



ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ОПЦИОНЫ КУПЛИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ВЫПЛАТ И ГАРАНТИРОВАННЫМ ДОХОДОМ В МОДЕЛИ БЛЭКА—ШОУЛСА

Н.С. Демин, У.В. Андреева

Дано решение задач хеджирования для трех видов экзотических опционов купли европейского типа с ограничением выплат и гарантированным доходом в случае выплаты дивидендов по базисному активу. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, портфели (хеджирующие стратегии) и соответствующие им капиталы. Рассмотрены свойства решения.

Ключевые слова: финансовый рынок, опцион, платежная функция, капитал, портфель, хеджирование.

ВВЕДЕНИЕ

Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению [1–4]. В первом случае имеем опцион купли (*call option*), а во втором — опцион продажи (*put option*). Если платежные обязательства характеризуются только ценой базисного актива в фиксированный момент исполнения опциона (спотовой ценой — *spot price*) и ценой исполнения контракта (страйковой ценой — *striking price*), то такие опционы являются стандартными опционами европейского типа. Развитие рынка опционных контрактов потребовало более сложных платежных обязательств, учитывающих как желание эмитента ограничить выплаты по опционам, так и желание покупателя опциона иметь гарантированный доход. Платежные функции с дополнительными условиями породили класс экзотических опционов (*exotic options*) [5–7]. В обзорной работе [5], написанной по материалам иностранной научной печати, отмечается, что хотя на западных финансовых рынках, особенно на внебиржевых, в настоящее время имеют хождение несколько десятков экзотических опционов, теория этих опционов мало разработана. Контракты по ним заключаются на основе эвристических сооб-

ражений и опыта работы дилеров с корректировкой классических формул Блэка—Шоулса [8] и Кокса—Росса—Рубинштейна [9], определяющих цены стандартных опционов соответственно в диффузионной и биномиальной моделях. В данной работе рассматриваются три вида опционов купли на диффузионном (B, S) -рынке: опционов с ограничением выплат, которые дают преимущество продавцу опциона; опционов с гарантированной выплатой, которые дают преимущество покупателю опциона.

Принятые обозначения:

$P(\cdot)$ — вероятность события; $E(\cdot)$ — математическое ожидание; $I[A]$ — индикатор события A , т. е. $I[A] = 1$, если событие A происходит, и $I[A] = 0$, если не происходит; $N\{a; b\}$ — нормальная (гауссовская) плотность с параметрами a и b ; $a^+ = \max\{a; 0\}$;

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (\text{B.1})$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача рассматривается на стохастическом базисе $(\Omega, F, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ [1–3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в тече-

ние фиксированного интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями [1–3]

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \quad (1.1)$$

где первое уравнение есть стохастическое дифференциальное уравнение Ито, W_t — стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $\mu \in R = (-\infty, +\infty)$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} S_t(\mu) &= S_0 \exp\{(\mu - (\sigma^2/2))t + \sigma W_t\}, \\ B_t &= B_0 \exp\{rt\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad (1.3)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ есть пара F_t -измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора (стратегию инвестирования). Аналогично предполагается [10], что за обладание акцией выплачиваются дивиденды в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta \gamma_t S_t$, пропорциональной рискованной части капитала с коэффициентом δ таким, что $0 \leq \delta < r$, т. е. $dD_t = \delta \gamma_t S_t dt$. Тогда капитал в задаче с дивидендами изменяется как $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t$. Так как $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t$, то $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче [1–3]. Тогда из выражений (1.1) и (1.3) следует, что капитал определяется уравнением $dX_t = rX_t dt + \sigma \gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}$, где согласно теореме Гирсанова [1–3] процесс $W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + ((\mu - r + \delta)/\sigma)t$ является винеровским относительно меры $P^{\mu-r+\delta}$ такой, что

$$dP_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} dP_t, \quad (1.4)$$

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \quad (1.5)$$

Так как $Law(W^{\mu-r+\delta}|P^{\mu-r+\delta}) = Law(W|P)$, то [1, 2]

$$\begin{aligned} &Law\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^{\mu-r+\delta}\right\}; \right. \\ &\quad \left. t \leq T | P^{\mu-r+\delta}\right) = \\ &= Law\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}; t \leq T | P\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $Law(S(\mu, r, \delta)|P^{\mu-r+\delta}) = Law(S(r, \delta)|P)$, т. е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}),$$

относительно $P^{\mu-r+\delta}$, совпадают со свойствами процесса $S_t(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t),$$

относительно меры P . Это означает, что мера $P^{\mu-r+\delta}$, определяемая в виде (1.4), (1.5), является риск-нейтральной (мартингальной) мерой [1–4].

