УДК 517.97

НЕЧЕТКИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ. Ч. 1. Нечеткое математическое моделирование

Н.П. Деменков, Е.А. Микрин, И.А. Мочалов

Рассмотрены методы решения нечетких краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. В части 1 представлены метод нечеткого преобразования Лапласа и нечеткий вариационно-итерационный метод для решения нечетких задач математического моделирования, в части 2 — нечеткий начальный метод и нечеткий метод Галеркина оптимизации нечетких задач управления. Перечисленные методы продемонстрированы на примерах. В частности, решены нечеткие задачи на безусловный экстремум нечеткого интегрального функционала и расчета периодических режимов в нечеткой поисковой системе автоматической оптимизации с запоминанием экстремума. В заключение приведены выводы и перечислены некоторые актуальные нечеткие задачи гироскопии, нечеткого управления летательными аэродинамическими и космическими аппаратами, которые могут быть решены рассмотренными методами.

Ключевые слова: нечеткая краевая задача, дифференциальное уравнение, нечеткое преобразование Лапласа, нечеткий вариационно-итерационный метод, нечеткий начальный метод, нечеткий метод Галеркина.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи возникают при решении различных проблем математического моделирования и управления — например, при управлении положением спутника с минимальным расходом энергии, прицельным артиллерийским огнем, при расчете параметров автоколебаний в поисковых системах автоматической оптимизации, решении задач вариационного исчисления, приводящих к различного рода сплайн-интерполяциям и оптимальным регуляторам, и многих других [1—3]. Оптимизация функционалов, зависящих от искомой функции и ее производных, приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка [4—6].

Перечисленные задачи описываются, как правило, традиционными дифференциальными уравнениями с традиционными краевыми условиями. Для их решения разработаны соответствующие методы — см., например, работы [7, 8].

Однако на практике на объект управления действуют возмущения, а динамические параметры дифференциальных уравнений и краевые условия задаются с некоторой неопределенностью.

Для представления возмущений используются различные математические модели, теория которых интенсивно разрабатывается и активно применяется в различных приложениях. Наиболее интенсивно для этих целей применяются методы теории интервалов [9], теории нечетких множеств [10], теории возможностей [11], гибридной вероятностной теории [12], теории нечетких случайных процессов [13] и др.

Наиболее адекватной, простой и универсальной в представлении различного рода возмущений является теория нечетких множеств. Она служит неким ядром, вокруг которого группируются существующие ныне модели возмущений и их модификации. Например, в гибридной вероятностной модели [12] два компонента: один из них — вероятностный и описывает помехи измерений, а другой — это нечеткий, который описывает неточности математической модели. Такое представление неопределенности более адекватно по сравнению с традиционной вероятностной моделью. Другой пример связан с нечетким представлением случайных процессов — нечеткий случайный процесс Маркова в форме цепей с нечеткими состояниями позволяет уменьшить размерность переходной матрицы состояний, что приводит к уменьшению объема вычислений при ее обращении [13].

Можно привести и другие примеры достоинств применения нечетких методов для решения задач математического моделирования и управления. По нашему мнению, основные преимущества применения нечетких методов в инженерных расчетах состоят в получении диапазона искомых решений по нечеткой модели, которые в лингвистических терминах трактуются как наихудшие и наилучшие решения. Такое представление результатов нечетких расчетов имеет похожие черты с результатами робастной теории управления и гарантированного оценивания в теории идентификации. Однако нечеткая теория более простая в расчетах по сравнению с робастной и гарантированной теориями, что делает нечеткую теорию привлекательной для инженерной деятельности.

Существенный недостаток нечетких методов состоит в некоем произволе и отсутствии статистической повторяемости в описании типа функций принадлежностей, представляющих одну из моделей неконтролируемых возмущений в системе.

В целом же простота, универсальность и адекватность в описании возмущений компенсируют недостатки нечетких методов. Они занимают достойное место в инструментарии инженерной деятельности.

Одним из способов учета влияния возмущений заключается в использовании моделей неопределенности, построенных на основе теории нечетких множеств, что приводит к нечетким дифференциальным уравнениям и нечетким системам управления [14—16].

