УДК 517.97

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.4.1

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. Ч. 1. Полные системы

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Аннотация. Отмечено, что нечеткие системы линейных уравнений (НСЛУ) возникают при решении нечетких начальных задач, нечетких дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, при обработке гибридных данных в стохастических системах методом наименьших квадратов или максимального правдоподобия, при применении нечеткого преобразования Лапласа для решения нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка, при решении приближенными методами нечетких интегральных уравнений Фредгольма — Вольтерра второго рода, при применении для обработки данных нечеткой интерполяции и нечетких сплайнов, при решении задач нечеткого оптимального управления. Рассмотрены основные методы решения полных НСЛУ: обратной матрицы, размаха и ST-декомпозиции, в которых нечеткие элементы имеют функции принадлежностей треугольной формы; метод разрезов, в котором нечеткие элементы имеют функции принадлежностей не обязательно треугольной формы; метод четких решений, когда нечеткие элементы имеют левую и правую ветви функции принадлежности в виде полиномов. Применение методов проиллюстрировано вычислительными примерами. Сформулированы и решены задачи нечеткого оценивания по методу наименьших квадратов модели с нечеткими базисными функциями и нечеткой ортогонализации Грама — Шмидта, в которых появляются полные НСЛУ. Для иллюстрации решения этих задач рассмотрены две нечеткие базисные функции: нечеткая единица и нечеткая линейная зависимость.

Ключевые слова: полная нечеткая система линейных уравнений, нечеткие методы решения полных нечетких систем, нечеткое оценивание, нечеткая ортогонализация.

ВВЕДЕНИЕ

В теории и практике управления и обработки информации важное место занимает теория нечетких множеств, которая применяется в этих областях в двух направлениях.

В основе первого из них лежит применение нечетких логических операций в теории управления и обработки нечеткой информации, в формировании нечетких выводов из нечетких условий и их объединении в глобальный вывод. В результате процедур фаззификации (fz), логической обработки с помощью нечетких «НЕ (⊖)», «И (∧)», «ИЛИ (∨)», «импликации (→)», «композиции (*, →)», где * — какая-то логическая операция, и процедуры дефаззификации (dfz) происходит обработка данных от реальных датчиков до выдачи управляющих сигналов на исполнительные органы. Системы управления, построенные на процедурах «fz — нечеткой логики — dfz», принято называть системами нечеткого логического управления, а технические устройства, реализующие такие системы, — нечеткими контроллерами [1]. Это направление активно разрабатывается применительно к решению разнообразных задач управления: синтез адаптивных нечетких логических регуляторов, разработка гибридных регуляторов на базе классических П-, ПД- и ПИД-регуляторов и других систем.

Второе направление применения теории нечетких множеств связано с «мягкими» вычислениями, под которыми обычно подразумеваются нечеткие арифметические операции сложения, вычитания, умножения, деления и операции нечеткого математического анализа, такие как нечеткий предельный переход, нечеткое дифференцирование и нечеткое интегрирование.

Нечеткие арифметические операции в теории нечетких множеств трактуются как специальные типы нечетких функций (отображений), определяемые в одномерном случае как отображение действительной переменной R_1 на нечеткое множество E_1, задаваемое совокупностью функций принадлежностей $\{r(x)\} \in E_1$, $r(\cdot) \in [0; 1] \subset R_1$. Обычно эти операции реализуются в нечетком калькуляторе, применяемом в коммерческой деятельности для приближенных вычислений и прогнозирования коммерческих показателей [1].

Операции нечеткого математического анализа вводятся путем задания векторного банахового пространства с метрикой в нем в виде расстояния $D(x, y)$ между элементами $x, y \in E_1$ в форме расстояния Хаусдорффа (Hausdorff). Непрерывность нечеткой функции в точке, дифференцируемость нечеткой функции в точке, интегрируемость нечеткой функции по Риману на промежутке трактуются как операции нечеткого предельного перехода (lim) относительно метрики Хаусдорффа.

В работах [2, 3] представлены различного типа дифференцируемости относительно метрики Хаусдорффа, показана их эквивалентность и формулируется начальная задача для нечеткого дифференциального уравнения первого порядка. Показано, что нечеткая начальная задача имеет не единственное решение, а для нахождения неизвестных параметров решается нечеткая система линейных уравнений (НСЛУ). Показано [4], что при решении нечетких дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка также возникает необходимость решения НСЛУ.

При обработке гибридных данных применяются стохастические модели с нечеткими параметрами [5]. При оценивании их по методам моментов, наименьших квадратов или максимального правдоподобия также возникают задачи решения НСЛУ.

Нечеткие дифференциальные уравнения высоких порядков приводят к появлению производных по Хукухаре (Hukuhara) и, в случае применения их для решения нечеткого преобразования Лапласа, возникает задача решения НСЛУ [6, 7].

В работах [8—14] представлены задачи и методы решения нечетких интегральных уравнений Фредгольма — Вольтерра второго рода. Показано, что при их решении приближенными методами появляются неполные и полные НСЛУ. В обоих случаях могут возникнуть «сильные/слабые» решения.

При обработке нечетких данных во многих случаях применяются нечеткая интерполяция и нечеткие сплайны [15, 16]. В этом случае по аналогии с предыдущими случаями появляются НСЛУ.

Решение простейших задач нечеткого оптимального управления также приводит к необходимости решения НСЛУ [17, 18].

Таким образом, в приведенных случаях при идентификации нечетких моделей везде появляются НСЛУ. В соответствии с работой [19] для них принята следующая классификация.

(i_1) Полные (fully) НСЛУ. Для них выделяются методы получения нечетких и четких решений.

(i_2) Неполные НСЛУ. В этом случае при больших объемах информации ($\dim A > 3$, где A — матрица системы) применяются итерационные методы, а при $\dim A \le 3$ — методы «вложения» и его модификации.

(i_3) Вырожденные НСЛУ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Имеем линейную модель в форме

$$AX = B, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрица с элементами $a_{ij} \in R_1$, X — искомый вектор, B — заданный известный вектор. Для уравнения (1) необходимо рассмотреть модель (i_1) и различные методы решения НСЛУ с соответствующими примерами.

В соответствии с работой [19] принимается определение полной НСЛУ: система $A_{н}X_{н} = B_{н}$ называется полной НСЛУ, если нечеткая матрица $A_{н}$ состоит из нечетких элементов ($a_{нij} \in E_1$), $i, j = 1, ..., n$, и вектор $B_{н}$ имеет нечеткие компоненты ($b_{нi} \in E_1$), $i = 1, ..., n$, где E_1 — нечеткое множество, «н» — индекс нечеткости. Задача состоит в нахождении нечеткого вектора $X_{н} \in E_1$.

Базовые определения приведены в работах [1—19] и далее перечисляются их наименования: нечеткое множество, типы функций принадлежностей, нечеткое число, нечеткая функция, нечеткие логические функции, нечеткое логическое управление, нечеткое банахово пространство, типы нечетких производных, нечеткие начальные и краевые задачи, нечеткое преобразование Лапласа, нечеткое оптимальное управление, нечеткий интеграл Римана, нечеткие интегральные уравнения Фредгольма — Вольтерра второго рода.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОЛНЫХ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Метод обратной матрицы [20]

Для получения основных соотношений этого метода будем пользоваться рядом определений [20].

