УДК 517.97

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.2.1

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ. ОБЗОР. Ч. 2. Метод наименьших квадратов и прямые методы вариационного исчисления

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Аннотация. Для оценивания состояний нечетких моделей, описываемых интегральными уравнениями, рассмотрен метод наименьших квадратов (МНК) и его модификации: МНК с численным интегрированием, рекуррентный и нелинейный МНК, нечеткий МНК, основанный на нечетких правилах при нахождении диагональных элементов весовой матрицы в обобщенном МНК. Приведены примеры решения нечетких систем линейных уравнений (НСЛУ), возникающих при оценивании состояний интегральных уравнений. Для приближенной оценки состояния интегральной модели реализован нечеткий метод Галеркина, в результате чего появляется полная НСЛУ. На примере показано появление «сильных/слабых» систем. Рассмотрены методы структурного оценивания приближенного состояния нечетких интегральных моделей: квадратур Чебышева, функции sinc. Отмечено, что методика синтеза алгоритмов оценивания нечетких интегральных моделей также может быть реализована аналогично для методов невязки, коллокации, энергетического, Ритца, Куранта и др.

Ключевые слова: нечеткий метод наименьших квадратов, нечеткий метод Галеркина, нечеткий метод Чебышева, нечеткий метод sinc.

ВВЕДЕНИЕ

В первой части обзора [1] в основном рассматривались приближенные методы оценки состояний нечетких интегральных уравнений, когда неизвестная нечеткая функция под знаком интеграла представляется в виде некоего нечеткого многочлена с известными четкими базисными функциями и нечеткими весовыми коэффициентами, квадратурной формулы, подлежащими определению. Это приводило к решению нечетких систем линейных уравнений (НСЛУ) по методу «вложения», предложенному М. Фридманом (M. Friedman). Однако в практической деятельности широкое распространение получили также и другие методы решения НСЛУ, что эквивалентно решению нечетких интегральных уравнений. Ниже дается описание некоторых из них [2—4].

В работе [2] метод вложения Фридмана, изложенный в первой части обзора [1], применяется для удвоенной НСЛУ, когда по линейной комбинации нижней и верхней неизвестных переменных и по найденным с помощью вложенного метода значениям находятся искомые нечеткие переменные. Этот метод был предложен Р. Еззати (R. Ezzati) [3].

В работе [4] С. Аббасбанди (S. Abbasbandy) предложил метод, который представляет собой модификацию метода Еззати и применяется, как правило, для симметричных нечетких функций принадлежностей нечетких переменных, задающих правую часть НСЛУ.

В работе [5] реализуется метод «нечеткого центра» решения системы уравнений, который является геометрическим и применяется для симметричных и несимметричных треугольных чисел в правой части НСЛУ.

Характерной особенностью перечисленных выше методов является применение их к НСЛУ с относительно невысокой размерностью, как правило, $\dim A \le 3$, где A — матрицы четких переменных НСЛУ, что соответствует размерности $\dim S = 2n \le 6$, где S — расширенная матрица метода «вложения» и его модификаций. Другая особенность методов состоит в появлении «сильных/слабых» решений (см. ссылки на работы [8], [17] в первой части обзора [1]).

При увеличении размерности $\dim S$, связанной с увеличением точности оценивания, обычно для матрицы S применяются традиционные итерационные методы решения НСЛУ [6, 7].

Большинство этих методов основано на QT расщеплении матрицы S, где Q — матрица из диагональных элементов S, а $T = Q - S$. Расщепление QT приводит к методам Ричардсона, Якоби, Гаусса — Зейделя, релаксационным и их модификациям. Другая часть итерационных методов связана с представлением матрицы S в виде HS_*S расщепления, где H — эрмитова (Hermitian), S_* — скелевская (Skew) матрицы и S — расщепленная (splitting) матрица. Здесь H — среднее арифметическое матриц S и $S^{\text{т}}$, а S_* — их усредненная разность.

При оценке состояний традиционных интегральных уравнений важное место занимают прямые методы вариационного исчисления типа метода Галеркина и квадратурных формул, связанные с численным вычислением собственного интеграла. Эти же методы находят применение и в нечетком случае [8, 9].

Традиционный метод Галеркина широко применяется в задачах прикладной математики и моделировании как один из прямых методов вариационного исчисления [10], при исследовании колебательных процессов в поисковых системах автоматической оптимизации [11], для приближенного решения уравнений в частных производных, возникающих при моделировании волновых твердотельных гироскопов [12—14], при решении традиционных интегральных уравнений [15] и т. д. В настоящее время появляется небольшое количество работ по модификации этого метода для нечетких случаев. В качестве одной из таких работ приведем статью [16]. В ней нечеткий метод Галеркина применяется для исследования нечетких колебательных процессов в поисковой системе автоматической оптимизации. Можно полагать, что сдерживание количества исследований по использованию нечетких методов, в частности, для решения нечетких интегральных уравнений связано с относительно небольшим количеством работ в области разработки нечетких методов при решении прикладных задач. Далее делается попытка в расширении возможностей применения нечетких методов для идентификации нечетких моделей, описываемых интегральными уравнениями.

При оценке состояний нечетких интегральных моделей часто возникает задача решения полных (fully) НСЛУ. В разделе, посвященном нечеткому методу Галеркина, будут рассмотрены некоторые решения полных НСЛУ.

Неизвестные переменные вместе с соответствующими ядрами представляют собой некий определенный интеграл, поэтому для его вычисления могут быть использованы различные численные схемы в виде квадратурных формул с нечеткими весовыми коэффициентами при четких базисных функциях. Простейшими нечеткими квадратурными формулами являются нечеткие формулы прямоугольников, трапеций, парабол и др. Для простейших квадратурных формул обычно используются частичные отрезки аппроксимации. Это уменьшает погрешность. На ее величину также влияет степень интерполяционного многочлена, их число и расположение, использование различных типов сплайнов и другие факторы. Далее будут использованы некоторые из перечисленных факторов для приближенного оценивания нечетких интегральных моделей. Эти факторы (методы) представляют собой естественное продолжение методов, которые были представлены в первой части обзора [1].

1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

По аналогии с работой [10], далее будем использовать определение *нечеткого функционала* $J_{\text{н}}$ на множестве E. Он определяется, как отображение $J_{\text{н}} : E \to R$, где E — множество нечетких функций.

Для множества E вводятся определения нечеткой непрерывности, нечеткой дифференцируемости в точке, промежутке. Для этого используются определения нечеткого векторного пространства Банаха и метрики в нем в виде расстояния Хаусдорфа между элементами этого пространства.

Отображение $f_{\text{н}} : R \to E$ определяет нечеткую функцию $f_{\text{н}}(t)$, $t \in R$; $E = \{r(t)\}$, $r \in [0, 1] \subset R$, которая представляется в эквивалентной параметрической форме: $f_{\text{н}}(t) = f(t, r) = (\underline{f}(t, r), \overline{f}(t, r) | r \in [0, 1])$, где $r(\cdot)$ — функция принадлежности.

Совокупность нечетких функций $\{f_{\text{н}i}\}_{i=1}^{n}$ является *полной*, если $f_{\text{н}n}(t) \to f_{\text{н}}(t)$, где сходимость $(\to)$ определяется в метрике Хаусдорфа.

Нечеткие функции $x_{нi}(s) = x_i(s, r) = (\underline{x}_i(s, r), \bar{x}_i(s, r) | r \in [0, 1])$, $x_{нj}(s) = x_j(s, r) = (\underline{x}_j(s, r), \bar{x}_j(s, r) | r \in [0, 1])$ называются *ортогональными*, если выполняются соотношения

$$\int_a^b x_{нi}(s) x_{нj}(s) ds = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_a^b \underline{x}_i(s, r)\underline{x}_j(s, r) ds, \\ \int_a^b \bar{x}_i(s, r)\bar{x}_j(s, r) ds, \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

$$\forall r \in [0, 1] \subset R.$$

Здесь собственный интеграл по Риману понимается в нечетком смысле и его определение дано в § 1 первой части обзора [1].

Другие базовые определения, используемые в статье, даются в работе [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется рассмотреть численную схему оценивания состояния нечеткой интегральной модели

$$x_н(s) = f_н(s) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) x_н(\tau) d\tau \quad (1)$$

с помощью метода наименьших квадратов (МНК) и его модификаций, нечеткого метода Галеркина и нечетких квадратурных формул.

3. МЕТОДЫ НЕЧЕТКОЙ ОЦЕНКИ

3.1. Метод наименьших квадратов с численным интегрированием

Данный метод представлен в работе [17].

