УДК 517.97

# НЕЧЕТКИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ.
## Ч. 2. Нечеткое управление

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Рассмотрен начальный метод решения двухточечной краевой задачи для линейного нечеткого дифференциального уравнения второго порядка и дан пример его применения. Для нелинейного случая предложен нечеткий метод Галеркина, который является модификацией его традиционного аналога. В качестве примера реализации нечеткого метода приведен расчет нечетких периодических режимов для системы автоматической оптимизации с поисковым экстремальным регулятором с запоминанием экстремума. Показано, что при расчете возникает полная нечеткая система линейных алгебраических уравнений.

**Ключевые слова:** нечеткий начальный метод, нечеткий метод Галеркина, периодический режим, нечеткая система автоматической оптимизации, нечеткая система линейных алгебраических уравнений.

### ВВЕДЕНИЕ

В теоретической и прикладной математике краевая задача второго порядка решается традиционным методом, т. е. находится общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного. Константы интегрирования находятся из граничных условий. Считается, что краевая задача более сложная, чем начальная, поэтому часто применяется прием трансформации краевой задачи к начальной. Этот прием применяется для одномерного уравнения второго порядка. В нечетком случае применение этого приема невозможно, так как нечеткая функция имеет нижнюю и верхнюю ветви однозначности, т. е. является двумерной. Поэтому появился многомерный вариант нечеткой краевой задачи второго порядка [1], рассматриваемый далее в п. 2.1.

В вариационном исчислении при оптимизации функционалов с интегрантом, зависящем от искомой функции и ее производных, редко удается получить уравнение Эйлера, которое можно было бы проинтегрировать в конечном виде. Поэтому возникает потребность в иных методах. Такими являются прямые методы: Эйлера, Ритца, Галеркина и др. Эти приближенные методы помимо вариационных задач также широко применяются для решения нелинейных дифференциальных уравнений и их систем.

В теории адаптивных систем, которые применяются для оптимизации функционирования различных объектов металлургии, химии, ракетостроения и др., как правило, применяются поисковые системы автоматической оптимизации. Для расчета периодического режима таких систем применяется метод Галеркина. Однако при нечеткости параметров динамической части объекта и других параметров возникает необходимость в модификации метода Галеркина в его нечеткий аналог. Эта проблема решается в п. 2.2.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- Модифицировать известный одномерный начальный метод решения традиционных краевых задач второго порядка в многомерный аналог, позволяющий решать нечеткие краевые задачи второго порядка.

- Для решения нечеткой нелинейной краевой задачи разработать нечеткий метод Галеркина и с его помощью рассчитать периодический режим нечеткой адаптивной системы.

## 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### 2.1. Начальный метод [1, 2]

Этот метод является обобщением одномерного случая. Нечеткая краевая задача записывается в стандартной матричной форме

$$L\ddot{x} \equiv -\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) + r(t),$$
$$t \in [a, b], \quad (1)$$

где $L$ — оператор, $p(t)$, $q(t)$ — квадратные матрицы размера $n\times n$, $x(t)$, $r(t)$ — векторы размера $n\times 1$.

Краевые условия задаются в виде

$$A_0x(a) - A_1\dot{x}(a) = \alpha,\ B_0x(b) + B_1\dot{x}(b) = \beta, \quad (2)$$

где $A_0$, $A_1$, $B_0$, $B_1$ — матрицы размера $n\times n$, $\alpha$, $\beta$ — векторы размером $n\times 1$. Предполагается, что при $\alpha = \beta = r(0) = 0$ задача (1), (2) имеет тривиальное решение $x(t) = 0$.

Рассматриваются векторы функций $x^{(v)}(t) = (x^{(0)}(t), ..., x^{(n)}(t))^T$ размерности $1 \times (n + 1)$, где каждая компонента представляет собой вектор решений соответствующих начальных задач.

Имеем:

— нулевой вектор $x^{(0)}(t)$ решения начальной задачи:

$$Lx^{(0)}(t) = r(t) \Leftrightarrow -\ddot{x}^{(0)}(t) + p(t)\dot{x}^{(0)}(t) + $$
$$+ q(t)x^0(t) = 0, \quad (3)$$

$$A_0x^{(0)}(t = a) - A_1\dot{x}^{(0)}(t = a) = \alpha;$$

$$x^{(0)}(t = a) = (0, 0, ..., 0)^T;$$

— первый вектор $x^{(1)}(t)$ решения неоднородной начальной задачи:

$$Lx^{(1)}(t) = 0 \Leftrightarrow -\ddot{x}^{(1)}(t) + p(t)\dot{x}^{(1)}(t) +$$
$$+ q(t)x^{(1)}(t) + r(t) = 0,$$

$$A_0x^{(1)}(t = a) - A_1\dot{x}^{(1)}(t = a) = 0;$$

$$x^{(1)}(t = a) = (1, 0, ..., 0)^T;$$
$$\dots$$

— $n$-й вектор $x^{(n)}(t)$ решения неоднородной начальной задачи:

$$Lx^{(n)}(t) = 0 \Leftrightarrow -\ddot{x}^{(n)}(t) + p(t)\dot{x}^{(n)}(t) +$$
$$+ q(t)x^{(n)}(t) + r(t) = 0,$$

$$A_0x^{(n)}(t = a) - A_1\dot{x}^{(n)}(t = a) = 0;$$

$$x^{(n)}(t = a) = (0, 0, ..., 1)^T.$$

Из полученных векторов $x^{(i)}(t) = (x_1^{(i)}(t),\ x_2^{(i)}(t), ..., x_n^{(i)}(t))$, $i = 1, 2, ..., n$, составляется матрица $X(t)$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & ... & x_1^{(n)}(t) \\ ... & ... & ... \\ x_n^{(1)}(t) & ... & x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}_{(n\times n)} =$$
$$= (x_{(n\times 1)}^{(1)}(t), ..., x_{(n\times 1)}^{(n)}(t))_{(n\times n)}, \quad (4)$$

определяется вектор

$$x_{(n+1)}(t, s) = x_{(n+1)}^{(0)}(t) + X_{(n\times n)}(t = s)V_{(n\times 1)} \equiv$$
$$\equiv x_{(n+1)}^{(0)}(t) + (x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t))_{(n\times n)}\begin{bmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix}_{(n\times 1)} \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(t) \\ ... \\ x_n^{(0)}(t) \end{bmatrix}_{(n\times 1)} + \left[\sum_{v=1}^{n} v_v x^{(v)}(t)\right]_{(n\times 1)}, \quad (5)$$

в котором вектор $V = (v_1, ..., v_n)^T_{(1\times n)}$ находится из уравнения

$$\Phi V = ([-B_0x^{(0)}(t = b) + B_1\dot{x}^{(0)}(t = b)] + \beta), \quad (6)$$

в котором матрица $\Phi = [B_0X(t = b) + B_1X(t = b)]$.

