < \tau_2$ по обозначению величины, смысл которых следующий: $T_1(k', k'')$ — время возрастания фондовооруженности $k(t)$ от значения k' до значения k'', когда $s(t) = s_1$; $T_0(k', k'')$ — время убывания фондовооруженности $k(t)$ от значения k'' до значения k', когда $s(t) = s_0$; $J^1(\tau_1, \tau_2)$, $J^0(\tau_1, \tau_2)$ и $J^*(t_1, t_2)$ — значения критерия качества на интервале $t \in [\tau_1, \tau_2]$, когда соответственно $s(t) = s_1$, $s(t) = s_0$ и $s(t) = s^*$. Тогда непосредственно из выражений (1.8) и (1.9) с учетом лемм 3—5 следует:

$$T_1(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{(1-\gamma)(1-u)s_1 f(k) - \nu k},$$

$$T_0(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{\nu k - (1-\gamma)(1-u)s_0 f(k)}, \quad (3.1)$$

$$J^1(\tau_1, \tau_2) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_1) \times \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(k(t); s_1)\exp\{-\delta t\}dt, \quad (3.2)$$

$$J^0(\tau_1, \tau_2) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_0) \times \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(k(t); s_0)\exp\{-\delta t\}dt, \quad (3.3)$$

$$J^*(\tau_1, \tau_2) = [(1-\gamma)(1-u)(1-s^*)f(k^*)] \times \times \delta^{-1}[\exp\{-\delta\tau_1\} - \exp\{-\delta\tau_2\}]. \quad (3.4)$$

Таким образом, основной результат в форме магистральной теоремы формулируется в виде следующего утверждения (рис. 1).

Теорема 1. *При достаточно большом плановом периоде* $[0, T]$ *решение задачи имеет следующий вид*:

1) *интервал времени* $[0, T]$ *разбивается на три интервала* $[0, T] = [0, T^*] \cup [T^*, T^{**}] \cup [T^{**}, T]$;

2) *управление* $s(t) \in \{s_1; s_0; s^*\}$, *т. е. является кусочно-постоянным*;

3) *на магистральном интервале времени* $t \in [T^*, T^{**}]$ $s(t) = s^*$, *которое определяется формулами* (2.12) *и* (2.13), *а фондовооруженность* $k(t)$ *сохраняет постоянное значение* k^*, *являющееся единственным корнем уравнения* (2.6);

4) *на начальном интервале времени* $t \in [0, T^*)$, *когда происходит выход экономики на магистраль*, $s(t) = s_1$, *если* $k_0 < k^*$, *и* $s(t) = s_0$, *если* $k_0 > k^*$, *и происходит соответственно возрастание либо убывание* $k(t)$ *от* k_0 *до* k^*;

5) *на конечном интервале времени* $t \in (T^{**}, T]$, *когда происходит сход экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта* $k(T) = k_T$, $s(t) = s_1$, *если* $k_T > k^*$, *и* $s(t) = s_0$, *если* $k_T < k^*$, *и происходит соответственно возрастание либо убывание* $k(t)$ *от* k^* *до* k_T;

6) *значения* T^*, T^{**} *и* J *определяются следующими формулами*:

а) *если* $k_0 < k^*$, $k_T < k^*$, *то*

$$T^* = T_1(k_0, k^*), \quad T^{**} = T - T_0(k_T, k^*),$$
$$J = J^1(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \quad (3.5)$$

б) *если* $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$, *то*

$$T^* = T_1(k_0, k^*), \quad T^{**} = T - T_1(k^*, k_T),$$
$$J = J^1(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^1(T^{**}, T); \quad (3.6)$$

в) *если* $k_0 > k^*$, $k_T < k^*$, *то*

$$T^* = T_0(k^*, k_0), \quad T^{**} = T - T_0(k_T, k^*),$$
$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \quad (3.7)$$

г) *если* $k_0 > k^*$, $k_T > k^*$, *то*

$$T^* = T_0(k^*, k_0), \quad T^{**} = T - T_1(k^*, k_T),$$
$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^1(T^{**}, T). \blacklozenge \quad (3.8)$$

Следующее утверждение определяет золотое правило накопления [4, 5, 7, 8, 10] в рассматриваемой задаче, а именно, каким образом произведенный экономикой продукт $Y^*(t) = F(K^*(t), L(t))$, где $K^*(t) = k^* L(t)$, как сумма доходов с основных фондов $Y_K^*(t)$ и трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$, распределяется на магистрали между накоплением $I^*(t)$, потреблением $C^*(t)$, налоговыми отчислениями $N^*(t)$ и материальными затратами $\Psi^*(t)$.

