УДК 517.97

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.5.2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. Ч. 2. Неполные системы

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Аннотация. Изложены методы решения неполных нечетких систем линейных уравнений (НСЛУ), предполагающие расширение исходной системы в случае небольшой размерности. В методе вложения Фридмана нечеткая система погружена в традиционную, для решения которой применимы традиционные приемы линейной алгебры. Удвоенный метод вложений Фридмана применен для решения удвоенных НСЛУ при решении уравнений Вольтерра — Фредгольма. Метод вложения Еззати представлен цепочкой очевидных соотношений. В методе вложения Аббасбанди правая часть НСЛУ представлена вектором, каждая компонента которого задана функцией принадлежностей в виде равнобедренного треугольника. В методе центра не использована расширенная матрица и нет ограничений на симметричность функций принадлежностей. Рассмотренные методы проиллюстрированы на примерах решения задачи нечеткой интерполяции и нечеткой линейной регрессии. Для решения НСЛУ большой размерности рассмотрена совокупность итерационных методов, основанных на Q — T-разложении исходной матрицы S расширенной НСЛУ, когда выполнена декомпозиция (расщепление) матрицы S на две матрицы Q и T. В зависимости от способов задания матрицы Q приведены различные итерационные методы. В методе Ричардсона матрица Q взята единичной матрицей, в методе Якоби матрица Q представлена диагональными элементами матрицы S, в методе Гаусса — Зейделя матрица Q сформирована из элементов нижнетреугольной или верхнетреугольной матрицы S. В методе HSS применено эрмитово-скивское расщепление матрицы S. Изложены методы получения псевдорешений НСЛУ.

Ключевые слова: нечеткие системы линейных уравнений, нечеткая интерполяция, нечеткая линейная регрессия, нечеткие итерационные методы, нечеткие псевдообращения.

ВВЕДЕНИЕ

Неполные нечеткие системы линейных уравнений (НСЛУ) по сравнению с полными находят более широкое применение. Они популярны в представлении процесса обработки нечетких данных [1], решения нечетких дифференциальных и интегральных уравнений [2, 3], исследования нечетких систем управления [4] и в других представлениях.

Основные базовые определения даны в ч. 1 статьи [5]. Остальные термины будут введены по ходу изложения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимо рассмотреть различные методы решения НСЛУ

$$AX_{\text{н}} = B_{\text{н}}, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрица с элементами $a_{ij} \in R_1$, $X_{\text{н}}$ — искомый нечеткий вектор, $B_{\text{н}}$ — вектор с нечеткими компонентами $b_{\text{н}i} \in R_1$, $i = \overline{1, n}$, R_1 — одномерное нечеткое множество, «н» — индекс нечеткости.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Метод вложения Фридмана (Friedman) [6]

Термин «вложение» (embedding) отражает процедуру преобразования исходной четкой матрицы A и нечеткого вектора $B_{\text{н}}$ в такие элементы, что уравнение (1) с размерностью матрицы $(n \times n)$ трансформируется (вкладывается) в традиционную систему линейных уравнений с увеличением размерности системы в два раза. Иными словами, нечеткая система погружается в традиционную систему, для решения которой применяются традиционные приемы линейной алгебры. Особенность удвоенной традиционной системы линейных уравнений определяется структурой ее матрицы.

Таким образом, имеем:

$$S_{(2n\times 2n)}X_{\text{н}(2n\times 1)} = Y_{\text{н}(2n\times 1)}, \qquad (2)$$

где

$$X_{\text{н}} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\bar{X} \end{bmatrix}; \quad Y_{\text{н}} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ -\bar{B} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} D & C \\ C & D \end{bmatrix}.$$

В блочной матрице S блоки D и C находятся по матрице A. Матрица D состоит из положительных элементов матрицы A, а отрицательные элементы заменяются нулями. Матрица C состоит из модулей отрицательных элементов A, а положительные заменяются нулями. Очевидно,

$$A = D - C \to C = D - A.$$

Уравнение (2) принято называть расширенной системой линейных уравнений (РСЛУ). В соответствии с работами [1, 6] имеют место соотношения.

(i_1): $|S| \neq 0 \leftrightarrow |D - C| \neq 0$ и $|D + C| \neq 0$;

(i_2): $S^{-1} = \begin{bmatrix} F & E \\ E & F \end{bmatrix}$, $F = 0{,}5[(D + C)^{-1} + (D - C)^{-1}]$,

$E = 0{,}5[(D + C)^{-1} - (D - C)^{-1}]$,

$$X_{\text{н}} = S^{-1}Y_{\text{н}}, \quad |S| \neq 0. \qquad (3)$$

Здесь, подобно решению полной НСЛУ, также возникают сильные/слабые решения (3). Для того, чтобы НСЛУ имела сильное решение, необходимо и достаточно, чтобы элементы обратной матрицы были неотрицательными, т. е. $(s^{-1})_{ij} \geq 0$, $\forall i, j$.

В общем случае имеет место факт: если $|A| \neq 0$, то это не означает, что и $|S| \neq 0$.

В этом случае НСЛУ не имеет единственного решения и решается в соответствии с методом Гаусса, когда матрица S приводится к ступенчатому виду и появляются варианты решения: несовместность НСЛУ, и тогда она не имеет нечеткого решения; НСЛУ имеет бесконечное число решений, и из них можно выделить сильное/слабое решение [1, 6].

Пример 1. Найти нечеткое решение уравнения (1), если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$B_{\text{н}} = (\underline{b}_1 = r,\ \bar{b}_1 = 2 - r;\ \underline{b}_2 = 4 + r,\ \bar{b}_2 = 7 - 2r)^T$.

Матрица S и вектор $Y_{\text{н}}$ примут вид:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};\ Y_{\text{н}} = (\underline{y}_1 = \underline{b}_1 = r,\ \bar{y}_1 = -\bar{b}_1 = r - 2;$$

$$\underline{y}_2 = \underline{b}_2 = 4 + r,\ \bar{y}_2 = -\bar{b}_2 = 2r - 7 | r \in [0; 1]^T,$$

откуда получим:

$$X_{\text{н}} = (x_{\text{н}1}, x_{\text{н}2})^T,$$

где

$$x^*_{\text{н}1} = (\underline{x}^*_1 = 1{,}7 + 0{,}6r,\ \bar{x}^*_1 = 2{,}9 - 0{,}9r | r \in [0; 1]);$$

$$x^*_{\text{н}2} = (\underline{x}^*_2 = 0{,}9 + 0{,}1r,\ \bar{x}^*_2 = 1{,}4 - 0{,}4r | r \in [0; 1]).$$

Из определения нечеткого треугольного числа следует, что полученные $x_{\text{н}1}$ и $x_{\text{н}2}$ являются сильным нечетким решением исходной НСЛУ.