В уравнении (6) $X(t)$ находится из уравнения (4), а вектор $x^{(0)}(t)$ — из уравнения (3).

Для уравнения (6) рассматриваются два случая.

**Случай 1.** Если определитель матрицы $\Phi \neq 0$ в уравнении (6), то вектор $V$ находится из выражения

$$V = [B_0X(t = b) + B_1X(t = b)]^{-1} \times$$
$$\times ([-B_0x^{(0)}(t = b) + B_1\dot{x}^{(0)}(t = b)] + \beta), \quad (7)$$

а решение краевой задачи определяется по выражению (5):

$$x(t, s)_{(n\times 1)} = x_{(n\times 1)}^{(0)}(t) + X_{(n\times n)}(t = s)V_{(n\times 1)}.$$

**Случай 2.** Если определитель матрицы $\Phi$ в уравнении (6) равен нулю, то столбцы в матрице $[B_0X(t = b) + B_1X(t = b)]_{(n\times n)}$ линейно зависимые, следовательно, для них должен существовать числовой вектор $a_{\nu(1\times n)}\nu = \overline{1, n}$, не все компоненты которого обращаются в нуль, так что справедливо соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu(1\times n)}[-B_0x^{(\nu)}(t = b) + B_1\dot{x}^{(\nu)}(t = b)]_{(n\times 1)} = 0,$$

где индекс $\nu$ — номер столбца в матрице уравнения (6). Это означает, что функция $z(t) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu x^{(\nu)}(t)$ удовлетворяет уравнению $B_0z(t = b) + B_1\dot{z}(t = b) = 0$ и также является решением однородной краевой задачи, получаемой из задачи (1), (2). Это приводит к тому, что имеет место равенство

$$z(t) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu I^{(\nu)},$$

где $I^{(\nu)} = (1, 0, ..., 0)^T, ..., I^{(\nu)} = (0, ..., 1, ..., 0)^T, ..., I^{(\nu)} = (0, 0, ..., 1)^T$, откуда следует, что $a_\nu = 0$, $\nu = \overline{1, n}$.

Из этого противоречия относительно $a_\nu$ следует, что уравнение (6) имеет единственное решение и оно определяется только по уравнению (7), поэтому решение краевой задачи находится по выражению (5).

**Пример 1.** Найти нечеткое решение $x_н(t) = x(t, r) = (\underline{x}(t, r), \bar{x}(t, r))^T$, $r \in [0; 1]$ двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + 2x(t) + (2t + 3) = 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

с нечеткими граничными условиями

$$x_н(t = 0) = x(0, r) = (\underline{x}(0, r) = 0{,}1r + 0{,}9,\ \bar{x}(0, r) = 1{,}2 - 0{,}2r)^T, \quad r \in [0; 1];$$

$$x_н(t = 1) = x(1, r) = (\underline{x}(1, r) = 0{,}2r + 1,\ \bar{x}(1, r) = 2{,}1 - 0{,}1r)^T, \quad r \in [0; 1].$$

Здесь через $\underline{x}(t, r)$ обозначена нижняя ветвь, а через $\bar{x}(t, r)$ — верхняя ветвь нечеткой переменной $x_н(t) = x(t, r)$.

Исходная задача приводится к стандартной матричной форме:

$$\ddot{X}(t) = P(t)\dot{X}(t) + Q(t)X(t) + R(t),$$

где

$$X(t) = (\underline{x}(t), \bar{x}(t))^T; \quad R(t) = (2t + 3, 2t + 3)^T;$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

По условию задачи имеются граничные условия первого рода, т. е. $\dot{x}(t = a = 0) = 0$, $\dot{x}(t = b = 1) = 0$, поэтому из краевых условий (2) имеем:

$$A_0x(t = 0) - A_1\dot{x}(t = 0) = \alpha \Leftrightarrow A_0x(t = 0) = \alpha,$$

$$B_0x(t = 1) - B_1\dot{x}(t = 1) = \beta \Leftrightarrow B_0x(t = 1) = \beta,$$

где

$$x(t = 0) = (\underline{x}(0), \bar{x}(0))^T,$$

$$\alpha = (\underline{x}(0) = 0{,}1r + 0{,}9,\ \bar{x}(0) = 1{,}2 - 0{,}2r)^T,$$

$$x(t = 1) = (\underline{x}(1), \bar{x}(1))^T,$$

$$\beta = (\underline{x}(1) = 0{,}2r + 1,\ \bar{x}(1) = 2{,}1 - 0{,}1r)^T,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0{,}1r+0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}2-0{,}2r \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0{,}2r+1 & 0 \\ 0 & 1-0{,}1r \end{bmatrix}.$$

Решение исходной задачи ищется в виде

$$X(t, s) = X^{(0)}(t) + X(t = s)V,$$

и алгоритм ее решения состоит из трех этапов.