Теорема 2. *На интервале времени* $t \in [T^*, T^{**}]$, *когда экономика находится на магистрали и* $s(t) = s^*$, $k(t) = k^*$:

1) *на накопление используется* $(1 - \gamma)(1 - u)$*-я часть дохода с основных фондов* $Y_K^*(t)$ *минус величина* $\delta K^*(t)$, *т. е.*

$$I^*(t) = (1 - \gamma)(1 - u)\,Y_K^*(t) - \delta K^*(t),$$
$$Y_K^*(t) = [\partial F(K^*(t), L(t))/\partial K^*(t)]K^*(t); \quad (3.9)$$

2) *на потребление используется* $(1 - \gamma)(1 - u)$*-я часть дохода с трудовых ресурсов* $Y_L^*(t)$ *плюс величина* $\delta K^*(t)$, *т. е.*

$$C^*(t) = (1 - \gamma)(1 - u)Y_L^*(t) + \delta K^*(t),$$
$$Y_L^*(t) = [\partial F(K^*(t), L(t))/\partial L(t)]L(t); \quad (3.10)$$

3) *на налоговые отчисления используется сумма* $[(1 - \gamma)u]$*-х частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т. е.*

$$N^*(t) = (1 - \gamma)u[\,Y_K^*(t) + Y_L^*(T)] =$$
$$= (1 - \gamma)uF(K^*(t), L(t)); \quad (3.11)$$

4) *материальные затраты равны сумме оставшихся* $[1 - (1 - \gamma)(1 - u) - (1 - \gamma)u]$*-х частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т. е.*

$$\Psi^*(t) = [1 - (1 - \gamma)(1 - u) - (1 - \gamma)u] \times$$
$$\times [\,Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = \gamma F(K^*(t), L(t)). \ \blacklozenge \quad (3.12)$$

4. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА—ДУГЛАСА

Широко используемой в исследованиях линейно-однородной производственной функцией служит функция Кобба — Дугласа [5, 7, 8]

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad f(k) = Ak^{\alpha},$$
$$A > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (4.1)$$

где α — коэффициент эластичности по основным фондам, β — коэффициент эластичности по трудовым ресурсам. Конкретизируем для нее теорему 1.

Теорема 3. *В случае производственной функции Кобба—Дугласа решение задачи в форме магистральной теоремы имеет следующий вид*:

1) *имеют место формулы*:

$$s^* = \nu(\nu + \delta)^{-1}\alpha, \quad \tilde{s}^* = \delta(\nu + \delta)^{-1} + \nu(\nu + \delta)^{-1}\beta,$$
$$k^* = [(1 - \gamma)(1 - u)\alpha A/(\nu + \delta)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (4.2)$$

$$k_1 = [\nu^{-1}(1 - \gamma)(1 - u)s_1A]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$
$$k_2 = [\nu^{-1}(1 - \gamma)(1 - u)s_0A]^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad (4.3)$$

2) *для* T^* *и* T^{**} *имеют место формулы* (3.5)—(3.8), *где*

$$T_1(k', k'') = [\nu(1 - \alpha)]^{-1}\ln\{[(1 - \gamma)(1 - u)s_1A -$$
$$- \nu(k')^{1-\alpha}][(1 - \gamma)(1 - u)s_1A - \nu(k'')^{1-\alpha}]^{-1}\},$$

$$T_2(k', k'') = [\nu(1 - \alpha)]^{-1}\ln\{[\nu(k'')^{1-\alpha} - (1 - \gamma) \times$$
$$\times (1 - u)s_0A][\nu(k')^{1-\alpha} - (1 - \gamma)(1 - u)s_0A]^{-1}\}; \quad (4.4)$$

3) *на интервале* $t \in [0, T^*)$:

$$k(t) = [\nu^{-1}((1 - \gamma)(1 - u)s_1A - [(1 - \gamma)(1 - u)s_1A -$$
$$- \nu k_0^{1-\alpha}]\exp\{-\nu(1 - \alpha)t\})]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k_0 < k^*, \quad (4.5)$$

$$k(t) = [\nu^{-1}((1 - \gamma)(1 - u)s_0A + [\nu k_0^{1-\alpha} - (1 - \gamma) \times$$
$$\times (1 - u)s_0A]\exp\{-\nu(1 - \alpha)t\})]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k_0 > k^*; \quad (4.6)$$