2.2. Удвоенный метод вложения Фридмана (Friedman) [7]

Интегральные уравнения часто применяются для представления систем управления с обратной связью, различного рода фильтров и других объектов. Для этого применяется, как правило, уравнение Вольтерра, являющееся частным случаем уравнения Фредгольма.

В нечеткой постановке нечеткое интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид:

$$x_{\text{н}}(s) = f_{\text{н}}(s) + \lambda \int_a^b (K(s, \tau)x_{\text{н}}(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где $K(s, \tau)$ — ядро уравнения, а λ — параметр. Часто нечеткое решение $x_{\text{н}}(s)$ представляется в приближенной форме

$$x_{\text{н}}(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{\text{н}i}h_i(s). \qquad (5)$$

Здесь $a_{\text{н}i}$, $i = \overline{1, n}$ — нечеткие коэффициенты, подлежащие определению, $h_i(s)$, $i = \overline{1, n}$ — четкие известные базисные функции.

Для нахождения $a_{\text{н}i}$ подставляют формулу (5) в уравнение (4) и, после преобразований при $s = s_1, ..., s_n \in [a, b] \subset R_1$, получают удвоенную НСЛУ:

$$Aa_{\text{н}} = f_{\text{н}} + Ba_{\text{н}}, \qquad (6)$$

где элементы матриц A и B есть $a_{ij} = h_i(s_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ и $b_{ij} = \lambda \int_a^b K(s_j, \tau)h_i(\tau)d\tau$, $i, j = \overline{1, n}$, соответственно, а $f_{\text{н}}(s) = (f_{\text{н}}(s_1), ..., f_{\text{н}}(s_n))^T$.

Уравнение (6) принято называть удвоенной НСЛУ из-за наличия двух матриц A и B в ее составе. Это матричное уравнение приводится к стандартной форме:

$$\tilde{A}\, a_{н} = f_{н}, \quad \tilde{A} = A - B,$$

и далее полученная система решается методом вложения по традиционной схеме решения Фридмана [7].

2.3. Метод вложения Еззати (Ezzati) [7]

Согласно методу вложения Еззати для имеющегося уравнения (1) можно записать цепочку очевидных соотношений:

$$AX_{н} = B_{н} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} D & C \\ C & D \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\bar{X} \end{bmatrix}}_{X_{н}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ -\bar{B} \end{bmatrix}}_{B_{н}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D+C)\underline{X} - CH = \underline{B}, \\ (D+C)\bar{X} - CH = \bar{B}, \end{cases}$$

где $H = \underline{X} + \bar{X}$. Сложив и проведя дальнейшие преобразования, получим:

$$(D + C)(\underline{X} + \bar{X}) = (\underline{B} + \bar{B}) + 2CH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\underline{B} + \bar{B}) + 2CH \Rightarrow (D + C)H = (\underline{B} + \bar{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^* = (D - C)^{-1}(\underline{B} + \bar{B}).$$

В результате решение НСЛУ имеет вид:

$$\underline{X}^* = (D + C)^{-1}(\underline{B} + CH^*),$$

$$\bar{X}^* = (D + C)^{-1}(\bar{B} + CH^*).$$

2.4. Метод вложения Аббасбанди (Abbasbandy) [8]

Имеем, как и ранее, уравнение (1). Рассмотрим его i-е уравнение и цепочку соотношений:

$$\begin{array}{l} \sum(a_{ij} \ge 0)\underline{x}_j + \sum(a_{ij} < 0)\bar{x}_j = \underline{b}_i, \\ \sum(a_{ij} \ge 0)\bar{x}_j + \sum(a_{ij} < 0)\underline{x}_j = \bar{b}_i, \end{array} \Rightarrow \qquad (7)$$

$$\Rightarrow\ i = \overline{1, n} \Leftrightarrow (D + C)W = V,\ W = (w_1, \ldots, w_n)^T,$$

$$V = (v_1, \ldots, v_n)^T. \qquad (8)$$

С другой стороны, имеем:

$$AX^s_{н} = B^s_{н} \Leftrightarrow (D - C)X^s_{н} = B^s_{н}, \qquad (9)$$

где $X^s_{н} = (x^s_{н1}, \ldots, x^s_{нn})^T$, $x^s_{нi} = 0{,}5[\underline{x}_i(r) + \bar{x}_i(r)]$, $i = \overline{1, n}$; $B^s_{н} = (b^s_{н1}, \ldots, b^s_{нn})^T$, $b^s_{нi} = 0{,}5[\underline{b}_i(r) + \bar{b}_i(r)]$, $i = \overline{1, n}$ — векторы, состоящие из симметричных (*symmetry* — *s*) нечетких чисел.

Нечеткое число $u^s_{н}(r)$ называется симметричным нечетким числом в параметрической форме, если является реальной константой для всех $0 \le r \le 1$. Например, $u_{н} = (2 + r,\ 5 - 2r)$ является нечетким числом, а $v_{н} = (1 + r,\ 3 - r)$ — симметричное нечеткое число в параметрической форме. Четкое число просто представлено как $\underline{u}(r) = \bar{u}(r) = \alpha$, $0 \le r \le 1$ [5].

Из выражений (8) и (9) получим решение

$$\begin{cases} (D + C)W = V \\ (D - C)X^s_{н} = B^s_{н} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}_i(r) = x^s_{нi} - 0{,}5w_i, \\ \bar{x}_i(r) = x^s_{нi} + 0{,}5w_i \end{cases},$$

$$\forall i = \overline{1, n}.$$

Пример 2. Имеем:

$$\begin{cases} 1x_{н1} - 1x_{н2} = (\underline{b}_1(r) = r, \bar{b}_1(r) = 2 - r), \\ 1x_{н1} + 3x_{н2} = (\underline{b}_2(r) = 4 + 2r, \bar{b}_2(r) = 8 - 2r), \end{cases}$$

где правые части являются нечеткими симметричными числами.