*Этап 1.* Находится вектор $X^{(0)}(t)$ решения однородной начальной задачи ($\nu = 0$):

$$LX^{(0)}(t) = R(t) \Leftrightarrow -\ddot{X}^{(0)}(t) + P(t)\dot{X}^{(0)}(t) + Q(t)X^{(0)}(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X}^{(0)}(t) - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\dot{X}^{(0)}(t) - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}X^{(0)}(t) = 0, \quad (8)$$

где

$$X_н^{(0)}(t) = X^{(0)}(t, r) = (\underline{x}^{(0)}(t, r), \bar{x}^{(0)}(t, r))^T.$$

Начальные условия для уравнения (8) имеют вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}1r+0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}2-0{,}2r \end{bmatrix}}_{A_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}^{(0)}(0, r) \\ \bar{x}^{(0)}(0, r) \end{bmatrix}}_{X^0(t,\, r)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}^{(0)}(0, r) = 0{,}1r+0{,}9 \\ \bar{x}^{(0)}(0, r) = 1{,}2-0{,}2r \end{bmatrix}}_{\alpha}, \quad (9)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}^{(0)}(0, r) \\ \dot{\bar{x}}^{(0)}(0, r) \end{bmatrix}}_{\dot{X}^0(t,\, r)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения решения уравнения (8) определяются корни векторного характеристического уравнения

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda}^2 \\ \bar{\lambda}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda}^2 + \bar{\lambda} - 2 = 0, \quad \bar{\lambda}^2 + \underline{\lambda} - 2 = 0, \quad (10)$$

откуда после вычитания уравнений (10) получим соотношения

$$(\underline{\lambda} - \bar{\lambda})(\underline{\lambda} + \bar{\lambda}) + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\underline{\lambda} - \bar{\lambda})(\underline{\lambda} + \bar{\lambda} + 1) = 0 \Rightarrow (i_1)\colon \underline{\lambda} = \bar{\lambda};\ \underline{\lambda} = \bar{\lambda};$$
$$(i_2)\colon \underline{\lambda} = -(\bar{\lambda} + 1).$$

Учитывая выражения $(i_1)$, $(i_2)$ и уравнение (10), найдем:

$$\underline{\lambda}_1 = 2;\quad \underline{\lambda}_2 = -1;\quad \bar{\lambda}_1 = a;\quad \bar{\lambda}_2 = b;$$

$$a = 0{,}5(1 + \sqrt{s});\quad b = 0{,}5(1 - \sqrt{s}),$$

откуда общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$\underline{x}^{(0)}(t) = \underline{C}_1 e^{2t} + \underline{C}_2 e^{-t};\quad \bar{x}^{(0)}(t) = \bar{C}_1 e^{at} + \bar{C}_2 e^{bt}.$$

Константы $\underline{C}_1$, $\underline{C}_2$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ находятся из начальных условий

$$\underline{C}_1 + \underline{C}_2 = 0{,}1r + 0{,}9;\quad 2\underline{C}_1 - \underline{C}_2 = 0;$$

$$\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = 1{,}2 = 0{,}2r;\quad a\bar{C}_1 + b\bar{C}_2 = 0,$$

откуда получим, что

$$\underline{C}_1^*(r) = \frac{r}{30} + \frac{1}{27};\quad \underline{C}_2^*(r) = \frac{2r}{30} + \frac{2}{27};$$

$$\bar{C}_1^*(r) = b(1{,}2 + 0{,}2r);\quad \bar{C}_2^*(r) = a(1{,}2 + 0{,}2r).$$

В результате имеем решение уравнения (8) в форме вектора:

$$X^{(0)}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}^{(0)}(t, r) \ = \ \underline{C}_1^*(r)e^{2t} + \underline{C}_2^* e^{-t} \\ \bar{x}^{(0)}(t, r) \ = \ \bar{C}_1^*(r)e^{at} + \bar{C}_2^* e^{bt} \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

*Этап 2.* Находится вектор $X^{(1)}(t)$ из решения неоднородной начальной задачи

$$LX^{(1)}(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{X}^{(1)}(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{P(t)} \dot{X}^{(1)}(t) -$$
$$- \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Q(t)} X^{(1)}(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 2t+3 \\ 2t+3 \end{bmatrix}}_{R(t)} = 0 \qquad (12)$$

с начальными условиями

$$\begin{bmatrix} 0{,}1r + 0{,}9 & 0 \\ 0 & 1{,}2 - 0{,}2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(0, r) \\ \bar{x}^{(1)}(0, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}^{(1)}(0, r) \\ \dot{\bar{x}}^{(1)}(0, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Согласно методу Лагранжа вариации постоянной нахождения неоднородной системы [3] находится общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения, получаемого из выражения (12) при $R(t) \equiv 0$. Однородное уравнение в этом случае совпадает с уравнением (8) с точностью до обозначений:

$$LX^{(1)}(t) \Leftrightarrow \ddot{X}^{(1)}(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{P(t)} \dot{X}^{(1)}(t) - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Q(t)} X^{(1)}(t) = 0,$$

поэтому его решение будет иметь вид, подобный решению (11) этапа 1:

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(t, r) \ = \ \underline{C}_1(t)e^{2t} + \underline{C}_2(t)e^{-t} \\ \bar{x}^{(1)}(t, r) \ = \ \bar{C}_1(t)e^{at} + \bar{C}_2(t)e^{bt} \end{bmatrix},$$

где $\underline{C}_i(r)$, $\bar{C}_i(r)$, $i = 1, 2$, — варьируемые параметры.

В соответствии с алгоритмом варьирования для координат $\underline{x}^{(1)}(t)$, $\bar{x}^{(1)}(t)$ записывается вронскиан:

$$\underline{W}^{(1)}(t) = \det \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = -3e^t \neq 0;$$

$$\bar{W}^{(1)}(t) = \det \begin{bmatrix} e^{at} & e^{bt} \\ ae^{at} & be^{bt} \end{bmatrix} = -5e^t \neq 0.$$

Далее каждый из столбцов вронскианов последовательно заменяется столбцом $R(t) = (2t + 3, 2t + 3)^T$ и вычисляются соответствующие определители:

$$\underline{M}^{(1)}(t) = \det \begin{bmatrix} 2t+3 & e^{-t} \\ 2t+3 & -e^{-t} \end{bmatrix} = -2(2t + 3)e^{-t};$$

$$\underline{M}_2^{(1)}(t) = \det \begin{bmatrix} e^{2t} & 2t+3 \\ 2e^{2t} & 2t+3 \end{bmatrix} = -(2t + 3)e^{2t};$$

$$\bar{M}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 2t+3 & e^{bt} \\ 2t+3 & be^{bt} \end{bmatrix} = be^{-bt};$$

$$\bar{M}_2^{(1)}(t) = \det \begin{bmatrix} e^{at} & 2t+3 \\ ae^{at} & 2t+3 \end{bmatrix} = a(2t + 3)e^{at}.$$

