

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ. ОБЗОР.

Ч. 1. Аппроксимационные методы

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Аннотация. Представлен обзор различных методов, как существующих, так и вновь предлагаемых, оценивания интегральных моделей в условиях неопределенностей, которые описываются нечеткими моделями. На основе нечеткого интеграла, в котором предельный переход определяется в метрике Хаусдорфа, рассмотрены задача оценки состояния моделей, описываемых нечеткими интегральными уравнениями Фредгольма — Вольтерра, и нечеткие методы ее решения, а именно: нечеткое преобразование Лапласа, метод «вложения» моделей, суть которого состоит в преобразовании исходной системы в систему увеличенной размерности, решаемую традиционными методами линейной алгебры, тейлоровское оценивание вырожденных ядер, находящихся под знаком интеграла и представляемых степенными полиномами, оценивание невырожденных ядер вырожденными формами с помощью тейлоровской аппроксимации. Показано, что в некоторых случаях результаты оценивания связаны с решением нечетких систем линейных алгебраических уравнений. Для них решены тестовые примеры.

Ключевые слова: нечеткий интеграл Римана, нечеткая интегральная модель, нечеткие методы оценивания интегральных моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Интегральные модели, под которыми в настоящей статье понимаются модели, описываемые интегральными уравнениями, широко применяются в различных разделах прикладной физики, механики, экономики и других областях, имеющих дело с математическими описаниями различных объектов. В теории дифференциальных уравнений утверждение о существовании и единственности решения доказывается с помощью принципа сжатых отображений, когда исходная начальная задача представляется в виде эквивалентной интегральной модели [1].

В теории управления интегральные модели обычно представляют системы управления, охваченные обратной связью [2]. Интегральные модели Винера — Хопфа используются при описании действующих на систему возмущений, которые представляют собой одну из математических моделей в описании неопределенности при обработке текущей информации от объекта [3]. Интеграль-

ные уравнения Фредгольма и Вольтерра используются в теории упругости, газовой динамике и электродинамике, экологии, т. е. везде, где действуют законы сохранения массы, импульса и энергии. Во всех перечисленных случаях неизвестные переменные находятся под знаком интеграла.

В реальных условиях системы управления находятся под воздействием различного рода возмущений. Для их представления используются различные математические модели, теория которых в настоящее время интенсивно разрабатывается и активно применяется в различных объектовых приложениях. Наиболее интенсивно для этих целей используется теория интервалов [4, 5], теория нечетких множеств [6], теория возможностей [7], гибридная вероятностная теория, теория нечеткой математической статистики и нечетких случайных процессов [8] и др.

Для описания неопределенностей в статье используется теория нечетких множеств, являющаяся наиболее адекватной и универсальной в представлении различного рода возмущений. Действительно, нетрудно показать, что перечисленные

выше модели следуют из модели теории нечетких множеств. Например, в статье [9] решается нечеткая система линейных уравнений (НСЛУ), одна из координат решения которой получается в виде нечеткой функции принадлежности. Однако, фиксируя у нее основание, получим решение для этой координаты в виде интервала.

Аналогичными рассуждениями можно получить интервалы решения для нечетких дифференциальных уравнений. В теории возможностей функция принадлежности трактуется как некая плотность распределения вероятностей, для которой, однако, не выполняются аксиомы вероятностей, принятые в традиционной статистической теории. Поэтому полагается, что теория возможностей описывает не массовые явления, а возможности индивидуального объекта.

Гибридная теория вероятностей представляет традиционное вероятностное пространство для случайных величин в виде традиционных плотностей вероятностей с начальными или центральными моментами в виде нечетких переменных с заданными функциями принадлежности, как правило, в виде треугольников. Применительно к традиционным случайным процессам гибридная теория для нечетких марковских случайных процессов оперирует нечеткими состояниями, получаемыми путем укрупнения четких состояний. Это позволяет уменьшить размерность переходной матрицы и, как следствие этого, соответствующие вычислительные трудности при ее обращении.

В целом можно констатировать, что теория нечетких множеств в нынешнем ее состоянии представляет собой некое ядро, вокруг которого группируются различные модели неопределенностей.

Исходя из сказанного, следует, что основная цель настоящей статьи заключается в представлении различных методов, как существующих, так и вновь предлагаемых, оценивания интегральных моделей в условиях неопределенностей, которые представляются нечеткими моделями.

Научная новизна предлагаемой статьи состоит в новых методах оценивания состояния интегральных моделей, разработанных авторами, — таких как оценивание состояния методом вырожденных ядер, нечеткий метод наименьших квадратов, нечеткий метод Галеркина. Кроме того, в тех случаях, когда в результате оценивания появляются нечеткие системы линейных алгебраических уравнений, авторами показано, что могут возникать «сильные/слабые» результаты оценивания. Впервые это было исследовано авторами ранее при решении НСЛУ и затем было применено для оценивания интегральных моделей.

Ниже вводятся нечеткие интегральные модели в виде уравнений Фредгольма — Вольтерра и приводятся некоторые методы их решения.

1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные определения теории нечетких множеств даны в работе [6]. Ниже приводятся определения, которые использованы в настоящей статье. Приняты следующие обозначения: нечеткие переменные (числа) имеют нижний индекс «н», например, x_n — нечеткая переменная (элемент), $y_n(x)$ — нечеткая функция многих переменных, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y'_{nx_i}(x)$ — нечеткая производная по переменной x_i , $\dot{x}_n(t)$ — нечеткая производная вектора x_n по времени.

Принадлежность элемента x некоторому множеству X ($x \in X$) формализуется с помощью функции принадлежности $r(x)$, $r \in [0, 1]$, $x = x_n \in X$ для нечеткого элемента x_n :

$$r(x) = \begin{cases} \underline{r}(x) \in [0, 1], \\ \bar{r}(x) \in [0, 1], \end{cases}$$

где $r(x)$ — многозначная функция: $\underline{r}(x)$ — левая ветвь, $\bar{r}(x)$ — правая ветвь соответственно относительно $r(x) = 1$.

Для $r(x)$ часто используется его уровневое представление в виде обратного отображения $r^{-1}(x) = \{x(r) = (\underline{x}(r), \bar{x}(r)) \mid r \in [0, 1]\}$. Совокупность $\{x_n\}$ задает нечеткое множество X_n . Для обозначения x_n иногда используется цепочка эквивалентных представлений $x_n \Leftrightarrow r(x)$, $r \in [0, 1] \Leftrightarrow (\underline{r}(x), \bar{r}(x)) \mid \underline{r}, \bar{r} \in [0, 1] \Leftrightarrow (\underline{x}(r), \bar{x}(r)) \mid r \in [0, 1]$ и т. д.