Ставится задача: таким образом управлять капиталом, т. е. сформировать портфели (хеджирующие стратегии) $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$, чтобы соответствующие им капиталы $X_t^* = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t$ обеспечили выполнение платежных обязательств $X_T^* = f_t$ относительно платежных функций

$$f_T = f_T^{\min}(S_T) = \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}, \quad (1.6)$$

$$f_T = f_T^{\max 1}(S_T) = \max\{(S_T - K_1), K_2\}, \quad (1.7)$$

$$f_T = f_T^{\max 2}(S_T) = \max\{(S_T - K_1), K_2\} I[S_T > K_1], \quad (1.8)$$

где $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, а также найти стоимости опционов $C_T^{\min} = X_0^{\min}$, $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$, $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ и рассмотреть их свойства.

Согласно платежному обязательству (1.6) если $S_T > K_1$, то владелец опциона предъявляет его к исполнению и получает выплату в размере $\Delta = S_T - K_1$, если $S_T < K_1 + K_2$, и в размере $\Delta = K_2$, если $S_T \geq K_1 + K_2$. Согласно платежному обязательству (1.7) владелец опциона может всегда предъявить его к исполнению, получая гарантированную выплату $\Delta = K_2$, если $S_T \leq K_1 + K_2$, и выплату в размере $\Delta = S_T - K_1$, если $S_T > K_1 + K_2$. В случае платежного обязательства (1.8) опцион предъявляется к исполнению только при выполнении условия $S_T > K_1$, а далее выплаты осуществляются как и для $f_T^{\max 1}(S_T)$.

Замечание 1. Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором — к уменьшению цены опциона относительно стандартного опциона с платежной функцией $f_T(S_T) = (S_T - K_1)^+$. Очевидно, что опционы с пла-



тежной функцией $f_T^{\min}(S_T)$ соответствуют платежным обязательствам в пользу продавца опциона, а с платежными функциями $f_T^{\max 1}(S_T)$ и $f_T^{\max 2}(S_T)$ — в пользу покупателя опциона, причем с $f_T^{\max 1}(S_T)$ в большей мере, чем с $f_T^{\max 2}(S_T)$. ♦

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее всюду

$$\begin{aligned} z_0(t) &= \frac{\ln \frac{K_1}{S_t} - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ z_1(t) &= \frac{\ln \frac{K_1 + K_2}{S_t} - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ z_2(t) &= \frac{\ln \frac{K_1}{S_t} - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ z_3(t) &= \frac{\ln \frac{K_1 + K_2}{S_t} - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а z_0, z_1, z_2, z_3 определяются формулами (2.1) при $t = 0$.

Теорема 1. Для опциона с платежной функцией вида (1.6) стоимость опциона C_T^{\min} , капитал X_t^{\min} и портфель $\pi_t^{\min} = (\gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min})$ определяются формулами

$$C_T^{\min} = S_0 e^{-\delta T} [\Phi(z_3) - \Phi(z_2)] - K_1 e^{-rT} [\Phi(z_1) - \Phi(z_0)] + K_2 e^{-rT} \Phi(-z_1), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= S_t e^{-\delta(T-t)} [\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))] - \\ &- K_1 e^{-r(T-t)} [\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] + \\ &+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(-z_1(t)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\gamma_t^{\min} = e^{-\delta(T-t)} [\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))], \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \beta_t^{\min} &= -(K_1/B_t) e^{-r(T-t)} [\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] + \\ &+ (K_2/B_t) e^{-r(T-t)} \Phi(-z_1(t)). \end{aligned} \quad (2.5) \quad \blacklozenge$$

Теорема 2. Для опциона с платежной функцией вида (1.7) стоимость опциона $C_T^{\max 1}$, капитал $X_T^{\max 1}$