В результате параметры $\underline{C}_i(t)$, $\bar{C}_i(t)$, $i = 1, 2$, находятся из соответствующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{\underline{C}}_1(t) = \underline{M}_1^{(1)}(t)\underline{W}^{(1)}(t) = -2(2t + 3)e^{-2t};$$

$$\dot{\underline{C}}_2(t) = \underline{M}_2^{(1)}(t)\underline{W}^{(1)}(t) = -(2t + 3)e^t;$$

$$\bar{C}_1(t) = \bar{M}_1^{(1)}(t)/\bar{W}^{(1)}(t) = 0{,}2a(2t+3)e^{-at};$$

$$\bar{C}_2(t) = \bar{M}_2^{(1)}(t)/\bar{W}^{(1)}(t) = -0{,}2b(2t+3)e^{-bt}.$$

Их интегрирование дает

$$\underline{C}_1^*(t) = 2(t+2)e^{-2t} + \underline{C}_{10}; \quad \underline{C}_2^*(t) = -2(t+1)e^{t} + \underline{C}_{20};$$

$$\bar{C}_1^*(t) = -\frac{1}{a}[0{,}4at + 0{,}2(2+3a)e^{-at} + \bar{C}_{10};$$

$$\bar{C}_2^*(t) = -\frac{1}{b}[0{,}4bt + 0{,}2(2+3b)e^{-bt} + \bar{C}_{20},$$

где $\underline{C}_{i0}$, $\bar{C}_{i0}$, $i = 1, 2$, — константы интегрирования. Для их нахождения записывается общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(t) = \underline{C}_1^*(t)e^{2t} + \underline{C}_2^*(t)e^{-t} \\ \bar{x}^{(1)}(t) = \bar{C}_1^*(t)e^{at} + \bar{C}_2^*(t)e^{bt} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + \underline{C}_{10}e^{2t} + \underline{C}_{20}e^{-t} \\ -0{,}4\sqrt{5} + \bar{C}_{10}e^{at} + \bar{C}_{20}e^{bt} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

и его производной

$$\dot{X}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}^{(1)}(t) \\ \dot{\bar{x}}^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\underline{C}_{10}e^{2t} - \underline{C}_{20}e^{-t} \\ a\bar{C}_{10}e^{at} + b\bar{C}_{20}e^{bt} \end{bmatrix}.$$

Подставляя начальные условия (13) в эти выражения, получим систему уравнений для нахождения констант $\underline{C}_{i0}$, $\bar{C}_{i0}$, $i = 1, 2$:

$$A_0\dot{X}^{(1)}(0, r) = [3; -0{,}4\sqrt{5}]^T, \ \dot{X}^{(1)}(0, r) = I = [1; 0]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow GC = F, \ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} \underline{C}_{10} \\ \underline{C}_{20} \\ \bar{C}_{10} \\ \bar{C}_{20} \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 3 \\ -0{,}4\sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\det G = -3\sqrt{5} \neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$\underline{C}_{10}^* = -\frac{4}{3}; \quad \underline{C}_{20}^* = -\frac{5}{3}; \quad \bar{C}_{10}^* = 0{,}4b; \quad \bar{C}_{20}^* = -0{,}4a.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (14) имеет вид:

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(t) = 4 + \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t} \\ \bar{x}^{(1)}(t) = -0{,}4\sqrt{5} + 0{,}5be^{at} - 0{,}4ae^{bt} \end{bmatrix},$$

где $a$ и $b$ были определены ранее.

*Этап 3.* Находится вектор $V = [\underline{\nu}, \bar{\nu}]^T$ из уравнения (6), которое при $b = 1$, $B_1 = 0$ принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2r + 1{,}8 & 0 \\ 0 & 1 - 0{,}1r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(1) & 0 \\ 0 & \bar{x}^{(1)}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\beta} & 0 \\ 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2r + 1{,}8 & 0 \\ 0 & 1 - 0{,}1r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(1) & 0 \\ 0 & \bar{x}^{(1)}(1) \end{bmatrix},$$

откуда получаем

$$\underline{\nu} = \underline{\beta}[(0{,}2r + 1{,}8)\underline{x}^{(1)}(1)]^{-1} - \underline{x}^{(0)}(1),$$

$$\bar{\nu} = \bar{\beta}[(1 - 0{,}1r)\bar{x}^{(1)}(1)]^{-1} - \bar{x}^{(0)}(1),$$

где $\underline{x}^{(\nu)}(1)$, $\bar{x}^{(\nu)}(1)$, $\nu = 0,1$ находятся из выражений (11), (14) соответственно при $t = 1$.

После объединения результатов вычислений по этапам 1—3 будем иметь решение нечеткой двухточечной краевой задачи:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(t, s) \\ \bar{x}(t, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}^{(0)}(t) \\ \bar{x}^{(0)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{x}^{(1)}(t) & 0 \\ 0 & \bar{x}_{(1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\nu} \\ \bar{\nu} \end{bmatrix}.$$

### 2.2. Нечеткий метод Галеркина

Рассматривается нечеткое нелинейное дифференциальное уравнение любого порядка, система дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных

$$L(x_{\text{н}}) = f(t) \qquad (15)$$

с нечеткими граничными условиями на концах промежутка $[t_0, t_k]$

$$x(t = t_0) = x_{\text{н}0}, \quad x(t = t_k) = x_{\text{н}k}. \qquad (16)$$

Здесь $L$ — дифференциальный оператор, индекс «н» — индекс нечеткости, $f$ — нелинейная функция.