Нечеткая функция (отображение) четких переменных $y_n(x)$. Пусть E — множество всех нечетких переменных с заданной функцией принадлежности $r(x)$, $r \in [0, 1]$, $x \in R$. Тогда $y_n(x): R \rightarrow E$ определяет нечетко-значимую функцию. В параметрической форме имеет место представление

$$y_n(x) = y(x, r) = (\underline{y}(x, r), \bar{y}(x, r)) \mid r \in [0, 1].$$

Банахово пространство нечетких переменных вводится в соответствии с подходом, принятым в функциональном анализе [10]. Совокупность $\{x_n\}$ с операциями сложения и умножения, с существованием противоположного элемента образует векторное (линейное) пространство E . В пространстве E определена метрика

$$d(x_{ni}, x_{nj}) = \sup_{r \in [0, 1]} \{\max[|\underline{x}_i(r) - \bar{x}_j(r)|, |\bar{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)|]\}$$

и норма

$$\|x_{ni} - x_{nj}\| = d(x_{ni}, x_{nj}).$$



Далее определяется нечеткая последовательность Коши

$$\{x_{nm}\}: \{d(x_{nm}, x_{nm}) \rightarrow 0\}_{n, m \rightarrow \infty}$$

и полнота $E: x_{nm} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in E$.

Это приводит к банахову пространству нечетких переменных (E, d) . Пара (E, d) образует полное метрическое пространство.

Нечеткая непрерывность в точке определяется с помощью локального предельного перехода в этой точке, который трактуется относительно метрики Хаусдорфа. Нечеткая непрерывность в интервале определяется как нечеткая непрерывность для всех значений интервала.

Нечеткая производная функции по ее четкому аргументу согласно общему подходу находится путем определения для некоторой нечеткой функции, определенной ранее, операций: вычитания или существования противоположного элемента, умножения на константу, предельного перехода относительно заданной метрики. В статье используется два типа нечетких производных: $y_n^S(x)$ — Сейккала (Seikkala — S) и $y_n^{BF}(x)$ — Баклей-Фейринга (Buckley-Feuring — BF). Имеет место утверждение: если нечеткие производные существуют при $x = x_*$ и непрерывны в этой точке, то обе нечеткие производные при $x = x_*$ равны между собой.

Под *нечетким интегралом* понимается его римановско-нечеткая трактовка [11].

Пусть имеется нечеткое отображение $f_n: [a, b] \subset R \rightarrow E$, где E — нечеткое множество. Если для каждого разбиения $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in [a, b]$ и $\forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = \overline{1, n}$ допускается представление $R_p = \sum_{i=1}^n f_n(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \Delta = \max\{t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, n}\}$, тогда нечеткий интеграл (Римана) для $f_n(t)$ представляет собой

$$\int_a^b f_n(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_p, \quad (1)$$

где «lim» определяется в метрике $d(u, v)$ Хаусдорфа, т. е. для $u, v \in E \Rightarrow d(u, v) = \sup\{\max[|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)|], r \in [0, 1] \subset R, \underline{u}, \bar{u}, \underline{v}, \bar{v}$ — непараметрические представления нечетких переменных u, v .

Для нечеткой непрерывной в метрике Хаусдорфа функции $f_n(t) = f(t, r) = (\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r) | r \in [0, 1])$ при

выполнении соотношения (1) имеют место соотношения

$$\int_a^b \underline{f}(t, r) dt = \int_a^b \underline{f}(t, r) dt, \int_a^b \bar{f}(t, r) dt = \int_a^b \bar{f}(t, r) dt, \\ r \in [0, 1] \subset R,$$

где символы « $\underline{}$ » и « $\bar{}$ » — обозначают объекты нижнего и верхнего значений соответственно.

Если нечеткая переменная $z_n(t), t \in [a, b] \subset R$, находится под знаком нечеткого интеграла, то имеет место нечеткое интегральное уравнение

$$z_n(t) + \int_a^b K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = f(t).$$

По аналогии с традиционной классификацией различают *нечеткие интегральные модели*, описываемые уравнениями Фредгольма — Вольтерра I и II родов:

$\int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Фредгольма I рода, $t \in [t_1, t_2] \subset R; K(t, \tau)$ — четкое или нечеткое ядро;

$z_n(t) - \lambda \int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Фредгольма II рода; $\lambda \in K$ — параметр.

Пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными. Переменные удовлетворяют неравенству: $t_1 \leq t, \tau \leq t_2$, а ядро $K(t, \tau)$ и свободный член $u_n(t)$ должны быть непрерывными либо удовлетворять условиям, называемым фредгольмовыми.

В общем случае из нечетких уравнений Фредгольма I, II родов следуют нечеткие уравнения Вольтерра I, II родов. Уравнения Вольтерра отличаются от уравнений Фредгольма тем, что один из пределов интегрирования в них — переменный:

$\int_{t_1}^t K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t), t_1 \leq t \leq t_2$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Вольтерра I рода; $K(t, \tau)$ — четкое или нечеткое ядро;

$z_n(t) - \lambda \int_{t_1}^t K(t, \tau) z_n(\tau) d\tau = u_n(t)$ — нечеткая интегральная модель, описываемая уравнением Вольтерра II рода.

Интегральное уравнение Вольтерра можно считать частным случаем уравнения Фредгольма, если соответствующим образом построить ядро. Учи-

тывая, что уравнения Вольтерра обладают рядом важных свойств, которые не присущи уравнениям Фредгольма и не выводятся из них, в дальнейшем будем использовать только общие свойства уравнений Фредгольма и Вольтерра.

Достаточные условия существования и единственности решения нечетких интегральных уравнений Фредгольма — Вольтерра второго рода приведены в работах [12—14]. Пусть для определенности имеем нечеткое уравнение Вольтерра II рода. Для существования нечеткого решения применяется метод последовательных нечетких приближений, при этом полагается, что нечеткие приближения определены в прямоугольнике $\Pi = [\tau, t]$, на котором они имеют нечеткую непрерывность и ограниченность нечеткой производной по Сейккала. Тогда последовательность нечетких приближений сходится в метрике Хаусдорфа к нечеткому решению и, кроме того, из-за ограниченности производной следует сходимость по t , т. е. последовательность нечетких приближений сходится равномерно к искомой нечеткой переменной, которая и принимается за нечеткое решение исходного нечеткого интегрального уравнения. Единственность нечеткого решения доказывается методом от противного.