Тогда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 = r \\ \underline{b}_2 = 4 + 2r \\ -\bar{b}_1 = -(2 - r) \\ -\bar{b}_2 = -(8 - 2r) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} i_1 : \underline{x}_1 - \bar{x}_2 = r, \\ i_2 : \underline{x}_1 + 3\underline{x}_2 = 4 + 2r, \\ i_3 : \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = r - 2, \\ i_4 : -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 2r - 8. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_3 = 2r + 2 \\ i_2 + i_4 = 4r + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{(\bar{x}_1 - \underline{x}_1)}_{w_1} + \underbrace{(\bar{x}_2 - \underline{x}_2)}_{w_2} = \underbrace{2 - 2r}_{v_1} \\ \underbrace{(\bar{x}_1 - \underline{x}_1)}_{w_1} + 3\underbrace{(\bar{x}_2 - \underline{x}_2)}_{w_2} = \underbrace{4 - 4r}_{v_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1 - r \\ w_2 = 1 - r \end{cases}.$$

С другой стороны, из-за симметричности функций принадлежностей нечетких чисел $b_{н1}$ и $b_{н2}$, получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^s_1 \\ x^s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^s_1 = 0{,}5(\underline{b}_1 + \bar{b}_1) = 1 \\ b^s_2 = 0{,}5(\underline{b}_2 + \bar{b}_2) = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x^s_1 - x^s_2 = 1 \\ x^s_1 + 3x^s_2 = 6 \end{array} \Rightarrow x^s_1 = 9/4; \quad x^s_2 = 5/4.$$

Поэтому решение примет следующий вид:

$$\underline{x}^*_1 = x^s_1 - 0{,}5w_1 = 9/4 - 0{,}5(1 - r);$$

$$\bar{x}^*_1 = x^s_1 + 0{,}5w_1 = 9/4 + 0{,}5(1 - r);$$

$$\underset{\sim}{x}_2^* = x_2^s - 0{,}5w_2 = 5/4 - 0{,}5(1 - r);$$

$$\bar{x}_2^* = x_2^s + 0{,}5w_2 = 5/4 + 0{,}5(1 - r).$$

Можно показать, что нечеткое решение $X_{\text{н}}^* = (x_{\text{н}1}^*, x_{\text{н}2}^*)$, где $x_{\text{н}1}^* = (\underset{\sim}{x}_1^*(r), \bar{x}_1^*(r)|r \in [0; 1])$, $x_{\text{н}2}^* = (\underset{\sim}{x}_2^*(r), \bar{x}_2^*(r)|r \in [0; 1])$ является сильным решением. ♦

Замечание. Метод справедлив, если правая часть НСЛУ представляется вектором, каждая компонента которого имеет функции принадлежностей в виде равнобедренного треугольника.

2.5. Метод нечеткого центра [9]

Основное преимущество этого метода состоит в неиспользовании расширенной матрицы и отсутствии ограничений на симметричность функций принадлежностей компонент вектора правой части НСЛУ.

Имеем координату центра (*center* — *c*) нечеткого числа:

$$x_j^c(r) = 0{,}5[\underset{\sim}{x}_j(r) + \bar{x}_j(r)],$$

откуда

$$\underset{\sim}{x}_j(r) = 2x_j^c(r) - \bar{x}_j(r); \quad \bar{x}_j(r) = 2x_j^c(r) - \underset{\sim}{x}_j(r).$$

Подставив $\bar{x}_j(r)$ в выражение (9), получим:

$$\Sigma(a_{ij} \geq 0)\underset{\sim}{x}_j + \Sigma(a_{ij} < 0)[2x_j^c(r) - \underset{\sim}{x}_j(r)] = \underset{\sim}{b}_i(r) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma(a_{ij} \geq 0)\underset{\sim}{x}_j - \Sigma(a_{ij} < 0)\underset{\sim}{x}_j(r) =$$
$$= \underset{\sim}{b}_i(r) - 2\Sigma(a_{ij} < 0)x_j^c(r), \quad i = \overline{1, n},$$

откуда находим $\underset{\sim}{x}_j^*(r)$, $i = \overline{1, n}$.

Далее аналогично, заменив $\underset{\sim}{x}_j(r) = 2x_j^c(r) - \bar{x}_j(r)$, получим:

$$\Sigma(a_{ij} \geq 0)\bar{x}_j - \Sigma(a_{ij} < 0)\bar{x}_j = \bar{b}_i(r) - 2\Sigma(a_{ij} < 0)x_j^c(r),$$
$$i = \overline{1, n},$$

откуда находим $\bar{x}_j^*(r)$, $i = \overline{1, n}$.

В результате будем иметь нечеткое решение НСЛУ:

$$x_{\text{н}j}^* = (\underset{\sim}{x}_j^*(r), \bar{x}_j^*(r)|r \in [0; 1]), \quad j = \overline{1, n}.$$

Пример 3. Имеем НСЛУ 2-го порядка:

$$\begin{cases} 1x_{\text{н}1} - 1x_{\text{н}2} = (\underset{\sim}{b}_1(r) = r, \ \bar{b}_1(r) = 2 - r), \\ 1x_{\text{н}1} + 3x_{\text{н}2} = (\underset{\sim}{b}_2(r) = 4 + r, \ \bar{b}_2(r) = 7 - 2r), \end{cases}$$

в которой функции принадлежностей нечетких чисел $b_{\text{н}1}$, $b_{\text{н}2}$ правой части НСЛУ не имеют форм равнобедренных треугольников.

Для нечетких переменных имеем представление:

$$x_{\text{н}j} = (\underset{\sim}{x}_j(r), \bar{x}_j(r)|r \in [0; 1]), \quad j = 1, 2,$$

Поэтому для нижних значений $\underset{\sim}{x}_1(r)$, $\underset{\sim}{x}_2(r)$ исходная НСЛУ с учетом свойства $-1x_{\text{н}2} = (\bar{x}_2(r), -\underset{\sim}{x}_2(r))$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{x}_1 - \bar{x}_2 = r \\ \underset{\sim}{x}_1 + 3\underset{\sim}{x}_2 = 4 + r\big|_{-\underset{\sim}{x}_2 = \bar{x}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{x}_1 + \underset{\sim}{x}_2 = (9 + 3r)/4 \\ \underset{\sim}{x}_1 + 3\underset{\sim}{x}_2 = 4 + r\big|_{r = 0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{x}_1(0) + \underset{\sim}{x}_2(0) = 9/4 \\ \underset{\sim}{x}_1(0) + 3\underset{\sim}{x}_2(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \underset{\sim}{x}_1(0) = 11/8; \quad \underset{\sim}{x}_2(1) = 7/8.$$

Далее

$$\begin{cases} \underset{\sim}{x}_1 + \underset{\sim}{x}_2 = (9 + 3r)/4 \\ \underset{\sim}{x}_1 + 3\underset{\sim}{x}_2 = 4 + r\big|_{r = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{x}_1 + \underset{\sim}{x}_2 = 3 \\ \underset{\sim}{x}_1 + 3\underset{\sim}{x}_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}_1(1) = 2; \quad \underset{\sim}{x}_2(1) = 1.$$