Приближенное решение уравнения (15) ищется в виде

$$x_{\text{н}n} \approx a_{\text{н}1}\varphi_1(t) + ... + a_{\text{н}n}\varphi_n(t), \qquad (17)$$

где $a_{\text{н}i}$, $i = 1, 2, ..., n$, — нечеткие неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $\varphi_i(t)$ — координатные функции, тип которых задан и составляет полную на отрезке $[t_0, t_k]$ систему традиционных линейных независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям (16) с функциями принадлежностей одиночного типа $\varphi_i(t = t_0) = x_0$, $\varphi_i(t = t_k) = x_k$, $i = 1, 2, ..., n$.

Обычно в методе Галеркина в качестве функций $\varphi_i$ используются либо многочлены, либо тригонометрические функции, являющиеся допустимыми [4, 5]. Для нахождения неизвестных коэф-

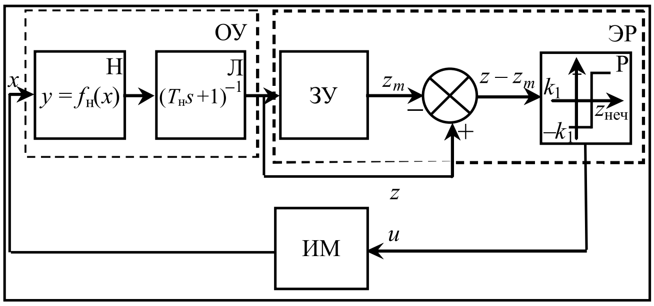


**Рис. 1. Структурная схема системы автоматической оптимизации (САО) в составе:** объект управления (ОУ) типа нелинейность (Н)/линейность (Л), экстремальный регулятор (ЭР) с запоминающим устройством (ЗУ) экстремума $z_m$ и реле (Р) с зоной нечувствительности $z_{неч}$, исполнительный механизм (ИМ)

фициентов $a_{нi}$ аппроксимация (17) подставляется в уравнение (15) и далее из условия ортогональности $L(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$

$$\int_{t_0}^{t_k}\left[L\left(\sum_{i=1}^{n}a_{нi}\varphi_i\right)\right]\varphi_i(t)dt, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (18)$$

формируется нечеткая система линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ), из которой и определяются коэффициенты $a_{нi}$, $i = 1, 2, ..., n$.

**Замечание.** В практических задачах помимо критерия (18) часто применяются: нечеткий квадратичный критерий $\left\|L\left(\sum_{i=1}^{n}a_{нi}\varphi_i\right)-f\right\|^2_{E_n}$, модульный критерий $\left|L\left(\sum_{i=1}^{n}a_{нi}\varphi_i\right)-f\right|$ и др.

**Пример 2.** Рассмотрим объект управления (рис. 1), в котором имеется нелинейная (*Н*) часть со статической характеристикой $y = f(x)$ и линейная (*Л*) часть, представленная апериодическим звеном первого порядка с нечеткой постоянной времени $T_н$. Наличие нечеткости моделирует возмущения в задании постоянной времени $T$. Для простоты рассмотрения будем полагать отсутствие каких-либо монотонных возмущений, воздействующих на объект, которые деформируют характеристику $f(x)$ и перемещают ее в координатной плоскости $(x, y)$. Обычно для нахождения точки $(x^*, y^*)$ оптимума зависимости $y = f(x)$ применяется экстремальный регулятор *ЭР* непрерывного типа с различными алгоритмами поиска: с дифференцированием, задержкой, запоминанием экстремума, временной селекцией и др.

Далее рассмотрен регулятор с запоминанием экстремума [6—9], в соответствии с алгоритмом работы которого исполнительный механизм *ИМ* характеризуется постоянной скоростью перемещения $\dot{x}_t = \pm k_1$, что соответствует линейно изменяющемуся во времени управляющему сигналу $x(t) = x_0 \pm k_1t$, где $k_1$ — константа скорости изменения входа, $x_0$ — начальная координата входа, знак «±» характеризует направление скорости исполнительного механизма *ИМ*, определяемое реле *Р* с зоной нечувствительности $z_{неч}$.

Экстремальный регулятор работает в двух режимах — переходном и периодическом. Первый из них в нечеткой интерпретации подробно исследован в работе [9]. Второй исследуется ниже.

Пусть в системе установился периодический режим, который возникает в системе при достижении окрестности оптимальной точки статической характеристики $f(x)$ объекта. Будем полагать, что входной сигнал имеет кусочно-линейный вид, а выходной $y(t)$ при $y(t) = f(x(t)) = -kx^2(t)$.

Динамическая часть объекта находится под воздействием возмущения $f(x) = -kx^2(t)$, $-0{,}5T_н \le x \le T_н$ и будет изменяться по параболе от точки $M_1$ до точки $M_2$ (знак «+» на входе блока *ИМ*), затем по параболе от точки $M_2$ до точки $M_1$ (знак «−») и далее периодически продолжается.

Этот процесс формализуется с помощью нечеткой двухточечной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\pm k_{1н}T_{вых.н}\dot{z}_н(x(t)) = -k_нx^2(t), \qquad (19)$$

$$z(x = x_1) = z_{н1}, \quad z(x = x_2) = z_{н2},$$

где $k_{н1}$ — нечеткая скорость исполнительного механизма *ИМ*, $T_н$ — нечеткая постоянная времени объекта, $k_н$ — нечеткая константа характеристики объекта, $z_{н1}$, $z_{н2}$ — нечеткие граничные условия периодического режима. Здесь полагается, что первая производная $\dot{z}_н$ задается в виде производной по Сейккала [10].