Имеем нечеткую модель (1) в форме нечеткого интегрального уравнения, которое в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \lambda \int_a^b \underline{U}(\tau, r) d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \lambda \int_a^b \bar{U}(\tau, r) d\tau, \\ r \in [0, 1] \subset R \text{ — параметр}, \end{cases}$$

где

$$\underline{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(\cdot) \geq 0, \\ K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(\cdot) < 0; \end{cases}$$

$$\bar{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(\cdot) \geq 0, \\ K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(\cdot) < 0; \end{cases} \quad \lambda = 1.$$

Здесь полагается, что для ядра $K(s, \tau)$, где $\tau \in [a, b]$ — промежуток интегрирования, выполнены такие типы неравенства:

$$(i) : K(s, \tau) \geq 0, \ a \leq \tau \leq b;$$

$$(ii) : K(s, \tau) \leq 0, \ a \leq \tau \leq b;$$

$$(iii) : K(s, \tau) \geq 0, \text{ если } a \leq \tau \leq c, \ K(s, \tau) < 0, \text{ если } c < \tau \leq b.$$

Для случая (i) будем иметь:

$$\underline{U}(\tau, r) = K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r);$$

$$\bar{U}(\tau, r) = K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), \quad \tau \in [a, b].$$

Для случая (ii):

$$\underline{U}(\tau, r) = K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r);$$

$$\bar{U}(\tau, r) = K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), \quad \tau \in [a, b].$$

Для случая (iii):

$$\underline{U}(\tau, s) = K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), \quad a \leq \tau \leq c;$$

$$\underline{U}(\tau, s) = K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), \quad c < \tau \leq b;$$

$$\bar{U}(\tau, s) = K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), \quad a \leq \tau \leq c;$$

$$\bar{U}(\tau, s) = K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), \quad c < \tau \leq b.$$

Для случая (i) имеем:

$$x_н(s) = f_н(s) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) x_н(\tau) d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) - \lambda \int_a^b K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r) d\tau = \underline{f}(s, r), \\ \bar{x}(s, r) - \lambda \int_a^b K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r) d\tau = \bar{f}(s, r), \\ r \in [0, 1] \subset R. \end{cases}$$

Нечеткое решение $\underline{x}(s, r)$, $\bar{x}(s, r)$ ищется в виде нечеткого приближенного соотношения

$$\underline{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r) h_i(s); \quad \bar{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r) h_i(s), \quad (2)$$

где $\{h_i(s)\}_{i=1}^{n}$ — последовательность независимых и полных функций; $\underline{a}_i(r)$, $\bar{a}_i(r)$ — нечеткие переменные, подлежащие определению.

Подставив соотношение (2) в модель (1), для случая (i) получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)h_i(s) - \lambda\int\limits_a^b K(s,\tau)\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)h_i(\tau)\right]d\tau \simeq \underline{f}(s,r), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)h_i(s) - \lambda\int\limits_a^b K(s,\tau)\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)h_i(\tau)\right]d\tau \simeq \bar{f}(s,r). \end{cases}$$

Переставив местами символы $\int$ и Σ, будем иметь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)h_i(s) - \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)\left(\lambda\int\limits_a^b K(s,\tau)h_i(\tau)d\tau\right) \simeq \underline{f}(s,r), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)h_i(s) - \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)\left(\lambda\int\limits_a^b K(s,\tau)h_i(\tau)d\tau\right) \simeq \underline{f}(s,r). \end{cases} \tag{3}$$

Используем обозначения:

$$k_i(s) = \lambda\int\limits_a^b K(s,\tau)h_i(\tau)d\tau;$$

$$l_i(s) = h_i(s) - k_i(s),$$

$$i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

тогда система (3) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)l_i(s) \simeq \underline{f}(s,r), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)l_i(s) \simeq \underline{f}(s,r), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{f}(s,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r)l_i(s) = \underline{r_n}, \\ \underline{f}(s,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r)l_i(s) = \bar{r}_n, \end{cases} \tag{5}$$

где $\underline{r_n}$, $\bar{r}_n$ — ошибки приближения в соотношении (2). Величины $l_i(s)$, $i = \overline{1, n}$, в выражении (4) могут быть положительными или отрицательными, поэтому с учетом свойств операции умножения константы $l_i(s) \in R$ на нечеткие переменные $\underline{a}_i(r)$, $\bar{a}_i(r)$ получим:

$$\underline{f}(s,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(r)l_i(s) = \underline{r_n}, \quad l_i(r) = \begin{cases} \underline{a}_i(r),\ l_i(s) \ge 0, \\ \bar{a}_i(r),\ l_i(s) < 0; \end{cases}$$

$$\bar{f}(s,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(r)l_i(s) = \bar{r}_n, \quad c_i(r) = \begin{cases} \bar{a}_i(r),\ l_i(s) \ge 0, \\ \underline{a}_i(r),\ l_i(s) < 0. \end{cases}$$

Ищем неизвестные переменные $b_i(r)$, $c_i(r)$, $i = \overline{1, n}$, с помощью традиционного МНК. Представим аргумент s в виде $s = s_i$, $i = \overline{1, n}$, тогда с учетом обозначений $l_i(s_j) = l_{ij}$ получим линейные системы уравнений для нахождения значений переменных $b_i(r)$, $c_i(r)$:

$$\begin{cases} \underline{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(r)l_{ij} = \underline{r_j}, \\ \bar{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(r)l_{ij} = \bar{r}_j, \\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{6}$$

В соответствии с МНК, значения переменных $b_i(r)$, $c_i(r)$, $i = \overline{1, n}$, определяются из условия минимизации квадрата ошибки $\underline{r_j}^2$, $\bar{r}_j^2$ на промежутке $[a, b]$ интегрирования исходного уравнения (6):

$$\begin{cases} \min\limits_{b_i}\int\limits_a^b \underline{r_j}^2(s)ds, \\ \min\limits_{c_i}\int\limits_a^b \bar{r}_j^2(s)ds, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{b_i}\int\limits_a^b \left[\underline{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(r)l_{ij}\right]ds, \\ \min\limits_{c_i}\int\limits_a^b \left[\bar{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(r)l_{ij}\right]ds, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial b_i}\left\{\int\limits_a^b \left[\underline{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(r)l_{ij}\right]^2 ds\right\} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial c_i}\left\{\int\limits_a^b \left[\bar{f}(s_j,r) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(r)l_{ij}\right] ds\right\} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(l_i, l_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\underline{f}, l_j), j = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(l_i, l_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\bar{f}, l_j), j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь

$$(l_i, l_j) = \int_a^b l_i(s) l_j(s) ds; \quad (\underline{f}, l_j) = \int_a^b \underline{f}(s) l_j(s) ds;$$

$$(\bar{f}, l_j) = \int_a^b \bar{f}(s) l_j(s) ds, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (8)$$

— скалярные произведения.

Соотношение (7) в матричной форме будет иметь вид:

$$SA = Y, \det S \neq 0, \qquad (9)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} L & B \\ B & L \end{pmatrix}; \quad L = (l_{ij}); \quad A = (b_1, ..., b_n\ c_1, ..., c_n)^{\mathrm{T}};$$

$$Y = (\underline{Y}\ \bar{Y}), \quad \underline{Y} = (\underline{y_1}, ..., \underline{y_n})^{\mathrm{T}}; \quad \bar{Y} = (\overline{y_1}, ..., \overline{y_n})^{\mathrm{T}};$$

$$\underline{y_i} = (\bar{f}, l_i).$$

Из соотношения (9) получим решение для вектора A^*:

$$A^* = S^{-1}Y, A^* = (b_1^*, ..., b_n^* \quad c_1^*, ..., c_n^*).$$

Приближенное решение нечеткого уравнения (1) будет иметь вид (2), в котором весовые коэффициенты $\underline{a}_i$, $\bar{a}_i$, $i = \overline{1, n}$, имеют соответственно компоненты b_i^*, c_i^* вектора A^*:

$$\underline{x_i^*} \simeq \sum_{i=1}^n b_i^* h_i(s); \ \bar{x}_i^* \simeq \sum_{i=1}^n c_i^* h_i(s).$$

Отметим, что в системе (7) необходимо вычислять собственные интегралы в виде скалярных произведений, которые затем используются при вычислении нечеткого вектора A^*. Для этой цели используем нечеткую квадратурную формулу в виде нечеткой формулы трапеций. Для определенности рассмотрим формулы в системе (7) типа

$$(\underline{f}, l_j) = \int_a^b \underline{f}(s) l_j(s) ds; \quad (\bar{f}, l_j) = \int_a^b \bar{f}(s) l_j(s) ds. \qquad (10)$$

В этом случае отрезок $[a, b]$ разбивается на равные части точками s_i:

$$a = s_0 < s_1 < ... < s_{n-1} < s_n = b,$$

где

$$s_i = a + ih, \quad s_i - s_{i-1} = (b - a)/h, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть имеем:

$$(\underline{f}, l_j) = \underline{\varphi_n}(r) = h\left[\underline{\varphi}(a, r) + \underline{\varphi}(b, r) + \sum_{i=1}^n \underline{\varphi}(s_i, r)\right];$$

$$(\bar{f}, l_j) = \overline{\varphi_n}(r) = h\left[\bar{\varphi}(a, r) + \bar{\varphi}(b, r) + \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}(s_i, r)\right],$$

где $\underline{\varphi_n}$, $\overline{\varphi_n}$ — подынтегральные функции в выражении (10), тогда для любого фиксированного $r \in [0, 1] \subset R$ имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\varphi_n}(r) = \underline{F}(r) = \int_a^b \underline{\varphi}(s, r) ds;$$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\varphi_n}(r) = \bar{F}(r) = \int_a^b \bar{\varphi}(s, r) ds.$$

В работе [17] доказывается теорема о равномерной сходимости в метрике Хаусдорфа $\underline{\varphi_n}(s)$, $\overline{\varphi_n}(s)$ соответственно к $\underline{F}(r)$, $\bar{F}(r)$. Подобным способом может быть рассмотрен и случай (*ii*). В случае (*iii*) промежуток интегрирования разбивается на два соответствующих промежутка.