4) *на интервале* $t \in (T^{**}, T]$:

$$k(t) = [\nu^{-1}((1 - \gamma)(1 - u)s_1A - [(1 - \gamma)(1 - u)s_1A -$$
$$- \nu k_T^{1-\alpha}]\exp\{\nu(1 - \alpha)(T - t)\})]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k_T > k^*, \quad (4.7)$$

$$k(t) = [\nu^{-1}((1 - \gamma)(1 - u)s_0A + [\nu k_T^{1-\alpha} - (1 - \gamma) \times$$
$$\times (1 - u)s_0A]\exp\{\nu(1 - \alpha)(T - t)\})]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \; k_T < k^*; \quad (4.8)$$

5) *для* J *имеют место формулы* (3.5)—(3.8), *а для* $J^*(T^*, T^{**})$, $J^1(0, T^*)$, $J^1(T^{**}, T)$, $J^0(0, T^*)$ *и* $J^0(T^{**}, T)$ — *формулы* (3.2)—(3.4), *в которых* $f(k) = Ak^{\alpha}$, *а* τ_1 *и* τ_2 *присваиваются соответственно значения:* $\tau_1 = T^*$, $\tau_2 = T^{**}$; $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T^*$; $\tau_1 = T^{**}$, $\tau_2 = T$; $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T^*$; $\tau_1 = T^{**}$, $\tau_2 = T$. $\blacklozenge$

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Как и в классической задаче при отсутствии ограничений на накопление и потребление ($s_0 = 0$, $s_1 = 1$), а также налоговых отчислений ($u = 0$) и производственных затрат ($\gamma = 0$) [2, 4], в рассмотренной задаче при наличии перечисленных факторов суть решения в форме магистральной теоремы (теорема 1) заключается в наискорейшем выводе экономики на магистраль, где осуществляется сбалансированный рост и распределение про-

дукта происходит в соответствии с золотым правилом накопления (теорема 2), и наискорейшем сходе экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта в момент T окончания планового периода. Тем самым обеспечивается максимально возможное время нахождения экономики на магистрали.

2. Условием существования решения в форме магистральной теоремы является условие $\Delta T^* = T^{**} - T^* > 0$. Так как $T^{**} = T - \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ равно времени достижения траекторией $k(t)$ значения k_T на интервале времени $t \in (T^{**}, T]$, то данное условие принимает вид $T > T^* + \tilde{T}$, а именно (см. п. 6 теоремы 1): $T > T_1(k_0, k*) + T_0(k_T, k*)$, $k_0 < k*$, $k_T < k*$; $T > T_1(k_0, k*) + T_1(k*, k_T)$, $k_0 < k*$, $k_T > k*$; $T > T_0(k*, k_0) + T_0(k_T, k*)$, $k_0 > k*$, $k_T < k*$; $T > T_0(k*, k_0) + T_1(k*, k_T)$, $k_0 > k*$, $k_T > k*$.

3. Формулы (2.13) и (2.15) определяют вклад коэффициентов эластичности по основным фондам $\alpha(k*)$ и трудовым ресурсам $\beta(k*)$ в структуру накопления и потребления на магистрали, т. е. определяют, в какой степени накопление и потребление зависят от эффективности факторов производства. Из этих формул следует, что $s*$ и $\tilde{s}^*$ являются возрастающими функциями соответственно α и β. Поскольку с ростом коэффициента эластичности увеличивается эффективность соответствующего фактора производства, то это означает, что накопление возрастает с ростом эффективности основных фондов, а потребление возрастает с ростом эффективности трудовых ресурсов, что согласуется с золотым правилом накопления (теорема 2), согласно которому накопление $I^*(t)$ формируется на основе дохода с основных фондов, а потребление $C^*(t)$ — на основе дохода с трудовых ресурсов.