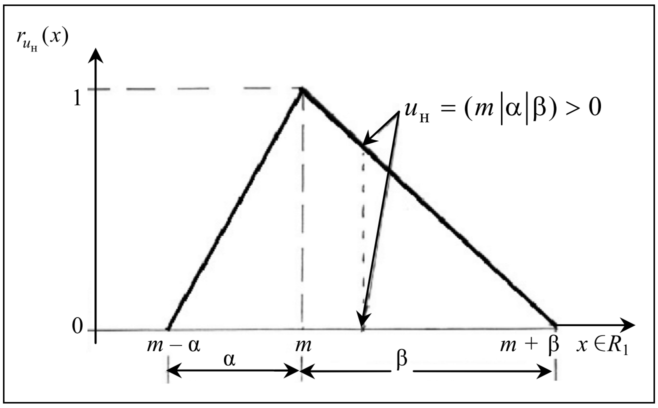

Рис. 1. Треугольное положительное число $u_н = (m|\alpha|\beta) > 0$

Определение 2.1. Нечеткое число $u_н = (m|\alpha|\beta)$ называется треугольным нечетким числом, если его функция принадлежностей $r_{u_н}(x)$ имеет вид, представленный на рис. 1, т. е.

$$r_{u_н}(x) = \begin{cases} 1 - \alpha^{-1}(m - x), \; m - \alpha \le x \le m, \; \alpha > 0, \\ 1 - \beta^{-1}(m - x), \; m < x \le m + \beta, \; \beta > 0, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

С помощью определения 2.1 даются определения следующих чисел:

— положительное нечеткое число $u_н > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m - \alpha > 0$;

— отрицательное нечеткое число $u_н < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m + \beta < 0$;

— нулевое нечеткое число $u_н = 0 \Leftrightarrow m = 0$, $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$;

— равенство двух нечетких чисел $u_н(m|\alpha|\beta) =$ $= \omega_н(n|\gamma|\delta) \Leftrightarrow m = n$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Определение 2.2. Матрица $U_н = (u_{нij})_{(n\times n)}$ называется нечеткой матрицей, если все ее элементы являются нечеткими числами, т. е. имеют треугольные функции принадлежностей:

$$U_н = (u_{нij})_{(n\times n)} =$$
$$= (A = (m_{ij})_{(n\times n)}|M = (\alpha_{ij})_{(n\times n)}|N = (\beta_{ij})_{(n\times n)}).$$

Определение 2.3. Имеют место следующие арифметические операции над нечеткими треугольными числами в соответствии с принципом расширения Заде [1]:

j_1) сложение: $u_н(m|\alpha|\beta) = \omega_н(n|\gamma|\delta) \Leftrightarrow m = n$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$;

j_2) отрицательное нечеткое число: $\varphi_н = -\omega_н = -(n|\gamma|\delta) = (-n|\gamma|\delta)$;

j_3) вычитание: $u_н - \omega_н = (m|\alpha|\beta) - (n|\gamma|\delta) = (m - n|\alpha + \delta|\beta + \gamma)$;

j_4) умножение двух нечетких положительных чисел: $u_н\omega_н = (m|\alpha|\beta)(n|\gamma|\delta) = (mn|\alpha n + m\gamma|\beta n + m\delta)$, $u_н > 0$, $\omega_н > 0$, которое легко получается из геометрических построений (рис. 2) (так, для координаты точки K получим тождество: $mn + \alpha\gamma = (m - \alpha) \times$ $\times (n - \gamma) \Rightarrow n\alpha + m\gamma \equiv 0$, аналогично для координаты точки L: $mn + \beta\delta = (m + \beta)(n + \delta) \Rightarrow n\beta + m\delta \equiv 0$);

j_5) умножение нечеткого числа $u_н$ на скаляр

$$\lambda \in R_1\text{: } \lambda u_н = \lambda(m|\alpha|\beta) = \begin{cases} (\lambda m|\lambda\alpha|\lambda\beta), \; \lambda > 0, \\ (\lambda m|\lambda\beta|\lambda\alpha), \; \lambda < 0. \end{cases}$$

Определения 2.1—2.3 позволяют реализовать метод обратной матрицы решения полной НСЛУ. Итак, имеем уравнение полной НСЛУ:

$$A_н X_н = B_н, \quad (2)$$

где

$$A_н = (A_{ij})_{(n\times n)}|(M_{ij})_{(n\times n)}|(N_{ij})_{(n\times n)}) \ge 0,$$

$$B_н = (b_{н1}, \ldots, b_{нn})^T = ((b_1|h_1|g_1), \ldots, (b_n|h_n|g_n)^T \ge 0,$$

$$X_н = (x_{н1}, \ldots, x_{нn})^T = ((x_1|y_1|z_1), \ldots, (x_n|y_n|z_n)^T \ge 0.$$

В соответствии с правилом j_4

$$A_н X_н = B_н \Rightarrow \begin{cases} (A_{ij})x_i = b_i, \\ (A_{ij})y_i + (M_{ij})x_i = h_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ (A_{ij})z_i + (N_{ij})x_i = g_i, \end{cases} \quad (3)$$

откуда получим нечеткое решение полной НСЛУ (3):

$$x_i^* = (A_{ij})^{-1}b_i; \quad y_i^* = (A_{ij})^{-1}[h_i - (M_{ij})x_i^*];$$

$$z_i^* = (A_{ij})^{-1}[g_i - (N_{ij})x_i^*]; \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

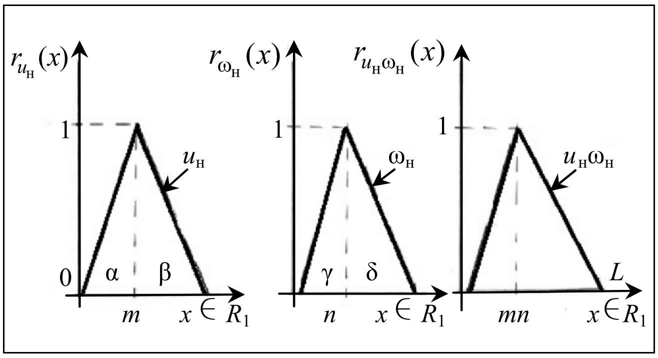

Рис. 2. Геометрическое представление арифметической операции умножения $u_н\,\omega_н = (m|\alpha|\beta)(n|\gamma|\delta) = (mn|(m - \alpha)(n - \gamma)|(m + \beta)$ $(n + \delta)$

Пример 1. Пусть для простоты имеем уравнение (2) в виде полной НСЛУ второго порядка:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}=(15|1|4) & A_{12}=(5|2|9) \\ A_{21}=(10|5|6) & A_{22}=(25|3|4) \end{bmatrix}}_{A_{\text{н}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\text{н}1}=(x_1|y_1|z_1) \\ x_{\text{н}2}=(x_2|y_2|z_2) \end{bmatrix}}_{X_{\text{н}}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{\text{н}1}=(10|15|25) \\ b_{\text{н}2}=(20|30|40) \end{bmatrix}}_{B_{\text{н}}}.$$

Необходимо найти решение $X_{\text{н}}$.

Находим элементы уравнения (3):

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}; \quad (M_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad (N_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Из выражения (4) находим:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}61 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}62 \\ 0{,}78 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}82 \\ 1{,}06 \end{bmatrix}.$$

Если некоторые элементы нечеткой матрицы $A_{\text{н}}$ или некоторые из компонент нечеткого вектора $B_{\text{н}}$ являются отрицательными нечеткими числами, тогда с учетом свойств j_2 и j_3 соотношения (3) и (4) будут также справедливы.

Пример 2. Имеем исходные данные из примера 1, в котором $A_{11} < 0$. В соответствии со свойствами j_2 и j_3 будем иметь полную НСЛУ в виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}=(-15|4|1) & A_{12}=(5|2|9) \\ A_{21}=(10|5|6) & A_{22}=(25|3|4) \end{bmatrix}}_{A_{\text{н}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\text{н}1}=(x_1|y_1|z_1) \\ x_{\text{н}2}=(x_2|y_2|z_2) \end{bmatrix}}_{X_{\text{н}}} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{\text{н}1}=(10|15|25) \\ b_{\text{н}2}=(20|30|40) \end{bmatrix}}_{B_{\text{н}}}.$$

Находим элементы уравнения (3):

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}; \quad (M_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad (N_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 4 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Из выражения (4) находим:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}69 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}.$$

2.2. Метод размахов [21]

Решение полной НСЛУ (2) ищется в виде $(x_i(r) - \alpha_i(r), (x_i(r) + \beta_i(r)), i = \overline{1, n}$, где $x_i(r)$, $\alpha_i(r)$, $\beta_i(r)$ — неизвестные, подлежащие определению, $\alpha_i(r)$, $\beta_i(r)$ — размах решения относительно $x_i(r)$ [21].