и портфель $\pi_t^{\max 1} = (\gamma_t^{\max 1}, \beta_t^{\max 1})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 1} = S_0 e^{-\delta T} \Phi(-z_3) - K_1 e^{-rT} \Phi(-z_1) + K_2 e^{-rT} \Phi(z_1), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} X_T^{\max 1} &= S_T e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) - K_1 e^{-r(T-t)} \Phi(-z_1(t)) + \\ &+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(z_1(t)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\gamma_t^{\max 1} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \beta_t^{\max 1} &= -(K_1/B_t) e^{-r(T-t)} \Phi(-z_1(t)) + \\ &+ (K_2/B_t) e^{-r(T-t)} \Phi(z_1(t)). \end{aligned} \quad (2.9) \quad \blacklozenge$$

Теорема 3. Для опциона с платежной функцией вида (1.8) стоимость опциона $C_T^{\max 2}$, капитал $X_T^{\max 2}$ и портфель $\pi_t^{\max 2} = (\gamma_t^{\max 2}, \beta_t^{\max 2})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 2} = S_0 e^{-\delta T} \Phi(-z_3) - K_1 e^{-rT} \Phi(-z_1) + K_2 e^{-rT} [\Phi(z_1) - \Phi(z_0)], \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} X_T^{\max 2} &= S_T e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) - K_1 e^{-r(T-t)} \Phi(-z_1(t)) + \\ &+ K_2 e^{-r(T-t)} [\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))], \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t^{\max 2} &= e^{-\delta(T-t)} [\Phi(-z_3(t)) + \\ &+ \left(\frac{K_2}{S_t}\right) \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t}} \varphi(z_0(t))], \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_t^{\max 2} &= \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t} \left\{ K_2 [\Phi(z_1(t)) - \Phi(z_0(t))] - \right. \\ &\left. - K_1 \Phi(-z_1(t)) - \frac{K_2 \varphi(z_0(t))}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13) \quad \blacklozenge$$

Доказательства теорем 1–3 см. в Приложении.

Следствие 1. Связь между решениями задач с платежными функциями (1.7) и (1.8) определяется формулами

$$C_T^{\max 2} = C_T^{\max 1} - K_2 e^{-rT} \Phi(z_0), \quad (2.14)$$

$$X_T^{\max 2} = X_T^{\max 1} - K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(z_0(t)),$$

$$\gamma_t^{\max 2} = \gamma_t^{\max 1} + \left(\frac{K_2}{S_t}\right) \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t}} \varphi(z_0(t)),$$

$$\beta_t^{\max 2} = \beta_t^{\max 1} - \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t} \left[\Phi(z_0(t)) + \frac{\varphi(z_0(t))}{\sigma \sqrt{T-t}} \right]. \quad \blacklozenge$$

Данное утверждение следует непосредственно из формул (2.6)–(2.13).

3. СВОЙСТВА

Пусть по определению $(C_T)^\alpha = \partial C_T / \partial \alpha$ есть коэффициент чувствительности, определяющий зависимости стоимостей опционов от параметра α .

Теорема 4. Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимости стоимостей опционов от начальной цены S_0 базисного актива, от цены исполнения опционов K_1 и от величины K_2 , ограничивающей выплаты по опциону в случае платежной функции (1.6) и гарантирующей доход в случае платежных функций (1.7) и (1.8), определяются формулами

$$\begin{aligned} (C_T^{\min})^{S_0} &= e^{-\delta T} [\Phi(z_3) - \Phi(z_2)], \\ (C_T^{\min})^{K_1} &= -e^{-rT} [\Phi(z_1) - \Phi(z_0)], \\ (C_T^{\min})^{K_2} &= e^{-rT} \Phi(-z_1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} (C_T^{\max 1})^{S_0} &= e^{-\delta T} \Phi(-z_3), \quad (C_T^{\max 1})^{K_1} = -e^{-rT} \Phi(-z_1), \\ (C_T^{\max 1})^{K_2} &= e^{-rT} \Phi(z_1), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (C_T^{\max 2})^{S_0} &= e^{-\delta T} \Phi(-z_3) + \left(\frac{K_2}{S_0}\right) \frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} \varphi(z_0), \\ (C_T^{\max 2})^{K_1} &= -e^{-rT} \Phi(-z_1) - \left(\frac{K_2}{K_1}\right) \frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} \varphi(z_0), \\ (C_T^{\max 2})^{K_2} &= e^{-rT} [\Phi(z_1) - \Phi(z_0)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