В результате в системе координат $(r, x_1(r))$ для зависимости $\underset{\sim}{x}_1(r)$ будем иметь характерные точки: ($r = 0$, $\underset{\sim}{x}_1^*(r) = ar|_{a = 5/8} + b|_{b = 14/8} = 11/8$; $r = 1$, $\underset{\sim}{x}_1(1) = 2$). Линейная зависимость $\underset{\sim}{x}_1(r) = ar + b$ через эти точки дает:

$$\underset{\sim}{x}_1^*(r) = ar|_{a = 5/8} + b|_{b = 14/8} = 5r/8 + 11/8, \quad r \in [0, 1].$$

Пример 4. Пусть теперь в уравнении из примера 3 правая часть НСЛУ имеет несимметричные нечеткие числа:

$$\begin{cases} x_{\text{н}1} - x_{\text{н}2} = (\underset{\sim}{b}_1(r) = r, \ \bar{b}_1(r) = 2 - r), \\ x_{\text{н}1} + 3x_{\text{н}2} = (\underset{\sim}{b}_2(r) = 4 + 2r, \ \bar{b}_2(r) = 8 - 2r). \end{cases}$$

В этом случае вычисления упрощаются, и получим следующий результат:

$$\underset{\sim}{x}_{\text{н}1}^* = (\underset{\sim}{x}_1^*(r) = 7/4 + 0{,}5r, \ \underset{\sim}{x}_1^*(r) = 11/4 - 0{,}5r \mid r \in [0, 1];$$

$$\underset{\sim}{x}_{\text{н}2}^* = (\underset{\sim}{x}_2^*(r) = 3/4 + 0{,}5r, \ \underset{\sim}{x}_2^*(r) = 7/4 - 0{,}5r \mid r \in [0, 1].$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ НЕЧЕТКИХ ДАННЫХ

3.1. Нечеткая интерполяция [10]

Пусть имеется нечеткая функция $y_{\text{н}}$ на сетке a_i, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через $A = (a_{ij} = a_i^j)$ — четкие узлы сетки, $y_{\text{н}i}$, $i = \overline{0, n}$ нечеткие числа, заданные в параметрической форме: $y_{\text{н}i} = (\underset{\sim}{y}_i(r), \bar{y}_i(r) \mid r \in [0, 1])$. Нечеткая функция $y_{\text{н}}$ задана в параметрической относительно нечеткого вектора параметров $x_{\text{н}} = (x_{\text{н}0}, ..., x_{\text{н}n})^T$ форме:

$$y_{\text{н}}\big|_{y_{\text{н}} = y_{\text{н}i}} = y(g(a), x_{\text{н}})\big|_{\substack{x_{\text{н}} = x_{\text{н}1} \\ g(a) = g_i}}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (10)$$

Обычно рассматриваются два варианта задания (10):

— зависимость (10) представляется в виде нечеткого обобщенного многочлена по линейно независимой четкой системе функций Чебышева $g_i(a)$:

$$y(g(a),\ x_н) = \sum_{i=0}^{n} x_{нi} g_i(a); \qquad (11)$$

— зависимость (10) является нелинейной относительно $x_н$, например, представляется экспоненциальными, тригонометрическими или другими функциями.

По аналогии с четкой интерполяцией представление (11) будем называть нечеткой лагранжевой интерполяцией. В зависимости от способа задания функций $g_i(a)$, $i = \overline{0, n}$, будем различать нечеткие интерполяции Ньютона, Гаусса, Лапласа — Эверта и др.

Нечеткая ньютоновская интерполяция. В этом случае в выражении (11) полагают $g_i(a) = a^i$, $i = \overline{0, n}$, тогда:

$$y_н(a,\ x_н) = \sum_{i=0}^{n} x_{нi} a^i. \qquad (12)$$

Для нахождения нечетких параметров $x_{нi}$, $i = \overline{0, n}$, модели (12) полагают $y_н = y_{нi}$, тогда появляется НСЛУ относительно $x_{нi}$, $i = \overline{0, n}$:

$$x_{нi} = \sum_{i=0}^{n} x_{нi} a^i, \quad i = \overline{0, n} \Leftrightarrow AX_н = Y_н, \qquad (13)$$

где

$$A = (a_{ij} = a_i^j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad |A| \neq 0.$$

Система (13) может быть решена одним из методов пп. 2.1—2.5.

Пример 5. Пусть в координатах $(a,\ y_н)$ имеем:

$$(a_0 = -1,\ y_{н0} = 1_н = (r,\ 2 - r \mid r \in [0,\ 1])),$$
$$(a_1 = 3,\ y_{н1} = 5_н = (4 + r,\ 7 - 2r \mid r \in [0,\ 1])).$$

Необходимо найти нечеткую ньютоновскую интерполяцию:

$$y_н(a,\ x_н) = \sum_{i=0}^{1} x_{нi} a^i = x_{н0} + x_{н1} a.$$

Будем решать задачу методом вложения Фридмана (см. п. 2.1). Подставив исходные данные в уравнение интерполяции, получим НСЛУ типа (13) второго порядка:

$$\begin{cases} 1_н = x_{н0} 1 - x_{н1} 1 \\ 5_н = x_{н0} 1 + x_{н1} 3 \end{cases} \Rightarrow AX_н = Y_н \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_н \\ 5_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_н \\ 5_н \end{bmatrix},$$

$$|A| = 4 \neq 0.$$

Расширенная матрица системы:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \\ -\bar{x}_0 \\ -\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_0 = r \\ \underline{y}_1 = 4 + r \\ -\bar{y}_0 = r - 2 \\ -\bar{y}_1 = 2r - 7 \end{bmatrix}, \quad |S| \neq 0.$$

Вычисления дают:

$$x_{н0}^* = (\underline{x}_0^*(r) = 1{,}4 + 0{,}6r,\ \bar{x}_0^*(r) = 2{,}9 + 0{,}9r \mid r \in [0,\ 1]);$$
$$x_{н1}^* = (\underline{x}_1^*(r) = 0{,}9 + 11r,\ \bar{x}_1^*(r) = 1{,}4 + 0{,}4r \mid r \in [0,\ 1]).$$

Это решение является сильным, так как $\underline{x}_0^*(r) < \bar{x}_0^*(r)$ и $\underline{x}_1^*(r) < \bar{x}_1^*(r)\ \forall r \in [0,\ 1]$, поэтому нечеткий ньютоновский интерполяционный многочлен $y_н^* = x_{н0}^* + x_{н1}^* a$ является сильным. В работе [10] приведен пример слабого многочлена.