Величины $x_i(r)$ находятся из традиционной НСЛУ (2) при $r = 1$. Ее решение обозначим как $x_i^*(r)$. Уравнение (2) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(x_j^* - \alpha_i) = \underline{b}_i, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(x_j^* + \beta_i) = \bar{b}_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\alpha_i^*(r)$, $\beta_i^*(r)$ — решения уравнения (5), являющиеся нелинейными функциями относительно $\underline{a}_{ij}(r)$ и $\bar{a}_{ij}(r)$:

$$\alpha_i^*(r) = \alpha_i(x_j^*, \underline{a}_{ij}(r), \bar{a}_{ij}(r));$$

$$\beta_i^*(r) = \beta_i(x_j^*, \underline{a}_{ij}(r), \bar{a}_{ij}(r)), \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $\underline{a}_{ij}(r)$ и $\bar{a}_{ij}(r)$ — нижняя и верхняя ветви нечеткой переменной $a_{\text{н}ij}$ — элемента матрицы $A_{\text{н}}$.

Размах решений $\alpha^-(r)$, $\alpha^+(r)$ и $\beta^-(r)$, $\beta^+(r)$ относительно $x(r)$ полной НСЛУ получается как:

$$\alpha^-(r) = \min_{r \in [0;1]} \{|\alpha_i^*(r)|\}; \quad \beta^-(r) = \min_{r \in [0;1]} \{|\beta_i^*(r)|\};$$

$$\alpha^+(r) = \max_{r \in [0;1]} \{|\alpha_i^*(r)|\}; \quad \beta^+(r) = \max_{r \in [0;1]} \{|\beta_i^*(r)|\}.$$

Нечеткий вектор решения полной НСЛУ (5):

$$\underline{x}_i^*(r) = [x_i^*(r) - \alpha^-(r), x_i^*(r) + \beta^-(r)];$$

$$\bar{x}_i^*(r) = [x_i^*(r) - \alpha^+(r), x_i^*(r) + \beta^+(r)], \quad i = \overline{1, n}.$$

2.3. Метод ST-декомпозиции [22]

Метод ST (the symmetric triangular) декомпозиции основан на разложении (декомпозиции) матрицы $A_{\text{н}}$ полной НСЛУ в уравнении (2):

$$A_{\text{н}} = S_{\text{н}} T_{\text{н}}, \tag{6}$$

где $S_{\text{н}}$ — симметричная, а $T_{\text{н}}$ — единичная верхнетреугольная матрицы. Соотношение (6) доказывается по индукции в работах [22, 23].

Если в равенстве (2) $A_{\text{н}} > 0$ и $B_{\text{н}} > 0$, то имеем положительную полную НСЛУ. Во многих прикладных задачах инженеры имеют некоторую информацию о диапазоне нечетких решений. В этих случаях с фиксированными $y \geq 0$ и $z \geq 0$ в качестве левой и правой ветвей x исходная задача (2) преобразуется в поиск вектора x, который удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ Mx + Ay = g, \\ Nx + Az = h. \end{cases}$$

Представив $A = A_1 - A_2 = ST$ и выполнив ряд дополнительных условий [22], получим решение системы (2) для $X_н$:

$$\begin{cases} x = (A_1 - A_2)^{-1} b = T^{-1}S^{-1}b, \\ y = (A_1 - A_2)^{-1}(g - M(A_1 - A_2)^{-1} b), \\ z = (A_1 - A_2)^{-1}(h - N(A_1 - A_2)^{-1} b). \end{cases}$$

Пример 3. Имеем удвоенную полную НСЛУ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (6|5|6) & (9|2|8) \\ (6|4|9) & (8|5|9) \end{bmatrix}}_{A_{н1}} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_1|y_1|z_1) \\ (x_2|y_2|z_2) \end{bmatrix}}_{X_н} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} (2|2|1) & (3|0|1) \\ (1|1|3) & (3|3|2) \end{bmatrix}}_{A_{н2}} \underbrace{\begin{bmatrix} (x_1|y_1|z_1) \\ (x_2|y_2|z_2) \end{bmatrix}}_{X_н} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{н1}(23|23|26) \\ b_{н2}(25|23|27) \end{bmatrix}}_{B_н}.$$

Необходимо найти вектор $X_н^*$. В соответствии с выражениями (2), (3)

$$A_{н1} = ((A_{ij}^1)|(M_{ij}^1)|(N_{ij}^1)); \quad A_{н2} = ((A_{ij}^2)|(M_{ij}^2)|(N_{ij}^2));$$

$$(A_{ij}^1) = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; \quad (M_{ij}^1) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad (N_{ij}^1) = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix};$$

$$(A_{ij}^2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad (M_{ij}^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad (N_{ij}^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} 24 \\ 25 \end{bmatrix}; \quad h = \begin{bmatrix} 23 \\ 23 \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 26 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Применяя ST-декомпозицию к матрице $(A_{ij}) = (A_{ij}^1) - (A_{ij}^2)$, получим

$$(A_{ij}) = (A_{ij}^1) - (A_{ij}^2) = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} = 4 & a_{12} = 6 \\ a_{21} = 5 & a_{11} = 5 \end{bmatrix}.$$

В единичной верхнетреугольной матрице $T = [1\ t_{12};\ 0\ 1]$ элемент $t_{12} = (a_{12} - a_{21})a_{11}^{-1} = 0{,}25$, поэтому матрица

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a_{12}t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} -3{,}5 & 5/11 \\ 5/11 & -4/11 \end{bmatrix}.$$

В результате получим $X_н = (x_{н1}, x_{н2})^T$:

$$x = T^{-1}S^{-1}b = (x_1 = 3,\ x_2 = 2)^T;$$

$$y = T^{-1}S^{-1}(g - NT^{-1}S^{-1}b) = (y_1 = 1,\ y_2 = 1)^T;$$

$$z = T^{-1}S^{-1}(h - NT^{-1}S^{-1}b) = (z_1 = 4,\ z_2 = 4)^T,$$

откуда решение системы:

$$x_{н1}^* = (x_1 = 3|y_1 = 1|z_1 = 4); \quad x_{н2}^* = (x_2 = 2|y_2 = 1|z_2 = 4).$$

2.4. Метод разрезов [24]

Имеем полную НСЛУ типа (2)

$$A_н X_н = B_н, \tag{7}$$

где $A_н = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, $B_н = (b_{н1}, ..., b_{нn})^T$, $a_{нij} = \bigcup_k (a_{ij}^k | r_{ij}^k)$, $b_{нi} = \bigcup_k (b_i^k | r_i^k)$ — нечеткие элементы, представленные в одной из форм: объединение ($\cup$) пар $(\cdot|\cdot)$, r_{ij}^k, $r_i^k \in [0;1] \subset R_1$ — функции принадлежностей для k-го разреза [24]. Здесь функции принадлежностей нечетких элементов не обязательно треугольной формы в отличие от методов обратной матрицы, размахов и ST-декомпозиции.

Представим систему (7) в виде нечетких правил для разрезов (уровней) α_k, $k = 1, ..., m$:

$$R = \{R_k\}_{k=1}^m =$$

$$= \begin{cases} \vdots \\ \text{или} \\ R_k\text{: если } r(a_{ij}^{\alpha_k}) \le r^{\alpha_k} \text{ и } r(b^{\alpha_k}) \le r^{\alpha_k}, \\ \text{то } A_{\alpha_k} X = B_{\alpha_k} \\ \text{или} \\ \vdots \end{cases} \tag{8}$$

Здесь «и», «или» — нечеткие логические функции по Заде [1]. В результате получим m традиционных линейных систем относительно α_k разрезов для нечетких элементов:

$$\alpha_k : A_{\alpha_k} X = B_{\alpha_k} \Rightarrow X_{\alpha_k}^* = A_{\alpha_k}^{-1} B_{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Применение оператора дефаззификации (dfz) к каждой компоненте нечеткого вектора решения x_i^*, полученного из уравнения (8), дает:

$$\mathrm{dfz}(x_i^*) = \mathrm{dfz}\Big[\bigcup_k (x_{\alpha_k}^* | r_{\alpha_k})\Big], \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Это приводит к решению в виде нечеткого вектора X^*, каждая компонента x_i^* которого представляется в виде интервала

$$x_i^* = (\mathrm{dfz}(x_i^*) - \alpha_m, \mathrm{dfz}(x_i^*) + \alpha_m), \quad i = \overline{1, n}.$$

Замечание. При решении полных НСЛУ возникает решение «сильное/слабое», когда функция принадлежностей «отвечает/не отвечает» определению нечеткого числа. Рассмотрим простейший пример, когда $\dim A_н = (1 \times 1)$:

$a_н x = b_н$, $a_н$, $b_н$ = (3|2|4) — нечеткие числа. Имеем:

$\alpha = 0$ для левой (left — l) ветви: $1\,x = 1 \Rightarrow x_i^* = 1$;

$\alpha = 1$ для центра (center — c): $2\,x = 3 \Rightarrow x_c^* = 1{,}5$;

$\alpha = 0$ для правой (right — r) ветви: $5\,x = 7 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_r^* = 1{,}4$;

Из-за того, что $x_r^* < x_c^*$, а должно быть $x_r^* \ge x_c^*$, что следует из определения нечеткого числа, поэтому нечеткое решение не является нечетким числом. После замены $x_r^* = 1{,}5$ получим «слабое» решение полной НСЛУ $x^* = (1{,}5|0{,}5|0)$.