По аналогичной методике нечеткого интегрирования в выражениях (8) применяется нечеткая сплайн-интерполяция [8]. Например, нечеткая линейная сплайн-функция следует из нечеткой вариационной задачи

$$\min_{\varphi_{\text{н}}(s)} \int_{s_0 = a}^{s_n = b} [\dot{\varphi}_{\text{н}}(s)]^2 ds, \quad s_i \in [a, b], \quad i = \overline{0, n},$$

с граничными условиями $\varphi(s_0) = \varphi_{\text{н}0}$, $\varphi(s_n) = \varphi_{\text{н}n}$.

Нечеткая кубическая сплайн-функция следует из нечеткой вариационной задачи

$$\min_{\varphi_{\text{н}}(s)} \int_{s_0 = a}^{s_n = b} [\ddot{\varphi}_{\text{н}}(s)]^2 ds$$

с заданными нечеткими неподвижными граничными условиями и условием непрерывности функции $\varphi_{\text{н}}(x)$ в узлах. Здесь производные $\dot{\varphi}_{\text{н}}(s)$, $\ddot{\varphi}_{\text{н}}(s)$ определяются по Хукухара [18, 19].

Пример 1. Имеем:

$$x_{\text{н}}(s) = f_{\text{н}}(s) + \int_0^{2\pi} (0{,}1\sin s \cdot \sin 0{,}5\tau) x_{\text{н}}(\tau) d\tau,$$

где

$$f_н(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]);$$

$$\underline{f}(s, r) = \sin(0{,}5s) \cdot [(13/15) \cdot (r^2 + r) + + (2/15) \cdot (4 - r^3 - r)];$$

$$\bar{f}(s, r) = \sin(0{,}5s) \cdot [(2/15) \cdot (r^2 + r) + + (13/15) \cdot (4 - r^3 - r)].$$

Это уравнение описывает вынужденные колебания струны заданной длины $l = 2\pi$ при воздействии на нее внешнего нечеткого возмущения $f_н(s)$. В уравнении $K(s, \tau) = 0{,}1\sin s \cdot \sin 0{,}5\tau$ — смещение струны в точке τ под воздействием гармонической силы, примененной в точке s. При нулевом внешнем возмущении ($f_н(s) = 0$) эта модель представляет собой свободные колебания струны.

Чтобы найти решение, зададим: $h_1(s) = 1$; $h_2(s) = s$.

Из выражения (4) находим:

$$k_1(s) = \int_0^{2\pi} K(s, \tau) h_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(0{,}1\sin s \cdot \sin 0{,}5\tau) \cdot 1] d\tau = 0{,}4\sin s;$$

$$k_2(s) = \int_0^{2\pi} K(s, \tau) h_2(\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} -[(0{,}1\sin s \cdot \sin 0{,}5\tau) \cdot \tau] d\tau = 0{,}4\pi\sin s.$$

Вычисления значений величин $l_1(s)$, $l_2(s)$ из выражения (4) дают:

$$l_1(s) = h_1 - k_1(s) = 1 - 0{,}4\sin s;$$

$$l_2(s) = h_2 - k_2(s) = s - 0{,}4\pi\sin s,$$

при этом

$$l_1(s) > 0, \text{ если } s \in [0, 2\pi],$$

$$\text{а } l_2(s) = \begin{cases} l_2(s) = 0, s \in [0, \pm\pi/2], \\ l_2(s) > 0, s \in [\pm\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

По выражениям (8) определяем правую часть системы (7). Так как $l_1(s) \geq 0$, $\forall s \in [0, 2\pi]$, то

$$(\underline{f}, l_1) = \int_a^b (\underline{f}, l_1) ds = \int_0^{2\pi} \{(\sin 0{,}5s)[(13/15)(r^2 + r) + + (2/15)(4 - r^3 - r)] \cdot [1 - 0{,}4\sin s]\} ds = = 4[(13/15)(r^2 + r) + (2/15)(4 - r^3 - r)];$$

$$(\bar{f}, l_1) = \int_a^b (\bar{f}, l_1) ds = 4[(2/15)(r^2 + r) + + (13/15)(4 - r^3 - r).$$

Вычисления по формулам трапеции дают:

$$(\underline{f}, l_2) = \int_a^b \underline{f} \cdot l_2 ds \simeq -0{,}3r^3 + 12{,}5r^2 + 12{,}5r + 0{,}1;$$

$$(\bar{f}, l_2) = \int_a^b \bar{f} \cdot l_2 ds \simeq -12{,}5r^3 + 0{,}03r^2 - 12{,}5r + 50{,}2.$$

Скалярные произведения (l_i, l_j), $i, j = \overline{1, n}$ в системе (7) находим по выражениям (8):

$$(l_1, l_2) = \int_0^{2\pi} l_1(s) \cdot l_2(s) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1 - 0{,}4\sin s) \cdot (1 - 0{,}4\sin s)] ds \simeq 6{,}8;$$

$$(l_1, l_2) = (l_2, l_1) = \int_0^{2\pi} l_1(s) \cdot l_2(s) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1 - 0{,}4\sin s) \cdot (s - 0{,}4\pi\sin s)] ds \simeq 23{,}8;$$

$$(l_2, l_2) = \int_0^{2\pi} l_2(s) \cdot l_2(s) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(s - 0{,}4\pi\sin s) \cdot (s - 0{,}4\pi\sin s)] ds \simeq 103{,}4.$$

В результате вычислений появляется НСЛУ (9) с неизвестными элементами $b_i(r)$, $c_i(r)$, $i = 1, 2$:

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 6{,}8 & 23{,}8 \\ 23{,}8 & 103{,}4 \end{matrix} & B \\ B & \begin{matrix} 6{,}8 & 23{,}8 \\ 23{,}8 & 103{,}4 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{f}, l_1) \\ (\underline{f}, l_2) \\ (\bar{f}, l_1) \\ (\bar{f}, l_2) \end{pmatrix}, \ |S| \neq 0,$$

где с помощью системы (6) определяются компоненты вектора $A^* = (\underline{a}_1^*, \underline{a}_2^*, \overline{a_1}^*, \overline{a_2}^*)^{\mathrm{T}}$ и далее находится приближенное решение нечеткого интегрального уравнения

$$\underline{x}^*(s, r) \simeq \underline{a}_1^* h_1(s) + \underline{a}_2^* h_2(s) = \underline{a}_1^* \cdot 1 + \underline{a}_2^* s;$$

$$\bar{x}^*(s, r) \simeq \overline{a_1}^* h_1(s) + \overline{a_2}^* h_2(s) = \overline{a_1}^* \cdot 1 + \overline{a_2}^* s.$$

Например, задав $r = 0{,}5$; $s = \pi$, получим: $\underline{x}^*(s, r) \simeq 1{,}1$; $\bar{x}^*(s, r) \simeq 3$. ♦

3.2. Рекуррентный и нелинейный методы наименьших квадратов

Данные методы представлены в работах [13, 14].

Метод, изложенный в п. 3.1, применяется при небольших объемах информации — обычно, когда $s_i = 1, 2$. При s_i, $i > 2$ применяется рекуррентный МНК.

Пусть соотношение (9) по k и $k + 1$ измерениям имеет соответственно стандартную форму:

$$S_k A_k = Y_k,\ S_{k+1} A_{k+1} = Y_{k+1} \Leftrightarrow L_k B_k = X_k^T V_k, \quad (11)$$

где

$$L_k = X_k^{\mathrm{T}} X_k; \quad X_k^{\mathrm{T}} V_k = Y_k, \quad X_k = (l_i(s_j)), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда для рекуррентного МНК задача состоит в получении зависимости Ф: $B_{k+1} = \Phi(B_k)$.

Имеем элементы соотношения (11) в виде блочного представления:

$$V_{k+1} = (u_1, ..., u_k\ u_{k+1})^{\mathrm{T}} = (V_k\ u_{k+1})^{\mathrm{T}};$$

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} X_k \\ X_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}; \quad X_k = (l_i(s_j)), \quad i, j = \overline{1, k};$$

$$x_{k+1}^{\mathrm{T}} = (l_1(s_{k+1}), ..., l_{k+1}(s_{k+1})).$$

Из правила умножения блочных матриц [20]

$$(a \quad b) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

имеем в правой части выражения (11):

$$V_{k+1}^{\mathrm{T}} \cdot V_{k+1} = \begin{pmatrix} X_k \\ x_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$= (X_k^{\mathrm{T}} \quad x_{k+1}) \cdot \begin{pmatrix} V_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = (X_k^{\mathrm{T}} V_k + x_{k+1} u_{k+1}). \quad (12)$$

Подставив выражение (12) в формулу (11), получим:

$$B_{k+1} = M_{k+1}(X_k^{\mathrm{T}} V_k + x_{k+1} u_{k+1}),$$

$$M_{k+1} = L_{k+1}^{-1} \Leftrightarrow M_{k+1}^{-1} = L_{k+1}. \quad (13)$$

Преобразование M_{k+1}^{-1} дает:

$$M_{k+1}^{-1} = [(X_{k+1}^{\mathrm{T}}, X_{k+1})^{-1}]^{-1} = X_{k+1}^{\mathrm{T}},$$

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} X_k \\ x_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_k \\ x_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = (X_k^{\mathrm{T}} \quad x_{k+1}) \begin{pmatrix} X_k \\ x_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =$$

$$= X_k^{\mathrm{T}} X_k + x_{k+1} x_k^{\mathrm{T}} = M_k^{-1} + x_{k+1} I x_{k+1}^{\mathrm{T}},$$

где I — единичная матрица, используемая для вспомогательных целей.