при этом

$$\begin{aligned} (C_T^{\min})^{S_0} &> 0, \quad (C_T^{\min})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\min})^{K_2} > 0, \\ (C_T^{\max 1})^{S_0} &> 0, \quad (C_T^{\max 1})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\max 1})^{K_2} > 0, \\ (C_T^{\max 2})^{S_0} &> 0, \quad (C_T^{\max 2})^{K_1} < 0, \quad (C_T^{\max 2})^{K_2} > 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

т. е. по S_0 и K_2 опционы являются возрастающими, а по K_1 — убывающими функциями. ♦

Формулы (3.1)—(3.3) следуют из формул (2.2), (2.6) и (2.10) в результате дифференцирования по S_0 , K_1 и K_2 с учетом формул (2.1) и выражений (П.6), (П.11) и (П.12) — см. Приложение, а свойства (3.4) следуют очевидным образом из формул (3.1)—(3.3) с учетом, что $\Phi(x) > 0$, $\varphi(y) > 0$ (см. формулы (В.1)), функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая от $\Phi(-\infty) = 0$ до $\Phi(+\infty) = 1$ со свойством $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, а $z_1 > z_0$ и $z_3 > z_2$.

Экономическая интерпретация свойств (3.4) заключается в следующем. Возрастание стоимостей опционов с возрастанием начальной цены базисного актива S_0 объясняется тем, что при этом в

среднем возрастает S_T , что приводит к увеличению выплат и к увеличению вероятности предъявления к исполнению опционов с платежными функциями (1.6) и (1.8) и к увеличению выплат в случае функции (1.7), а за уменьшение риска и увеличение дохода следует больше платить. Увеличением дохода объясняется и рост цен опционов с ростом K_2 . Поскольку при увеличении K_1 уменьшается размер возможных выплат по всем опционам, а для опционов с платежными функциями (1.6) и (1.8) к тому же уменьшается и вероятность их предъявления к исполнению, то этим объясняется уменьшение цен опционов с ростом K_1 , так как за уменьшение дохода и увеличение риска следует меньше платить.

Замечание 2. Из формул (1.6) и (1.8) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{K_2 \rightarrow \infty} f_T^{\min}(S_T) &= \lim_{K_2 \rightarrow 0} f_T^{\max 2}(S_T) = f_T(S_T) = \\ &= (S_T - K_1)^+, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $f_T(S_T)$ — платежная функция стандартного опциона купли [1—4]. ♦

Следствие 2. Пусть C_T , X_t , γ_t , β_t есть пределы C_T^{\min} , X_t^{\min} , γ_t^{\min} , β_t^{\min} при $K_2 \rightarrow \infty$ либо пределы $C_T^{\max 2}$, $X_t^{\max 2}$, $\gamma_t^{\max 2}$, $\beta_t^{\max 2}$ при $K_2 \rightarrow 0$. Тогда

$$C_T = S_0 e^{-\delta T} \Phi(-z_2) - K_1 e^{-rT} \Phi(-z_0), \quad (3.6)$$

$$X_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_2(t)) - K_1 e^{-r(T-t)} \Phi(-z_0(t)), \quad (3.7)$$

$$\gamma_t = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_2(t)),$$

$$\beta_t = -(K_1/B_t) e^{-r(T-t)} \Phi(-z_0(t)). \quad \blacklozenge \quad (3.8)$$

Так как $\Phi(z_1) = \Phi(z_3) = 1$ при $K_2 \rightarrow \infty$, то формулы (3.6)—(3.8) следуют из формул (2.2) — (2.5) с учетом свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. Так как $z_1 = z_0$ и $z_3 = z_2$ при $K_2 = 0$, то аналогичным образом формулы (3.6)—(3.8) следуют из формул (2.10)—(2.13).