2.5. Метод четкого решения [19]

Имеем полную НСЛУ:

$$A_н X_н = B_н \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{нij} x_j = b_{нi}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Здесь, в отличие от предыдущих методов, нечеткие элементы имеют левую и правую ветви функции принадлежности в виде полиномов степени m относительно $r \in [0; 1] \subset R_1$:

$$(left) : \underline{a}_{ij}(r) = \sum_{k=0}^{m} c_{ijk} r^k; \quad (right) : \bar{a}_{ij}(r) = \sum_{k=0}^{m} d_{ijk} r^k;$$

$$(left) : \underline{b}_i(r) = \sum_{k=0}^{m} e_{ik} r^k; \quad (right) : \bar{b}_i(r) = \sum_{k=0}^{m} f_{ik} r^k,$$

$$i, j = \overline{1, n}.$$

В другой форме уравнение (9) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} (\underline{a}_{ij}(r), \bar{a}_{ij}(r)) x_j = (\underline{b}_i(r), \bar{b}_i(r)), \quad i = \overline{1, n},$$

или в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \sum\limits_{x_j \ge 0} \underline{a}_{ij}(r) x_j + \sum\limits_{x_j < 0} \bar{a}_{ij}(r) x_j = \underline{b}_i(r); \\ \sum\limits_{x_j \ge 0} \bar{a}_{ij}(r) x_j + \sum\limits_{x_j < 0} \underline{a}_{ij}(r) x_j = \bar{b}_i(r); \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{10}$$

Определим замену:

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j' = \begin{cases} x_j, x_j \ge 0, \\ 0, x_j < 0, \end{cases} \quad x_j'' = \begin{cases} -x_j, x_j < 0, \\ 0, x_j \ge 0, \end{cases}$$

в результате которой, очевидно, что $x_j' \ge 0$, $x_j'' \ge 0$, и тогда уравнение (10) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j' - \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(r) x_j'' = \underline{b}_i(r); \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(r) x_j' - \sum\limits_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(r) x_j'' = \bar{b}_i(r); \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

или в матричной форме:

$$Sx = D, \tag{11}$$

где

$$D = (e\, f)^{\mathrm{T}}, \quad e = (e_{10}, \ldots, e_{1m}, e_{n0}, \ldots, e_{nm}),$$
$$f = (f_{10}, \ldots, f_{1m}, f_{n0}, \ldots, f_{nm}),$$

$$x' = (x_1', \ldots, x_m'), \quad x'' = (x_1'', \ldots, x_m''), \quad S = \begin{bmatrix} C & -C \\ D & -D \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{10} & \ldots & c_{11m} & \ldots & c_{n10} & \ldots & c_{n1m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{1n} & \ldots & c_{1nm} & \ldots & c_{nn0} & \ldots & c_{nnm} \end{bmatrix}^T,$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{110} & \ldots & d_{11m} & \ldots & d_{n10} & \ldots & d_{n1m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ d_{1nn} & \ldots & d_{11m} & \ldots & d_{nn0} & \ldots & d_{nnm} \end{bmatrix}^T.$$

Анализ размерностей показывает, что число уравнений в системе (11) больше, чем число неизвестных, поэтому для ее решения применяется традиционный метод наименьших квадратов (МНК):

$$\min_x \|Sx - D\|^2_{E_{2n}} \Leftrightarrow (S^T S)x = S^T D, \quad |S^T S| \ne 0.$$

Здесь очевидно, что

$$S^T S = \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix}; \quad S^T D = \begin{bmatrix} C & D \\ -C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix};$$

$$L = C^T C + D^T D; \quad M = C^T D + D^T C.$$

Пример 4. Задана полная НСЛУ второго порядка:

$$\begin{cases} (-1 + 2r, 4 - 2r)x_1 + (-2 + 3r, 3 - 2r)x_2 = \\ \quad = (-8 + 13r, 17 - 10r), \\ (1 + r, 4 - r)x_1 + (2r, 5 - 2r)x_2 = (2 + 8r, 23 - 8r). \end{cases}$$

Находим компоненты уравнения (11):

$$\begin{aligned}\underline{a}_{11} &\equiv c_{110}+c_{111}r = -1+2r;\\ \underline{a}_{12} &\equiv c_{120}+c_{121}r = -2+3r;\\ \underline{a}_{21} &\equiv c_{210}+c_{211}r = 1+r;\\ \underline{a}_{22} &\equiv c_{220}+c_{221}r = 0+2r;\end{aligned} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{110}=-1 & c_{210}=1\\ c_{111}=2 & c_{211}=1\\ c_{120}=-2 & c_{220}=0\\ c_{121}=3 & c_{221}=2\end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= 4-2r;\\ \bar{a}_{12} &= 3-2r;\\ \bar{a}_{21} &= 4-r;\\ \bar{a}_{22} &= 5-2r;\end{aligned} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 4 & 4\\ -2 & -1\\ 3 & 5\\ -2 & -2\end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}\underline{b}_1 &= -8+13r;\\ \underline{b}_2 &= 2+8r;\end{aligned} \Rightarrow e = \begin{bmatrix}-8\\13\\2\\8\end{bmatrix}; \quad \begin{aligned}\bar{b}_1 &= 17-10r;\\ \bar{b}_2 &= 23-8r;\end{aligned} \Rightarrow f = \begin{bmatrix}17\\-10\\23\\-8\end{bmatrix}.$$

В результате получается полная НСЛУ с элементами S, D. Четкое решение: $(S^TS)x = S^TD$, $X = (x'\,x'')^T$, поэтому $x_1 = x_1' - x_1'' = 2$; $x_2 = x_2' - x_2'' = 3$.

Аналогичным способом решается полная НСЛУ для параболического ($m = 2$) или линейного представления нечетких элементов системы.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНЫХ НСЛУ

3.1. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным

Одна из актуальных задач управления заключается в обработке данных в целях идентификации параметров модели. Рассмотрим применение МНК для обработки гибридных данных. Эти данные появляются в случае, когда неопределенность представляется в виде двух компонент: одна — случайная, а другая — неопределенная. Такое представление возникает, если ошибка измерений трактуется как случайная составляющая, а неточность модели — как некоторая нечеткость. Применение МНК для получения оценок по гибридным данным приводит к появлению полной НСЛУ и необходимости ее решения.