4. Устойчивый экономический рост, когда за весь плановый период времени $t \in [0, T]$ не происходит уменьшения фондовооруженности $k(t)$, осуществляется, согласно теореме 1, в ситуации, когда $k_0 < k*$, $k_T > k*$. В этом случае на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^{**}, T)$ используется максимальная норма накопления $s(t) = s_1$, а условие существования решения в форме магистральной теоремы имеет вид $T > T_1(k_0, k*) + T_1(k*, k_T)$ в общем случае (см. п. 2) и вид

$$T > [\nu(1-\alpha)]^{-1}\ln\{[(1-\gamma)(1-u)s_1A - \nu k_0^{1-\alpha}] \times \times [(1-\gamma)(1-u)s_1A - \nu k_T^{1-\alpha}]^{-1}\} \qquad (5.1)$$

в случае производственной функции Кобба—Дугласа, что следует из соотношения (4.4). Условием экономического роста являются два эквивалентных условия $dY(t)/dt > 0$ и $\hat{Y}(t) > 0$, где $\hat{Y}(t) = [1/Y(t)][dY(t)/dt]$ — относительная скорость роста валового продукта. Так как $Y(t) = F(K(t), L(t))$, $L(t) = L_0e^{\lambda t}$ и $K(t) = k(t)L(t)$, на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^{**}, T]$ в случае $k_0 < k*$, $k_T > k*$, когда $\dot{k}(t) > 0$, с учетом неоклассических условий $\partial F(\cdot)/\partial K > 0$ и $\partial F(\cdot)/\partial L > 0$ следует выполнение условий экономического роста. На магистрали, где $k*(t) \equiv k* = \text{const}$ и $K^*(t) = k*L(t)$, условия экономического роста также выполняются. Так как $\alpha = [\partial F/\partial K][K/F]$, $\beta = [\partial F/\partial L][L/F]$, причем $\alpha + \beta = 1$ для линейно-однородных функций $F(K, L)$ [5], то непосредственно получаем, что $\hat{Y}^*(t) \equiv \hat{Y}^* = \lambda$, т. е. на магистрали относительная скорость роста валового продукта равна коэффициенту экспоненциального роста трудовых ресурсов. Из проведенного анализа следует, что в случае $k_0 < k*$, $k_T > k*$ на всем интервале времени $t \in [0, T]$ обеспечивается экономический рост. При этом на магистрали — сбалансированный рост ($\dot{k}(t) = 0$, $k(t) \equiv k*$, а на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^{**}, T]$ — расширенный рост ($\dot{k}(t) > 0$).

5. При отсутствии ограничений на накопление ($s_0 = 0$, $s_1 = 1$), а также производственных затрат ($\gamma = 0$) и налоговых отчислений ($u = 0$) результаты магистральной теоремы (теорема 1) и золотого правила накопления (теорема 2) переходят в классические варианты этих теорем [5, 7, 8], когда выход экономики на магистраль и сход экономики с неё осуществляется направлением валового продукта целиком только на накопление либо только на потребление, а распределение продукта на магистрали осуществляется только между накоплением и потреблением с учетом дисконтирования. Если дополнительно отсутствует и дисконтирование ($\delta = 0$), когда текущему потреблению не отдается предпочтение перед будущим потреблением, то золотое правило накопления получается в его первоначальном виде [4], сформулированном лауреатом Нобелевской премии по экономике 2006 г. Э. Фелпсом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено полное исследование задачи управления односекторной экономикой при наличии ограничений на нормы накопления и потребления и при учете ненулевой материалоемкости и налоговых отчислений. Доказано существование магистрального принципа управления экономикой при сделанных предположениях. Получено золотое правило накопления, определяющее единственный способ распределения валового продукта на магистрали. Выделен случай, для которого на всем временном интервале планового периода осуществляется экономический рост, а именно на магистрали — сбалансированный рост, а на начальном и конечном интервалах времени — расширенный рост. Все результаты конкретизируются для производственной функции Кобба—Дугласа. Совместно с работами [12—14] проведенное исследование утверждает универсальность принципа магистрали независимо от критерия оптимальности и дополнительных условий функционирования экономики и, вместе с тем, зависимость золотого правила накопления, как способа распределения произведенного продукта на магистрали, от указанных факторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Согласно принципу максимума Понтрягина из выражений (1.8) и (1.9) следует [11]

$$H(k, s, \psi) = \psi[(1-\gamma)(1-u)sf(k) - \nu k] + (1-\gamma)(1-u)(1-s)f(k)e^{-\delta t}, \quad (\Pi.1)$$

$$s(t) = \arg\max_{s_0 \le s \le s_1} H(k(t), s, \psi(t)), \quad (\Pi.2)$$

$$\dot\psi(t) = -\partial H(k(t), s(t), \psi(t))/\partial k(t),$$
$$\psi(T) \geqslant 0,\ \psi(T)[k(T) - k_T] = 0. \quad (\Pi.3)$$