В практической деятельности дифференциальные уравнения обычно нелинейные, поэтому для решения нелинейных краевых задач применяются приближенные прямые методы, такие как методы Ритца, Галеркина, нечеткий метод наименьших квадратов. Решение $y_i(x)$ на i-й итерации ищется в виде

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{i} a_k \varphi_k(x), \quad i = 1, 2, ..., n, ...,$$

где $\varphi_k(x)$ — координатные (базисные) функции заданного типа a_k — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. В методе Ритца они находятся из условия допустимости функций $\varphi_k(x)$, в методе Галеркина — из условия их ортогональности, а в нечетком методе наименьших квадратов из нечетких правил относительно элементов весовой матрицы.

Цель настоящей работы заключается в модификации известных традиционных методов для решения нечетких линейных и нелинейных двухточечных краевых задач (когда дополнительные условия на решение налагаются в точках на концах отрезка), которые возникают как при решении нечетких задач математического моделирования (часть 1), так и при конструировании нечетких оптимальных регуляторов, анализе периодических режимов нечетких систем автоматической оптимизации (часть 2) и др.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Далее будем пользоваться базовыми определениями, подробно изложенными в работах [10, 14].

При математическом моделировании и анализе нечетких систем автоматической оптимизации часто возникают двухточечные нечеткие краевые задачи для дифференциальных уравнений или их систем. В некоторых случаях эти задачи могут быть преобразованы в одноточечные (начальные). Однако часто целесообразно решать исходную двухточечную краевую задачу.

В настоящей статье рассмотрены некоторые методы решения двухточечных краевых задач: метод нечеткого преобразования Лапласа, нечеткий вариационно-итерационный метод, нечеткий начальный метод и нечеткий метод Галеркина, позволяющие синтезировать нечеткие оптимальные системы управления [17—19].

Одна из таких оптимизационных задач возникает при построении адекватных нечетких математических моделей для нечеткой вариационной задачи с неподвижными границами. Они, в частности, формулируются для нечетких сплайн-аппроксимаций различных типов, нахождения нечеткого программного управления и других нечетких оптимизационных задач.

Определение 1. Одномерная функция принадлежности нечеткого множества A задается отображением r_A: $A \subset R_1 \to [0; 1] \subset R_1$. Полагается, что $r_A(x) = (\underline{r}_A(x), \bar{r}_A(x))$, $x \in A$, где $\underline{r}_A(x)$ — левая, а $\bar{r}_A(x)$ — правая ветви функции $r_A(x)$ относительно ядра множества A (core A). В параметрической форме с использованием обратного отображения r_A^{-1}: $x_A(r) = (\underline{x}_A(r), \bar{x}_A(r) \mid r \in [0; 1])$. Многомерный случай задается отображением r_A: $A \subset R_m \to [0; 1] \subset R_1$. ♦

Для нечеткого множества принято обозначение $E_m = \{r_A(x), x \in R_m\}$.

Определение 2. Одномерная нечеткая функция задается отображением $f_н$: $R_1 \to E_1$ и обозначается: $f_н(x) = f(x, r) = (\underline{f}(x, r), \bar{f}(x, r)) \mid r \in [0; 1])$, где «н» — индекс нечеткости, а $\underline{f}(x, r)$, $\bar{f}(x, r)$ — ветви нечеткой функции. ♦

По аналогии с традиционным банаховым пространством для совокупности четких функций вводится его нечеткий аналог, в котором задается метрика Хаусдорфа:

$$L_х(f_{н1}(t), f_{н2}(t)) = \sup_r \{\max_t [|\underline{f}_1(t, r) - \underline{f}_2(t, r)|, |\bar{f}_1(t, r) - \bar{f}_2(t, r)|]\},$$

а операции сложения и умножения на константу выполняются по правилам, принятым в теории нечетких множеств.

Определение 3. Нечеткий функционал $J_н$ задается отображением $J_н$: $\{f_н\} \in E_1 \to R_1$. Одна из его форм — нечеткий интегральный функционал: $J_н = \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_н(t))dt$, а $f(x_н(t))$ — нечеткий интегрант.