Пусть нечеткие случайные данные $y_{\text{н}i}$, $i = \overline{1, m}$, связаны между собой линейной моделью

$$y_{\text{н}}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{\text{н}i} f_{\text{н}i}(t) + e_{\text{н}}(t), \quad t \in [0,\ T] \subset R_1, \tag{12}$$

где $e_{\text{н}}(t)$ — нечеткая случайная переменная с симметричной плотностью вероятностей и нечеткими параметрами: $Ee_{\text{н}}(t) = 0_{\text{н}}$, $De_{\text{н}}(t) = \sigma_{\text{н}}^2 I$. Здесь I — четкая единичная матрица, $\sigma_{\text{н}}^2$ — заданная нечеткая константа, E и D — операторы математического ожидания и дисперсии соответственно. Нечеткость $e_{\text{н}}(t)$ задается с помощью функции принадлежностей $r(e_{\text{н}})$, которая для простоты имеет треугольную форму. Функции $f_{\text{н}i}(t)$, $i = \overline{1, n}$, — заданный нечеткий базис модели (12), $x_{\text{н}i}$, $i = \overline{1, n}$ — неизвестные нечеткие параметры модели, подлежащие определению по m нечетким случайным измерениям:

$$Y_{\text{н}} = (y_{\text{н}}(t_1), ..., y_{\text{н}}(t_m))^T = (y_{\text{н}1}, ..., y_{\text{н}m})^T,$$

которые получены при условии, что $m > n$, т. е. число измерений m больше числа неизвестных параметров n модели (12). В отличие от задачи оценивания [5], в которой полагалось, что базисные функции являются четкими переменными, в постановке (12) базисные функции являются нечеткими переменными.

Нечеткий вектор оценок в модели (12) находится из условия:

$$\min_{x_{\text{н}}} e_{\text{н}}^T e_{\text{н}} = \min_{x_{\text{н}}} \| Y_{\text{н}} - F_{\text{н}} X_{\text{н}} \|_{E_m}^2,$$

где $F_{\text{н}} = (f_{\text{н}i}(t_j))_{(m\times n)}$ — прямоугольная матрица из нечетких элементов, что приводит к необходимости решения полной НСЛУ

$$A_{\text{н}} X_{\text{н}} = B_{\text{н}}, \tag{13}$$

где $A_{\text{н}} = (a_{\text{н}ij} = (f_{\text{н}i}, f_{\text{н}j})_{(n\times n)}$, $i, j = \overline{1, n}$ — квадратная матрица, $(f_{\text{н}i}, f_{\text{н}j})$ — скалярное произведение нечетких базисных функций, которое будет определено далее, $B_{\text{н}} = (b_{\text{н}1} = (f_{\text{н}1}, Y_{\text{н}}), ..., b_{\text{н}n} = (f_{\text{н}n}, Y_{\text{н}}))^T$ — вектор нечетких переменных.

В НСЛУ (13) используются следующие определения теории нечетких множеств [5].

Определение 3.1. Нечеткая функция $\varphi_{\text{н}}(x)$ определяется как нечеткое отображение $\varphi_{\text{н}}$: $R_1 \to E_1 = \{r(x)\}$, где E_1 — нечеткое множество, в виде совокупности функций принадлежностей $r \in [0; 1] \subset R_1$. Это соотношение параметризуется относительно r:

$$\varphi_{\text{н}}(x) = \varphi(x, r) = (\underline{\varphi}(x, r), \bar{\varphi}(x, r)| r \in [0; 1],$$

где $\underline{\varphi}(x, r)$ — нижняя, а $\bar{\varphi}(x, r)$ — верхняя ветви нечеткой функции соответственно.

Определение 3.2. Пусть имеется нечеткое отображение $(\varphi_{\text{н}}(x), \omega_{\text{н}}(x))$, определенное выше. Для каждого разбиения $P = (x_0, ..., x_n) \in [a, b]$ и $d(u, v) = \sup_r \{\max[|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)|]\}$ допускается представление $R_p = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\text{н}}(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$,

$\forall \xi \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta = \max|x_i - x_{i-1}|$, $i = \overline{1, n}$, тогда нечеткий интеграл

$$\int_a^b \varphi_{\text{н}}(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} R_p, \quad (14)$$

где операция lim определяется в метрике Хаусдорффа:

$$d(u, v) = \sup_{r \in [0;1]} \{\max[|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)|]\}.$$

Если $\varphi_{\text{н}}(x)$ непрерывна в метрике d и интеграл (14) существует, то имеют место соотношения:

$$\underline{\int_a^b \varphi(x, r)dx} = \int_a^b \underline{\varphi(x, r)}\, dx; \quad \overline{\int_a^b \varphi(x, r)dx} = \int_a^b \overline{\varphi(x, r)}\, dx,$$

где $\underline{\int_a^b \varphi(x, r)dx}$ и $\overline{\int_a^b \varphi(x, r)dx}$ — нижний и верхний нечеткие интегралы, а $\underline{\varphi(x, r)}$ и $\overline{\varphi(x, r)}$ — нижняя и верхняя подынтегральные нечеткие функции.

Определение 3.3. Скалярное произведение $(\varphi_{\text{н}}(x), \omega_{\text{н}}(x))$ нечетких функций $\varphi_{\text{н}}(x)$, $\omega_{\text{н}}(x)$ задается в виде:

$$(\varphi_{\text{н}}(x), \omega_{\text{н}}(x)) =$$

$$= \begin{cases} \int_a^b \varphi_{\text{н}}(x)\omega_{\text{н}}(x)dx \equiv \left(\int_a^b \underline{\varphi}(x, r)\underline{\omega}(x, r)dx,\right. \\ \left.\int_a^b \bar{\varphi}(x, r)\bar{\omega}(x, r)dx \middle| r \in [0;\ 1]\right) - \\ \text{непрерывный случай;} \\ \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\text{н}}(x_i)\omega_{\text{н}}(x_i) \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{\varphi}(x_i, r)\underline{\omega}(x_i, r),\right. \\ \left.\sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}(x_i, r)\bar{\omega}(x_i, r), \middle| r \in [0;\ 1]\right) - \\ \text{дискретный случай.} \end{cases}$$

Определение 3.4. Нечеткие функции $\varphi_{\text{н}}(x)$, $\omega_{\text{н}}(x)$ называются ортогональными, что обозначается $\varphi_{\text{н}}(x) \perp \omega_{\text{н}}(x)$, если выполняются соотношения:

$$\int_a^b \varphi_{\text{н}}(x)\omega_{\text{н}}(x)dx = \begin{cases} 0, \varphi_{\text{н}}(x) \neq \omega_{\text{н}}(x), \\ 1, \text{иначе} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b \underline{\varphi}(x, r)\underline{\omega}(x, r)dx,\ \int_a^b \bar{\varphi}(x, r)\bar{\omega}(x, r)dx\right)\Big| r \in [0;\ 1] =$$

$$= \begin{cases} 0, \underline{\varphi} \neq \underline{\omega}, \bar{\varphi} \neq \bar{\omega}; \\ 1, \text{иначе} \end{cases} \text{(непрерывный случай);}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\text{н}}(x_i)\omega_{\text{н}}(x_i) = \begin{cases} 0, \varphi_{\text{н}}(x) \neq \omega_{\text{н}}(x), \\ 1, \text{иначе} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{\varphi}(x_i, r)\underline{\omega}(x_i, r),\ \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}(x_i, r)\bar{\omega}(x_i, r),\right.$$

$$\left.\vphantom{\sum}| r \in [0;\ 1]\right) = \begin{cases} 0, \underline{\varphi} \neq \underline{\omega}, \bar{\varphi} \neq \bar{\omega}; \\ 1, \text{иначе} \end{cases} \text{(дискретный случай).}$$

Пример 5. Имеем модель типа (12):

$$y_{\text{н}}(t) = x_{\text{н}1}f_{\text{н}1}(t) = 1_{\text{н}} + x_{\text{н}2}f_{\text{н}2}(t) + e_{\text{н}}(t) =$$
$$= x_{\text{н}1}1_{\text{н}} + x_{\text{н}2}t_{\text{н}} + e_{\text{н}}(t), \quad t \in [0, T] \subset R_1,$$

где $f_{\text{н}1}(t) = 1_{\text{н}}$, $f_{\text{н}2}(t) = t_{\text{н}}$ — нечеткие базисные функции. В моменты времени $t = t_1, ..., t_m$ известны составляющие нечеткого случайного вектора измерений $Y_{\text{н}} = (y_{\text{н}1}, ..., y_{\text{н}m})^T$. Нечеткие базисные функции заданы в виде:

$$f_{\text{н}1}(t) = 1_{\text{н}} = (\underline{f}_1(t, r) = r1,\ \bar{f}_1(t, r) = (2 - r)1 | r \in [0, 1]);$$

$$f_{\text{н}2}(t) = t_{\text{н}} = (\underline{f}_2(t, r) = rt,\ \bar{f}_2(t, r) = (2 - r)t | r \in [0, 1]).$$