Приведенные выше нечеткие уравнения Фредгольма — Вольтерра I и II рода соответственно можно представить в краткой (операторной) форме [15]:

$$\begin{aligned} \lambda(Kz_{\Pi})(t)z_{\Pi}(t) &= u_{\Pi}(t), \\ [I - \lambda(Kz_{\Pi})(t)]z_{\Pi}(t) &= u_{\Pi}(t), \end{aligned} \quad (2a)$$

где

$$(Kz_{\Pi})(t) = \int_{t_1}^{t_2} K(t, \tau)z_{\Pi}(\tau)d\tau \quad (2b)$$

— оператор для нечетких уравнений Фредгольма;

$$(Kz_{\Pi})(t) = \int_{t_1}^t K(t, \tau)z_{\Pi}(\tau)d\tau \quad (2c)$$

— оператор для нечетких уравнений Вольтерра I, II рода соответственно, I — единичный оператор.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется нечеткая модель, описываемая интегральным уравнением, заданным в одной из форм — (2a), (2b) или (2c). Необходимо рассмотреть различные методы нечеткой оценки ее состояния.

3. МЕТОДЫ НЕЧЕТКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

3.1. Оценивание методом нечеткого преобразования Лапласа

Определение нечеткого преобразования Лапласа и его свойства подробно изложены в статьях [16, 17]. Там же приведены примеры применения этого преобразования для нахождения решения различных нечетких интегральных уравнений Вольтерра типа свертки с четкими и нечеткими ядрами. Задача обобщена на случай наличия в нечетком интегральном уравнении нечеткой дифференциальной составляющей в частных производных. Это позволяет распространить методику применения нечеткого преобразования Лапласа на случай нечетких линейных уравнений в частных производных второго порядка параболического и гиперболического типов.

3.2. Оценивание методом «вложения (embedding)»

Рассматривается нечеткая модель в форме интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$x_{\Pi}(s) = f_{\Pi}(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_{\Pi}(\tau)d\tau, \quad (3)$$

существование и единственность решения которого, условия на функции f_{Π} и $K(s, \tau)$, определение решения для уравнения с нечеткими параметрами, пространство функций, в котором ищется решение, а также условия, при которых уравнение (3) существует, подробно изложены в работах [13, 14].

Точное нечеткое решение уравнения (4) ищется в виде бесконечной суммы [13]

$$x_{\Pi}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\Pi i} h_i(s), \quad (4)$$

где $\{h_i(\cdot)\}$ — последовательность функций в пространстве $L_2(a, b)$, $a_{\Pi i}$ — нечеткие коэффициенты.

Приближенное решение уравнения (4) представим в виде аппроксимирующей конечной суммы

$$x_{\Pi}(s) \simeq \tilde{x}_{\Pi n}(s) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{\Pi i} h_i(s),$$

где $\tilde{a}_{\Pi i}$ — нечеткие коэффициенты, подлежащие оценке, $h_i(s)$ — известные функции. Для их нахождения подставим выражение $\tilde{x}_{\Pi n}(s)$ в уравнении (3)



вместо x_n . В итоге получим уравнение вида (3), решением которого является

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{hi} h_i(s) = f_h(s) + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{hi} \int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau. \quad (5)$$

В результате имеем n неизвестных нечетких переменных $\tilde{a}_{h1}, \dots, \tilde{a}_{hn}$ в уравнении (5). Для их нахождения необходимо иметь n уравнений, поэтому используется n точек $s_1, \dots, s_n \in [a, b]$. Получим НСЛУ относительно $\tilde{a}_{hi}$:

$$\sum_{i=1}^n h_i(s_j) \tilde{a}_{hi} = f_h(s_j) + \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau \right) \tilde{a}_{hi},$$

$$j = \overline{1, n},$$

или в матричной форме:

$$A \tilde{a}_h = f_h + B \tilde{a}_h, \quad (6)$$

где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — матрицы с четкими элементами; $a_{ij} = h_i(s_j)$; $b_{ij} = \int_a^b K(s_j, \tau) h_i(\tau) d\tau$, $i, j = \overline{1, n}$; $\tilde{a}_h = (\tilde{a}_{h1}, \dots, \tilde{a}_{hn})^T$; $f_h = (f_h(s_1), \dots, f_h(s_n))^T$ — вектор с нечеткими компонентами.

Матричное уравнение (6) приводится к стандартной форме

$$\tilde{A} a_h = f_h, \quad \tilde{A} = A - B, \quad (7)$$

и далее полученная система решается методом «вложения» [9, 18].

Согласно методу «вложения» уравнение (7) преобразуется к расширенной (вложенной) системе:

$$S_{(2n \times 2n)} \cdot X_{(2n \times 2n)} = Y_{(2n \times 2n)},$$

где $X_h = (\underline{\tilde{a}}_1, \dots, \underline{\tilde{a}}_n | \bar{\tilde{a}}_1, \dots, \bar{\tilde{a}}_n)^T$;

$Y_h = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n | \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)^T$.

Матрица S имеет блочную структуру: $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$. Матрица S_1 получается из матрицы $A - B$, если в ней все отрицательные элементы заменить нулями; чтобы построить матрицу S_2 , в матрице $A - B$ отрицательные элементы заменяют их модулями, остальные элементы — нулями:

$$s_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad s_{i+n, j+n} = a_{ij} - b_{ij}, \quad a_{ij} - b_{ij} > 0;$$

$$s_{i, j+n} = -(a_{ij} - b_{ij}), \quad s_{i+n, j} = -(a_{ij} - b_{ij}),$$

$$a_{ij} - b_{ij} < 0.$$

Если $|S| \neq 0$, т. е. S не вырождена, то

$$X_h = S^{-1} Y_h,$$

где $S^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ V & U \end{pmatrix}$; $U = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} + (S_1 - S_2)^{-1}]$;
 $V = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} - (S_1 - S_2)^{-1}]$.

Случай, когда матрица S является вырожденной, подробно рассмотрен в статьях [19, 20].

Оценка точности приближенного решения получается из следующих соотношений.

Векторы остатков r_n и ошибки ϵ_n определяются посредством метрики Хаусдорфа:

$$r_h = D(f_h, L\tilde{x}_h) = (d(f_h, L\tilde{x}_{h1}), \dots, d(f_h, L\tilde{x}_{hn}))^T,$$

$$\epsilon_n = D(\tilde{x}_h, x_h) = (d(\tilde{x}_h, x_{h1}), \dots, d(\tilde{x}_h, x_{hn}))^T,$$

где

$$L = I - K, \text{ а } K = (Kx_h)(s) = \int_a^b K(s, \tau) x_h(\tau) d\tau.$$

Оценка точности приближенного решения получена в работе [21]:

$$\|\epsilon_n\| \leq \|r_n\| \cdot [1 - \|K\|]^{-1} \text{ при } \|K\| < 1.$$

Пример 1. Имеем

$$x_h(s) = f_h(s) + \int_{-1}^1 (s+1)x_h(\tau) d\tau,$$

где $a = -1$, $b = 1$, а

$$f_h(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r) = s^3(r^2 + r),$$

$$\bar{f}(s, r) = s^3(4 - r^3 - r) | r \in [0, 1], \quad -1 \leq s, \tau \leq 1.$$

Необходимо найти оценку состояния по методу «вложения».