3.2. Нечеткая линейная регрессия

По аналогии с традиционной регрессионной моделью [11] рассмотрим ее нечеткий аналог:

$$y_н(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{нi} \varphi_i(t) + \Delta_н(t), \quad t \in [0;\ T] \subset R_1,$$

где $x_{нi}$, $i = \overline{1, n}$ — нечеткие параметры, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, — четкие базисные функции, $\Delta_н(t)$ — случайный процесс с нечеткими параметрами: нечетким математическим ожиданием $E\Delta_н(t) = 0_н$ и нечеткой дисперсией $D\Delta_н(t) = \sigma_н^2 I$.

Пусть имеем выборку:

$$t : \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_m \\ y_{н1} & \dots & y_{нm} \end{pmatrix}, \quad m \geq n.$$

Необходимо по нечетким случайным (гибридным) данным $Y_н = (y_{н1},\ \dots,\ y_{нm})^T$ найти нечеткий вектор $X_н = (x_{н1},\ \dots,\ x_{нn})^T$.

Вектор $X_н$ находится из условия $\underset{X_н}{\min} \| Y_н - \Phi X_н \|_{E_n}^2$, что приводит к НСЛУ:

$$\Phi^T \Phi X_н = \Phi^T Y_н, \qquad (14)$$

где $\Phi = (\varphi_i(t_j) = \varphi_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — регрессионная матрица.

В простейшем случае, когда $n = 1$, а $\varphi_1(t) = 1$, будем иметь: $y_н(t) = x_{нi} 1 + \Delta_н(t)$ и в этом случае получим из системы (14):

$$\Phi^T \Phi = [1,\ \dots,\ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n;$$

$$\Phi^T Y_{\text{н}} = [1, ..., 1]\begin{bmatrix} y_{\text{н}1} \\ ... \\ y_{\text{н}m=n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_{\text{н}i},$$

а НСЛУ примет вид:

$$nx_{\text{н}1} = \sum_{i=1}^{n} y_{\text{н}i} \Rightarrow nx^*_{\text{н}1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{\text{н}i}.$$

Возьмем $n = 3$, а в качестве нечетких данных значения

$$y_{\text{н}3} = 5_{\text{н}} = (4 + r, 7 - 2r),\ \ y_{\text{н}2} = 3_{\text{н}} = (2 + r, 4 - r),$$
$$y_{\text{н}3} = 5_{\text{н}} = (4 + r, 7 - 2r).$$

Тогда

$$x^*_{\text{н}1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} y_{\text{н}i} = (2 + r, (13 - 4r)/3).$$

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Методы *Q* — *T*-декомпозиции [12]

Положим, что имеется НСЛУ (1), размерностью $\dim A > 3$ и которая решается одним из методов вложения. Это означает, что по матрице A находится расширенная матрица S и решается система $S\hat{X} = \hat{B}$, где размерность $\dim \hat{B} > 2 \times 3 = 6$. Задача итерационных методов состоит в их реализации для решения линейной системы $S\hat{X} = \hat{B}$.

Пусть имеет место декомпозиция (расщепление) матрицы S на две матрицы Q и T:

$$S = Q - T,$$

где Q — диагональная матрица с диагональными элементами матрицы S, а матрица T определяется как $T = S - Q$, например,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеет место соотношение:

$$S\hat{X} = \hat{B} \Leftrightarrow Q\hat{X} = (Q - S)\hat{X} + \hat{B}, \qquad (15)$$

которое используется в итерационных методах.

По соотношению (15) задается итерационный процесс:

$$Q\hat{X}_{m+1} = (Q - S)\hat{X}_m - \hat{B}, \qquad (16)$$

где m — номер итерации. Ошибка получается, как разность соотношений (15) и (16):

$$Q\underbrace{(\hat{X} - \hat{X}_{m+1})}_{\hat{E}_{m+1}} = (Q - S)\underbrace{(\hat{X} - \hat{X}_m)}_{\hat{E}_m}.$$

Откуда

$$\hat{E}_{m+1} = Q^{-1}(Q - S)\hat{E}_m \Rightarrow \hat{E}_{m+1} = \rho\hat{E}_m,$$

$$m = 0, 1, 2, ... \Rightarrow \rho = Q^{-1}(Q - S) \Rightarrow \max_i|\lambda_i|.$$

Здесь ρ — спектральный радиус матрицы $Q^{-1}(Q-S)$, λ_i — корни уравнения $|Q^{-1}(Q - S) - \lambda I| = 0$.

Из выражения (16) следует:

$$\hat{X}_{m+1} = (I - Q^{-1}S)\hat{X}_m + Q^{-1}\hat{B},$$

где S — расширенная матрица относительно матрицы A.

Обычно для итерационных процессов часто применяется декомпозиция вида

$$D = D_1 + L + U, \qquad (17)$$

где D_1 — диагональная матрица относительно D, U — строго верхняя треугольная матрица D, L — строго нижняя треугольная матрица D.

В зависимости от способов задания матрицы Q в уравнении (16) имеется совокупность итерационных методов. Приведем некоторые из них.

4.1.1. Метод Ричардсона (Richardson — R)

В методе Ричардсона полагается $Q = I_{(2n\times 2n)}$. Тогда базовое уравнение (16) примет вид:

$$Q\hat{X}_{m+1} = \left(Q|_{Q=I} - S|_{S=\begin{bmatrix} D & C \\ C & D \end{bmatrix}}\right)\hat{X}_m + \hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\underline{\hat{X}}_{m+1}, \overline{\hat{X}}_{m+1})^T = \sigma_R(\underline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m)^T + Q^{-1}(\underline{\hat{B}}, \overline{\hat{B}})^T,$$

где $\sigma_R = \begin{bmatrix} I_{n\times n} - D & -C \\ -C & I_{n\times n} - D \end{bmatrix}$ — матрица Ричардсона.

Доказано, что оценка $\hat{X}_{m+1}$ сходится при $M(S) < 2$, где $M(S) = \max_i|\lambda_i|$, λ_i — собственные числа матрицы S. Спектральный радиус (скорость сходимости) $\rho(\sigma_R) = \max\{1 - m(S),\ 1 - M(S)\}$, где $m(S) = \min_i |\lambda_i|$ является небольшим.