Найдем в этих условиях нечеткие элементы $a_{\text{н}ij}$, $i, j = 1, 2$ матрицы $A_{\text{н}}$. В результате получим:

$$A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} a_{\text{н}11} = (T|T|3T) & a_{\text{н}12} = (0{,}5T^2|0{,}5T^2|1{,}5T^2) \\ a_{\text{н}21} = a_{\text{н}12} & a_{\text{н}22} = (T^3/3|T^3/3|T^3) \end{bmatrix}.$$

Вычисления нечетких компонент, $i = 1, 2$ вектора $B_{\text{н}}$ с учетом дискретной формы скалярного произведения дают:

$$b_{\text{н}1} = (f_{\text{н}1}(t), Y_{\text{н}}) = \sum_{i=1}^{m} f_{\text{н}1}(t)y_{\text{н}i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (r1, (2 - r)1)(y_{mi}|y_{\alpha i}|y_{\beta i}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} y_{mi} \middle| \sum_{i=1}^{m} (y_{mi} + y_{\alpha i}) \middle| \sum_{i=1}^{m} (y_{mi} + y_{\beta i})\right);$$

$$b_{\text{н}2} = (f_{\text{н}2}(t), Y_{\text{н}}) = \sum_{i=1}^{m} f_{\text{н}2}(t)y_{\text{н}i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (rt_i, (2 - r)t_i)(y_{mi}|y_{\alpha i}|y_{\beta i}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} t_i y_{mi} \middle| \sum_{i=1}^{m} t_i(y_{mi} + y_{\alpha i}) \middle| \sum_{i=1}^{m} t_i(y_{mi} + y_{\beta i})\right).$$

В результате получим:

$$A_{\text{н}}X_{\text{н}} = B_{\text{н}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (T|T|3T) & (0{,}5T^2|0{,}5T^2|1{,}5T^2) \\ (0{,}5T^2|0{,}5T^2|1{,}5T^2) & (T^3/3|T^3/3|T^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{н}1} \\ x_{\text{н}2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_{mi} \middle| \sum_{i=1}^{m} (y_{mi} + y_{\alpha i}) \middle| \sum_{i=1}^{m} (y_{mi} + y_{\beta i}) \\ \sum_{i=1}^{m} t_i y_{mi} \middle| \sum_{i=1}^{m} t_i(y_{mi} + y_{\alpha i}) \middle| \sum_{i=1}^{m} t_i(y_{mi} + y_{\beta i}) \end{bmatrix}.$$

Нечеткое решение системы может быть найдено методом обратной матрицы (п. 2.1) или по методу четкого решения (п. 2.4).

3.2. Нечеткая ортогонализация Грама — Шмидта

Метод Грама — Шмидта решения системы линейных уравнений является наименее вычислительно затратным из известных рекуррентных и нерекуррентных методов, поскольку эти затраты пропорциональны удвоенному квадрату числа операций. Этот метод применяется для решения многих прикладных задач. Конструирование нечеткой ортогонализации состоит в расширении традиционной процедуры на ее нечеткий аналог.

Определение 3.5. Набор из нечетких функций $c_{н1}f_{н1}(t) + ... + c_{нn}f_{нn}(t) \neq 0_н$ называется линейно независимым, если существуют нечеткие числа $c_{нi} \in E_1$, для которых нечеткая линейная комбинация $c_{н1}f_{н1}(t) + ... + c_{нn}f_{нn}(t) \neq 0_н$, где операция умножения нечетких переменных с треугольными функциями принадлежностей была определена ранее. В противном случае эти нечеткие уравнения называются линейно зависимыми, если хотя бы для одного $c_{нi} \in E_1 \neq 0$, $c_{н1}f_{н1}(t) + ... + c_{нn}f_{нn}(t) = 0_н$. ♦

Пусть имеем исходные $f_{н1}(t)$, ..., $f_{нn}(t)$ линейно независимые нечеткие базисные функции. Необходимо построить систему нечетких ортогональных базисных функций $\varphi_{н1}(t)$, ..., $\varphi_{нn}(t)$, которые являлись бы линейной комбинацией заданной системы исходных функций.

Процесс конструирования строится индуктивно. Первые две нечеткие ортогональные функции $\varphi_{н1}(t)$, $\varphi_{н2}(t)$ определяются таким образом:

$$\varphi_{н1}(t) \equiv f_{н1}(t); \quad \varphi_{н2}(t) \equiv f_{н2}(t) + a_{н11}f_{н1}(t), \quad (15)$$

где $a_{н11}$ находится из условия $\varphi_{н1}(t) \perp \varphi_{н2}(t)$:

$$(\varphi_{н1}(t), \varphi_{н2}(t)) = (f_{н1}(t), f_{н2}(t)) + a_{н11}f_{н1}(t) = 0,$$

откуда, с учетом свойств нечеткого скалярного произведения, получим для определения $a_{н11}$ полную НСЛУ первого порядка:

$$(f_{н1}(t), f_{н1}(t))a_{н11} = -(f_{н1}(t), f_{н2}(t)).$$

Ее решение:

$$a^*_{н11} = -(f_{н1}(t)f_{н2}(t))/(f_{н1}(t), f_{н1}(t)),$$

а нечеткая функция $\varphi_{н2}(t) \perp \varphi_{н1}(t)$

$$\varphi_{н2}(t) = f_{н2}(t) + a^*_{н11}f_{н1}(t).$$

Далее полагается

$$\varphi_{н3}(t) = f_{н3}(t) + a_{н21}f_{н1}(t) + a_{н22}f_{н2}(t), \quad (16)$$

где $a_{н21}$, $a_{н22}$ находятся из условий ортогональности $\varphi_{н3}(t) \perp \varphi_{н2}(t)$ и $\varphi_{н1}(t) \perp \varphi_{н2}(t)$, и которые после замены (15) будут иметь вид:

$$(\varphi_{н1}(t), \varphi_{н3}(t))|_{\varphi_{н1}(t) = f_{н1}(t)} = (f_{н1}(t), \varphi_{н3}(t)) = 0;$$

$$(\varphi_{н2}(t), \varphi_{н3}(t))|_{\varphi_{н2}(t) = f_{н2}(t) + a_{н11}f_{н1}(t)} = \\ = (f_{н2}(t), \varphi_{н3}(t)) + a_{н11}f_{н1}(t) = 0.$$

Это соотношение приводится к виду:

$$(\varphi_{н3}(t), f_{н2}(t) + a_{н11}f_{н1}(t)|_{f_{н1}(t) = \varphi_{н1}(t)} = \\ = (f_{н2}(t), \varphi_{н3}(t)) + a_{н11}(\varphi_{н1}(t), \varphi_{н3}(t)) = 0,$$

которое, так как $\varphi_{н1}(t) \perp \varphi_{н3}(t) = 0$ дает $((f_{н1}(t), \varphi_{н3}(t))) = 0$. Поэтому в результате получим:

$$(f_{н2}(t), \varphi_{н3}(t)) = 0; \quad (f_{н1}(t), \varphi_{н3}(t)) = 0.$$

Эти соотношения с учетом формулы (16) приводят к полной НСЛУ второго порядка относительно $a_{н21}$ и $a_{н22}$:

$$\begin{cases} a_{н21}(f_{н1}(t), f_{н1}(t)) + a_{н22}(f_{н2}(t), f_{н1}(t)) = \\ \quad = -(f_{н3}(t), f_{н1}(t)), \\ a_{н21}(f_{н1}(t), f_{н2}(t)) + a_{н22}(f_{н2}(t), f_{н1}(t)) = \\ \quad = -(f_{н3}(t), f_{н2}(t)), \end{cases}$$

где, очевидно, определитель не равен нулю и $a^*_{н21}$ и $a^*_{н22}$ есть решение системы.

На n-м шаге полагается

$$\varphi_{нn}(t) = f_{нn}(t) + a_{нn1}f_{н1}(t) + ... + a_{нnn}f_{нn-1}(t)$$

и далее $a_{нni}$, $i = \overline{1, n}$, находятся из полной НСЛУ n-го порядка.