Решение. Выбираем в качестве $h_1(s) = 1$, $h_2(s) = s^3$ и полагаем, что $s_1 = -1$; $s_2 = 1$, тогда элементы уравнения (5) будут иметь вид:

$$\underline{f}(s_1) = -(r^2 + r), \quad \underline{f}(s_2) = (r^2 + r),$$

$$\bar{f}(s_1) = -(4 - r^3 - r), \quad \bar{f}(s_2) = (4 - r^3 - r);$$

$$A = \begin{pmatrix} h_1(s_1) & h_2(s_1) \\ h_1(s_2) & h_2(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} = \int_{-1}^1 (-1+1)1 d\tau & b_{12} = \int_{-1}^1 (-1+1)(-1)^3 d\tau \\ b_{21} = \int_{-1}^1 (1+1)1 d\tau & b_{22} = \int_{-1}^1 (1-1)1^3 d\tau \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow \tilde{A} = A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow (S_1 + S_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \\
 (S_1 - S_2)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \\ -\bar{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(r^2 + r) \\ (r^2 + r) \\ -(4 - r^3 - r) \\ (4 - r^3 - r) \end{bmatrix}; \\
 V = 0,5[(S_1 + S_2)^{-1} - (S_1 - S_2)^{-1}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 1,5 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На основании этого получим:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \\ -\bar{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(r^2 + r) \\ (r^2 + r) \\ -(4 - r^3 - r) \\ (4 - r^3 - r) \end{bmatrix}, \\
 \begin{cases} a_{n1} = (\underline{a}_1(r), \bar{a}_1(r)) = (0,25r^3 + 0,25r^2 + 0,5r - 1, \\ -0,25r^3 - 0,25r^2 - 0,5r + 1 | r \in [0, 1]), \\ a_{n2} = (\underline{a}_2(r), \bar{a}_2(r)) = (0,25r^3 + 0,75r^2 + 0,5r + 1, \\ -0,75r^3 + 0,25r^2 - 0,5r + 3 | r \in [0, 1]). \end{cases} & (8)
 \end{aligned}$$

Приближенная оценка состояния

$$\begin{aligned}
 x_n(s) \simeq x_{nn} = z(s) &= a_{n1}h_1(s) + a_{n2}h_2(s) \Big|_{\substack{h_1(\cdot) = 1 \\ h_2(\cdot) = s^3}} = \\
 &= a_{n1} + a_{n2}s^3,
 \end{aligned}$$

где a_{n1}, a_{n2} были получены ранее в системе уравнений (8).

Можно показать, что эта оценка может быть сильной/слабой по методике, изложенной авторами в статьях [19, 20]. ♦

3.3. Тейлоровское оценивание

В общем виде этот метод обычно рассматривается для нечеткой системы интегральных уравнений [21]. Для простоты ниже будет реализован частный случай этой системы, когда она задается в виде одного уравнения Фредгольма II рода:

$$x_n(s) = f_n(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_n(\tau)d\tau, \quad (9)$$

где $a \leq s, \tau \leq b$; $K(s, \tau)$ — заданное четкое ядро, дифференцируемое по своим аргументам на отрезке $[a, b] \subset R$; $x_n(s)$ — нечеткое неизвестное, подлежащее нахождению из уравнения (9).

Далее полагаем, что $f_n(s), x_n(s)$ представлены в параметрической форме:

$$f_n(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

$$x_n(s) = x(s, r) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r) | r \in [0, 1]).$$

Тогда уравнение (9) в параметрической форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^b \underline{U}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^b \bar{U}(\tau, r)d\tau, \\ r \in [0, 1], \end{cases} \quad (10)$$

в котором

$$\underline{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(s, \tau) \geq 0, \\ K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(s, \tau) < 0; \end{cases}$$

$$\bar{U}(\tau, r) = \begin{cases} K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r), & K(s, \tau) \geq 0, \\ K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r), & K(s, \tau) < 0. \end{cases}$$

Пусть далее на отрезке $[a, b] \subset R$ выполнены неравенства:

$$\begin{cases} K(s, \tau) \geq 0, & a \leq \tau \leq c, \\ K(s, \tau) < 0, & c < \tau \leq b. \end{cases}$$

Тогда система уравнений (10) может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь представим функции $\underline{x}(\tau, r), \bar{x}(\tau, r)$, которые находятся под знаком интегралов в системе уравнений (11), в виде тейлоровских полиномов



по степеням n , тогда для фиксированной точки $\tau = z$ получим:

$$\begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \int_a^c K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau + \\ + \int_c^b K(s, \tau) \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{где } \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) = \left. \frac{\partial^i \underline{x}(\tau, r)}{\partial \tau^i} \right|_{\tau=z}, \quad \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) = \left. \frac{\partial^i \bar{x}(\tau, r)}{\partial \tau^i} \right|_{\tau=z}.$$

Дифференцируя оба уравнения (12) $p = \overline{0, n}$ раз по переменной s , получим:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } \underline{x}_s^{(p)}(s, r) = \left(\frac{\partial^p \underline{x}(s, r)}{\partial s^p} \right), \quad \bar{x}_s^{(p)}(s, r) = \left(\frac{\partial^p \bar{x}(s, r)}{\partial s^p} \right),$$

$$K_s^{(p)}(s, \tau) = \left(\frac{\partial^p K(s, \tau)}{\partial s^p} \right), \quad p = \overline{0, n}.$$

После перемены мест символов интеграла и суммы систему уравнений (13) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \\ \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) \times \\ &\times (\tau - z)^i d\tau + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r)(\tau - z)^i d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

или, введя обозначения

$$S_{pi}^1 = \frac{1}{i!} \int_a^c K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau,$$

$$S_{pi}^2 = \frac{1}{i!} \int_c^b K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau,$$

запишем уравнение (14) в виде:

$$\begin{aligned} \underline{x}_s^{(p)}(s, r) &= \underline{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N S_{pi}^1(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) + \\ &+ \sum_{i=0}^N S_{pi}^2(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r), \\ \bar{x}_s^{(p)}(s, r) &= \bar{f}_s^{(p)}(s, r) + \sum_{i=0}^N S_{pi}^1(s, \tau) \bar{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r) + \\ &+ \sum_{i=0}^N S_{pi}^2(s, \tau) \underline{x}_{\tau}^{(i)}(\tau, r), \quad p = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введя в уравнение (15) векторы

$$\underline{X}(s, r) = (\underline{x}_s^{(0)}, \dots, \underline{x}_s^{(n)})^T, \quad \bar{X}(s, r) = (\bar{x}_s^{(0)}, \dots, \bar{x}_s^{(n)})^T,$$

$$\underline{F}(s, r) = (\underline{f}_s^{(0)}, \dots, \underline{f}_s^{(n)})^T, \quad \bar{F}(s, r) = (\bar{f}_s^{(0)}, \dots, \bar{f}_s^{(n)})^T,$$

и матрицы

$$S^1 = (S_{pi}^1), \quad S^2 = (S_{pi}^2), \quad (p, i) = \overline{0, n},$$

получим при $s, z = a^* \in [a, b]$ уравнение (15) в матричной форме:

$$X = F + (S^1 + S^2)X, \quad X = (\underline{X}, \bar{X})^T, \quad F = (\underline{F}, \bar{F})^T, \quad (16)$$

откуда получим решение:

$$\begin{aligned} X &= F + SX, \quad S = \begin{pmatrix} S^1 & S^2 \\ S^2 & S^1 \end{pmatrix} \Rightarrow (S - I)X = -F \Rightarrow \\ &\Rightarrow X^* = -(S - I)^{-1}F, \quad |S - I| \neq 0. \end{aligned}$$

Сходимость решения X^* к точному решению $\tilde{X}(X^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{X})$ доказывается в работе [22].