Определение 4. Нечеткий интеграл $J_н = \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_н(t))dt$ определяется следующим образом. Имеем представление: $R_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_н(\xi))(t_i - t_{i-1})$, $\forall\xi \in [t_i - t_{i-1}] \subset R_1$, $i = 1, ..., n$, и для него задана совокупность разбиений $P = \{t = t_0, ..., t = T\} \in [t_0, T] \subset R_1$ и $\Delta = \max\{|t_i - t_{i-1}|\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда нечеткий интегральный функционал определяется в виде $\int_{t=t_0}^{t=T} f(x_н(t))dt = \lim_{\Delta \to 0} R_P$, где предел задается в метрике Хаусдорфа $L_х$. ♦

Далее в задаче нечеткого математического моделирования будем рассматривать нечеткие интегральные функционалы типа:

$$\int_{t=t_0}^{t=T} f(x_н(t),\ \dot{x}_н^h(t),\ t)dt; \quad \int_{t=t_0}^{t=T} f(x_н(t),\ \dot{x}_н^h(t),\ \ddot{x}_н^h(t),\ t)dt,$$

где $\dot{x}_н^h(t)$, $\ddot{x}_н^h(t)$ — нечеткие производные. Индекс «h» означает обобщенную производную, введенную Хукухарой (P.M. Hukuhara). Определения первой и второй производных по Хукухаре приведены в работе [19].

Нечеткое вариационное исчисление применительно к задачам нечеткого математического моделирования может применяться в двух направлениях. *Первое из них* — это конструирование ее нечеткой теории: нечеткая непрерывность, нечеткая дифференцируемость, нечеткий экстремум и т. д. *Второе направление* — это использование определений и теорем в созданной уже к настоящему времени нечеткой теории дифференциальных и интегральных уравнений и методов их решений. Прием второго направления состоит в решении четкой вариационной задачи традиционными методами до получения уравнения Эйлера в традиционной форме, а далее оно объявляется нечетким из-за наличия неопределенности в граничных условиях и параметрах, представляемой нечеткими элементами. Затем это нечеткое уравнение Эйлера решается уже созданными нечеткими методами, а получаемое нечеткое решение объявляется решением нечеткой вариационной задачи. Можно полагать, что сейчас второе направление является перспективным, в его рамках активно разрабатываются методы решения нечетких дифференциальных и интегральных уравнений [14, 15].

Нечеткую задачу математического моделирования представим в виде оптимизационной задачи для нечеткого интегрального функционала. Имеем:

— нечеткие функции $f_н(t)$ определены и непрерывны в метрике $L_х$ Хаусдорфа на отрезке $[t_0, T] \subset R_1$, где t_0, T — заданные четкие числа;

— функции $x_н(t)$ удовлетворяют нечетким граничным условиям:

$$x_н(t = t_0) = x_{н0}, \quad x_н(t = T) = x_{нT},$$

где нечеткие переменные заданы своими функциями принадлежностей:

$$x_{н0} = x_0(r) = (\underline{x}_0(r), \bar{x}_0(r) \mid r \in [0; 1]);$$

$$x_{нT} = x_T(r) = (\underline{x}_T(r), \bar{x}_T(r) \mid r \in [0; 1])$$

и трактуются как некие модели неопределенности, представляющие погрешности или помехи в задании граничных условий. Эти условия характеризуют прохождение нечетких функций через две нечетко закрепленные граничные точки.

На нечетком множестве E_1 задан нечеткий интегральный функционал

$$J_{\text{н}} = J(x_{\text{н}}(t)) = \int\limits_{t=t_0}^{t=T} f(x_{\text{н}}(t),\ \dot{x}_{\text{н}}^h(t),\ \ddot{x}_{\text{н}}^h(t),\ t)dt. \quad (1)$$

Среди допустимых нечетких кривых $x_{\text{н}}(t) \subset E_1$ необходимо найти нечеткую кривую $x_{\text{н}}^*(t)$, на которой нечеткий функционал (1) достигает экстремума

$$J(x_{\text{н}}^*(t)) = \underset{x_{\text{н}}(t) \in E_1}{\operatorname{extr}} \int\limits_{t=t_0}^{t=T} f(x_{\text{н}}(t),\ \dot{x}_{\text{н}}^h(t),\ \ddot{x}_{\text{н}}^h(t),\ t)dt. \quad (2)$$

В этой задаче отсутствуют ограничения, кроме нечетких граничных условий, поэтому по аналогии с традиционным подходом задача (1), (2) является нечеткой задачей на безусловный экстремум нечеткого интегрального функционала.