Данный результат представляет собой полное решение задачи хеджирования для стандартного опциона купли при наличии выплат дивидендов. В случае $\delta = 0$, когда выплаты дивидендов отсутствуют, формула (3.6) переходит в формулу Блэка—Шоулса [8].

Следствие 3. Для стоимостей рассмотренных опционов справедливы соотношения

$$C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2} > C_T > C_T^{\min}. \quad \blacklozenge \quad (3.9)$$

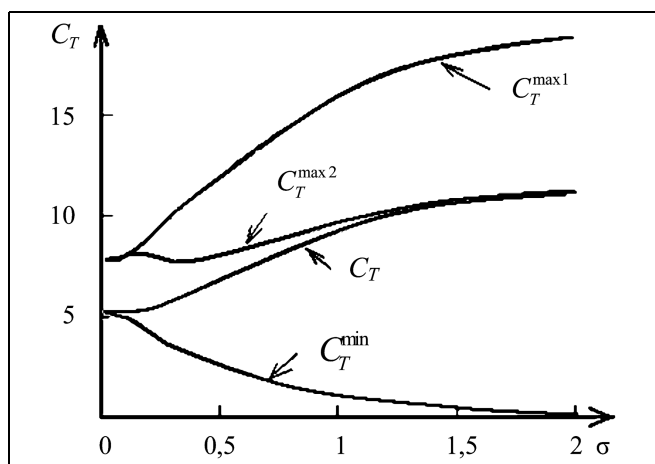
Свойство $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$ следует непосредственно из формулы (2.14). Свойства $C_T^{\max 2} > C_T > C_T^{\min}$ следуют из того, что согласно свойствам (3.4) $C_T^{\max 2}$ и C_T^{\min} — возрастающие функции K_2 и при



этом, согласно следствию 2, $\lim C_T^{\max 2} = C_T$ при $K_2 \downarrow 0$, а $\lim C_T^{\min} = C_T$ при $K_2 \uparrow \infty$.

Экономическая интерпретация свойств (3.9) заключается в следующем. Поскольку в случае стандартных опционов с платежной функцией вида (3.5) отсутствуют ограничения на размер выплаты по опциону, то $C_T^{\min} < C_T$, так как за наличие ограничений, уменьшающих размер возможного дохода, следует меньше платить. Свойства $C_T^{\max 1} > C_T$ и $C_T^{\max 2} > C_T$ объясняются тем, что за возможность получения гарантированного дохода следует больше платить. Свойство $C_T^{\max 2} < C_T^{\max 1}$ объясняется наличием дополнительного условия $S_T > K_1$, в котором заключена возможность непредъявления опциона к исполнению, а за возрастающий риск следует меньше платить. На рисунке представлены зависимости C_T^{\min} , $C_T^{\max 1}$, $C_T^{\max 2}$ и C_T от волатильности σ , вычисленные при $K_1 = 8$, $K_2 = 10$ и $S_0 = 12$. Взаимное расположение кривых отражает свойство (3.9). Проведенные вычисления также подтвердили свойства возрастания стоимостей опционов по S_0 и K_2 и убывания по K_1 , т. е. свойства (3.4), а также стремления C_T^{\min} к C_T при $K_2 \rightarrow \infty$ и $C_T^{\max 2}$ к C_T при $K_2 \rightarrow 0$, т. е. свойства следствия 2.

Отрицательные значения составляющих минимального портфеля (минимального хеджа) [1, 2] $\pi_i^* = (\gamma_i^*, \beta_i^*)$, капитал которого (см. формулу (1.3)) $X_i^* = \beta_i^* B_i + \gamma_i^* S_i$ обеспечивает выполнение платежного обязательства $X_i^* = f_T$, означают взятие соответствующего актива в долг, причем в соот-



Соотношения между величинами C_T^{\min} , $C_T^{\max 1}$, $C_T^{\max 2}$ и C_T

ветствии с принципом безарбитражности в долг оба актива одновременно не могут браться. Анализ формул (2.4) и (2.5), (2.8) и (2.9), (2.12) и (2.13), а также (3.8) дает:

$$\gamma_i^{\min} > 0, \quad \gamma_i^{\max 1} > 0, \quad \gamma_i^{\max 2} > 0, \quad \gamma_i > 0;$$

$$\beta_i^{\min} < 0, \quad \beta_i^{\max 1} < 0, \quad \beta_i^{\max 2} < 0, \quad \beta_i < 0.$$