Так как $(1-\gamma) > 0$, $(1-u) > 0$, $f(k) > 0$, то из формул (П.1) и (П2) следует:

$$s(t) = s_1,\quad \psi(t) - e^{-\delta t} > 0;\quad s(t) = s_0,\quad \psi(t) - e^{-\delta t} < 0;$$
$$s(t) \in [s_0; s_1],\quad \psi(t) - e^{-\delta t} = 0. \quad (\Pi.4)$$

Из выражений (П.1) и (П.3) для сопряженной переменной $\psi(t)$ следует уравнение

$$\dot\psi(t) = -[(1-\gamma)(1-u)s(t)f'(k(t)) - \nu]\psi(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))f'(k(t))e^{-\delta t}. \quad (\Pi.5)$$

Введем новую сопряженную переменную $q(t) = e^{\delta t}\psi(t)$. Тогда формулы (2.1)—(2.3) следуют соответственно из выражений (П.3)—(П.5).

Доказательство леммы 2. Согласно формулам (2.1) свойство $q(t) < 0$ может реализоваться только при $s(t) = s_0$, когда уравнение (2.2) принимает вид

$$\dot q(t) = a(t)q(t) - b(t), \quad (\Pi.6)$$

где $a(t) = (\nu + \delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0f'(k(t))$, $b(t) = (1-\gamma)\times(1-u)(1-s_0)f'(k(t))$. Решение этого уравнения при условии $q(T) = q_T$ имеет вид [15]

$$q(t) = \exp\left\{\int_0^t a(\tau)d\tau\right\} \times \left[\int_t^T b(\xi)\exp\left\{-\int_0^\xi a(\tau)d\tau\right\}d\xi + q_T\exp\left\{-\int_0^T a(\tau)d\tau\right\}\right]. \quad (\Pi.7)$$

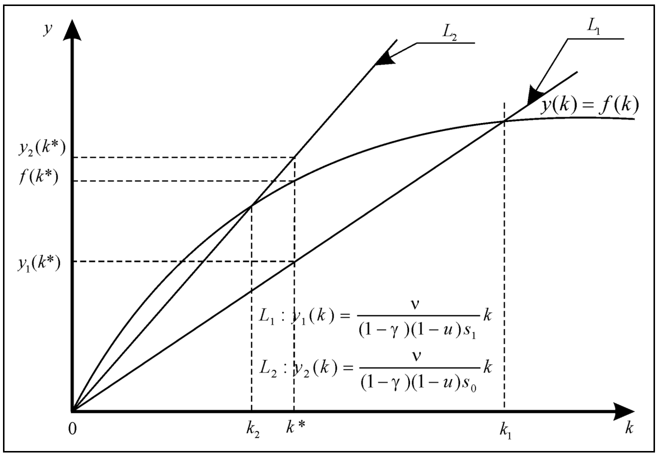

Рис. 2. К единственности корней k_1 и k_2

Так как, учитывая условия (1.10) и (2.3), $b(t) > 0$, $q_T \geqslant 0$, то из решения (П.7) следует, что $q(t) \geqslant 0$.

Доказательство леммы 3. При $s(t) = s_1$ уравнения (1.8) и (2.2) принимают вид

$$\dot k(t) = (1-\gamma)(1-u)s_1f(k(t)) - \nu k(t), \quad (\Pi.8)$$

$$\dot q(t) = [(\nu + \delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1f'(k(t))]q(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s_1)f'(k(t)). \quad (\Pi.9)$$

Свойства (2.4) для $\dot k$ и единственность решения k_1 уравнения (2.6) следуют с учетом условий (1.10) из уравнения (П.8) (рис. 2). Свойство $\dot q = 0$ для $q = \Phi_1(k)$ следует из выражений (2.7) и (П.9). Условие $\Phi_1(k) > 1$ соответствует, согласно формуле (2.7), условию $(1-\gamma)\times(1-u)(1-s_1)f'(k) > (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1f'(k)$, из которого следует

$$f'(k) > (\nu + \delta)[(1-\gamma)(1-u)]^{-1}. \quad (\Pi.10)$$

Единственность решения k^* уравнения (2.6) следует с учетом условий (1.10). Так как, согласно второму из уравнений (2.6), $f(k) > (\nu + \delta)/[(1-\gamma)(1-u)]$ для $k < k^*$, то из выражения (П.10) следует, что $\Phi_1(k) > 1$ для $k \in (0; k^*)$. Свойство $\Phi_1(k^*) = 1$ следует в результате использования подстановки второго из выражений (2.6) в формулу (2.7). Для доказательства свойства $k^* < k_1$ нужно доказать, что (см. рис. 2)

$$f(k^*) > \nu[(1-\gamma)(1-u)s_1]^{-1}k^* = y_1(k^*). \quad (\Pi.11)$$

Так как, согласно условиям (1.10), $f'(k)$ — монотонно убывающая функция, то учитывая формулу (П.10), имеем

$$f(k^*) = \int_0^{k^*} f'(k)dk > (\nu + \delta)[(1-\gamma)(1-u)]^{-1}k^*. \quad (\Pi.12)$$