Нечеткими моделями представления (1), (2) являются нечеткие линейная и кубическая интерполяционные функции, которые принимают в узлах сетки заданные нечеткие значения и минимизируют нечеткий интегральный функционал типа (1).

Нечеткая линейная сплайн-интерполяционная функция $x_{\text{н}}(t)$, $t \in [t_0,\ T]$, находится из условия:

$$\min_{x_{\text{н}} \in E_1} J_{\text{н}} = \min \int\limits_{t=t_0}^{t=T} (\dot{x}_{\text{н}}^h(t)dt.$$

Нечеткая кубическая сплайн-интерполяционная функция $x_{\text{н}}(t)$, $t \in [t_0,\ T]$, находится из условия

$$\min_{x_{\text{н}} \in E_1} J_{\text{н}} = \min \int\limits_{t=t_0}^{t=T} (\ddot{x}_{\text{н}}^h(t)dt.$$

В последнем случае нечеткий интегральный функционал $J_{\text{н}}$ как аналог энергии, варьируемой в некотором диапазоне, упругого стержня, закрепленного в точках плоскости $(t_k,\ x_{\text{н}k})$, и на нечетком кубическом сплайне реализующий некий диапазон минимума этой энергии.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Метод нечеткого преобразования Лапласа [17—21]

Имеется нечеткая двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка относительно нечеткой координаты $x_{j\text{н}}$ вектора состояний $x_{\text{н}}$:

$$\ddot{x}_{\text{н}}^h = f(x_{\text{н}}(t),\ \dot{x}_{\text{н}}^h(t),\ t), \quad x_{\text{н}}(t_0) = x_{\text{н}0},\ \ x_{\text{н}}(t_k) = x_{\text{н}k}. \quad (3)$$

Здесь индекс «j» номера координаты опущен для простоты обозначений. Индекс «h» обозначает обобщенную производную по Хукухаре.

Согласно работам [19—21] будем иметь четыре типа нечетких решений и задач для уравнения (3): $(i,\ i)$, $(i,\ ii)$, $(ii,\ i)$, $(ii,\ ii)$. В скобках символ на первом месте обозначает тип первой обобщенной производной, символ на втором месте после запятой — тип второй обобщенной производной. Таким образом, для нечеткой двухточечной краевой задачи второго порядка будем иметь четыре решения, получаемые из четырех нечетких задач. Имеем, опустив индекс «h» для простоты обозначений, четыре типа нечетких задач:

$$\text{тип } (i,\ i){:}\ \begin{cases} \underline{\ddot{x}}^{(i)}(r,t) = \underline{f}(x(r,t), \dot{x}^{(i)}(r,t), t), \\ \underline{x}(r,0) = \underline{x}_0(r), \underline{x}(r,t_k) = \underline{x}_k(r), \\ \bar{\ddot{x}}^{(i)}(r,t) = \bar{f}(x(r,t), \dot{x}^{(i)}(r,t), t), \\ \bar{x}(r,0) = \bar{x}_0(r),\ \ \bar{x}(r,t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0;\ 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (i,\ ii){:}\ \begin{cases} \underline{\ddot{x}}^{(i)}(r,t) = \bar{f}(x(r,t), \dot{x}^{(i)}(r,t), t), \\ \underline{x}(r,0) = \underline{x}_0(r), \underline{x}(r,t_k) = \underline{x}_k(r), \\ \bar{\ddot{x}}^{(i)}(r,t) = \underline{f}(x(r,t), \dot{x}^{(i)}(r,t), t), \\ \bar{x}(r,0) = \bar{x}_0(r),\ \ \bar{x}(r,t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0;\ 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (ii,\ i){:}\ \begin{cases} \underline{\ddot{x}}^{(ii)}(r,t) = \bar{f}(x(r,t), \dot{x}^{(ii)}(r,t), t), \\ \underline{x}(r,0) = \underline{x}_0(r), \underline{x}(r,t_k) = \underline{x}_k(r), \\ \bar{\ddot{x}}(r,t) = f(x(r,t), \dot{x}^{(ii)}(r,t), t), \\ \bar{x}(r,0) = \bar{x}_0(r),\ \ \bar{x}(r,t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0;\ 1]; \end{cases}$$