Таким образом, для опционов купли акции в долг браться не могут, а банковский счет может быть как активом, так и пассивом, т. е. взятым в долг, причем в случае стандартного опциона он берется только в долг. Если $\beta_i^* < 0$, то

$$\gamma_i^* S_T = X_T^* + |\beta_T^*| B_T = f_T + |\beta_T^*| B_T.$$

Следовательно, если у инвестора имеется банковский долг, то в момент T предъявления соответствующего опциона купли к исполнению капитал $\gamma_T^* S_T^*$, содержащийся в акциях, расходуется на выплату по опциону, равную f_T , и на возврат банковского долга, равного $|\beta_T^*| B_T$. Если $\beta_T^* > 0$, то на выплату по опциону используется сумма капиталов, содержащихся в акциях $\gamma_T^* S_T^*$ и на банковском счете $\beta_T^* B_T$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование трех видов экзотических опционов купли с ограничением выплат для продавца опциона и гарантированным доходом для покупателя опциона в диффузионной модели (B, S) -финансового рынка при наличии выплаты дивидендов по рисковому активу. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, а также эволюцию во времени капиталов и портфелей (теоремы 1–3). Исследованы зависимости цен опционов от начальной цены базисного актива, от цены исполнения и от величины, ограничивающей выплаты и гарантирующей доход (теорема 4). Исследована связь между решениями задач для экзотических и стандартных опционов (следствия 1–3). Дана содержательная интерпретация свойств решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Согласно общей теории платежных обязательств на полных безарбитражных рынках [1–3]

$$X_i^* = e^{-r(T-t)} E^* \{f_T | F_t\}, \quad \gamma_i^* = \left. \frac{\partial X_i^*}{\partial S} \right|_{S=S_i},$$

$$\beta_i^* = \frac{X_i^* - \gamma_i^* S_i}{B_i}, \quad (\text{П.1})$$

где E^* усреднение по риск-нейтральной (мартингальной) мере \mathbf{P}^* , а $C_T = X_0^*$. Так как, согласно выражениям (1.4) и (1.5), $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$, то с учетом соотношений (1.2), (1.5) и (1.6),

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= e^{-r(T-t)} E^* \{ \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\} | F_t \} = \\ &= e^{-r(T-t)} E \{ Z_{T-t}^{\mu-r+\delta} \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\} | F_t \} = \\ &= e^{-r(T-t)} E \left\{ \exp \left\{ - \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right) [W_T - W_t] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(T-t)}{2} \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right)^2 \right\} \min\{S_t \exp\{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma[W_T - W_t] - K_1\}^+, K_2\} | S_t \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\xi(T, t) = [W_T - W_t] \sim N(0; T-t)$, то

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right) x \sqrt{T-t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(T-t)}{2} \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right)^2 \right\} \min\{S_t \exp\{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \\ &\quad + \sigma x \sqrt{T-t}\} - K_1\}^+, K_2\} \exp(-x^2/2) dx = \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x - \alpha^2/2) \exp(-x^2/2) \min\{S_t \exp\{(r - \delta - \\ &\quad - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t}(x + \alpha)\} - K_1\}^+, K_2\} dx, \end{aligned}$$

где $\alpha = [(\mu - r + \delta)/\sigma] \sqrt{T-t}$. Делая замену переменных $z = x + \alpha$, получаем

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-z^2/2\} \min\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times \\ &\quad \times (T-t) + z\sigma \sqrt{T-t}\} - K_1\}^+, K_2\} dz. \quad (\text{П.2}) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \min\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma \sqrt{T-t}\} - K_1\}^+, K_2\} &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 \leq 0; \\ S_t \exp(\cdot) - K_1, & \text{если } 0 < S_t \exp(\cdot) - K_1 < K_2; \\ K_2, & \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 \geq K_2. \end{cases} \quad (\text{П.3}) \end{aligned}$$