Нечеткая нелинейная краевая задача (19) решается приближенным методом Галеркина в виде его нечеткой модификации. Для этого нечеткое решение $z_н(x)$ ищется в виде периодической функции с периодом $\hat{T} = 2\pi/\hat{\omega}$, представляемой в виде конечного разложения по гармоническим функциям с нечеткими коэффициентами $b_н$, $A_{iн}$, $B_{iн}$, $i = 1, 2, ..., n$,

$$z_н(x) = b_н + \sum_{i=1}^{n}(A_{iн}\sin i\hat{\omega}x + B_{iн}\cos i\hat{\omega}x). \qquad (20)$$

Для нахождения коэффициентов $b_н$, $A_{iн}$, $B_{iн}$, $i = 1, 2, ..., n$, аппроксимация (20) подставляется в уравнение (19) и далее, с учетом ортогональности гармонических функций

$$\int_{x_0}^{x_k}\sin i\hat{\omega}x\cos i\hat{\omega}xdx = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

получим нечеткую систему уравнений для нахождения искомых коэффициентов:

$$b_н = K_н\hat{T}_н^2/12,$$

$$\Lambda_{iн}X_{iн} = Y_{iн}, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (21)$$

где $X_{i\text{н}} = (A_{i\text{н}} B_{i\text{н}})^T$, $Y_{i\text{н}} = (0_\text{н} - (-1)^i \dfrac{k_\text{н}\hat{T}_\text{н}^3}{2i^2\pi^2}$,

$$\Lambda_{i\text{н}} = \begin{bmatrix} 0{,}5\hat{T}_\text{н} & -0{,}5k_{\text{н}1}T_{\text{н}1}\hat{T}\hat{\omega} \\ -0{,}5ik_{\text{н}1}T_{\text{н}1}\hat{T}\hat{\omega} & 0{,}5\hat{T}_\text{н} \end{bmatrix}.$$

Выражение (21) представляется нечеткой системой линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) с матрицей $\Lambda_{i\text{н}}$, составленной из нечетких элементов и правой части с вектором $Y_{i\text{н}}$, имеющим нечеткие компоненты.

В настоящее время НСЛАУ находят широкое применение при решении различных задач нечеткой интерполяции, нечеткой сплайн-аппроксимации, нечеткого вариационного исчисления, идентификации при наличии гибридных данных и др. [11—13]. Это обусловлено новыми подходами в представлении неопределенности и необходимости разработки алгоритмов решения соответствующих НСЛАУ, возникающих в приложениях.

В теории НСЛАУ приняты несколько типов систем, (рассмотрим их на примере системы управлений (21)). Если матрица $\Lambda_{i\text{н}}$ содержит элементы с функцией принадлежностей синглтон (singlton), а вектор $Y_{i\text{н}}$ имеет нечеткие компоненты, как правило, с треугольной функцией принадлежностей, то такую систему принято называть НСЛАУ. Эта система характеризуется наличием сильных/слабых решений [14, 15]. При большой размерности матрицы $\Lambda_{i\text{н}}$ для получения решения применяется большое число разнообразных нечетких итерационных методов, являющихся модификациями хорошо известных традиционных методов, таких как методы Ричардсона, Якоби, релаксационные и др., которые адаптируются для решения НСЛАУ [16—18]. Для этого же типа систем рассматривается случай прямоугольной нечеткой матрицы $\Lambda_{i\text{н}}$, и для этой системы вводится в рассмотрение нечеткое псевдорешение. В случае, когда в матрице $\Lambda_{i\text{н}}$ имеются нечеткие элементы и вектор $Y_{i\text{н}}$ состоит из нечетких компонент, такую НСЛАУ называют полной нечеткой линейной системой (fully fuzzy linear systems — FFLS). Применительно к системе уравнений (21) очевидно имеется FFLS. Она решается методом обратной матрицы (matrix inversion method — MIM), изложенным в работе [19].

Пусть нечеткие элементы $\lambda^i_{kl\text{н}}$ матрицы $\Lambda_{i\text{н}}$ в уравнении (21) имеют треугольные функции принадлежностей

$$\lambda^i_{11\text{н}} = \lambda^i_{22\text{н}} = 0{,}5\hat{T}_\text{н} = (\alpha^i_{11}|\beta^i_{11}|\gamma^i_{11});$$

$$\lambda^i_{12\text{н}} = \lambda^i_{21\text{н}} = -0{,}5ik_{\text{н}1}T_{\text{н}1}\hat{T}_\text{н}\hat{\omega} = (\alpha^i_{12}|\beta^i_{12}|\gamma^i_{12}),$$

а нечеткие компоненты нечетких векторов $X_{i\text{н}}$, $Y_{i\text{н}}$ соответственно представляются также в виде нечетких чисел с треугольными функциями принадлежностей:

$$X_{i\text{н}} = (A_{i\text{н}}B_{i\text{н}})^T = (a_{1i}|a_{2i}|a_{3i};\ b_{1i}|b_{2i}|b_{3i})^\text{T};$$

$$Y_{i\text{н}} = (y^i_{11}|y^i_{12} = 0|y^i = y^i_{13};\ y^i_{21}|y^i_{22}|y^i_{23})^T.$$

С учетом свойств над арифметическими операциями с нечеткими числами с треугольными функциями принадлежностей матрицу $\Lambda_{i\text{н}}$ можно представить в виде $\Lambda_{i\text{н}} = (\Lambda_{1i}|\Lambda_{2i}|\Lambda_{3i})$, где

$$\Lambda_{1i} = \begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix},\quad \alpha^i_{11} = \alpha^i_{22},\quad \alpha^i_{12} = \alpha^i_{21},$$

$$\Lambda_{2i} = \begin{bmatrix} \beta^i_{11} & \beta^i_{12} \\ \beta^i_{21} & \beta^i_{22} \end{bmatrix},\quad \beta^i_{11} = \beta^i_{22};\quad \beta^i_{12} = \beta^i_{21},$$

$$\Lambda_{3i} = \begin{bmatrix} \gamma^i_{11} & \gamma^i_{12} \\ \gamma^i_{21} & \gamma^i_{22} \end{bmatrix},\quad \gamma^i_{11} = \gamma^i_{22},\quad \gamma^i_{12} = \gamma^i_{21}.$$

Аналогично для векторов $X_{i\text{н}}$, $Y_{i\text{н}}$ будем иметь:

$$X_{i\text{н}}\colon (a_{1i}|b_{1i})^T,\ (a_{2i}|b_{2i})^T,\ (a_{3i}|b_{3i})^T;$$

$$Y_{i\text{н}}\colon (y^i_{11}|y^i_{12})^T,\ (y^i_{21}|y^i_{22})^T,\ (y^i_{31}|y^i_{32})^T.$$