В результате будем иметь:

$$M_{k+1}^{-1} = M_k^{-1} + x_{k+1} I x_{k+1}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L_{k+1} = (M_k^{-1} + x_{k+1} I x_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Для обращения матрицы в правой части последнего соотношения используется известная формула из алгебры матриц [20]:

$$A^{-1} = (B + CDG)^{-1} =$$
$$= B^{-1} - B^{-1}C(D^{-1} + GB^{-1}C)^{-1}GB^{-1},$$

откуда будем иметь:

$$L_{k+1} = M_{k+1}^{-1} = (M_k^{-1} + x_{k+1} I x_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1} =$$
$$= (M_k^{-1})^{-1} - (M_k^{-1})^{-1} x_{k+1} [I^{-1} + x_{k+1}^{\mathrm{T}} (M_k^{-1})^{-1}]^{-1} \times$$
$$\times\ x_{k+1}^{\mathrm{T}} (M_k^{-1})^{-1} = M_k - M_k x_{k+1} \times$$
$$\times\ (I + x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k x_{k+1})^{-1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k.$$

Анализ размерностей для элемента в скобках показывает, что $\dim(\cdot) = (1 \times 1)$, поэтому

$$(I + x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k x_{k+1})^{-1} = \gamma_k \in R,$$

где коэффициент

$$\gamma_k = (1 + \alpha_k)^{-1}.$$

В результате выражение (13) будет иметь вид:

$$M_{k+1} = M_k - \gamma_k M_k x_{k+1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k. \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) и (12) в формулу (11), получим после преобразований:

$$B_{k+1} = L_{k+1}^{-1} X_{k+1}^{\mathrm{T}} V_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_{k+1} = M_{k+1} X_{k+1}^{\mathrm{T}} V_{k+1} =$$
$$= (M_k - \gamma_k M_k x_{k+1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k)(X_k^{\mathrm{T}} V_k + x_{k+1} u_{k+1}) =$$
$$= M_k X_k^{\mathrm{T}} V_k + M_k x_{k+1} u_{k+1} -$$
$$- \gamma_k M_k x_{k+1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k X_k^{\mathrm{T}} V_{k+1} -$$
$$- \gamma_k M_k x_{k+1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} M_k x_{k+1} u_{k+1} =$$
$$= B_k + \gamma_k M_k x_{k+1} [\gamma_k^{-1} u_{k+1} - \alpha_k u_{k+1}] -$$
$$- \gamma_k M_k x_{k+1} x_{k+1}^{\mathrm{T}} B_k = B_k + \gamma_k M_k x_{k+1} (u_{k+1} - x_{k+1}^{\mathrm{T}} B_k).$$

Таким образом, получена зависимость $B_{k+1} = \Phi(B_k)$, где $\Phi(B_k) = B_k + \gamma_k M_k x_{k+1}(u_{k+1} - x_{k+1}^{\mathrm{T}} B_k)$, где $\gamma_k \in R$ — коэффициент адаптации.

Для нелинейного МНК используется рекуррентная форма

$$B_{j+1} = B_j + \Delta B_j, \quad j = \overline{0, k},$$

где $\Delta B_j = (X_j^{\mathrm{T}} X_j)^{-1} X_j^{\mathrm{T}} V_j$, $j = \overline{0, k}$, определены из формулы (11) с точностью до обозначений, B_0 — заданный вектор начального приближения.

3.3. Нечеткий метод наименьших квадратов

Данный метод изложен в работе [21].

Имеем исходные данные подобно тем, которые приведены в п. 3.1, — нечеткую линейную математическую модель типа (6), которая в векторной форме имеет вид:

$$\underline{f}(s, r) = (B(r), L(s)) + \underline{r}_n(s);$$

$$\overline{f}(s, r) = (C(r), L(s)) + \overline{r}_n(s), \qquad (15)$$

где $B(r) = (b_1(r), ..., b_n(r))$, $C(r) = (c_1(r), ..., c_n(r))$ — векторы неизвестных переменных, подлежащих определению; $L(s) = (l_1(s), ..., l_n(s))$ — вектор заданных базисных функций; $\underline{r}_n(s)$, $\overline{r}_n(s)$ — ошибки модели; $(B(r), L(s))$, $(C(r), L(s))$ — скалярные произведения.

Далее для простоты рассматривается нижняя часть модели (15), обозначенной символом «_». Для верхней части модели (15) с символом «¯» дальнейшие рассуждения и преобразования выполняются аналогично.

Пусть при значениях аргумента $s = s_i$, $i = \overline{1, m}$ ($m \ge n$), в левой части модели (15) были получены данные (измерения):

$$s_1 < s_2 < ... < s_m,$$

$$\underline{f}(s_1, r), \underline{f}(s_2, r), ..., \underline{f}(s_m, r).$$

После подстановки этих данных в модель (15) получим НСЛУ:

$$\underline{f}(s_j, r) = \sum_{i=1}^{n} b_i(r) \cdot l_i(s_j) + \underline{r}(s_j) \Leftrightarrow \underline{R} = \underline{Y} - XB, \qquad (16)$$

где $\underline{R} = (\underline{r}(s_1), ..., \underline{r}(s_m))$; $\underline{Y} = (\underline{f}(s_1), ..., \underline{f}(s_m))^{\mathrm{T}}$, а $X = (x_{ij})$, $x_{ij} = l_i(x_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, — прямоугольная матрица $\dim X = (m \times n)$, m — число данных, n — число неизвестных параметров.

Задается взвешенный квадрат ошибок:

$\underline{R}^{\mathrm{T}} \Lambda^{-1} \underline{R}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_{ij})$ — диагональная весовая матрица.

Задача нахождения неизвестного вектора B в НСЛУ (16) состоит из двух этапов.

На **этапе 1** для каждой базисной функции $l_i(s = s_j) = l_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, формируются нечеткие правила «если — то». Задавая для нечеткой переменной l_{ij} нечеткие идентификаторы r_{ij}^{ε}, $\varepsilon = \overline{1, f}$, — число идентификаторов для i-й нечеткой переменной при $s = s_j$, может быть сформирована нечеткая база правил $R_j = \{R_{jp}\}_{p=1}^{p=2^n}$. Например, при $s = s_1$ она будет иметь вид:

$$\begin{cases}
R_{11}\text{: если } l_{11} = r_{11}^{(1)} \text{ и } l_{21} = r_{21}^{(1)} \\
\quad \text{и ... и } l_{n-1,1} = r_{n-1,1}^{(1)} \text{ и } l_{n1} = r_{n1}^{(1)}, \\
\text{то } g_{11} = \min\{r_{11}^{(1)}, r_{21}^{(1)}, ..., r_{n-1,1}^{(1)}, r_{n1}^{(1)}\}, \\
\quad \vdots \\
\text{или} \\
R_{12}\text{: если } l_{11} = r_{11}^{(1)} \text{ и } l_{21} = r_{21}^{(1)} \\
\quad \text{и ... и } l_{n-1,1} = r_{n-1,1}^{(1)} \text{ и } l_{n1} = r_{n1}^{(2)}, \\
\text{то } g_{12} = \min\{r_{11}^{(1)}, r_{21}^{(1)}, ..., r_{n-1,1}^{(1)}, r_{n1}^{(2)}\}, \\
\text{или} \\
\quad \vdots \\
\text{или} \\
R_{1p-1}\text{: если } l_{11} = r_{11}^{(f)} \text{ и } l_{21} = r_{21}^{(f)} \\
\quad \text{и ... и } l_{n-1,1} = r_{n-1,1}^{(f)} \text{ и } l_{n1} = r_{n1}^{(f-1)}, \\
\text{то } g_{1p-1} = \min\{r_{11}^{(f)}, r_{21}^{(f)}, ..., r_{n-1,1}^{(f)}, r_{n1}^{(f-1)}\}, \\
\text{или} \\
R_{1p}\text{: если } l_{11} = r_{11}^{(f)} \text{ и } l_{21} = r_{21}^{(f)} \\
\quad \text{и ... и } l_{n-1,1} = r_{n-1,1}^{(f)} \text{ и } l_{n1} = r_{n1}^{(f)}, \\
\text{то } g_{1p} = \min\{r_{11}^{(f)}, r_{21}^{(f)}, ..., r_{n-1,1}^{(f)}, r_{n1}^{(f)}\}.
\end{cases}$$

Здесь «и», «или» представляют собой нечеткие логические функции по Заде:

$$r_1(x) \text{ и } r_2(x) = \min(r_1(x), r_2(x));$$

$$r_1(x) \text{ и } r_2(x) = \max(r_1(x), r_2(x)).$$

База правил $R_1 = \{R_{1p}\}_{p=1}^{p=2^n}$ при $s = s_1$ содержит $p = 2^n$ правил для «и» базисных функций.

Полученные коэффициенты $g_{11}, g_{12}, ..., g_{1p}$ нормируются, что приводит к весовым коэффициентам $\lambda_{11} = g_{11} / \sum_{i=1}^{p} g_{1i}$, ..., $\lambda_{1p} = g_{1p} / \sum_{i=1}^{p} g_{1i}$.