Тогда из выражений (П.2) и (П.3) следует, что

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= \frac{S_t e^{-\delta(T-t) z_1(t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \exp\{-(z - \sigma \sqrt{T-t})^2/2\} dz - \\ &\quad - \frac{K_1 e^{-r(T-t) z_1(t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \exp(-z^2/2) dz + \\ &\quad + \frac{K_2 e^{-r(T-t) z_1(t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp\{-z^2/2\} dz, \quad (\text{П.4}) \end{aligned}$$

где $z_0(t)$ и $z_1(t)$ — корни соответственно уравнений

$$\begin{aligned} S_t \exp\{r - \delta - (\sigma^2/2)(T-t) + z\sigma \sqrt{T-t}\} &= K_1 \text{ и} \\ S_t \exp\{r - \delta - (\sigma^2/2)(T-t) + z\sigma \sqrt{T-t}\} &= K_1 + K_2 \end{aligned}$$

и имеют вид (2.1). Замена переменных $x = z - \sigma \sqrt{T-t}$ в первом интеграле в выражении (П.4) с учетом, что $z_0(t) - \sigma \sqrt{T-t} = z_2(t)$, $z_1(t) - \sigma \sqrt{T-t} = z_3(t)$, а также свойств

$$\begin{aligned} (1/\sqrt{2\pi}) \int_a^b \exp(-x^2/2) dx &= \Phi(b) - \Phi(a), \\ \Phi(x) + \Phi(-x) &= 1, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad (\text{П.5}) \end{aligned}$$

приводит к формуле (2.3), а формула (2.2) следует из того, что $C_T^{\min} = X_0^{\min}$ [1–3].

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(b(s))}{\partial s} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} b^2(s)\right) \frac{\partial b(s)}{\partial s}, \\ \frac{\partial \Phi(-b(s))}{\partial s} &= -\frac{\partial \Phi(b(s))}{\partial s}, \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

то дифференцирование формулы (2.3) по s дает

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)} [\Phi(z_3(t)) - \Phi(z_2(t))] + \psi, \quad (\text{П.7})$$

$$\psi = \psi_1 - \psi_2, \quad (\text{П.8})$$

$$\psi_1 = K_1 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_0(t))}{\partial s} - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_2(t))}{\partial s}, \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= (K_1 + K_2) e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_1(t))}{\partial s} - \\ &\quad - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_3(t))}{\partial s}. \quad (\text{П.10}) \end{aligned}$$

Из выражений (П.6) и (2.1) получим

$$\frac{\partial \Phi(z_i(t))}{\partial s} = -\frac{\exp(-z_i^2(t)/2)}{s\sigma\sqrt{2\pi}(T-t)}, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (\text{П.11})$$

Так как, согласно формуле (2.1), $z_2(t) = z_0(t) - \sigma \sqrt{T-t}$, $z_3(t) = z_1(t) - \sigma \sqrt{T-t}$, то из равенства (П.11) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(z_2(t))}{\partial s} &= -\frac{K_1}{s^2 \sigma \sqrt{2\pi}(T-t)} \exp(-z_0^2(t)/2) \times \\ &\quad \times \exp[-(r - \delta)(T-t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(z_3(t))}{\partial s} &= -\frac{(K_1 + K_2)}{s^2 \sigma \sqrt{2\pi}(T-t)} \exp(-z_1^2(t)/2) \exp[-(r - \delta) \times \\ &\quad \times (T-t)]. \quad (\text{П.12}) \end{aligned}$$

Учет выражений (П.11) и (П.12) в формулах (П.9) и (П.10) дает, что $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$, т. е. согласно формуле (П.8), $\psi = 0$. Тогда формула (2.4) следует из выражений (П.1) и (П.7), а формула (2.5) — из выражений (П.1), (2.3) и (2.4). Теорема 1 доказана.