Из правой части неравенств (1.11) следует $(\nu + \delta) > \nu/s_1$. Учет этого неравенства в выражении (П.12) приводит к формуле (П.11), что доказывает требуемое свойство. Согласно выражению (2.7)

$$\Phi_1'(k) = (\nu + \delta)(1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_1)f''(k)\Psi_1^{-2}(k),$$
$$\Psi_1(k) = (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_1f'(k). \quad (П.13)$$

Отсюда с учетом условий (1.10) следует $\Phi_1'(k) < 0$, т.е. функция $\Phi_1(k)$ убывающая. Свойства $\dot q < 0$ и $\dot q > 0$ в выражении (2.5) для $k < k*$ следуют из доказанных свойств функции $\Phi_1(k)$. Пусть теперь $k > k*$ (см. рис. 1). Так как $q > 1$, то из уравнения (П.9) следует

$$\dot q > (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_1f'(k) - (1 - \gamma)(1 - u) \times$$
$$\times (1 - s_1)f'(k) = (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)f'(k). \quad (П.14)$$

Так как, согласно уравнению (2.6) и условиям (1.10), $0 < f'(k) < [(\nu + \delta)/(1 - \gamma)(1 - u)]$ для $k > k*$, то из неравенства (П.14) следует требуемое свойство $\dot q > 0$ для $k > k*$ в выражении (2.5).

Доказательство леммы 4. При $s(t) = s_0$ уравнения (1.8) и (2.2) принимают вид

$$\dot k(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s_0f(k(t)) - \nu k(t), \quad (П.15)$$

$$\dot q(t) = [(\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_0f'(k(t))]q(t) -$$
$$- (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_0)f'(k(t)). \quad (П.16)$$

Свойства (2.8) для $\dot k$ и единственность решения k_2 уравнения (2.10) следуют с учетом условий (1.10) из уравнения (П.15) (см. рис. 2). Свойство $\dot q = 0$ для $q = \Phi_0(k)$ следует из выражений (2.11) и (П.16). Условие $\Phi_0(k) < 1$ соответствует, согласно формуле (2.11), условию $(1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_0)f'(k) < (\nu + \delta) - (1 - \gamma) \times$ $\times (1 - u)s_0f'(k)$, из которого следует

$$f'(k) < (\nu + \delta)[(1 - \gamma)(1 - u)]^{-1} \quad (П. 17)$$

Так как, согласно второму из уравнений (2.6), $f'(k) <$ $< (\nu + \delta)/[(1 - \gamma)(1 - u)]$ для $k > k*$, то из неравенства (П.17) следует, что $\Phi_0(k) < 1$ для $k > k*$. Свойство $\Phi_0(k*) = 1$ следует в результате учета второго из уравнений (2.6) в формуле (2.11). Для доказательства свойства $k* > k_2$ нужно доказать, что (см. рис. 2)

$$f(k*) < \nu[(1 - \gamma)(1 - u)s_0]^{-1}k* = y_2(k*). \quad (П. 18)$$

Из левой части неравенств (1.11) следует $s_0 <$ $< \nu k*f'(k*)/(\nu + \delta)f(k*)$. Тогда

$$\nu[(1 - \gamma)(1 - u)s_0]^{-1}k* > (\nu + \delta) \times$$
$$\times [(1 - \gamma)(1 - u)f'(k*)]^{-1}f(k*). \quad (П.19)$$

Так как, согласно выражению (2.6), $(\nu + \delta) =$ $= (1 - \gamma)(1 - u)f'(k*)$, то неравенство (П.18) следует из неравенства (П.19). Аналогично формуле (П.13)

$$\Phi_0'(k) = (\nu + \delta)(1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_0)f''(k)\Psi_0^{-2}(k),$$
$$\Psi_0(k) = (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_0f'(k). \quad (П. 20)$$