В экстраполяционном методе Ричардсона (ER) полагается $Q = \alpha^{-1}I$, где $\alpha \subset R_1$ — экстраполяционный параметр. Тогда

$$\sigma_{ER} = \begin{bmatrix} I - D & -\alpha C \\ -\alpha C & I - D \end{bmatrix}.$$

Доказано, что если матрица S — симметричная и положительно определена, то $\alpha_{\text{opt}} = 2(m(S) + M(S))$, $\rho(\sigma_{ER}, \alpha_{\text{opt}}) = (\rho(S) - 1)(\rho(S) + 1)^{-1}$.

4.1.2. Метод Якоби (Jacobi — J)

В методе Якоби полагается $Q = \text{diag}S = D$, где $D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$. Из уравнения (16) имеем:

$$\hat{X}_{m+1} = (I - Q^{-1}S)\hat{X}_m + Q^{-1}\hat{B}.$$

После вычисления $I - Q^{-1}S$ с учетом формулы (17) и правил умножения блочных матриц имеем:

$$\sigma_j = I - Q^{-1}S = \begin{bmatrix} -D_1^{-1}(L_1 + U_1) & -D_1^{-1}C \\ -D_1^{-1}C & -D_1^{-1}(L_1 + U_1) \end{bmatrix} \text{ —}$$

матрица Якоби.

Итерационный процесс Якоби имеет вид:

$$(\hat{\underline{X}}_{m+1},\ \hat{\overline{X}}_{m+1})^T = \sigma_J(\hat{\underline{X}}_m,\ \hat{\overline{X}}_m)^T + (D_1^{-1},\ D_1^{-1})^T(\hat{\underline{B}},\ \hat{\overline{B}})^T.$$

Доказано, что скорость его сходимости $\rho(\sigma_J) > \rho(\sigma_R)$.

4.1.3. Метод Гаусса—Зейделя (Gaus—Seidel — GS)

В методе Гаусса — Зейделя различают прямую GSF и обратную GSB итерации.

Для прямой итерации GSF полагается $Q = D + L$, $D = \text{diag}S$, L нижняя треугольная матрица для S. Это дает:

$$Q_{GSF} = \begin{bmatrix} D = D_1 & C = 0 \\ C = 0 & D = D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D = L_1 & 0 \\ C & D = L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 + L_1 & 0 \\ C & D_1 + L_1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, итерационный процесс GSF будет иметь вид:

$$(\hat{\underline{X}}_{m+1},\ \hat{\overline{X}}_{m+1})^T = \sigma_{\text{GSF}}(\hat{\underline{X}}_m,\ \hat{\overline{X}}_m)^T + Q_{\text{GSF}}^{-1}(\hat{\underline{B}},\ \hat{\overline{B}})^T,$$

где $\sigma_{\text{GSB}} = I - Q_{\text{GSF}}^{-1}S$. Здесь Q^{-1} находится по формуле Фробениуса при обращении блочной матрицы [13].

Для обратной итерации GSB полагается $Q = D + U$, U — верхняя треугольная матрица для S. Это дает:

$$Q_{\text{GSB}} = \begin{bmatrix} D = D_1 & C = 0 \\ C = 0 & D = D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D = U_1 & C \\ 0 & D = U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 + U_1 & C \\ 0 & D_1 + U_1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, итерационный процесс GSB будет иметь вид:

$$(\hat{\underline{X}}_{m+1},\ \hat{\overline{X}}_{m+1})^T = \sigma_{\text{GSB}}(\hat{\underline{X}}_m,\ \hat{\overline{X}}_m)^T + Q_{\text{GSB}}^{-1}(\hat{\underline{B}},\ \hat{\overline{B}})^T,$$

где $\sigma_{\text{GSB}} = I - Q_{\text{GSB}}^{-1}S$ — матрица Гаусса — Зейделя обратной итерации.

4.2. Метод HSS-декомпозиции (Hermition — Scew — Spliting — HSS) [13]

В эрмитово-скивском расщеплении (декомпозиции) расширенная матрица S полагается равной сумме матриц:

$$S = H + F,$$

где $H = 0{,}5(S + S^T)$ — эрмитова матрица, $F = 0{,}5(S - S^T)$ — скивская матрица. В этих обозначениях для расширенной системы имеем цепочку соотношений:

$$S\hat{X} = \hat{B} \Rightarrow (\alpha I + H)\hat{X} = (\alpha I - F)\hat{X} + \hat{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha I\hat{X} + H\hat{X} = \alpha I\hat{X}F\hat{X} + \hat{B} \Rightarrow (\alpha I + H)\hat{X} =$$
$$= (\alpha I - F)\hat{X} + \hat{B},$$

где $\alpha \subset R_1$ — параметр.

Полученное соотношение позволяет задать итерационный процесс 1 в виде:

$$(\alpha I + H)\hat{X}_{m+1} = (\alpha I - F)\hat{X}_m + \hat{B}. \qquad (18)$$

Выполнив аналогичным образом цепочку соотношений

$$S\hat{X} = \hat{B} \Rightarrow (\alpha I + H)\hat{X}_{m+1} = (\alpha I - F)\hat{X}_m + \hat{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha I + F)\hat{X} = (\alpha I - H)\hat{X} + \hat{B},$$

получим итерационный процесс 2:

$$(\alpha I + F)\hat{X}_{m+1} = (\alpha I - H)\hat{X}_m + \hat{B}. \qquad (19)$$

Алгоритм HSS:

Шаг 1. Задается начальное приближение $\hat{X}_0$.

Шаг 2. По выражению (18) находится с заданной точностью решение $\hat{X}'$;

Шаг 3. По выражению (19) с начальным приближением $\hat{X}_0 = \hat{X}'$ находится с заданной точностью решение $\hat{X}''$.

Итерационные методы решения НСЛУ сравниваются между собой, как правило, по следующим критериям: ошибка процесса, время решения, число итераций, скорость сходимости.

5. МЕТОДЫ ПСЕВДОРЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Псевдорешение метода вложения Фридмана [5]

Проблема получения псевдорешений весьма актуальна применительно к НСЛУ. Рассмотрим пример, в котором возникает проблема псевдорешения. Пусть имеем НСЛУ:

$$\begin{cases} x_{\text{н}1} - x_{\text{н}2} = (\underline{b}_1(r) = r,\ \bar{b}_1(r) = 2 - r), \\ x_{\text{н}1} + x_{\text{н}2} = (\underline{b}_2(r) = 3 + r,\ \bar{b}_2(r) = 4), \end{cases}$$

которую будем решать методом вложения Фридмана. Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 2 \neq 0,$$

однако $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $|S| = 0$, т. е. расширенная НСЛУ не имеет единственного решения. В этом случае система решается в соответствии с общей теорией решения систем по методу Гаусса путем приведения матрицы S к ступенчатому виду:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & Y_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & Y_1 - Y_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & Y_1 - Y_2 + Y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T$ обозначает $Y_{\text{н}} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, -\bar{b}_1, -\bar{b}_2)$. Матрица S приведена к ступенчатому виду S_3, поэтому возможны два варианта решения НСЛУ.