Далее аналогичным образом при s: $s_2, s_3, ..., s_m$ формируются соответственно нечеткие базы правил $R_2, R_3, ..., R_m$. По каждой нечеткой базе правил находятся нормированные весовые коэффициенты, из которых с учетом R_1 формируется таблица размерностью ($m \times p$):

$s = s_1$,	$\lambda_{11}, ..., \lambda_{1p}$
$s = s_2$	$\lambda_{21}, ..., \lambda_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$
$s = s_m$	$\lambda_{m1}, ..., \lambda_{mp}$

На **этапе 2** по совокупности весовых матриц $\{\Lambda_q\}_{q=1}^{p}$ с применением обобщенного МНК находятся неизвестные параметры $b_i(r)$, $i = \overline{1, n}$, модели (6). Параметры $c_i(r)$, $i = \overline{1, n}$, в модели (6) находятся так же, как и $b_i(r)$.

Ранее в п. 3.1 полагалось, что нечеткая модель ошибки $r_n = (\underline{r_n}(s), \overline{r_n}(s))$ имеет параметры $E\underline{r_n}(s) = E\overline{r_n}(s) = 0$, $D\underline{r_n}(s) = D\overline{r_n}(s) = \sigma^2 I$, где E, D — операторы математического ожидания и дисперсии соответственно; I — единичная матрица; σ^2 — коэффициент пропорциональности. Это приводило к оценкам МНК $\hat{c}_i(r)$, $\hat{b}_i(r)$ модели (9).

Теперь при наличии весовых матриц $\{\Lambda_q\}_{q=1}^{p}$, полученных для s: $s_1, ..., s_m(\dim\Lambda_q = (m\times m))$, матричная модель ошибки $\underline{R}_q$ в выражении (12) принимает вид:

$$E\underline{R}_q = 0, \quad D\underline{R}_q = \sigma^2\Lambda_q,$$

где Λ_q — положительно определенная матрица

$$\Lambda_q \in \{\Lambda_q\}_{q=1}^{p}.$$

Это означает, что для Λ_q существует линейное преобразование P_q:

$$P_q^{\text{т}} \cdot P_q = P_q \cdot P_q = P_q^2 = \Lambda_q; \quad P_q^{\text{т}} = P_q.$$

Поэтому, применяя к модели (16) линейное преобразование P_q^{-1} в виде ее умножения слева, получим:

$$\underline{R}_q = \underline{Y}_q - XB_q \Leftrightarrow \underline{Y}_q = XB_q + \underline{R}_q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_q^{-1}\underline{Y}_q = P_q^{-1}XB_q + P_q^{-1}\underline{R}_q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{Y}_q^{(1)} = X_q^{(1)}B_q + \underline{R}_q^{(1)}, \quad \underline{Y}_q^{(1)} = P_q^{-1};$$
$$X_q^{(1)} = P_q^{-1}X_q; \quad \underline{R}_q^{(1)} = P_q^{-1}\underline{R}_q. \tag{17}$$

Находим модель для ошибки $\underline{R}_q^{(1)}$. Для этого вычисляются математическое ожидание $E\underline{R}_q^{(1)}$ и дисперсия $D\underline{R}_q^{(1)}$. Имеем:

$$E\underline{R}_q^{(1)} = E(P_q^{-1} \cdot \underline{R}_q) = P_q^{-1} \cdot (E\underline{R}_q) = 0;$$

$$\text{так как } \underline{R}_q^{(1)} = P_q^{-1} \cdot R_q,\ E\underline{R}_q = 0,$$

$$D\underline{R}_q^{(1)} = D(P_q^{-1} \cdot \underline{R}_q) = P_q^{-1} \cdot (D\underline{R}_q)(P_q^{-1})^{\text{т}} =$$
$$= \sigma^2 P_q^{-1}\Lambda_q(P_q^{-1})^{\text{т}} = \sigma^2(P_q^{-1}P_q)(P_q(P_q^{-1})^{\text{т}}) = \sigma^2 I;$$

$$\text{так как } \underline{R}_q^{(1)} = P_q^{-1} \cdot \underline{R}_q,\ D\underline{R}_q = \sigma^2\Lambda_q,\ \Lambda_q = P_q \cdot P_q.$$

Таким образом, справедлива модель

$$\underline{Y}_q^{(1)} = X^{(1)}B_q + \underline{R}_q^{(1)} : E\underline{R}_q^{(1)} = 0; \quad D\underline{R}_q^{(1)} = \sigma^2 I,$$

поэтому для нее можно воспользоваться равноточным МНК, примененным в п. 3.1, и получить уравнения типа (9) при нахождении компонент вектора B_q:

$$(X_q^{(1)\text{т}}\ X_q^{(1)})B_q = X_q^{(1)\text{т}}\ \underline{Y}_q^{(1)}.$$

Подставляя затем в это уравнение старые переменные из формулы (17), получим с учетом свойств операции транспонирования и матрицы P_q уравнение:

$$[(P_q^{-1}X_q)^{\text{т}} \cdot (P_q^{-1}X_q)]B_q = (P_q^{-1}X_q)^{-1}(P_q^{-1}\underline{Y}_q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(X_q^{\text{т}}P_q^{-1})(P_q^{-1}X_q)]B_q = X_q^{\text{т}}P_q^{-1}\underline{Y}_q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (X_q^{\text{т}}V_q^{-1}X_q)B_q = X_q^{\text{т}}V_q^{-1}\underline{Y}_q, \tag{18}$$

где V_q, $q = \overline{1, p}$, — весовые матрицы, найденные из нечетких правил этапа 1.

Действия, аналогичные при получении уравнения (18), выполняются относительно вектора C_q. Тогда получим:

$$(X_q^{\text{т}}V^{-1}X_q)C_q = X_q^{\text{т}}V_q^{-1}\bar{Y}_q. \tag{19}$$

Объединяя выражения (18), (19), будем иметь:

$$S_q \cdot A_q = Y_q, \quad |S_q| \neq 0, \quad q = \overline{1, p}, \tag{20}$$

где

$$S_q = \begin{pmatrix} L_q & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix}; \quad L_q = (X_q^{\mathrm{T}} V_q^{-1} X_q); \quad A_q = (B_q \ C_q)^{\mathrm{T}};$$

$$B_q = (b_{q1}, \ldots, b_{qn} \ c_{q1}, \ldots, c_{qn})^{\mathrm{T}};$$

$$Y_q = (\underline{Y}_q^B \ \bar{Y}_q^C); \ \underline{Y}_q^B = X_q^{\mathrm{T}} V^{-1} \underline{Y}_q; \quad \bar{Y}_q^C = X_q^{\mathrm{T}} V^{-1} \underline{Y}_q.$$

В результате из системы (20) получим совокупность решений:

$$\{A_q^*\}_{q=1}^p = \{B_q^* \ C_q^*\}_{q=1}^p,$$

которые приводят к совокупности нечетких решений интегрального уравнения (1):

$$\begin{cases} \underline{x}_q^*(s_j, r) = (B_q^*, H_j), \\ \bar{x}_q^*(s_j, r) = (C_q^*, H_j), \\ q = \overline{1, p}; \ s_j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{21}$$

где $B_q^* = (b_{q1}^*, \ldots, b_{qn}^*)$; $C_q^* = (c_{q1}, \ldots, c_{qn})$; $H_j = (h_1(s_j), \ldots, h_n(s_j))$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

За нечеткое решение уравнения (1) принимается обобщенное усредненное решение, получаемое из совокупности (21):

$$\begin{cases} \underline{x}^*(s_j, r) = \sum_{q=1}^{p} \lambda_{1q} \underline{x}_q^*(s_j, r), \\ \bar{x}^*(s_j, r) = \sum_{q=1}^{p} \lambda_{1q} \bar{x}_q^*(s_j, r), \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

3.4. Нечеткий метод Галеркина

Имеем нечеткую модель

$$x_{\text{н}}(s) = f_{\text{н}}(s) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) x_{\text{н}}(\tau) d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) \underline{x}(\tau, r) d\tau = \underline{f}(s, r), \\ \bar{x}(s, r) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) \bar{x}(\tau, r) d\tau = \bar{f}(s, r), \end{cases}$$

оценка состояния которой ищется в виде нечеткого приближения.

Возможны два варианта решения.

Вариант 1:

$$\underline{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r) \underline{h}_i(s, r); \quad \bar{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r) \bar{h}_i(s, r),$$

где $\{h_{\text{н}i}(s) = h_i(s, r) = (\underline{h}_i(s, r), \bar{h}_i(s, r))\}_{i=1}^n$ — нечеткие независимые полные ортогональные функции; $a_{\text{н}i} = a_i(r) = (\underline{a}_i(r), \bar{a}_i(r))$ — нечеткие коэффициенты, подлежащие определению.

Вариант 2:

$$\underline{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r) h_i(s); \quad \bar{x}(s, r) \simeq \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r) h_i(s),$$

где $\{h_i(s)\}_{i=1}^n$ — четкие независимые полные ортогональные функции, понимаемые в традиционном смысле; $\underline{a}_i(r)$, $\bar{a}_i(r)$ — коэффициенты в параметрическом представлении нечеткости.