$$\text{тип } (ii,\ ii){:}\ \begin{cases} \underline{\ddot{x}}^{(ii)}(r,t) = \bar{f}(x(r,t), \dot{x}^{(ii)}(r,t), t), \\ \underline{x}(r,0) = \underline{x}_0, \underline{x}(r,t_k) = \underline{x}_k(r), \\ \bar{\ddot{x}}^{(ii)}(r,t) = \underline{f}(x(r,t), \dot{x}^{(ii)}(r,t), t), \\ \bar{x}(r,0) = \bar{x}_0(r),\ \ \bar{x}(r,t_k) = \bar{x}_k(r), \\ r \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

Относительно производной Хукухары имеет место следующее суждение. Для первой производной в теории нечетких множеств необходимо задание операции вычитания для приращения нечеткой функции, операции умножения на константу и операции предельного перехода относительно заданной метрики в пространстве нечетких переменных. При выполнении условия полноты в этом пространстве оно превращается в банахово пространство, в котором существует достаточное число разнообразных производных в зависимости от способа задания метрики, но в работах [14—16, 18] показано, что все производные эквивалентны между собой, кроме производных Сейккала и Бакли—Фейринга. Поэтому в теории нечетких начальных задач используются упомянутые две производные и соответственно имеются два различных типа решений.

Для упомянутых первых производных не определена нечеткая вторая производная, которая возникает в нечеткой краевой задаче для нечеткого дифференциального уравнения второго порядка. Для устранения этой трудности обычно используется нечеткая производная Хукухары, которая имеет два типа первой производной, поэтому для второй производной и соответствующих типов нечетких дифференциальных уравнений второго порядка возникает четыре их типа, которые представлены выше. Это приводит к четырем типам решений нечеткой краевой задачи. В этом состоит характерная особенность нечетких (мягких) вычислений, т. е. неединственность решений — особенность нечетких вычислений.

Определение 5. Для нечеткой функции (оригинал) $f_{н}(t) = (\underline{f}(r, t), \overline{f}(r, t)| \ r \in [0; 1])$ и действительной переменной (параметр «s») ее нечеткое преобразование Лапласа [19—21]:

$$\hat{F}(s) = L\{f_{н}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_{н}(t)dt =$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f_{н}(t)dt = \left(\lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \underline{f}_{н}(t, r)dt, \right.$$

$$\left. \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \overline{f}_{н}(t, r)dt \mid r \in [0; 1] \right). \ \blacklozenge \qquad (4)$$

Полагается, что предел в выражении (4) существует.

В формуле (4) обычно используется обозначение

$$l[\underline{f}(t, r)] = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \underline{f}(t, r)dt,$$

$$l[\overline{f}(t, r)] = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} \overline{f}(t, r)dt,$$

поэтому будем иметь запись

$$L\{f_{н}(t)\} = (l[\underline{f}(t, r)], \ l[\overline{f}(t, r)] \mid r \in [0; 1]).$$

Расчеты для преобразования Лапласа $L\{\ddot{x}_{н}(t)\}$ по выражению (4) дают

$$L\{\ddot{x}_{н}(t)\} = s^2 L\{x_{н}(t)\} \ominus s x_{н}(t_0) \ominus \dot{x}_{н}(t_0),$$

где операция $\ominus$ определена в работах [19—21]. Здесь и далее операция $\ominus$ имеет смысл обычного прямого вычитания.