Тогда из формулы (П.20) и условий (1.10) следует $\Phi_0'(k) < 0$, т. е. функция $\Phi_0(k)$ убывающая. Свойства $\dot q > 0$ и $\dot q < 0$ в выражении (2.9) для $k > k*$ следуют из доказанных свойств функции $\Phi_0(k)$. Пусть теперь $k < k*$ (см. рис. 1). Так как $q < 1$, то из уравнения (П.16) следует

$$\dot q < (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s_0f'(k) - (1 - \gamma)(1 - u) \times$$
$$\times (1 - s_0)f'(k) = (\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)f'(k). \quad (П.21)$$

Так как согласно уравнениям (2.6) и условиям (1.10) $f'(k) > [(\nu + \delta)/(1 - \gamma)(1 - u)]$ для $k < k*$, то из неравенства (П.21) следует требуемое свойство $\dot q < 0$ для $k < k*$ в выражении (2.9).

Доказательство леммы 5. Условиями существования стационарных решений уравнений (1.8) и (2.2) являются условия $\dot k = 0$, $\dot q = 0$. Пусть эти условия реализуются при управлении $s(t) \equiv s* = \text{const}$, которому соответствует стационарное решение $k(t) \equiv k* = \text{const}$, при которых согласно уравнениям (1.8) и (2.2)

$$(1 - \gamma)(1 - u)s*f(k*) - \nu k* = 0, \quad (П. 22)$$

$$[(\nu + \delta) - (1 - \gamma)(1 - u)s*f'(k*)]q -$$
$$- (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s*)f'(k*) = 0. \quad (П. 23)$$

Из выражений (2.6) и (П.23) следует, что $q = 1$, а формулы (2.12) следуют из выражений (2.6) и (П.22).

Пусть $g(k) = f(k)/k$. С учетом условий (1.10): $\lim\limits_{k\downarrow 0} g(k) = \lim\limits_{k\downarrow 0} f'(k) = \infty$; $\lim\limits_{k\uparrow\infty} g(k) = \lim\limits_{k\uparrow\infty} f'(k) = 0$. Так как $g'(k) = [kf'(k) - f(k)]/k^2$, то доказать свойство $g'(k) < 0$ означает доказать, что $kf'(k) - f(k) < 0$. С учетом условий (1.10) получаем $f(k) = \int\limits_0^k f'(y)dy > \int\limits_0^k f'(k)dy = kf'(k)$, что доказывает требуемое свойство. Таким образом $g(k)\downarrow_0^\infty$ при $k\uparrow_0^\infty$. Так как $k* < k_1$, то $g(k*) > g(k_1)$, т. е. $[k*/f(k*)] < [k_1/f(k_1)]$. Тогда из формул (2.12) с учетом последнего неравенства и выражения (2.6) следует $s* < \nu k_1[(1 - \gamma)(1 - u)f(k_1)]^{-1} = s_1$, что доказывает свойство $s* < s_1$. Так как $k* > k_2$, то аналогично предыдущему получаем, что $[k*/f(k*)] > [k_2/f(k_2)]$. Тогда из формул (2.12) с учетом последнего неравенства и уравнения (2.10) следует $s* > \nu k_2[(1 - \gamma)(1 - u)f(k_2)]^{-1} = s_0$, что доказывает свойство $s* > s_0$.

Доказательство теоремы 2. Формула Эйлера для линейно-однородных производственных функций дает представление для валового продукта $Y(t) =$ $= F(K(t), L(t))$, как суммы доходов с основных фондов $Y_K(t)$ и трудовых ресурсов $Y_L(t)$, в виде [5]

$$F(K(t), L(t)) = [\partial F(K(t), L(t))/\partial K(t)]K(t) +$$
$$+ [\partial F(K(t), L(t))/\partial L(t)]L(t) = Y_K(t) + Y_L(t). \quad (П.24)$$

Из формул (2.12) следует $(1 - \gamma)(1 - u)s*f(k*) =$ $= (1 - \gamma)(1 - u)k*f'(k*) - \delta k*$. Тогда, учитывая формулы (1.5) и (П. 24), получаем, что

$$(1 - \gamma)(1 - u)s*F(K^*(t), L(t)) =$$
$$= (1 - \gamma)(1 - u)\, Y_K^*(t) - \delta K^*(t). \quad (П. 25)$$