Рассмотрим **вариант 1**. После преобразований, аналогичных в получении системы (5) из выражений (1)—(4), будем иметь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i(r) \underline{l}_i(s) \simeq \underline{f}(s, r), \\ \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i(r) \bar{l}_i(s) \simeq \bar{f}(s, r), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\underline{l}_i(s) = \underline{h}_i(s, r) - \underline{k}_i(s); \ \underline{k}_i(s) = \int_a^b K(s, \tau) \underline{h}_i(\tau) d\tau,$$

$$\bar{l}_i(s) = \bar{h}_i(s, r) - \bar{k}_i(s); \quad \bar{k}_i(s) = \int_a^b K(s, \tau) \bar{h}_i(\tau) d\tau.$$

Значения нечетких переменных $\underline{l}_i(s)$, $\bar{l}_i(s)$ могут быть положительными или отрицательными, поэтому система (22) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} b_i(r) \underline{l}_i(s) \simeq \underline{f}(s, r), \ b_i(r) = \begin{cases} \underline{a}_i(r), \ \underline{l}_i(s) \ge 0, \\ \bar{a}_i(r), \ \underline{l}_i(s) < 0, \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i(r) \bar{l}_i(s) \simeq \bar{f}(s, r), \ c_i(r) = \begin{cases} \bar{a}_i(r), \ \bar{l}_i(s) \ge 0, \\ \underline{a}_i(r), \ \bar{l}_i(s) < 0. \end{cases} \end{cases} \tag{23}$$

Неизвестные переменные $b_i(r)$, $c_i(r)$, $i = \overline{1, n}$, в выражении (2) находятся из условия ортогональности функций $\underline{h}_i$, $\underline{h}_j$ и $\bar{h}_i$, $\bar{h}_j$. Для этого, последовательно умножая систему (23) на функции $\underline{h}_i(s, r)$, $\overline{h}_i(s, r)$, получим полную НСЛУ:

$$(\mathrm{diag}\underline{H})B = \underline{F};\ (\mathrm{diag}\overline{H})C = \overline{F}, \qquad (24)$$

где $B = (b_1, ..., b_n)^{\mathrm{т}}$; $C = (c_1, ..., c_n)^{\mathrm{т}}$; $\underline{F} = ((\underline{f}, \underline{l}_1), ..., (\underline{f}, \underline{l}_n))^{\mathrm{т}}$; $\overline{F} = ((\overline{f}, \overline{l}_1), ..., (\overline{f}, \overline{l}_n))^{\mathrm{т}}$ — векторы с элементами из скалярных произведений; $\underline{H} = ((\underline{l}_i, \underline{h}_j))$; $\overline{H} = ((\overline{l}_i, \overline{h}_j))$, $i, j = \overline{1, n}$, — матрицы из нечетких скалярных произведений; параметры $\underline{l}_i$, $\overline{l}_i$ определены в выражении (8).

Здесь система (24) — полная НСЛУ, которая определена в работе [22]. Для нее, как известно, существуют два решения: а) нечеткое; б) четкое.

Случай «а».

В настоящее время теория полных НСЛУ достаточно хорошо изучена. Некоторые из публикаций на эту тему приведены в работах [23—26].

Представим систему (24) в стандартной форме:

$$HD = F,$$

где $H = \mathrm{diag}\begin{pmatrix}\underline{H}\\ \overline{H}\end{pmatrix}$; $D = (C|D)^{\mathrm{т}}$; $F = ((\underline{f}_i, \underline{l}_1), ..., (\underline{f}_n, \underline{l}_n)|(\overline{f}_i, \overline{l}_1), ..., (\overline{f}_n, \overline{l}_n))^{\mathrm{т}}$.

Здесь матрица H и вектор F содержат нечеткие элементы и, соответственно, компоненты.

Заметим, что ранее рассматривались НСЛУ применительно к нечетким интегральным уравнениям, когда матрица H содержала четкие элементы, а вектор F состоял из нечетких компонент. Появление термина «полная НСЛУ» указывает на то, что матрица H и вектор F имеют нечеткие элементы. Обзор методов решения полных и неполных НСЛУ приведен в работах [27, 28] соответственно.

Случай «б».

Метод четкого решения для полной НСЛУ [22, 27] путем замены переменных приводит к тому, что число уравнений становится больше, чем число неизвестных, поэтому для ее решения применяется традиционный МНК.

Предложенная методика используется также для нелинейных функций принадлежностей.

Вариант 2. Здесь в рамках нечеткого метода Галеркина полагается, что базисные функции $h_i(s)$, $i = \overline{1, n}$, представляют собой традиционные функции, для которых полнота и ортогональность понимается в обычном смысле. В этом случае полная НСЛУ (24) преобразуется в НСЛУ

$$(\mathrm{diag}\ H)\ C = F_{\mathrm{н}}, \qquad (25)$$

где H — матрица с четкими элементами; $F_{\mathrm{н}} = (\underline{F}|\overline{F})$.

Система (25) решается одним из нечетких методов для НСЛУ, изложенных в работах [27, 28].

3.5. Нечеткий метод квадратур Чебышева

В традиционном случае этот метод широко применяется при решении четких интегральных уравнений, когда интеграл в уравнении заменяется квадратурной формулой с узлами в точках Чебышева [10]. Метод также может быть использован в нечетком случае, когда нечеткая интегральная модель представляется в эквивалентной параметрической форме. При этом нижнее и верхнее представления образуют систему интегральных моделей, решаемых традиционным методом квадратур, полагая, что интегралы понимаются в нечетком смысле.

Считается, что для нечеткой интегральной модели справедливо параметрическое ее представление и для ядер выполняются три типа неравенств (*i*)—(*iii*), подобно тому, как это было реализовано в п. 3.1, 3.3 первой части обзора [1].

Для случая (*i*), когда $K(s, \tau) \ge 0$, $a \le \tau \le b$, имеем:

$$x_{\mathrm{н}}(s) = f_{\mathrm{н}}(s) + \lambda\int_a^b K(s, \tau)x_{\mathrm{н}}(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \lambda\int_a^b \underline{V}(\tau, r)d\tau, \\ \overline{x}(s, r) = \overline{f}(s, r) + \lambda\int_a^b \overline{V}(\tau, r)d\tau, \end{cases}$$

где $\underline{V}(\tau, r) = K(s, \tau)\cdot\underline{x}(\tau, r)$; $\overline{V}(\tau, r) = K(s, \tau)\cdot\overline{x}(\tau, r)$, $K(s, \tau) \ge 0$ на промежутке интегрирования $[a, b]$, $r \in [0, 1] \subset R$ — параметр.

В уравнении относительно нижней ветви $\underline{x}(s, r)$ переменной заменим интеграл квадратурной формулой Чебышева:

$$\int_a^b \Psi(x)dx = A\sum_{k=1}^{n}\Psi(x_k)dx + \rho,$$

$$x_k = 0{,}5(b - a)[1 + x_k^{(n)}], \quad A = n^{-1}(b - a),$$

где $x_k^{(n)}$ — точки Чебышева, которые табулированы, ρ — остаточный член. В результате с точностью до ρ получим:

$$\underline{x}(s_i, r) - \lambda A\sum_{k=1}^{n} K(s_i, \tau_k)\overline{x}(s_i, r) = \overline{f}(s_i, r), \quad i = \overline{1, n}.$$

В матричной форме система будет иметь вид:

$$K\cdot X = \Phi,$$

где

$$X = (\underline{x}(s_1), \ldots, \underline{x}(s_n)|\bar{x}(s_1), \ldots, \bar{x}(s_n))^{\text{т}};$$

$$\Phi = (\underline{f}(s_1), \ldots, \underline{f}(s_n)|\bar{f}(s_1), \ldots, \bar{f}(s_n))^{\text{т}};$$

$$K = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix};\ R = \left(r_{ij} = \left(1 - \lambda A \sum_{k=1}^{j} K(s_i, \tau_k) \right) \right) \text{ — матрица.}$$

В результате определяется нечеткое решение в дискретной форме $x_{\text{н}\partial}(s_i) \simeq x_\partial(s_i, r) = (\underline{x}_g(s_i, r), \bar{x}_\partial(s_i, r)|\ r \in [0, 1]),\ i = \overline{1, n}$.

Далее с помощью нечеткого интерполирования [26] можно указать приближенное решение $x^*_{\text{н}} = x^*(s, r) = (\underline{x}^*(s, r), \bar{x}^*(s, r)|\ r \in [0, 1])$.

Случаи (*ii*): $K(s, \tau) \le 0$ и (*iii*): $K(s, \tau) \ge 0$, $a \le \tau \le c$; $K(s, \tau) < 0$, $c < \tau \le b$, $c \in [a, b]$, рассматриваются подобно тому, как это было сделано в первой части обзора [1].

3.6. Метод аппроксимации нечеткого решения функцией sinc

Данный метод изложен в работе [29]. Как и ранее, используется параметрическая форма для исходной нечеткой интегральной модели, которая затем преобразуется к системе из интегральных уравнений и далее применяется sinc-подход к этой системе, когда неизвестное нечеткое решение аппроксимируется по базисным функциям с неизвестными нечеткими коэффициентами. Базисные функции представляются композицией функций sinc и специализированной функцией, определяющих функцию Кронекера. Такое разложение решения позволяет в итоге получить НСЛУ относительно неизвестных коэффициентов разложения. Ее решение определяет искомое приближенное состояние нечеткой интегральной модели в параметрической форме.