Аналогичные вычисления для $L\{\dot{x}(t)\}$ дают

$$L\{\dot{x}_{н}(t)\} = s \ L\{x_{н}(t)\} \ominus x_{н}(t_0).$$

Модифицируем выражение (3) и затем применим полученные соотношения. Тогда будем иметь

$$\ddot{x}_{н}(t) + c_1(t)x_{н}(t) + c_2(t)x_{н}(t) = \varphi_{н}(t),$$

$$x_{н}(t_0) = x_{н0}, \quad x_{н}(t_k) = x_{нk},$$

откуда при «$\ominus$» $\equiv$ «$-$» получим

$$s^2 L\{x_{н}(t)\} - s x_{н}(t_0) - \dot{x}_{н}(t_0) + c_1(t) L\{x_{н}(t) - x_{н}(t_0)\} +$$
$$+ c_2(t) \ L\{x_{н}(t)\} = L\{\varphi_{н}(t)\},$$

$$x_{н}(t_0) = x_{н0}, \quad x_{н}(t_k) = x_{нk}. \qquad (5)$$

Краевое условие $x_{н}(t_0) = x_{н0}$ используется для нахождения неизвестного $\dot{x}_{н}(t_0)$ в выражении (5).

Далее применяется обратное преобразование Лапласа L^{-1}, что приводит к нахождению искомого $\dot{x}^*_{н}(t)$.

Пример 1. Пусть имеем нечеткий интегральный функционал типа (1) в форме

$$J_{н} = \int_{t_0 = 0}^{t_k = T} [t x_{н}(t) + \dot{x}^h_{н}(t)]dt.$$

Необходимо найти нечеткую экстремаль $x^*_{н}(t)$, удовлетворяющую нечетким граничным условиям:

$$x_{н}(t_0 = 0) = x_{н0} = 0_{н} = (\underline{0}(r) = -1 + r,$$
$$\overline{0}(r) = 1 - r \mid r \in [0; 1]),$$

$$x_{н}(t_k = T) = x_{нT} = 0{,}5_{н} = (\underline{0{,}5}(r) = 0{,}5r,$$
$$\overline{0{,}5}(r) = 1 - 0{,}5r \mid r \in [0; 1]).$$

Здесь нечеткие элементы, имеющие индекс «н», определяются в соответствии с определением 2. Для решения примера нечеткой вариационной задачи с нечеткими граничными условиями воспользуемся приемом второго направления (см. выше) их решения. Для этого формируется традиционная задача, которая решается до получения уравнения Эйлера в традиционной форме. Имеем:

$$f = tx(t) + \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\dot{f}_x - \frac{\partial}{\partial t}\dot{f}_{\dot{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t - \frac{\partial}{\partial t}\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) - t = 0.$$

Переходим к нечеткому аналогу:

$$\ddot{x}^h_{\text{н}}(t) - a_{\text{н}}t = 0, \quad x_{\text{н}0} = 0_{\text{н}}, \quad x_{\text{н}T} = 0{,}5_{\text{н}}.$$

Решим эту нечеткую двухточечную задачу методом нечеткого преобразования Лапласа. В результате получим нечеткое решение (i, i)-типа:

$$x^*_{\text{н}}(t) = (\underline{x}^*_{(i,\,i)}(t, r),\ \bar{x}^*_{(i,\,i)}(t, r) \mid r \in [0;\ 1] \subset R_1).$$

Другие типы нечетких решений находятся аналогичным способом.

Для интерполяции нечетким линейным сплайном на отрезке $t \in [t_0 = 0,\ t_k = T = 1]$ имеем:

$$\min_{x_{\text{н}} \in E_1} J_{\text{н}} = \min_{x_{\text{н}} \in E_1} \int_{t_0 = 0}^{t_k = T} (\dot{x}^h_{\text{н}}(t)dt.$$

Переходя к традиционной вариационной задаче, получаем четкое уравнение Эйлера, которое приводится к его нечеткому аналогу путем введения индексов «н» и «h» — нечеткость функции и тип нечеткой производной соответственно. Далее, применяя нечеткое преобразование Лапласа, получим различные типы нечетких решений, для которых на нечеткой сетке

$$\begin{pmatrix} t_0, \ldots, t_k \\ x_{\text{н}0}, \ldots, x_{\text{н}k} \end{pmatrix}$$

путем решения соответствующих нечетких систем алгебраических уравнений находится совокупность нечетких линейных сплайнов. Заметим, что все типы нечетких решений дифференциальных уравнений проверяются, удовлетворяют ли они уравнению. Это приводит к сокращению числа решений уравнений и числа нечетких линейных сплайнов.