Доказательство теоремы 2. С учетом формулы (1.7) получаем аналогично выражению (П.2), что

$$X_t^{\max 1} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) \max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} dz. \quad (\text{П.13})$$

Очевидно,

$$\max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} = \begin{cases} S_t \exp(\cdot) - K_1, & \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 > K_2, \\ K_2, & \text{если } S_t \exp(\cdot) - K_1 \leq K_2. \end{cases} \quad (\text{П.14})$$

Тогда из выражений (П.13) и (П.14) с учетом формул (2.1) аналогично выражению (П.4) следует, что

$$X_t^{\max 1} = \frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp[-(z - \sigma\sqrt{T-t})^2/2] dz - \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz + \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz. \quad (\text{П.15})$$

Замена переменных $x = z - \sigma\sqrt{T-t}$ в первом интеграле в формуле (П.15) с учетом выражения (П.5) и что $z_1(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_3(t)$, приводит к формуле (2.7), а формула (2.6) следует из того, что $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$ [1–3].

Дифференцирование (2.7) по s дает аналогично (П.7)–(П.10), что

$$\frac{\partial X_t^{\max 1}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) + \psi, \quad (\text{П.16})$$

$$\psi = se^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(-z_3(t))}{\partial s} - K_1 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(-z_1(t))}{\partial s} + K_2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_1(t))}{\partial s}. \quad (\text{П.17})$$

Учет выражений (П.11) и (П.12) в формуле (П.17) дает, что $\psi = 0$. Тогда формула (2.8) следует из выражений (П.1) и (П.16), а формула (2.9) — из выражений (П.1), (2.7) и (2.8). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. С учетом формулы (1.8) получаем аналогично выражениям (П.2) и (П.13), что

$$X_t^{\max 2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2) \max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} I[S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2) \times (T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} > K_1] dz. \quad (\text{П.18})$$

Очевидно, что

$$\max\{S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} - K_1, K_2\} I[S_t \exp\{(r - \delta - \sigma^2/2)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\} > K_1] = \begin{cases} 0, & \text{если } S_t \exp(\cdot) \leq K_1, \\ K_2, & \text{если } K_1 < S_t \exp(\cdot) \leq K_1 + K_2, \\ S_t \exp(\cdot) - K_1, & \text{если } S_t \exp(\cdot) > K_1 + K_2. \end{cases} \quad (\text{П.19})$$

Из выражений (П.18) и (П.19) с учетом формул (2.1) аналогично выражениям (П.4) и (П.15) следует

$$X_t^{\max 2} = \frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp\{-(z - \sigma\sqrt{T-t})^2/2\} dz - \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{\infty} \exp(-z^2/2) dz + \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0(t)}^{z_1(t)} \exp(-z^2/2) dz. \quad (\text{П.20})$$

Тогда формула (2.11) следует из выражения (П.20) аналогично тому, как формула (2.7) следовала из выражения (П.15), а формула (2.10) следует из того, что $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ [1–3].

Дифференцирование формулы (2.11) по s дает аналогично выражению (П.16), что

$$\frac{\partial X_t^{\max 2}}{\partial s} = e^{-\delta(T-t)} \Phi(-z_3(t)) - K_2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(z_0(t))}{\partial s} + \psi, \quad (\text{П.21})$$

где ψ имеет вид (П.17). Так как $\psi = 0$, то формула (2.12) следует из выражений (П.1) и (П.21) с учетом формулы (П.11) при $i = 0$ и (В.1), а формула (2.13) — из выражений (П.1), (2.11), (2.12). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К теории* расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения / А.Н. Ширяев, Ю.М. Кабанов, Д.О. Крамков, А.В. Мельников / — 1994. — Т. 39, вып. 1. — С. 80–129.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: Фазис, 1998. — 1017 с.
3. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 253 с.
4. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. — М.: Вильямс, 2007. — 1052 с.
5. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. — 2002. — № 15. — С. 53–57; № 16. — С. 61–64; № 17. — С. 68–73.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance working paper. 1991. — Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991, N 220. — 43 p.
7. *Zhang P.G.* An introduction to exotic options // Europ. Financial Manag. — 1995. — Vol. 1, N 1. — P. 87–95.
8. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, N 3. — P. 637–659.
9. *Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // J. of Financial Economics. — 1979. Vol. 7, N 3. — P. 229–263.
10. *Шенп Л.А., Ширяев А.Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применение. — 1994. — Т. 39, вып. 1. — С. 130–148.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Демин Николай Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, Андреева Ульяна Викторовна — аспирант, ✉ egi@sibmail.com, Томский государственный университет, ☎ (3822) 52-92-99.