Функция sinc wavelet трактуется как функция «небольшой волны». Ее основные свойства, приведенные ниже, справедливы на целой действительной оси [29]:

$$i_1 : \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \sin(\pi t)/\pi t,\ t \ne 0, \\ 1,\ t = 0; \end{cases}$$

$i_2 : S(j, h) = \operatorname{sinc}((t - jh)/h)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $h > 0$ — шаг между узлами t;

$i_3 : C(f, h)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \cdot \operatorname{sinc}((t - jh)/h)$ — кардинальное разложение Уиттакера (Whittaker cardinal expansion) для функции $f(t)$ в предположении, что ряд сходится;

$i_4 : C(f, h)(t) = \sum_{j=-n}^{n} f(jh) \cdot \operatorname{sinc}((t - jh)/h)$ — конечное разложение Уиттакера для $f(t)$.

Для конструирования аппроксимации на промежутке $[a, b] \subset R$ рассматривается конформное отображение

$$\varphi(t) = \ln((t - a)/b - t),$$

которое переводит область D_E в форме петли (eye-shaped) на (onto) область D_d в форме полосы (strip). Здесь:

$$D_E = \{z = x + iy :|\ \arg(z - a/b - z)| < d \le \pi/2\};$$

$$D_d = \{\varsigma = \zeta + i\eta :|\ \eta\ | < d \le \pi/2\}, \qquad (26)$$

где $h = (\pi d/\alpha n)^{0,5}$, $0 < \alpha \le 1$, n — целое число.

Базисные функции на отрезке $[a, b]$ имеют вид:

$$S(j, h) \circ \varphi(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\varphi(t) - jh}{h}\right), \qquad (27)$$

где символ $\circ$ обозначает композицию функций.

Точки на отрезке $[a, b]$ определяются из системы (25) путем разрешения выражения (27) относительно t:

$$t_j = \varphi^{-1}(jh) = (a + be^{jh})/(1 + e^{jh}).$$

Относительно базисных функций (27) имеет место кронекерово (Kronecker) представление

$$[S(j, h) \circ \varphi(t)]|_{t = t_i} = \delta^{(0)}_{ji} = \begin{cases} 1, j = i, \\ 0, j \ne i. \end{cases}$$

Перечисленные выше определения и свойства используются в методе sinc для приближенной оценки нечеткой интегральной модели

$$x_{\text{н}}(s) = f_{\text{н}}(s) + \lambda \int_a^b K(s, \tau) x_{\text{н}}(\tau) d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \lambda \int_a^b K_1(s, \tau, \underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)) d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \lambda \int_a^b K_2(s, \tau, \underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)) d\tau, \end{cases} \qquad (28)$$

где

$$K_1(s, \tau, \underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)) = \begin{cases} K(\tau, r) \cdot \underline{x}(\tau, r),\ K(\cdot) \ge 0, \\ K(\tau, r) \cdot \bar{x}(\tau, r),\ K(\cdot) < 0, \end{cases}$$

$$K_2(s, \tau, \underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)) = \begin{cases} K(\tau, r) \cdot \bar{x}(\tau, r),\ K(\cdot) \ge 0, \\ K(\tau, r) \cdot \underline{x}(\tau, r),\ K(\cdot) < 0, \end{cases}$$

для $\forall r \in [0, 1] \subset R_1$ и $a \le \tau$, $s \le b$.

Представим $\underline{x}(s, r)$, $\bar{x}(s, r)$ в виде аппроксимации по базисным функциям (27) с соответствующими коэффициентами α_j, β_j:

$$\begin{cases} \underline{x}(s,r) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j [S(k,h) \circ \varphi(s)]; \\ \bar{x}(s,r) = \sum_{j=-n}^{n} \beta_j [S(k,h) \circ \varphi(s)]. \end{cases} \quad (29)$$

Пользуясь свойством (27), получим:

$$\underline{x}(s, r) = \alpha_j; \quad \bar{x}(s, r) = \beta_j, \quad j = \overline{-n, n}. \quad (30)$$

Подставляя систему (29) в формулу (28) с учетом выражения (30), получим систему традиционных интегральных уравнений, которая затем превращается в $(4n + 2)$ алгебраических уравнений, из которой находятся коэффициенты $\{\alpha_j\}_{j=-n}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=-n}^{n}$.

Алгоритм метода sinc состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Для нечеткого интегрального уравнения применяется параметрическая форма (28).

Шаг 2. Функции $\underline{x}(s, r)$, $\bar{x}(s, r)$ аппроксимируются посредством системы (29).

Шаг 3. Формируется система алгебраических уравнений для получения коэффициентов $\{\alpha_j\}_{j=-n}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=-n}^{n}$ и решения задачи.

Пример 2. Имеем: $a = 0$; $b = 2$; $\lambda = 1$; $K(s, \tau) = (13)^{-1}(s^2 + \tau^2 - 2)$; $0 \le \tau, s \le 2$; $\underline{f}(s, r) = r \cdot s[1 - (2/13)^{-1}s]$; $\bar{f}(s, r) = (2 - r) \cdot s[1 - (2/13)s]$.

Решение. Выбираем для соотношений (26) $\alpha = 0{,}5$; $d = \pi/2$, тогда получим $h = \pi \cdot n$.

В параметрической форме имеем:

$$\begin{cases} \underline{x}(s,r) = sr[1-(2/13)^{-1}s] + \int_0^2 (13)^{-1}[s^2+\tau^2-2]\underline{x}(\tau,r)dr; \\ \bar{x}(s,r) = (2-r)s[1-(2/13)^{-1}s] + \\ \qquad + \int_0^2 (13)^{-1}[s^2+\tau^2-2]\bar{x}(\tau,r)dr. \end{cases}$$

Находим точное решение по методу вырожденных ядер (см. п. 3.4 первой части обзора [1], случай (*i*)):

$$\underline{x}_n(s, r) = r \cdot s; \quad \overline{x_n}(s, r) = (2 - r)s.$$

Приближенное решение по методу sinc при $n = 10$ дает:

$$\begin{cases} \underline{x}(s,r) = rs + (3/5) - (3/26)r - (1/13)rs^2; \\ \bar{x}(s,r) = 2s - rs + (3/26)r + (1/13)s^2r - (3/26) - (3/13)s^2. \end{cases} \blacklozenge$$

В работе [29] показано хорошее совпадение точного и приближенного решений.

4. ВЫВОДЫ

В целом относительно рассмотренных методов можно констатировать, что они представляются в виде двух классов, один из которых объединяет точные методы, а другой — приближенные. Последние характеризуются методами по определению нечетких компонент заданной структуры решений и методами по выбору структуры решений. Точные методы составляют относительно небольшую группу, которая связана, как правило, с типом ядра нечеткого уравнения. Если ядро уравнения типа свертки, то обычно применяется один из точных методов в виде нечеткого преобразования Лапласа. Если же ядро является вырожденным, то путем соответствующей замены переменных ядра исходное нечеткое уравнение трансформируется в НСЛУ и далее решается методом «вложения» или его модификациями.

В приближенных методах решение уравнения представляется в виде неопределенной структуры, когда искомое нечеткое решение ищется в виде некоторого разложения по заданной четкой или нечеткой системе базисных функций с неопределенными нечеткими коэффициентами. Подстановка этого разложения в исходную нечеткую интегральную модель определяет НСЛУ либо полную НСЛУ в зависимости от типа базисных функций: если базисные функции четкие, тогда появляется НСЛУ; если базисные функции нечеткие — появляются полные НСЛУ. По этой методике в статье приведены методы «вложения» (см п. 3.2 [1]); тейлоровской аппроксимации (см п. 3.3 [1]); аппроксимации (см п. 3.1—3.3); Галеркина (см п. 3.4).

Перечисленные приближенные методы могут быть дополнены другими методами [22]: невязки, коллокации, энергетические, Ритца, Куранта, разностно-аналитические. Методика и применения для решения нечетких интегральных уравнений реализуется по той же схеме, что и ранее, а именно: разложение решения по базисным функциям $\Rightarrow$ представление исходного уравнения в виде НСЛУ либо полной НСЛУ $\Rightarrow$ получение нечеткого решения этой системы каким-либо методом из изложенных в работах [25—28].

Рассмотрены методы по выбору структуры приближенного решения, а именно методы квадратур Чебышева, функции sinc (см. п. 3.5, 3.6). Согласно общему подходу по выбору базисных функций выделяются два основных типа базисных функций [15]: глобальные (алгебраические, тригонометрические полиномы, специальные функции) и финитные (В-сплайны, вейвлеты, автоморфные и др.).

Очевидно, последнее направление имеет определенные перспективы в применении методов для целей получения решения нечетких интегральных уравнений из-за их вычислительной простоты и приемлемой точности решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе определения нечеткого функционала рассмотрен МНК для оценки состояний нечетких интегральных моделей. В качестве модификаций МНК предложены рекуррентный и нелинейный методы.

Для улучшения точности реализован нечеткий обобщенный МНК, в котором диагональные элементы весовой матрицы находятся из нечетких правил. Затем по совокупности найденных весовых матриц находятся неизвестные параметры модели по обобщенному МНК.

На основе определения нечеткой ортогональности нечетких функций сконструирован нечеткий метод Галеркина приближенной оценки нечеткой интегральной модели, в результате чего появляется полная НСЛУ.

Рассмотрены методы структурной идентификации при анализе алгоритма приближенного решения: квадратур Чебышева и функций sinc. Отмечена перспективность методов структурной идентификации в получении нечетких оценок для нечетких интегральных моделей, обусловленных вычислительной простотой и точностью.