2.2. Вариационно-итерационный метод [22, 23]

Для нелинейной начальной задачи

$$M[x(v)] + N[x(v)] = g(v), \tag{6}$$

где M — линейный, а N — нелинейный операторы, $g(v)$ — заданная в аналитической форме функция, применяется метод корректирующего функционала

$$x_{n+1}(v) =$$

$$= x_n(v) + \int_0^v \lambda(v, t)\{M[x_n(t)] + N[\tilde{x}_n(t)] - g(t)\}dt, \tag{7}$$

где λ — множитель Лагранжа, определяемый из соответствующей вариационной задачи, x_n — приближенное решение уравнения (7) на n-й итерации, $\tilde{x}_n$ — ограниченная вариация для x_n, т. е. $\delta\tilde{x}_n = 0$. Кроме уравнений (6) и (7) рассматривается краевая задача второго порядка

$$X''(t) = F(t, X(t), X'(t)), \tag{8}$$

$$X(t = 0) = \Phi_1, \quad X(t = T) = \Phi_2, \tag{9}$$

где $X(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$, $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — неизвестные вещественные функции от переменной t, F — нелинейная непрерывная функция от t, $X(t)$, $X'(t)$, Φ_1 и Φ_2 — заданные векторы в R^n.

Для задачи (8) корректирующий функционал (7) задается в виде

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) +$$

$$+ \int_0^t \lambda(s)\{X''_n(s) - \tilde{F}[s, X_n(s), X'(s)]\}ds \tag{10}$$

с граничными условиями (9). Здесь $\tilde{F}(\cdot) = \delta F$ — вариация для функции F.

После вычисления вариации относительно $\lambda(s)$ в выражении (10) для вспомогательного функционала с множителями Лагранжа получим условия экстремума функционала в виде:

$$\lambda''(s) = 0; \quad 1 - \lambda'(s = t) = 0; \quad \lambda(s = t) = 0,$$

откуда очевидно, что $\lambda(s) = s - t$.

Подставляя найденные значения в выражении (10), получим следующую вариационную формулу вычисления $X_{n+1}(t)$ для задачи (8), (9):

$$X_{n+1}(t) = X_n(t) +$$

$$+ \int_0^t (s - t)\{X''(s) - \tilde{F}[s, X(s), X'(s)]\}ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для оценки точности применяется следующий прием: вычисляются $X_n(t)$ и $X_{n+1}(t)$ и сравниваются эти зависимости в нескольких точках отрезка $[t_0 = 0,\ t_k = t]$. Если в пределах требуемой точности их значения совпадают, то считается, что с требуемой точностью получено решение искомой задачи (8), (10). Если же $X_n(t)$ и $X_{n+1}(t)$ в выбранных точках не совпадают, то вычисляется $X_{n+2}(t)$, далее сравниваются $X_{n+1}(t)$, $X_{n+2}(t)$ и т. д. до тех пор, пока $X_{n+k}(t)$ и $X_{n+k+1}(t)$ не совпадут. Этот практический прием оценки точности достаточно надежен, хотя теоретически не совсем совершенен.

Пример 2. Решим краевую задачу вариационно-итерационным методом. Пусть дана двухточечная краевая задача

$$\ddot{x}(t) - x(t) = 0$$

с нечеткими краевыми условиями

$$x_н(t_0 = 0) = 0_н = (\underline{0} = -1 + r,\ \bar{0} = 1 - r \mid r \in [0, 1]),$$

$$x_н(t_k = 1) = 0{,}5_н = (\underline{0{,}5} = 0{,}5r,\ \overline{0{,}5} = 1 - 0{,}5r \mid r \in [0, 1]).$$

Необходимо найти нечеткую переменную $x_н^*(t) = x(t, r) = (\underline{x}(t, r),\ \bar{x}(t, r) \mid r \in [0; 1])$.

Точное решение (i, i)-типа для $\underline{x}^*(t, r)$, $\bar{x}^*(t, r)$ получены ранее на основе нечеткого преобразования Лапласа.