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)x_H(\tau)d\tau, \quad (17)$$

в котором

$$\begin{aligned} f_H(s) &= f(s, r) = \begin{pmatrix} \underline{f}(s, r) = sr, \quad \bar{f}(s, r) = \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r - 2) \end{pmatrix}; \\ r &\in [0, 1] \subset R_1. \end{aligned}$$

Необходимо найти $x_{\text{н}}(s) = x(s, r) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r))$.

Чтобы найти решение, представим уравнение (17) в параметрической форме:

$$\begin{aligned}\underline{x}(s, r) &= sr + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) &= \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau.\end{aligned}\quad (18)$$

В этих выражениях ядро $K(s, \tau) = s^2(1 + \tau) \geq 0 \forall \tau \in [0, 2]$, где промежуток $[0, 2]$ определяет пределы интегрирования в уравнении (18), поэтому этот промежуток не имеет точки разбиения c , которая представлена в системе уравнений (12).

Представим неизвестные функции $\underline{x}(\tau, r)$, $\bar{x}(\tau, r)$, которые в уравнении (17) находятся под знаком интеграла в виде тейлоровского полинома по степеням n , положив при этом для простоты вычислений $n = 1$. Тогда при $\tau = z \in [0, 2]$ получим:

$$\underline{x}(\tau, r) = 1 + \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \tau}\right)\bigg|_{\tau=z} (\tau - z),$$

$$\bar{x}(\tau, r) = 1 + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau}\right)\bigg|_{\tau=z} (\tau - z), \quad 0 \leq \tau, z \leq 2, r \in [0, 1].$$

Так как $n = 1$, число дифференцирований p по s каждого из уравнений (18) дает значения $p = 0, 1$, следовательно,

$$p = 0 \Rightarrow \frac{\partial^0}{\partial s^0} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = sr + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \bar{x}(s, r) = \frac{14}{3}s^2(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau, \end{cases}$$

$$p = 1 \Rightarrow \frac{\partial^1}{\partial s^1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(s, r) = r + \int_0^2 2s(1 + \tau)\underline{x}(\tau, r)d\tau, \\ \dot{\bar{x}}_s(s, r) = \frac{28}{3}s(r-2) + \int_0^2 s^2(1 + \tau)\bar{x}(\tau, r)d\tau. \end{cases}$$

Далее рассматриваются векторы X, F и элементы матрицы S :

$X = (\underline{x}|s = a^*, r), \dot{\underline{x}}_s(s = a^*, r); (\bar{x}|s = a^*, r), \dot{\bar{x}}_s(s = a^*, r)^T$ — вектор нечетких переменных, подлежащий определению; $a^* \in [a, b]$;

$F = \left(\underline{f}(s = a^*, r) = a^*r, \dot{\underline{f}}_s = 1 \cdot r; \bar{f}(s = a^*, r) = \frac{14}{3}a^{*2}(r-2), \dot{\bar{f}}_s = \frac{28}{3}a^*(r-2) \right)^T$ — заданный вектор нечетких переменных.

Элементы S_{pi}^2 матрицы S^2 равны нулю, так как промежуток $[0, 2]$ не имеет точки разбиения c . Это дает

$S^2 = (S_{pi}^2 = 0)$. Элементы S_{pi}^1 матрицы S^1 представляют собой

$$\begin{aligned}S_{pi}^1 &= \frac{1}{i!} \int_0^2 K_s^{(p)}(s, \tau)(\tau - z)^i d\tau = \\ &= \frac{1}{i!} \int_0^2 [(s = a^* = 0)^2(1 + \tau)]_s^{(p)} (\tau - z = a^* = 0)^i d\tau = 0,\end{aligned}$$

$$p, i = 0, 1,$$

поэтому $S^1 = (S_{pi}^1) = 0$. Это означает, что

$$S = \begin{pmatrix} S^1 = 0 & S^2 = 0 \\ S^2 = 0 & S^1 = 0 \end{pmatrix},$$

откуда из уравнения (16) получим:

$$S - I|_{s=0} = -I.$$

В результате матричное уравнение

$$(S - I)|_{s=0} \cdot X = -F \Rightarrow IX = F$$

будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}}_s \\ \bar{x} \\ \dot{\bar{x}}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \\ 1 - r \\ \left(\frac{14}{3}\right)a^2(r-2) \\ \left(\frac{28}{3}\right)a(r-2) \end{pmatrix} \Rightarrow x_{\text{н}} = x(s, r) =$$

$$= \left(\underline{x}(s, r)|_{a=s} = sr, \bar{x}(s, r) = \left(\frac{14}{3}\right)s^2(r-2) | r \in [0, 1] \right).$$

В общем случае задается нечеткая система интегральных уравнений [22, 23]

$$x_{\text{н}i}(s) = f_{\text{н}i}(s) + \sum_{j=1}^m \int_a^b K_{ij}(s, \tau)x_{\text{н}j}(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Здесь полагается $a \leq s, \tau \leq b$, $K_{ij}(s, \tau)$, $i, j = \overline{1, m}$, — заданные четкие ядра, дифференцируемые по своим аргументам на промежутке $[a, b]$; $f_{\text{н}i}$ — заданные нечеткие функции; $x_{\text{н}i}(s) = (x_{\text{н}1}(s), \dots, x_{\text{н}m}(s))^T$ — нечеткий вектор, подлежащий определению. Нечеткие переменные $f_{\text{н}i}(s)$, $x_{\text{н}i}(s)$ представляются в параметрической форме

$$f_{\text{н}i}(s) = f_i(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

$$x_{\text{н}i}(s) = x_i(s, r) = (\underline{x}_i(s, r), \bar{x}_i(s, r) | r \in [0, 1]), \quad i = \overline{1, m},$$

и далее применяется методика преобразований, которая была реализована в одномерном случае: разбиение пределов интегрирования промежутка $[a, b]$ с помощью точек c_{ij} , $i, j = \overline{1, m}$; представление неизвестных переменных $\underline{x}_i(s, r)$, $\bar{x}_i(s, r)$ в виде тейлоровских полиномов по степеням n в произвольной точке $\tau = z \in [a, b] \subset R$; дифференцирование $p = \overline{0, n}$ раз по s каждого из уравнений (19), представленных в параметрической форме; пере-



мена местами символов $\int$ и $\sum$; введение соответствующих обозначений для векторов и матриц.