Согласно формуле (1.3) $I^*(t) = (1 - \gamma)(1 - u)s_* \times F(K^*(t), L(t))$. Тогда выражение (3.9) следует из равенства (П.25). Согласно формуле (П.24) $Y_K^*(t) = F(K^*(t), L(t)) - Y_L^*(t)$. Тогда из равенства (П.25) следует

$$(1 - \gamma)(1 - u)s_* F(K^*(t), L(t)) = (1 - \gamma)(1 - u) \times F(K^*(t), L(t)) - (1 - \gamma)(1 - u)Y_L^*(t) - \delta K^*(t). \quad (П.26)$$

Согласно формуле (1.3) $C^*(t) = (1 - \gamma)(1 - u)(1 - s_*) \times F(K^*(t), L(t))$. Тогда выражение (3.10) следует из равенства (П. 26). Так как $N^*(t) = (1 - \gamma)uF(K^*(t), L(t))$, то выражение (3.11) следует из формулы (П. 24). Из выражений (3.9)—(3.11) следует, что остаются неиспользованными на $I^*(t)$, $C^*(t)$ и $N^*(t)$ суммарно $[1 - ((1 - \gamma) \times (1 - u) + (1 - \gamma)u)]$-е части $Y_K^*(t)$ и $Y_L^*(t)$, которые остаются на возмещение материальных затрат Ψ^*. Таким образом $[1 - ((1 - \gamma)(1 - u) + (1 - \gamma)u)][Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = \Psi^*(t)$. Тогда выражение (3.12) следует из последнего выражения с учетом записи (П.24) очевидным образом.

Доказательство теоремы 3. Формулы (4.2) и (4.3) для s_* и $\tilde{s}^*$ следуют из выражений (2.13), (2.15) и (4.1), а для k_*, k_1, и k_2 получаются в результате учета формулы (4.1) в уравнениях (2.6) и (2.10). Учет формулы (4.1) в выражениях (3.1) дает, что

$$T_1(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{(1-\gamma)(1-u)s_1Ak^{\alpha} - \nu k},$$

$$T_2(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{\nu k - (1-\gamma)(1-u)s_0Ak^{\alpha}}.$$

Интегрирование приводит к формулам (4.4). При $s(t) \equiv s = \text{const}$ общее решение уравнения (1.8) в случае функции $f(k)$ вида (4.1) имеет вид

$$k(t) = (\nu^{-1}[(1 - \gamma)(1 - u)sA - C\exp\{-\nu(1 - \alpha)t\}])^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

где C — константа интегрирования. Выражения (4.5) и (4.6) следуют отсюда соответственно для $s = s_1$ и $s = s_0$ при условии $k(0) = k_0$. Выражения (4.7) и (4.8) следуют соответственно для $s = s_1$ и $s = s_0$ при условии $k(T) = k_T$. Последнее утверждение теоремы очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ramsey F.P.* Mathematical theory of savings // Econ. J. — 1928. — Vol. 38. — P. 543—559.
2. *Solow R.A.* Contribution to the theory of economic growth // Quart. J. Economics. — 1956. — Vol. 70, — P. 65—94.
3. *Солоу Р.А.* Перспективы теории роста // Мировая экономика и международные отношения. — 1966. — № 8. — С. 69—77.
4. *Phelps E.S.* Golden rules of economic growth. — New-York: Norton, 1966. — 189 p.
5. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 293 с.
6. *Mankiw N.G.* Economics. — New-York: Worth Publ., 2003. — 256 p.
7. *Митягин Б.С.* Заметки по математической экономике // Успехи математических наук. — 1972. — Т. 27, № 3. — С. 3—19.
8. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту / В кн.: Математическая экономика / Под ред. Б.С. Митягина. — М.: Мир, 1974. — С. 7—45.
9. *Москаленко А.И.* Оптимальное управление моделями экономической динамики. — Новосибирск: Наука, 1999. — 185 с.
10. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрисс пресс, 2002. — 576 с.
11. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1978. — 392 с.
12. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 140—155.
13. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.*Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом налоговых отчислений // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. —№ 6. — С. 87—98.
14. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации налоговых отчислений // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т. 12, № 1(37). — С. 74—88.
15. *Матвеев А.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1967. — 564 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Дёмин Николай Серапионович — д-р физ.-мат. наук, профессор, ☎(3822) 52-92-99,

Кулешова Елена Викторовна — аспирантка, ☎(3822) 55-45-11, ✉ kuleshova.e@mail.ru,

Томский государственный университет.