Приближенное решение (i, i)-типа получено по формулам вариационно-итерационного метода:

$$\underline{x}_{n+1}(t, r) = \underline{x}_n(t, r) + \int_0^t [(s - t)\ddot{\underline{x}}_n(s, r)]ds,$$

$$\bar{x}_{n+1}(t, r) = \bar{x}_n(t, r) + \int_0^t [(s - t)\ddot{\bar{x}}_n(s, r)]ds,$$

которые промоделированы при значениях $t = 0$; 1 и $r = 0$; 0,2; ...; 1,0. Результаты вычислений по точным и приближенным формулам показали приемлемую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для линейного и нелинейного дифференциальных уравнений сформулирована двухточечная краевая задача в нечеткой постановке, которая возникает как при решении нечетких задач математического моделирования, так и при синтезе нечетких оптимальных систем управления. Приведены некоторые методы их решения.

Рассмотрены нечеткое преобразование Лапласа и его применение для решения двухточечной краевой задачи. Приведен пример расчета с помощью нечеткого преобразования Лапласа нечеткой кривой, на которой нечеткий функционал достигает экстремума.

Рассмотрен метод, в основу которого положен нечеткий вариационно-итерационный принцип решения краевых задач, и дан пример его применения для решения нечеткой вариационной задачи с нечеткими граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Современная* математика для инженеров / Под ред. Э.Ф. Бекенбаха. — М.: ИИЛ, 1959. — 500 с.
2. *Казакевич В.В., Родов А.Б.* Системы автоматической оптимизации. — М.: Энергия, 1977. — 288 с.
3. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применения. — М.: Машиностроение, 1972. — 544 с.
4. *Атанс М., Фалб П.Л.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
5. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1969. — 192 с.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 208 с.
7. *Агафонова С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 347 с.
8. *Деменков Н.П.* Вычислительные аспекты решения задач оптимального управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — 171 с.
9. *Алтунин А.Е., Семухин М.В.* Модели и алгоритмы принятия решения в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. — 352 с.
10. *Методы* робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под. ред. Н.Д. Егупова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 743 с.
11. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. — М.: Радио и связь, 1990. — 286 с.
12. *Мочалов И.А., Хрисат М.С.* Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. — 2014. — № 2 (210). — С. 14—22.
13. *Мочалов И.А., Петрунин Н.Г., Редькин А.С.,* и др. Нечеткие вероятностно-статистические методы // Приложение к журналу «Информационные технологии». — 2003. — № 4. — С. 1—24.
14. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. I // Информационные технологии. — 2015. — № 3. — Т. 21. — С. 171—178.
15. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. II // Там же. — 2015. — № 4. — Т. 21. — С. 243—250.
16. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие уравнения в частных производных в задачах управления // Там же. — 2015. — № 8. — Т. 21. — С. 563—569.
17. *Friedman M., Ming M., Kandel A.* Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems. — 1988. — N 96. — P. 201—209.
18. *Buckley J.J., Feuring T.* Fuzzy differential equations // Ibid. — 2000. — N 100(1). — P. 43—54.
19. *Ahmad L., Farooq M., Ullah S., et al.* Solving fuzzy two-point boundary value problem using fuzzy Laplace Transform // Mathematics GM. — 2014. — N 2. — P. 1—17.
20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в моделировании. Ч. 1 // Информационные технологии. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 251—257.
21. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое преобразование Лапласа в моделировании. Ч. 2 // Там же. — 2017. — Т. 23, № 5. — С. 362—369.
22. *Armand A., Gouyandeh Z.* Solving two-point fuzzy boundary value problem using variational iteration method // Communication advanced computational science with applications. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1—10. doi: 10.5899/2013/cacsa-00006.
23. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. — 1909. — Vol. 1909, iss. 135. — P. 1—61. — URL: https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1 (дата обращения: 16.11.2017).

Статья представлена к публикации руководителем РРС А.К. Погодаевым.

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, доцент,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ dnp@bmstu.ru,

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН,
ген. конструктор, первый зам. ген. директора,
ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»;
зав. кафедрой, Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана, ✉ eugeny.mikrin@bmstu.ru,

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, профессор,
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, ✉ intelsyst@mail.ru.