В результате перечисленных преобразований появляются НСЛУ типа (16):

$$SX = F, \quad (20)$$

где $X(\cdot) = (\underline{x}_1^{(n)}(\cdot), \bar{x}_1^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{x}_m^{(n)}(\cdot), \bar{x}_m^{(n)}(\cdot))^T$ — неизвестный вектор нечетких переменных; символ $(\cdot)$ обозначает $(s = a, r)$; (n) — номер производной и степень тейлоровского разложения; $\underline{x}_k^{(n)}(\cdot) = (\underline{x}_k^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{x}_k^{(n)}(\cdot))^T$; $\bar{x}_k^{(n)}(\cdot) = (\bar{x}_k^{(n)}(\cdot), \dots, \bar{x}_k^{(n)}(\cdot))^T$, $k = \overline{1, m}$, — компоненты вектора X ;

$F(\cdot) = (\underline{f}_1^{(n)}(\cdot), \bar{f}_1^{(n)}(\cdot), \dots, \underline{f}_m^{(n)}(\cdot), \bar{f}_m^{(n)}(\cdot))^T$ — заданный вектор нечетких переменных;

$$\underline{f}_k^{(n)} = -(\underline{f}_k(\cdot), \dots, \underline{f}_k^{(n)}(\cdot))^T;$$

$$\bar{f}_k^{(n)} = -(\bar{f}_k(\cdot), \dots, \bar{f}_k^{(n)}(\cdot))^T;$$

$$S = \begin{pmatrix} S^{(1,1)} & \dots & S^{(1,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S^{(m,1)} & \dots & S^{(m,m)} \end{pmatrix} \text{ — матрица с матричными элементами}$$

ментами

$$W^{(i,j)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(ij)} & S_{12}^{(ij)} \\ S_{21}^{(ij)} & S_{22}^{(ij)} \end{pmatrix};$$

$$S_{11}^{(ij)} = S_{22}^{(ij)} = \begin{pmatrix} S_{00}^{(ij)} - 1 & \dots & S_{0n}^{(ij)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n0}^{(ij)} & \dots & S_{nn}^{(ij)} - 1 \end{pmatrix};$$

$$S_{12}^{(ij)} = S_{21}^{(ij)} = \begin{pmatrix} S_{00}^{*(ij)} & \dots & S_{0n}^{*(ij)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n0}^{*(ij)} & \dots & S_{nn}^{*(ij)} \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Пример 3. Имеем

$$\underline{f}_1(s, r) = s \cdot r - \frac{27}{4}s^2(r^3 - 2) - \frac{14}{3}s^2r - \frac{1}{4}s^2r(r^4 + 2);$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(s, r) &= \frac{14}{3}s^2(r - 2) + \frac{3}{4}s^2(r^3 - 2) - s(r - 2) + \\ &+ \frac{9}{4}s^2r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_2(s, r) &= s(s^5 + 2r) - 14,1(s - 2)^2(r^3 - 2) - \frac{8}{3}(s^2 + 1)r - \\ &- 0,3(s - 2)^3r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(s, r) &= \frac{8}{3}(s^2 + 1)(r - 2) - s(3r^3 - 6) + \\ &+ 0,9(s - 2)^2(r^3 - 2) + 4,7(s - 2)r(r^4 + 2); \end{aligned}$$

$$K_{11}(s, \tau) = s^2(1 + \tau); \quad K_{12}(s, \tau) = s^2(1 - \tau^2);$$

$$K_{21}(s, \tau) = (1 + s^2)\tau; \quad K_{22}(s, \tau) = (s - 2)(1 - \tau^3),$$

$0 \leq s, \tau \leq 2$, — совокупность ядер.

Решение. В этих условиях при $z = 0$ (z — точка тейлоровского разложения) получим:

$$W^{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad W^{(1,2)} = (0)_{i,j}; \quad i, j = \overline{1, 4};$$

$$W^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad W^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1,2 & -11 & -\frac{94}{5} \\ -3 & -2,2 & 11 & \frac{94}{5} \\ -11 & -\frac{94}{5} & 2 & 1,2 \\ 11 & \frac{94}{5} & -3 & -2,2 \end{pmatrix}.$$

Решение НСЛУ (20) дает:

$$X = S^{-1}F,$$

где

$$X = X(a = 0, r) = (\underline{x}_1, \underline{x}_1^*, \bar{x}_1, \bar{x}_1^*, \underline{x}_2, \underline{x}_2^*, \bar{x}_2, \bar{x}_2^*)^T;$$

$$S^{-1}F = (0, r, 0, 2 - r, 0, r^5 + 2r, 0, 6 - r^3)^T. \quad \blacklozenge$$

3.4. Оценивание нечеткого состояния методом вырожденных ядер

Полагается, что если ядро уравнения представляется в виде конечной суммы произведений функций от τ на функцию от s , тогда уравнение (19) с

ядром $K(s, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau)$ представляет собой

нечеткое интегральное уравнение Фредгольма с четким вырожденным ядром [22, 23]. Здесь, как и ранее (см. п. 3.2) для существования и единственности нечеткого решения по методу последовательных приближений полагается, что $a_i(s)$ определено, кусочно-непрерывно по Хаусдорфу и ограничено первой производной по Сейккала на $s \in [a, b] \subset R$, $b_i(\tau)$ имеет аналогичное ограничение на $\tau \in [0, t] \subset R$.

Модифицируем известный метод решения традиционного уравнения с вырожденным ядром для решения соответствующего нечеткого уравнения [24].