При реализации линейных методов оценивания заданная функция принадлежности не изменяет свою форму, однако для нелинейных методов заданная форма функции трансформируется нелинейным образом, и ее форма может быть найдена, например, по методу сечений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Методы оценки состояний нечетких интегральных моделей. Часть 1. Аппроксимационные методы // Проблемы управления. — 2021. — № 1. — С. 3—14. — DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.1.1 [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* State Estimation Methods for Fuzzy Integral Models. Part I: Approximation Methods // Control Sciences. — 2021. — No. 1. — P. 3—14. (In Russian)]
2. *Friedman, M., Ming, M., Kandel, A.* Fuzzy Linear Systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — No. 96. — P. 201—209. — https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00270-9.
3. *Ezzati, R.* Solving Fuzzy Linear Systems // Soft Computing. — 2014. — Vol. 15, no. 1. — P. 193—197.
4. *Abbasbandy, S. and Alavi, M.* A Method for Solving Fuzzy Linear System // Iranian Journal of Fuzzy Systems. — 2005. — Vol. 2, no, 2. — P. 37—43.
5. *Senthikimor, P. and Rajendran, G.* Solution of Fuzzy Linear Systems by Using Fuzzy Center // Applied Mathematical Science. — 2009. — Vol. 3, no. 49. — P. 2411—2419.
6. *Deghan, M., Hashemi, B.* Iterarive Solution of Fuzzy Linear Systems // Applied Mathematical & Computer. — 2006. — No. 175. — P. 645—674.
7. *Hasanzadeh, M. and Zareamoghaddam, H.* An Iterative Method for Solving a Symmetric System of Fuzzy Linear Equations // Computer Science Engineering & Its Application (CSEA). — 2013. — Vol. 1, no. 5. — P. 565—569.
8. *Асмолова Ю.Е., Мочалов И.А.* Элементы нечеткого вариационного исчисления // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. — 2010. — № 4. — С. 37—43. [*Asmolova, J.E., Mochalov, I.A.* Elements of Fuzzy Variations Calculus // Bulletin of Peoples's Friendship University of Russia. — 2010. — No. 4. — P. 37—43 (In Russian)]
9. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2006. — 488 с. [*Vanko, V.I., Ermoshina, O.V., Kuvyrkin, G.N.* Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana. — 2006. — 488 s. (In Russian)]
10. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1970. — 192 с. [*Claf, L.Ya.* Variacionnoe ischislenie i integral'nye uravneniya. — M.: Nauka, 1970. — 192 s. (In Russian)]
11. *Казакевич В.В., Родов А.Б.* Системы автоматической оптимизации. — М.: Энергия, 1977. — 288 с. [*Kazakevich, V.V., Rodov, A.B.* Sistemy avtomaticheskoj optimizacii. — M.: Energiya, 1977. — 288 s. (In Russian)]
12. *Басараб М.А., Кравченко В.Р., Матвеев В.А.* Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии. — М.: Физматлит, 2008. — 248 с. [*Basarab, M.A., Kravchenko, V.R., Matveev, V.A.* Metody modelirovaniya i cifrovoj obrabotki signalov v giroskopii. — M.: Fizmatlit, 2008. — 248 s (In Russian)]
13. *Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А.* Волновой твердотельный гироскоп. — М: Радиотехника. — 2014. — 174 с. [*Lunin, B.S., Matveev, V.A., Basarab, M.A.* Volnovoj tverdotel'nyj giroskop. — M: Radiotekhnika. — 2014. — 174 s. (In Russian)]
14. *Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А.* Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. — М.: Физматлит, 2008. — 240 с. [*Matveev, V.A., Lunin, B.S., Basarab, M.A.* Navigacionnye sistemy na volnovyh tverdotel'nyh giroskopah. — M.: Fizmatlit, 2008. — 240 s. (In Russian)]
15. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981. — 384 с. [*Lizorkin, P.I.* Kurs differencial'nyh i integral'nyh uravnenij s dopolnitel'nymi glavami analiza. — M.: Nauka, 1981. — 384 s. (In Russian)]
16. *Деменков Н.П., Мочалов И.А.* Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2016. — № 1. — С. 59—74. — DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-59-74. [*Demenkov, N.P., Mochalov, I.A.* Dinamika nechetkoj sistemy avtomaticheskoj optimizacii // Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie. — 2016. — No. 1. — S. 59—74. (In Russian)]
17. *Barkhordary, M., Kiani, N.A., Bozorgmanesh, A.R.* A Method for Solving Fuzzy Fredholm Integral Equations of the Second Kind // International Journal Open Problems Computer Science Mathematics. — 2008. — Vol. 1, no. 2. — P. 149—159.
18. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 1 // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 4. — С. 251—257. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part 1 // Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 4. — P. 251—257. (In Russian)]
19. *Деменков Н.П., Микрин Е.А. Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического

моделирования. Ч. 2 // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 5. — С. 362—369. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part II // Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 5. — P. 362—369. (In Russian)]

20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с. [*Gantmaher, F.R.* Teoriya matric. — M.: Nauka, 1967. — 576 s. (In Russian)]
21. *Тэрано Т., Асаи К., Сугено М.* Прикладные нечеткие системы. — М.: Мир, 1993. — 368 с. [*Terano, T., Asai, K., Sugeno, M.* Prikladnye nechetkie sistemy. — M.: Mir, 1993. — 368 s. (In Russian)]
22. *Amirfakhrian, M.* Numerical Solution of System of Polynomial Parametric Form Fuzzy Linear Equations // In: Ferroelectrics, Chapter 24. — Iran, Central Jehran Branch, Jslam Azad University, Departamnet of Mathematics (IAVCTB). — 2010. — P. 433—450. — DOI: 10.5772/13079
23. *Muruganad, S. and Razak, K.A.* Matrix Inversion Method for Solving Fully Fuzzy Linear Systems with Triangular Fuzzy Members // Intern. Journ. of Comp. Appl. — 2013. — Vol. 65, no. 4. — P. 9—11.
24. *Mikaeilvand, N. and Allahviranloo, T.* Solution of Full Fuzzy Linear Systems by ST Method // Jorn. of appl. mathem. — 2010. — Vol. 8, no. 1 (28). — P. 23—31.
25. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Бенамеур Лиес* Методы и алгоритмы идентификации и прогнозирования в условиях неопределенности в нейросетевом логическом базисе. — М.: Горячая линия — Телеком. — 2003. — 205 с. [*Minaev, Yu.N., Filimonova, O.Yu., Benameur Lies* Metody i algoritmy identifikacii i prognozirovaniya v usloviyah neopredelennosti v nejrosetevom logicheskom bazise. — M.: Goryachaya liniya. — Telekom. — 2003. — 205 s. (In Russian)]
26. *Деменков Н.П., Мочалов И.А.* Нечеткая интерполяция // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. — 2012. — № 2. — 12 с. — URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/308732.html [*Demenkov, N.P., Mochalov, I.A.* Fuzzy Interpolation // Science and Education. — 2012. — No. 2. — 12 p. (In Russian)]
27. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 1. Полные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 4. — С. 3—14. Doi: http://doi/org/10.25728/pu.2019.4.1. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Methods of solving fuzzy systems of linear equations. Part 1. Complete Systems // Control Sciences. — 2019. — No. 4. P. 3—14. (In Russian)]
28. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 2. Неполные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 5. — С. 19—28. Doi: http://doi/org/10.25728/pu.2019.5.2. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Methods of solving fuzzy systems of linear equations. Part 2. Incomplete systems // Control Sciences. — 2019. — No. 5. P. 19—28. (In Russian)]
29. *Keyanpour, M., Akbarian, T.* New approach for solving of linear Fredholm fuzzy integral equations using sinc function // The Journal of Mathematics and Computer Science. — 2011. — Vol. 3, no. 4. — P. 422—431. — http://dx.doi.org/10.22436/jmcs.03.04.08

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Ф. Пащенко

Поступила в редакцию 21.02.2020, после доработки 05.03.2021.
Принята к публикации 05.03.2021.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН, ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, ✉ mochalov2501@yandex.ru.

STATE ESTIMATION METHODS FOR FUZZY INTEGRAL MODELS. Part II: Least Squares Method and Direct Variational Calculus Methods

N.P. Demenkov[1], E.A. Mikrin, and I.A. Mochalov[2]

[1,2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

[1]✉ dnp@bmstu.ru, [2]✉ mochalov2501@yandex.ru

Abstract. This paper considers the least squares method (LSM) and its modifications for estimating the states of fuzzy integral models, namely, LSM with numerical integration, recurrent and nonlinear LSM, and fuzzy LSM, which is based on fuzzy rules for finding diagonal elements of the weight matrix in generalized LSM. Some examples of fuzzy systems of linear equations (FSLE) that arise in state estimation problems for fuzzy integral models are given and solved. The fuzzy Galerkin method is implemented for the approximate state estimation of a fuzzy integral model. This method leads to a complete FSLE. The emergence of «strong» and «weak» systems is explained using an illustrative example. Chebyshev quadrature methods and sinc functions for the approximate structural estimation of fuzzy integral models are considered. As noted in the paper, the same methodology can be applied to develop other algorithms for estimating fuzzy integral models based on the following methods: residuals, collocation, energy, Ritz, Courant, etc.

Keywords: fuzzy least squares method, fuzzy Galerkin method, fuzzy Chebyshev method, fuzzy sinc method.