Пример 6. Опираясь на процесс ортогонализации, построим нечеткие базисные функции $\varphi_{н1}(t) \perp \varphi_{н2}(t)$ для исходных базисных функций $f_{н1}(t) = 1_н$, $f_{н2}(t) = t_н$, $t \in [0, T]$:

$$f_{н1}(t) = 1_н = (\underline{f}_1(t, r) = r1,$$

$$\overline{f}_1(t, r) = (2 - r)1|r \in [0; 1]) = (1|1|3),$$

$$f_{н2}(t) = t_н = (\underline{f}_2(t, r) = rt,$$

$$\overline{f}_2(t, r) = (2 - r)t|r \in [0; 1]) = (t|t|3t).$$

Имеем

$$\varphi_{н1}(t) = f_{н1}(t) = 1_н; \quad \varphi_{н2}(t) = f_{н2}(t) + a_{н1} f_{н1}(t),$$

$$(f_{н1}(t)f_{н1}(t)) = \int_0^T f_{н1}(t)f_{н1}(t)dt =$$

$$= \left(\int_0^T \underline{f}_1(t, r)\underline{f}_1(t, r)dt, \ \int_0^T \bar{f}_1(t, r)\bar{f}_1(t, r)dt \right).$$

Полученную полную НСЛУ первого порядка решаем методом обратной матрицы (п. 2.1). Для этого преобразуем ее к стандартной форме. Имеем:

$$(f_{н1}(t)f_{н1}(t)) = \int_0^T f_{н1}(t)f_{н1}(t)dt =$$

$$= \left(\int_0^T \underline{f}_1(t, r)\underline{f}_1(t, r)dt, \ \int_0^T \bar{f}_1(t, r)\bar{f}_1(t, r)dt \right) =$$

$$= \left(\int_0^T (r1)(r1)dt, \ \int_0^T (2 - r)1(2 - r)1dt \right) =$$

$$= (r^2T, (2 - r)^2T) = (T|T|3T);$$

$$(f_{н1}(t)f_{н2}(t)) = \int_0^T f_{н1}(t)f_{н2}(t)dt =$$

$$= \left(\int_0^T \underline{f}_1(t, r)\underline{f}_2(t, r)dt, \ \int_0^T \bar{f}_1(t, r)\bar{f}_2(t, r)dt \right) =$$

$$= \left(\int_0^T (r1)(rt)dt, \ \int_0^T (2 - r)1(2 - r)tdt \right) =$$

$$= (0{,}5r^2T^2, 0{,}5(2 - r)^2T^2) = (0{,}5T^2|0{,}5T^2|1/5T^2).$$

Таким образом, полная НСЛУ первого порядка для определения $(A_{11} = T|M_{11} = T|N_{11} = 3T)a_{н11} = -(b_1 = 0{,}5T^2|h_1 = 0{,}5T^2|g_1 = 1{,}5T^2)$ в стандартной форме имеет вид:

$$(A_{11} = T|M_{11} = T|N_{11} = 3T)a_{н11} =$$
$$= -(b_1 = 0{,}5T^2|h_1 = 0{,}5T^2|g_1 = 1{,}5T^2),$$

откуда по методу обратной матрицы получим:

$$a^*_{н11} = -(x_1 = A_{11}^{-1} b_1|y_1 = A_{11}^{-1}(h_1 - M_{11}x_1)|z_1 =$$
$$= A_{11}^{-1}(g_1 - N_{11}x_1) = -(x_1 = 0{,}5T|y_1 = 0|z_1 = 0) = -0{,}5T.$$

В результате функция

$$\varphi_{н2}(t) = f_{н2}(t) + a^*_{н11}f_{н1}(t) = t_н - 0{,}5T1_н,$$

а нечеткие функции $\varphi_{н1}(t)$ и $\varphi_{н2}(t)$ образуют ортогональный нечеткий базис, для которого справедливо соотношение $(\varphi_{н1}(t), \varphi_{н2}(t)) = 0$. Действительно, имеем:

$$\int_0^T \varphi_{н1}(t)\varphi_{н2}(t)dt = \int_0^T 1_н(t_н - 0{,}5T1_н)dt =$$

$$= \int_0^T 1_н t_н dt - \int_0^T 0{,}5T1_н1_н dt = \left(\int_0^T \underline{1}(r)\underline{t}(r)dt - \right.$$

$$\left. - 0{,}5T\int_0^T \underline{1}(r)\underline{1}(r)dt, \ \int_0^T \bar{1}(r)\bar{t}(r)dt - 0{,}5T\int_0^T \bar{1}(r)\bar{1}(r)dt \right) =$$

$$= \left(\int_0^T r^2tdt - 0{,}5T\int_0^T r^2dt, \ \int_0^T (2 - r)(2 - r)tdt - \right.$$

$$\left. - 0{,}5T\int_0^T (2 - r)dt \right) = (0, 0).$$

Это означает, что $\varphi_{н1}(t) \perp \varphi_{н2}(t)$.

Замечание. Изложенная теория решения полных нечетких систем справедлива для случая, когда нечеткие переменные положительные. В случае, когда появляются нечеткие отрицательные переменные, нетрудно модифицировать рассмотренные алгоритмы с учетом, что при $\mu \in R_1$ выполняется соотношение:

$$\mu L_н = \begin{cases} (\mu l_1|\mu l_2|\mu l_3), \ \mu \geq 0, \\ (\mu l_3|\mu l_2|\mu l_1), \ \mu < 0. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отмечено, что в теории нечетких множеств одно из важных научных и прикладных направлений заключается в решении задач нечеткого математического анализа. Указано, что при их решении возникает проблема решения нечетких систем линейных уравнений. Для них приведена общая классификация и для одного из классов рассмотрены основные методы решения полных НСЛУ: обратной матрицы, размаха, ST-декомпозиции, разрезов, четких решений. Отмечено, что в некоторых случаях возникают «сильные/слабые» решения полных НСЛУ.

Сформулированы и решены задачи, при рассмотрении которых возникают полные НСЛУ: оценивание параметров по методу наименьших квадратов нечеткой модели и нечеткая ортогонализация Грама — Шмидта. Их решения иллюстрируются на примерах нечеткой регрессионной модели с нечеткими базисными функциями в виде нечеткой единицы и нечеткой линейной зависимости.

В части 2 будут изложены методы решения неполных нечетких систем линейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы* робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под общ. ред. К.А. Пупкова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 743 с. [*Metody* robastnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya / Pod obsh. red. K.A. Pupkova. — Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2001. — 743 s. (In Russian)]
2. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.*, *Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 1 // Информационные технологии. — 2015. — Т. 21, № 3. — С. 171—178. [*Mochalov*, *I.A.*, *Hrisat*, *M.S.*, *Shihab Eddin*, *M.Ya.* Fuzzy Diferential Equations in Control. Part I // Informacionnye tehnologii. — 2015. — T. 21, No. 3. — P. 171—178.]

3. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.*, *Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть 2 // Информационные технологии. — 2015. — Т. 21. — № 4. — С. 243—250. [*Mochalov*, *I.A.*, *Hrisat*, *M.S.*, *Shihab Eddin*, *M.Ya.* Fuzzy Differential Equations in Control. Part II // Informacionnye tehnologii. — 2015. — T. 21, No. 4. — P. 243—250.]
4. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.*, *Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие уравнения в частных производных в задачах управления // Информационные технологии. — 2015. — Т. 21, № 8. — С. 563—569. [*Mochalov*, *I.A.*, *Hrisat*, *M.S.*, *Shihab Eddin*, *M.Ya.* Nechetkie uravneniya v chastnyh proizvodnyh v zadachah upravleniya // Informacionnye tehnologii. — 2015. — T. 21, No. 8. — S. 563—569.]
5. *Мочалов И.А.*, *Хрисат М.С.* Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — Т. 20, № 2. — С. 14—22. [*Mochalov*, *I.A.*, *Hrisat*, *M.S.* Estimation Parameter Model Using Fuzzy Random Data // Informacionnye tehnologii. — 2014. — T. 20, No. 2. —P. 14—22.]
6. *Деменков Н.П.*, *Микрин Е.А.*, *Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 251—257. [*Demenkov*, *N.P*, *Mikrin*, *E.A.*, *Mochalov*, *I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part 1 // Informacionnye tehnologii. — 2017. — T. 23, No. 4. — P. 251—257.]
7. *Деменков Н.П.*, *Микрин Е.А.*, *Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 2. Нечеткое управление // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23, № 5. — С. 362—369. [*Demenkov*, *N.P*, *Mikrin*, *E.A.*, *Mochalov*, *I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part II // Informacionnye tehnologii. — 2017. — T. 23, No. 5. — P. 362—369.]
8. *Park*, *J.Y.*, *Jeong*, *J.U.* On the existence and uniquness of solutions of fuzzy Volterra — Fredholm integral equation // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 115. — P. 425—431.
9. *Jahantigh*, *M.*, *Allahviranloo*, *T., and Otadi*, *M.* Numerical solution of fuzzy integral equatins // Applied Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 2, No. 1. — P. 33—46.
10. *Jafarian A.*, *Measoomy Nia*, *S.*, *Tavan*, *S.*, *and Banifazel*, *M.* Solving linear Fredholm fuzzy integral equations systems by Taylor expension method // Applied Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 6, No. 83. — P. 4103—4117.
11. *Jafarian*, *A.*, *Measoomy Nia*, *S.*, *and Tavan*, *S.* A numerical scheme to solve fuzzy linear Volterra integral equations systems // Journal of Applied Mathematics. — 2012, art/ID 216923. — 17. P. — doi:10.1155/2012/216923.
12. *Barkhordary*, *M.*, *Kiani*, *N.A.*, *Bozorgmanesh*, *A.R.* A method for solving fuzzy Fredholm integral equations of the second kind // International Journal Open Problems Computer Science Mathematics. — 2008. — Vol. 1, No. 2, September 2008. — S. 149—159.
13. *Mohammad Keyanpour*, *Taherch Akbarian.* Using sine function // The Journal of Mathematics and Sciences. — 2014. — Vol. 3, No. 4. — P. 422—431.
14. *Salahshour*, *S.*, *Khezerloo*, *M.*, *Hajighasemi*, *S.*, *Khorasany*, *M.* Solving fuzzy integral equations of the second kind by fuzzy Laplace transform method // International Journal Industrial Mathematics. — 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 21—29.
15. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нечеткая интерполяция // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. — 2012. — № 2. — DOI: http://dx.doi.org/. — № ФС77 30569/308732. — URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/308732.html [*Demenkov*, *N.P.*, *Mochalov*, *I.A.* Nechetkaya interpolyaciya // Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. zhurn. — 2012. — No. 2. (In Russian)]
16. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нечеткие сплайны // Вестник Московского гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение», ISSN 0236-3933. — 2012. — № 2 (87) — С. 48—59. [*Demenkov*, *N.P.*, *Mochalov*, *I.A.* Nechetkie splajny // Vestnik Moskovskogo gos. tehn. un-ta im. N.E. Baumana. Ser. «Priborostroenie». — 2012. — No. 2 (87). — S. 48—59. (In Russian)]
17. *Деменков Н.П*, *Микрин Е.А.*, *Мочалов И.А.* Нечеткие двухточечные краевые задачи в тематическом моделировании и в управлении. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование // Проблемы управления. — 2018. — № 1. — С. 30—36. [*Demenkov*, *N.P.*, *Mikrin*, *E.A.*, *Mochalov*, *I.A.* Fuzzy two-point boundary value problems in mathematical modeling and control. Part 1. Fuzzy mathematical modeling / Problemy upravleniya. — 2018. — No. 1. — P. 30—36.]
18. *Деменков Н.П*, *Микрин Е.А.*, *Мочалов И.А.* Нечеткие двухточечные краевые задачи в математическом моделировании и в управлении. Ч. 2. Нечеткое управление // Проблемы управления, 2018. — № 2 — С. 31—39. [*Demenkov*, *N.P*, *Mikrin*, *E.A.*, *Mochalov*, *I.A.* Fuzzy two-point boundary value problems in mathematical modeling and control. Part 2. Fuzzy control // Problemy upravleniya. — 2018. — No. 2. — P. 31—39.]
19. *Majid Amirfakhrian.* Numerical solution of a system of polynomial parametric form fuzzy linear equations // Chapter 24 from the book Ferroelectrics, Dr. Indrani Coondoo (ed.), published by InTech, ISBN: 978-953-307-439-9. — 2010. — P. 433—450. — URL: www: intechopen.com.
20. *Muruganandam*, *S.*, *Razak Abdul*, *K.* Matrix inversion method of solving fully fuzzy linear systems with triangular fuzzy numbers // International Journal of Computer Applications (0975 8887). — 2013. — Vol. 65, No. 4, March 2013. — P. 9—11. — DOI: 10.5120/10911-5843.
21. *Allahviranloo*, *T.*, *Salahshour*, *S.*, *Homayoun-nejad*, *M.*, *Baleanu*, *D.* General solutions of fully fuzzy linear systems // Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analyses. — 2013. — Vol. 2013, article ID 5932749, 9 p. DOI: 10.1155/2013/59327.
22. *Mosleh*, *M.*, *Otadi*, *M.*, *Abbasbandy*, *S.* Solution of fully fuzzy linear systems by ST method // Journal of Applied Mathematics. Islamic Azad University of Lahijan. — 2011. — Vol. 8, No. 1 (28). — P. 23—31.
23. *Golub*, *G.H.*, *Yuan*, *J.Y.* Symmetric-triangular decomposition and its applications — Part I: Theorems and algorithms, BIT Numerical Mathematics, 42, 2002, P. 814—822. DOI: 10.1023/A:1021904604693.
24. *Минаев Ю.Н.*, *Филимонова О.Ю.*, *Бенамеур Л.* Методы и алгоритмы идентификации и прогнозирования в условиях неопределенности в нейросетевом логическом базисе. — М.: Горячая линия — Телеком, 2003. — 205 с. [*Minaev*, *Yu.N.*, *Filimonova*, *O.Yu.*, *Benameur*, *L.* Metody i algoritmy identifikacii i prognozirovaniya v usloviyah neopredelennosti v nejrosetevom logicheskom bazise. — Moscow: Goryachaya liniya — Telekom, 2003. — 205 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации руководителем РРС В.Ю. Столбовым.

Поступила 27.12.2018, после доработки 28.02.2019.
Принята к публикации 4.04.2019.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН,
ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»;
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ eugeny.mikrin@bmstu.ru,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ intelsyst@mail.ru.

METHODS OF SOLVING FUZZY SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS. Part 1. Fully Systems

N.P. Demenkov[1,#], E.A. Mikrin[2,1], I.A. Mochalov[1]

[1]Bauman Moscow State Technical University, [2]S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»

[#] dnp@bmstu.ru

Abstract. It is noted that fuzzy systems of linear equations (FSLE) arise when solving fuzzy initial problems, fuzzy partial differential equations of the first order; when processing hybrid data in stochastic systems by the method of least squares or of maximum likelihood estimation; when using the fuzzy Laplace transform to solve fuzzy differential equations of high order; when using the approximate methods of solving fuzzy integral Fredholm-Volterra equations of the 2nd kind; when fuzzy interpolation and fuzzy splines are applied to data processing; when solving fuzzy optimal control problems. The basic methods of solving complete FSLE are considered: inverse matrix, span and ST decomposition, in which fuzzy elements have triangular membership function; cuts, in which membership functions of fuzzy elements are not necessarily triangular; crisp solutions, in which left and right branches of the membership function of fuzzy elements are in the polynomial form. The application of the methods is illustrated by computational examples. Using the least squares method for the model with fuzzy basis functions and the method of fuzzy Gram-Schmidt orthogonalization, the problems are formulated and solved of fuzzy estimation, in which complete FSLE appear. To illustrate the solution of these problems, two fuzzy basic functions are considered: a fuzzy unit and a fuzzy linear dependence.

Keywords: complete fuzzy system of linear equations, fuzzy methods of solving complete fuzzy systems, fuzzy estimation, fuzzy orthogonalization.