Вариант 1. Пусть имеем линейную независимость Y_i, $i = 1, 2, 3, 4$: $Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \neq 0$. Тогда из последней сроки матрицы S_3 имеем: $0\ 0\ 0\ 0\ Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \neq 0$, т. е. противоречие, означающее несовместность НСЛУ, т. е. отсутствие нечеткого решения. Подставляя компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$, получим: $r - 5 \neq 4$. Это означает, что расширенная система не имеет решения при $|A| \neq 0$ и $|S| = 0$.

Вариант 2. Пусть имеем линейную независимость Y_i, $i = 1, 2, 3, 4$: $Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 = 0$. Тогда из последней сроки матрицы S_3 имеем: $0\ 0\ 0\ 0\ Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 = 0$, Подставляя компоненты вектора Y, получим: $r - 5 = r - 5$. Это означает, что расширенная система имеет бесчисленное множество решений. В работе [1] показано, каким образом выделяется одно решение из множества возможных решений, которое определит искомое псевдорешение для системы при $|S| = 0$.

Подобным образом находятся псевдорешения при удвоенном методе вложения Фридмана, методе вложения Еззати и методе вложения Аббасбанди.

Распространенный прием получения псевдорешений заключается в применении различных методов традиционной алгебры, связанных с различными разложениями прямоугольных матриц с целью нахождения для них обратных.

Один из них — метод сингулярного разложения прямоугольной матрицы S для расширенной НСЛУ. В работе [14] предложен метод нахождения минимального решения для $(m \times n)$ НСЛУ, основанный на следующих двух теоремах (приведем их без доказательств).

Теорема 1. *Пусть W — матрица $(p \times q)$ полного ранга с действительными элементами. Тогда существуют $(p \times p)$ ортогональная матрица U, $(q \times q)$ ортогональная матрица V, диагональная матрица $\sum$: элементы $\sum_{ij} = 0$, $i \neq j$ и $\sum_{ii} = \sigma_i > 0$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_s > 0$, σ_i, $i = \overline{1, s}$ — сингулярные числа, $s = \min\{p, q\}$ и справедлива сингулярная декомпозиция*:

$$W_{(p \times q)} = U_{(p \times p)} \Sigma_{(p \times q)} V^T_{(q \times q)},$$

а матрица $W^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$ является единственной псевдообратной матрицей для W.

Теорема 2. *Для неотрицательной полного ранга матрицы $S = \begin{bmatrix} D & C \\ C & D \end{bmatrix}$ существует псевдообратная* *матрица* $S^{\dagger} = \begin{bmatrix} F & E \\ E & D \end{bmatrix}$, *у которой* $F = 0{,}5[(D + C)^{\dagger} + (D - C)^{-1}]$, $E = 0{,}5[(D + C)^{\dagger} - (D - C)^{-1}]$. ♦

Из этих теорем следует, что псевдорешение расширенной системы $\tilde{X}^{*} = S^{\dagger}\tilde{Y}$.

В работе [15] предложен метод решения полных НСЛУ с использованием сингулярного разложения. В работе [16] рассмотрен метод решения общих полных НСЛУ, в которых элементы матриц необязательно являются положительными, также путем сингулярного разложения. Предложен новый метод для решения НСЛУ, основанный на алгоритме Гревиля (Greville) [17], хорошо известного в традиционной теории матриц [18]. Кроме того, отметим возможность применения для решения НСЛУ методов традиционной теории матриц [19—21]: скелетного разложения, предельного перехода, регуляризации и др.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отмечено, что в теории нечетких множеств одно из важных научных и прикладных направлений состоит в решении задач нечеткого математического анализа. Указано, что при их решении возникает проблема решения нечетких систем линейных уравнений. Для них приведена общая классификация и для класса полных НСЛУ рассмотрены методы решения: обратной матрицы, размаха, ST-декомпозиции, разрезов, четких решений. Отмечено, что в некоторых случаях возникают «сильные/слабые» решения полных НСЛУ.

Сформулированы и решены задачи, при рассмотрении которых возникают полные НСЛУ: оценивание параметров по методу наименьших квадратов нечеткой модели и нечеткая ортогонализация Грама — Шмидта. Их решение иллюстрируются на примерах нечеткой регрессионной модели с нечеткими базисными функциями.

Для класса неполных НСЛУ рассмотрены методы их решения: вложения Фридмана, Еззати, Аббасбанди и нечеткого центра, которые характеризуются применением их к решению НСЛУ небольшой размерности (обычно не более трех).

В качестве примеров решения НСЛУ небольшой размерности рассмотрены задачи нечеткой ньютоновской интерполяции и нечеткой линейной регрессии.

При значительной размерности НСЛУ для их решения рассмотрена совокупность итерационных методов, основанных на $Q - T$ и HSS-разложениях расширенной матрицы для НСЛУ.