В этих трансформациях относительно нечетких матриц и векторов в соответствии с теорией решения полных нечетких систем будем иметь эквивалентность системы (21) системе уравнений

$$\begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^i_{11} \\ y^i_{12} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2i} \\ b_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^i_{11} & \beta^i_{12} \\ \beta^i_{21} & \beta^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^i_{21} \\ y^i_{22} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{3i} \\ b_{3i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^i_{11} & \gamma^i_{12} \\ \gamma^i_{21} & \gamma^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^i_{31} \\ y^i_{32} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Решение этих уравнений относительно $(a_{ri}|b_{ri})^T$, $r = 1, 2, 3$, дает искомый нечеткий вектор $X^*_{i\text{н}} = (A^*_{i\text{н}}|B^*_{i\text{н}})^T$:

$$\begin{bmatrix} a^*_{1i} \\ b^*_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a^*_{2i} \\ b^*_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} y^i_{21} \\ y^i_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta^i_{11} & \beta^i_{12} \\ \beta^i_{21} & \beta^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\begin{bmatrix} a^*_{3i} \\ b^*_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^i_{11} & \alpha^i_{12} \\ \alpha^i_{21} & \alpha^i_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} y^i_{31} \\ y^i_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma^i_{11} & \gamma^i_{12} \\ \gamma^i_{21} & \gamma^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \end{bmatrix} \right\},$$

где $A^*_{i\text{н}} = (a^*_{1i}|a^*_{2i}|a^*_{3i})$, $B^*_{i\text{н}} = (b^*_{1i}|b^*_{2i}|b^*_{3i})$.

Положим в (20) для простоты вычислений $n = 1$, $b_н = 0$, тогда

$$z_н^* = A_{1н}^* \sin\hat{\omega}x + B_{1н}^* \cos\hat{\omega}x.$$

Пусть для исходной системы заданы ее элементы

$$\Lambda_{iн}X_{iн} = Y_{iн} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}(15|1|4) & (5|2|9)\\(10|5|6) & (25|3|4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(a_1|a_2|a_3)\\(b_1|b_2|b_3)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}y_1 = (10|15|25)\\y_2 = (20|30|40)\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(15|1|4)\cdot(a_1|a_2|a_3) + (5|2|9)\cdot(b_1|b_2|b_3) = (10|15|25),\\(10|5|6)\cdot(a_1|a_2|a_3) + (25|3|4)\cdot(b_1|b_2|b_3) = (20|30|40),\end{cases}$$

откуда получим:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} = 15 & \alpha_{12} = 5\\\alpha_{21} = 10 & \alpha_{22} = 25\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\beta_{11} = 1 & \beta_{12} = 2\\\beta_{21} = 5 & \beta_{22} = 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_{11} = 4 & \gamma_{12} = 9\\\gamma_{21} = 6 & \gamma_{22} = 4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}y_{11} = 10\\y_{12} = 20\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_{21} = 15\\y_{22} = 30\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_{31} = 25\\y_{32} = 40\end{bmatrix}.$$

Из выражений (22)—(24) имеем

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15 & 5\\10 & 25\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_1 \approx 0{,}46\\b_1 \approx 0{,}62\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}15 & 5\\10 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\30\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}46\\0{,}62\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_2 \approx 0{,}63\\b_2 \approx 0{,}78\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}15 & 5\\10 & 25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\40\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 9\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}46\\0{,}62\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha_3 \approx 0{,}82\\b_3 \approx 1{,}06\end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение полной нечеткой системы $\Lambda_н X_н = Y_н$ имеет вид:

$$X_н^* = \begin{bmatrix}A_{1н}^*\\B_{1н}^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(0{,}46|0{,}63|0{,}82)\\(0{,}62|0{,}78|1{,}06)\end{bmatrix},$$

а периодический процесс в системе автоматической оптимизации можно записать в виде:

$$z_н^* = (0{,}46|0{,}63|0{,}82)\sin\hat{\omega}x + (0{,}62|0{,}78|1{,}06)\cos\hat{\omega}x =$$

$$= N_н \sin\left(\frac{2\pi}{\hat{T}^{-1}}x + \theta_н\right), \qquad (25)$$

где

$$N_н = [(0{,}62|0{,}78|1{,}06)^2 + (0{,}62|0{,}78|1{,}06)^2]^{1/2},$$

$$\theta_н = \mathrm{arctg}[(0{,}62|0{,}78|1{,}06)/(0{,}46|0{,}63|0{,}82)].$$

Арифметические операции возведения в квадрат, извлечения квадратного корня и деления над треугольными нечеткими числами в формуле (25) выполняются в соответствии с принципом расширения Л. Заде [20].

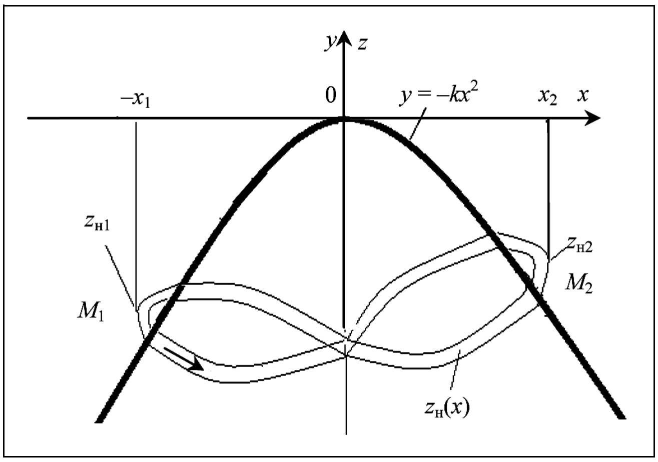


**Рис. 2. Нечеткие траектории $z_н(x)$ периодического режима**

На рис. 2 изображена нечеткая траектория автоколебаний при перемещении изображающей точки от точки $M_1$ к точке $M_2$.

Расчет нечетких перемещений от точки $M_2$ к точке $M_1$ выполняется по методике, аналогично изложенной выше. Период автоколебаний $\hat{T}_н$ определяется по зоне нечувствительности $z_{неч}$ с учетом зависимости $z_{неч} = f(\hat{T}_н)$, построенной для разных значений $\hat{T}_н$.