Пусть имеем нечеткое интегральное уравнение (19), ядро которого

$$K(s, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau),$$

и на промежутке интегрирования $[a, b]$ выполнены такие типы неравенств:

$$(i): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) \geq 0, \\ a \leq \tau \leq b; \end{cases} \quad (ii): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) < 0, \\ a \leq \tau \leq b; \end{cases}$$

$$(iii): \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) \geq 0, \\ a \leq \tau \leq c, \\ \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau) < 0, \\ c \leq \tau \leq b. \end{cases}$$

Тогда в случае (i) для системы уравнений (19) будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_H(s) &= f_H(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_H(\tau)d\tau \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + \sum_{i=1}^n a_i(s)\underline{x}_i, \\ \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + \sum_{i=1}^n a_i(s)\bar{x}_i, \\ \underline{x}_i = \int_a^b b_i(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau, \bar{x}_i = \int_a^b b_i(\tau)\bar{x}(\tau)d\tau. \end{cases} \quad (21) \end{aligned}$$

Умножив соотношения (21) на $b_i(\tau)$ и затем проинтегрировав их на промежутке $[a, b]$, получим соотношения

$$\underline{x}_i = \underline{f}_i + \sum_{i=1}^n a_{ij}^1 \underline{x}_i, \quad \underline{f}_i = \int_a^b \underline{f}(\tau)b_i(\tau)d\tau,$$

$$a_{ij}^1 = \int_a^b b_i(\tau)a_j(\tau)d\tau,$$

$$\bar{x}_i = \bar{f}_i + a_{ij}^1 \bar{x}_i, \quad \bar{f}_i = \int_a^b \bar{f}(\tau)b_i(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эти соотношения приводят к НСЛУ

$$X_H = AX_H + F_H,$$

где

$$X_H = (\underline{X}|\bar{X})^T; \quad \underline{X} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n); \quad \bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n);$$

$$F_H = (\underline{F}|\bar{F})^T,$$

$$F_H = (\underline{F}|\bar{F}); \quad \underline{F} = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n), \quad \bar{F} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n);$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^1 \end{pmatrix}; \quad A^1 = (a_{ij}^1), \quad a_{ij}^1 = \int_a^b b_i(\tau)a_j(\tau)d\tau, \\ i, j = \overline{1, n},$$

и которое можно представить в традиционной форме, принятой в теории нечетких вычислений [19, 20]:

$$(I - A)X_H = F_H, \quad I - \text{единичная матрица.} \quad (22)$$

В статьях [19, 20] рассмотрен случай, когда $|I - A| = 0$.

Пример 4. Рассмотрим интегральное уравнение вида (21):

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^{0.5} s\tau x_H(\tau)d\tau, \quad s \in [0, 0.5],$$

в котором

$$f_H(s) = f(s, r) = (\underline{f}(s, r), \bar{f}(s, r) | r \in [0, 1]);$$

$$K(s, \tau) = s\tau \geq 0, \quad a_i(s) = s, \quad b_i(\tau) = \tau.$$

Решение находится из нечеткого матричного уравнения (22), в котором элементы матриц представляют собой

$$X_H = X(s, r) = (\underline{x}|\bar{x}_1)^T;$$

$$F_H = F(s, r) = \left(\underline{f}_1 = \int_0^{0.5} \underline{f}(\tau)\tau d\tau \middle| \bar{f}_1 = \int_0^{0.5} \bar{f}(\tau)\tau d\tau \right)^T;$$

$$a_{ij}^1 = \int_0^{0.5} \tau^2 d\tau = \frac{\tau^3}{3} \bigg|_0^{0.5} = \frac{1}{24};$$

$$I - A = 1 - a_{11}^1 = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}.$$

Следовательно,

$$\underline{x}_1 = \frac{24}{23} \int_0^{0.5} \underline{f}(\tau)\tau d\tau, \quad \bar{x}_1 = \frac{24}{23} \int_0^{0.5} \bar{f}(\tau)\tau d\tau$$

и решение уравнения имеет вид:

$$x_H(s) = (\underline{x}(s, r), \bar{x}(s, r) | r \in [0, 1]),$$

в котором

$$\underline{x}(s, r) = \underline{f}(s, r) + s\underline{x}_1, \quad \bar{x}(s, r) = \bar{f}(s, r) + s\bar{x}_1.$$

В случае (ii) после вычислений, аналогичных (i), с учетом свойства умножения для нечетких переменных x

$$kx = \begin{cases} (k\underline{x}, k\bar{x}), & k \geq 0, k \in R, \\ (k\bar{x}, k\underline{x}), & k < 0, \end{cases}$$



получим

$$(\bar{X}|\underline{X})^T = (-I\underline{X}|-I\bar{X})^T,$$

откуда после преобразований будем иметь:

$$\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \bar{F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I\underline{X} \\ -I\bar{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I\underline{F} \\ -I\bar{F} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (I + A)X_H = -F_H. \blacklozenge$$

3.5. Оценка нечеткого состояния методом невырожденного ядра, аппроксимируемого вырожденным

Пусть в соотношении (21) ядро имеет вид $K(s, \tau) = K(s \cdot \tau)$, тогда в соответствии с теилоровским разложением при $(s \cdot \tau) \simeq 0$ получим:

$$K(s \cdot \tau) \sum_{i=1}^n e_i(s \cdot \tau)^i = \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(\tau).$$

Следовательно, для уравнения

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_a^b K(s, \tau)x_H(\tau)d\tau$$

может быть применен метод из п. 3.4.

Пример 5. Имеем

$$x_H(s) = f_H(s) + \int_0^{0.5} \sin(s \cdot \tau)x_H(\tau)d\tau.$$

Используем теилоровскую аппроксимацию ядра $K(s \cdot \tau) \simeq s \cdot \tau$, тогда далее применяются результаты примера 4.

При аппроксимации

$$K(s \cdot \tau) \simeq s \cdot \tau - \frac{1}{3}(s \cdot \tau)^3 = a_1 b_1 \Big|_{a_1=3}^{a_1=s} + a_2 b_2 \Big|_{a_2=3^3}^{a_2=s^3} \Big|_{b_1=\tau}^{b_1=s \cdot \tau} + b_2 = -\frac{1}{3}\tau^3$$

интегральное уравнение также решается методом, описанным в п. 3.4. $\blacklozenge$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе определения нечеткого интеграла Римана сформулирована постановка задачи об оценивании состояний моделей, описываемых нечеткими интегральными уравнениями Фредгольма — Вольтерра в предположении существования и единственности их решений.

Рассмотрены различные методы оценивания нечетких интегральных уравнений, а именно: нечеткое преобразование Лапласа, метод «вложения» моделей, теилоровское оценивание вырожденных ядер, оценивание невырожденных ядер вырожденными формами. Для них решены тестовые приме-

ры и показано, что некоторые решения связаны с решением нечетких систем линейных алгебраических уравнений.