Изложен метод псевдорешения для НСЛУ, решаемой по методу Фридмана. Перечислены и другие традиционные методы получения псевдорешений, которые применяются для решения вырожденных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.* Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — № 2 (210). — С. 14—22. [*Mochalov, I.A.*, *Hrisat, M.S.* Estimation Parameter Model Using Fuzzy Random Data / Informacionnye Tehnologii. — 2014. — Vol. 20, No. 4. — P. 14—22. (In Russian)]
2. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.*, *Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 1 // Информационные технологии. — 2015. — Т. 21, № 3. — С. 171—178. [*Mochalov, I.A.*, *Hrisat, M.S.*, *Shihab Eddin, M.Ya.* Fuzzy Diferential Equations in Control. Part I // Informacionnye Tehnologii. — 2015. — Vol. 21, No. 3. — P. 171—178. (In Russian)]
3. *Ullah, S.*, *Faroog, M.*, *Ahmad, I.*, et al. Application of fuzzy Laplace transforms for solving fuzzy partial Volterra integro-differential equations // General Mathematics (Math. GM). — 2014. — No. 8. — P. 1—11.
4. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник Московского гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана, Сер. «Приборостроение». — 2016. — № 1 (91). — С. 59—74. [*Demenkov, N.P.*, *Mochalov, I.A.* Dinamika nechetkoj sistemy avtomaticheskoj optimizacii // Vestnik Moskovskogo gos. tekhn. un-ta im. N.E. Baumana, Ser. «Priborostroenie». — 2016. — No. 1 (91). S. 59—74. (In Russian)]
5. *Деменков Н.П.*, *Микрин Е.А.*, *Мочалов И.А.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 1. Полные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 4. — С. 3—14. [*Demenkov, N.P.*, *Mikrin, E.A.*, *Mochalov, I.A.* Methods of Solving Fuzzy Systems of Linear equations. Part 1. Complete Systems // Control Sciences. — 2019. — No. 3. — P. 3—14. (In Russian)]
6. *Friedman*, *M.*, *Ming*, *M.*, *Kandel*, *A.* Fuzzy Linear Systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1988. — No. 96. — P. 201—209.
7. *Jafarian*, *A.*, *Otadi, M.* Numerical Solution of Fuzzy Integral Equations // Applied Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 2, No. 1. — P. 33—46.
8. *Ezzati*, *R.* Solving Fuzzy Linear Systems // Soft Computing. — 2014. — 15 (1). — P. 193—197.
9. *Abbasbandy*, *S., and Alavi*, *M.* A Method for Solving Fuzzy Linear System // Iranian Journal of Fuzzy Systems. — 2005. — Vol. 2, No. 2. — P. 137—143.
10. *Senthilkumar*, *P., and Rajendran*, *G.* Solution of Fuzzy Linear Systems by Using Fuzzy Center // Applied Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 3, No. 49. — P. 2411—2419.
11. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нечеткая интерполяция // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. — 2012. — № 2. DOI: http://dx.doi.org/ № ФС77 — 30569 /308732. [*Demenkov*, *N.P.*, *Mochalov*, *I.A.* Nechetkaya interpolyaciya // Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. zhurn. — 2012. — No. 2. (In Russian)]
12. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир. — 1980. — 456 с. [*Seber, Dzh.* Lineinyi regressionnyi analiz. — M.: Mir. — 1980. — 456 s. (In Russian)]
13. *Dehghan*, *M.*, *Hashemi*, *B.* Jterative Solution of Fuzzy Linear Systems // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — No. 175. — P. 645—674.
14. *Hasanzadeh*, *M.*, *Zareamoghaddam*, *H.* An Iterative Method for Solving Ansymmetric Systems of Fuzzy Linear Equation // The

SIJ Transaction on Computer Engineering & its Applications (CSEA). — 2013. — Vol. 5, No. 5. — P. 181—185.

15. *Otadi, M.*, *Mosleh, M.* Minimal Solution of Fuzzy Linear Systems // Iranian Journal of Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 12, No. 1. — P. 89—99.
16. *Mosleh*, *M.*, *Otadi*, *M.*, *Abbasbandy*, *S.* A Method for Solving Fully Fuzzy Linear Systems // Mathematics Scientific Journal. — 2011. — Vol. 7, No. 2. — P. 55—66.
17. *Moloudzadeh*, *S.*, *Darabi*, *P.*, *Khandani*, *H.* The Psevdoinverse Smatrices to Solve General Fully Fuzzy Linear Systems // Journal of Soft Computing and Applications. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1—11. Article ID jsca-00012. DOI:10.5899/2013/jsca-00012
18. *Matinfar*, *M.*, *Nasseri*, *S.H.*, *Alemi*, *M.* A New Method for Solving of Rectangular Fuzzy Linear System of Equation Based of Greville's Algorithm // Applied Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 3, No. 2. — P. 75—84.
19. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с. [*Gantmaher*, *F.R.* Teoriya matric. — M.: Nauka, 1967. — 576 p. (In Russian)]
20. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983. — 336 с. [*Beklemishev*, *D.V.* Dopolnitel'nye glavy linejnoj algebry. — M.: Nauka, 1983. — 336 p. (In Russian)]
21. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с. [*Streng*, *G.* Linejnaya algebra i ee primeneniya. — M.: Mir, 1980. — 454 p. (In Russian)]

Статья представлена к публикации руководителем РРС В.Ю. Столбовым.

Поступила 27.12.2018, после доработки 28.02.2019.
Принята к публикации 4.04.2019.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН, ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ eugeny.mikrin@bmstu.ru,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ intelsyst@mail.ru.

METHODS OF SOLVING FUZZY SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS. Part 2. Incomplete Systems

N.P. Demenkov[1, #], E.A. Mikrin[2, 1], I.A. Mochalov[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, [2]S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»

[#]✉ dnp@bmstu.ru

Abstract. The methods of solving incomplete fuzzy systems of linear equations (FSLE) are described using the extension of the original system in the case when it is low dimensional. It is noted that in the Friedman embedding method the fuzzy system is immersed in the traditional one, which can be solved using the traditional methods of linear algebra. The peculiarity of the doubled in the sense of dimensionality traditional system of linear equations is determined by the structure of its matrix. Like in solving the complete FSLE, here too the strong / weak solutions appear. The doubled Friedman embedding method is used to solve the doubled FSLE, which arise in solving the Volterra — Fredholm equations. The Ezzati embedding method is a chain of obvious relationships. The Abbasbandy embedding method is valid when the right-hand side of the FSLE is represented by a vector, each component of which has the membershi p functions in the form of an isosceles triangle. The main advantage of the center method is the non-use of the augmented matrix and the absence of restrictions on the symmetry of the membership functions of the components of the FSLE right-hand side vector. Methods described are illustrated by examples of solving the problem of fuzzy interpolation and of fuzzy linear regression. In a case of a significant FSLE dimension, the sets of iterative methods are considered for solving them, based on the Q—T-decomposition of the initial matrix S of the extended FSLE, when decomposition (splitting) of the matrix S into two matrices Q and T is performed. It is noted that depending on how the matrix Q is specified, there is a set of iterative methods. In the Richardson method, the matrix Q is assumed to be the unit matrix, in the Jacobi method, the matrix Q consists of the diagonal elements of the matrix S, in the Gaus — Seidel method the matrix Q is formed from the elements of the lower triangular or upper triangular matrix S. The HSS method uses Hermition-Skive splitting of the matrix S. The methods of obtaining the pseudo solution of FSLE are described and the traditional methods of linear algebra of obtaining pseudo solutions are listed.

Keywords: fuzzy systems of linear equations, fuzzy interpolation, fuzzy linear regression, fuzzy iteration methods, fuzzy pseudo-inversions.