**Замечание.** Изложенная теория решения полных нечетких систем справедлива для случая, когда нечеткие переменные положительные. В случае, когда появляются нечеткие отрицательные переменные, нетрудно модифицировать рассмотренный алгоритм с учетом того, что при $\mu \in R_1$ выполняется соотношение:

$$\mu L_н = \begin{cases}(\mu l_1|\mu l_2|\mu l_3),\ \mu \ge 0,\\(\mu l_3|\mu l_2|\mu l_1),\ \mu < 0.\end{cases}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика решения нечеткой краевой задачи начальным методом представляет собой обобщение традиционного одномерного случая на его матричный аналог. Она позволяет решать нечеткие краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений. Рассмотренный метод продемонстрирован на примере решения нечеткой краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Для решения нечетких краевых задач применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям разработан нечеткий метод Галеркина. Показано его применение для расчета нечеткого периодического режима в системе автоматической оптимизации.

Приведенные в части 1 [21] статьи и части 2 нечеткие методы решения краевых задач, возникающих при математическом моделировании и оптимизации управления, и примеры их реализации показывают, что по простоте применения, традиционности инженерной терминологии и определений, наиболее перспективен метод нечеткого преобразования Лапласа. Он в определенной степени осуществляет преемственность инженерных методов в управлении.

Представляет значительный теоретический и практический интерес внедрение нечетких методов решения линейных и нелинейных краевых и начальных задач, моделирующих различные технические и экономические системы, функционирующих в условиях неопределенностей. Например, в традиционных моделях волнового твердотельного гироскопа [22] весьма перспективна модификация уравнения динамики волновых процессов в условиях неопределенности в виде нечеткости. Целесообразным становится моделирование нечетких уравнений движения космических летательных аппаратов [23], что позволит получать более обоснованные решения при управлении. Традиционные задачи оптимального управления могут быть легко модифицированы в соответствующие нечеткие задачи. Например, нечеткая задача Чаплыгина о аэрофотосъемке, нечеткая посадка летательного аппарата и др. [24]. Все они могут быть решены предложенными в статье методами.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Khalilpour K. and Allahviranloo T.* An Initial-value Method for Two-Point Fuzzy Boundary Value Problems // World Applied Sciences Journal. — 2011. — Vol. 13, N 10. — P. 2148—2155.
2. *Chalco-Cano Y. and Roman-Flores Y.* On new solutions of fuzzy differential equations // Chaos, Solitons, Fractals. — 2008. — Vol. 38, N 1. — P. 112—119.
3. *Математические* основы теории автоматического управления / под ред. Б.К. Чемоданова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — Т. 1—3.
4. *Галеркин Б.Г.* Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестник инженеров. — 1915. — Т. 1. — С. 897—908.
5. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006. — 543 с.
6. *Справочник* по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
7. *Растригин Л.А.* Системы экстремального управления. — М.: Наука, 1974. — 632 с.
8. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нейросетевая оценка динамики системы автоматической оптимизации // Мехатроника, автоматизация управление. — 2015. — Т. 15, № 10. — С. 659—663.
9. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник Московского гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана, Сер. «Приборостроение». — 2016. — № 1 (91). — С. 59—74.
10. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — Vol. 24, N 3. — P. 319—330.
11. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нечеткая интерполяция // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. — 2012. — № 2. — DOI: http://dx.doi.org/.
12. *Деменков Н.П.*, *Мочалов И.А.* Нечеткие сплайны // Вестник Московского гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». — 2012. — № 2 (87). — С.48—59.
13. *Асмолова Ю.Е.*, *Мочалов И.А.* Элементы нечеткого вариационного исчисления // Вестник Ун-та Дружбы народов. Сер. «Инженерные исследования». — 2010. — № 4. — С. 37—43.
14. *Goetschel R.Jr. and Voxman W.* Elementary fuzzy calculus // Fuzzy Sets and Systems. — 1986. — N 18. — P. 31—43.
15. *Friedman M.*, *Ming M.*, *Kandel A.* Fuzzy linear systems // Ibid. — 1988. — N 96. — P. 201—209.
16. *Abbasbandy S. and Alavi M.* A method for solving fuzzy linear system // Iranian Journal of Fuzzy Systems. — 2005. — Vol. 2, N 2. — P. 137—143.
17. *Mosleh M.*, *Otadi M.*, *Abbasbandy S.* Solution of fully fuzzy linear systems by ST method // Journal of Applied Mathematics. Islamic Azad University of Lahijan. — 2011. — Vol. 8, N 1 (280). — P. 23—31.
18. *Otadi M.*, *Mosleh M.* Minimal solution of fuzzy linear systems // Jranian Journal of Fuzzy Systems. — 2015. — Vol. 12, N 1. — P. 89—99.
19. *Muruganandam S.*, *Razak K.A.* Matrix inversion method for solving fully fuzzy linear systems with triangular fuzzy numbers // International Journal of Computer Application. — 2013. — Vol. 65, N 4. — P. 9—11.
20. *Zadeh L.* Fuzzy logic, neural networks and soft computing // Communications of the ACM. — 1994. — Vol. 37, N 3. — P. 77—84.
21. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткие двухточечные краевые задачи в математическом моделировании и управлении. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование // Проблемы управления. — 2018. — № 1. — С. 30—36.
22. *Басараб М.А.*, *Кравченко В.М.*, *Матвеев В.А.* Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии. — М.: Физматлит, 2008. — 248 с.
23. *Микрин Е.А.* Бортовые комплексы управления космических аппаратов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. — 245 с.
24. *Иванов В.А.*, *Медведев В.С.* Математические основы оптимального и логического управления. — М.: Там же, 2011. — 599 с.


*Статья представлена к публикации руководителем РРС А.К. Погодаевым.*

**Деменков Николай Петрович** — канд. техн. наук, доцент,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmstu.ru,

**Микрин Евгений Анатольевич** — академик РАН,
ген. конструктор, первый зам. ген. директора,
ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»; зав. кафедрой,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ eugeny.mikrin@bmstu.ru,

**Мочалов Иван Александрович** — д-р техн. наук, профессор,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ intelsyst@mail.ru`