В части 2 статьи будут рассмотрены другие нечеткие методы оценивания состояний линейных и нелинейных моделей интегральных уравнений, связанные с методом наименьших квадратов и его модификациями, оцениванием по методам Галеркина, Чебышева и функциям sinc.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонова С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 347 с. [Agafonova, S.A., German, A.D., Muratova, T.V. Differencial'nye uravneniya. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2011. — 347 s. (In Russian)]
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. — 228 с. [Volkov, I.K., Kanatnikov, A.N. Integral'nye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2015. — 228 s. (In Russian)]
3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 447 с. [Volkov, I.K., Zuev, S.M., Cvetkova, G.M. Sluchajnye processy. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2006. — 447 s. (In Russian)]
4. Левин В.И. Интервальные уравнения в задачах исследования неопределенных систем // Информационные технологии. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 147—153. [Levin, V.I. Interval Equations in Problems of Research of Uncertain Systems / Information Technologies. — 2018. — Vol. 24, no. 3. — P. 147—153. (In Russian)]
5. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во Тюменского госуниверситета, 2000. — 352 с. [Altunin, A.E., Semuhin, M.V. Modeli i algoritmy prinyatiya reshenij v nechetkikh usloviyah. — Tyumen': Izd-vo Tyumenskogo gosuniversiteta, 2000. — 352 s. (In Russian)]
6. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под редакцией Пупкова К.А. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 743 с. [Metody robastnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya / Pod redakciej Pupkova K.A. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2001. — 743 s. (In Russian)]
7. Дюбуа Д., Праде А. Теория возможностей: приложения и представление знаний в информатике. — М.: Радио и связь, 1990. — 287 с. [Dyubua, D., Prade, A. Teoriya vozmozhnostej: prilozheniya i predstavlenie znanij v informatike. — M.: Radio i Svyaz', 1990. — 287 s. (In Russian)]
8. Мочалов И.А., Петрунин Н.Г., Редькин А.С., Цегельский С.В. Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение № 4 к журналу «Информационные технологии». — 2003. — С. 1—24. [Mochalov, I.A., Petrunin, N.G., Red'kin, A.S., Cegelskij, S.V. Nchetkie veroyatnostno-statisticheskie metody // Prilozhenie No. 4 k zhurnalu «Informacionnye Tekhnologii». — 2003. — S. 1—24. (In Russian)]
9. Мочалов И.А., Хрисат М.С. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — № 2 (210). — С. 14—22. [Mochalov, I.A., Khrisat, M.S. Estimation Parameter Model Using Fuzzy Random Data / Information Technologies. — 2014. — No. 2 (210). — S. 14—22. (In Russian)]
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с. [Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. Elementy teorii funkciy i funk-

- cional'nogo analiza. — M.: Nauka, 1981. — 544 s. (In Russian)]
11. *Hochstadt, H.* Integral Equations. Pure and Applied Mathematics // New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, 1973. — 282 p.
 12. *Congxin, W., and Ming, M.* On the Integrals, Series and Integral Equations of Fuzzy Set-Valued Functions // Journal of Harbin Institute of Technology. — 1990. — Vol. 21. — P. 9–11.
 13. *Park, J.Y., Jeong, J.V.* On Existence and Uniqueness of Solution of Fuzzy Volterra — Fredholm Integral Equations // Fuzzy Sets & Systems. — 2000. — No. 115. — P. 425–431.
 14. *Friedman, M., Ma, M. and Kandel, A.* Numerical Solutions of Fuzzy Differential and Integral Equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — Vol. 106, no. 1. — P. 35–48.
 15. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981. — 384 с. [*Lizorkin, P.I.* Kurs differencial'nyh i integral'nyh uravnenij s dopolnitel'nyimi glavami analiza. — M.: Nauka, 1981. — 384 s. (In Russian)]
 16. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах математического моделирования. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 4. — С. 251–257. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy transformation of laplace in tasks of fuzzy mathematical modelling. Part 1. / Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 4. — S. 251–257. (In Russian)]
 17. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в задачах нечеткого математического моделирования. Ч. 2. Нечеткое управление // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23. — № 5. — С. 362–369. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, I.A.* Fuzzy Transformation of Laplace in Tasks of Fuzzy Mathematical Modelling. Part II / Information Technologies. — 2017. — Vol. 23, no. 5. — S. 362–369. (In Russian)]
 18. *Friedman, M., Ming, M., Kandel, A.* Fuzzy Linear Systems // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — No. 96. — P. 201–209.
 19. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов А.И.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 1. Полные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 4. — С. 3–14. DOI: <http://doi.org/10.25728/ru.2019.4.1>. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, E.A.* Methods of Solving Fuzzy Systems of Linear Equations. Part 1. Complete Systems / Control Sciences. — 2019. — No. 4. — P. 3–14. (In Russian)]
 20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов А.И.* Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 2. Неполные системы // Проблемы управления. — 2019. — № 5. — С. 19–28. DOI: <http://doi.org/10.25728/ru.2019.5.2>. [*Demenkov, N.P., Mikrin, E.A., Mochalov, E.A.* Methods of Solving Fuzzy Systems of Linear Equations. Part 2. Incomplete Systems / Control Sciences. — 2019. — No. 5. — P. 19–28. (In Russian)]
 21. *Jahaniagh, M., Allahvianloo, T., and Otadi, M.* Numerical Solution of Fuzzy Integral Equations // Applied Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 2, no. 1. — P. 33–46.
 22. *Jafarian, A., Measoomy Nia, S., Tavan, S. and Banifazel, M.* Solving Linear Fredholm Fuzzy Integral Equations Systems by Taylor Expansion Method // Applied Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 6, no. 83. — P. 4103–4117.
 23. *Jafarian, A., Measoomy Nia, S., and Tavan, S.* A Numerical Scheme to Solve Fuzzy Linear Volterra Integral Equations Systems // Journal of Applied Mathematics. — 2012. — Article ID 216923. — 17 p.
 24. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с. [*Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya.* Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979. — 285 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Ф.Ф. Пашенко.

Поступила в редакцию 21.02.2020, после доработки 18.11.2020.
Принята к публикации 24.11.2020.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ dnf@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН,
ПАО «РКК “Энергия” им. С.П. Королева»;
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ mochalov2501@yandex.ru.

STATE ESTIMATION METHODS FOR FUZZY INTEGRAL MODELS.

Part I: Approximation methods

N.P. Demenkov¹, E.A. Mikrin, and I.A. Mochalov²

^{1,2} Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

¹✉ dnf@bmstu.ru, ²✉ mochalov2501@yandex.ru

Abstract. The existing and newly proposed methods for estimating the state of integral models with fuzzy uncertainty are reviewed. A fuzzy integral model with the limit transition defined in the Hausdorff metric is introduced. This model is used to formulate the state estimation problem for the models described by fuzzy Fredholm—Volterra integral equations. Several fuzzy methods for solving this problem are considered as follows: the fuzzy Laplace transform, the method of “embedding” models (transforming an original system into a higher dimension system and solving the resulting problem by traditional linear algebra methods), the Taylor estimation of the degenerate nuclei under the integral sign that are represented by power polynomials, and the estimation of the nondegenerate nuclei by degenerate forms using the Taylor approximation. As shown below, in some cases, the estimation results are related to the solution of fuzzy systems of linear algebraic equations. Test examples are solved for them.

Keywords: fuzzy Riemann integral, fuzzy integral model, fuzzy methods for estimating integral models.