УДК 519.71

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА ГОМОТОПИИ[1]

С.Н. Чуканов, Д.В. Ульянов

Предложен метод разложения векторного поля динамической системы, основанный на построении оператора гомотопии. Отмечено, что векторные поля динамических систем могут классифицироваться на основе SVD-декомпозиции потенциальной компоненты векторного поля. Метод декомпозиции векторного поля динамической системы применен для построения функций Ляпунова систем управления.

Ключевые слова: декомпозиция векторного поля, система управления, функция Ляпунова, декомпозиция Ходжа—Гельмгольца, оператор гомотопии.

ВВЕДЕНИЕ

В трехмерной теории поля известно разложение Гельмгольца векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ на безвихревое (потенциальное) поле и бездивергентное (соленоидальное) поле [1, 2]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — векторный потенциал; $\varphi(\mathbf{x})$ — скалярный потенциал. Граничные условия разложения Гельмгольца: векторное поле $\nabla\varphi$ — нормальное к границе $\partial\Omega$ области Ω, векторное поле $\nabla\times\mathbf{A}$ — касательное к границе $\partial\Omega$. Градиент потенциальной функции $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}\varphi(\mathbf{x})$ является наилучшей аппроксимацией векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Актуальность декомпозиции векторного поля для исследования динамических систем вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ обусловлена тем фактом, что использование скалярной потенциальной компоненты функции $\varphi(\mathbf{x})$ в качестве функции Ляпунова [3, 4] $V(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ позволяет оценивать устойчивость динамической системы, так как производная функции Ляпунова по времени $\dot{V}(\mathbf{x}) = (\nabla V(\mathbf{x}))^T\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -(\nabla\varphi(\mathbf{x}))^T\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и в случае потенциального векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ имеет вид $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\|\nabla\varphi(\mathbf{x})\|^2 \leqslant 0$.

Декомпозиция Гельмгольца может быть записана с помощью оператора Ходжа «*» для дифференциальных форм [2, 5]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\varphi(\mathbf{x}) + {*d}\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Однако при $n > 4$ оператор Ходжа 1-формам сопоставляет k-формы со значением $k > 3$ и декомпозиция Ходжа—Гельмгольца некорректна.

Цель настоящей работы — построение алгоритмов декомпозиции векторного поля гладкой динамической системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, при $n \geqslant 2$. Для этого в работе решена задача построения потенциальной и соленоидальной компонент векторного поля формированием оператора гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

1. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Для динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(0) = 0$, сформируем векторное поле $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}$ и соответствующую дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ в дуальном базисе $\left\langle dx_i, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle = \delta_{ij}$. Построим из векторного поля скалярный потен-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00146-а и № 06-01-00030).

циал применением оператора гомотопии с центром в точке $\mathbf{x}_0 \equiv 0$ для формы $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$:

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor (\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})d\mathbf{x})d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})d\lambda.$$

Оператор гомотопии $\mathbb{H}$ удовлетворяет тождеству $\boldsymbol{\omega} = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$ (см. Приложение 1). Первый член разложения — точная форма $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = d\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})d\lambda\right)$, следовательно, он является замкнутой формой: $d\boldsymbol{\omega}_e = d(d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = 0$. Если считать $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ скалярным потенциалом, то потенциальное векторное поле $\varphi'_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ дуально форме $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \varphi'_x d\mathbf{x}$.

Второй член разложения — антиточная форма $\boldsymbol{\omega}_a$ (по терминологии работы [6]): $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$, причем $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}(\mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}) = 0$.

Пример 1. Рассмотрим пример динамических уравнений для компонент вектора угловой скорости $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ при вращательном движении твердого тела с главными компонентами тензора инерции (100 80 60) и при действии на твердое тело управляющего вектора момента $\mathbf{m} = (-0{,}1x_1\ -0{,}1x_2\ -0{,}1x_3)^T$:

$$100\dot{x}_1 = 20x_2x_3 - 0{,}1x_1;$$

$$80\dot{x}_2 = -40x_1x_3 - 0{,}1x_2;$$

$$60\dot{x}_3 = 20x_1x_2 - 0{,}1x_3.$$

Построим дуальную дифференциальную форму: $\boldsymbol{\omega} = (20x_2x_3 - 0{,}1x_1)dx_1 + (-40x_1x_3 - 0{,}1x_2)dx_2 + (20x_1x_2 - 0{,}1x_3)dx_3$, к которой применим оператор гомотопии с $\mathbf{x}^0 \equiv 0$: $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})) = -0{,}05(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Отсюда точная форма: $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = d(-0{,}05(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = -0{,}1x_1dx_1 - 0{,}1x_2dx_2 - 0{,}1x_3dx_3$; соответствующее дуальное потенциальное векторное поле: $\mathbf{X}_e = -0{,}1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - 0{,}1x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - 0{,}1x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$. Векторное поле, дуальное антиточной форме: $\mathbf{X}_a = 20x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - 40x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + 20x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$. Если выбрать в качестве скалярной функции Ляпунова функцию $V(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}) = 0{,}05\|\mathbf{x}\|^2$, $V(\mathbf{x}) > 0$, при $\|\mathbf{x}\| > 0$, $V(\mathbf{x}) = 0$, при $\|\mathbf{x}\| = 0$, то $\dot{V}(\mathbf{x}) = -0{,}01\|\mathbf{x}\|^2$, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, при $\|\mathbf{x}\| > 0$, $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, при $\|\mathbf{x}\| = 0$. ♦

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$

В Приложении 2 показано, что гладкая динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(0) = 0$, может быть представлена в форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$. В свою очередь, выражение $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ может быть декомпозировано в форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}))\mathbf{x}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0{,}5(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})^T)$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = 0{,}5(\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})^T)$ — кососимметрическая и симметрическая компоненты матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ соответственно.

Для векторных полей $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ построим соответствующие дифференциальные формы в дуальном базисе: $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J} = (\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x})d\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R} = (\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Применим оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ для формы $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}$:

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}(\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}) = \int_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor (\mathbf{J}(\lambda\mathbf{x})\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x})d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{J}(\lambda\mathbf{x})\lambda\mathbf{x}d\lambda = 0.$$

Применив оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ для формы $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}$, получим скалярную потенциальную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}(\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}) = \int_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \rfloor (\mathbf{R}(\lambda\mathbf{x})\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x})d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{R}(\lambda\mathbf{x})\lambda\mathbf{x}d\lambda = \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Так как $\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{J}(\mathbf{x})) = 0$, то $\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x})$. Следовательно, потенциальное (градиентное [7]) векторное поле системы

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x}))}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$$

со скалярным потенциалом $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x}))$. Тангенциальное векторное поле системы можно представить в форме

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}.$$

Если $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, то $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x})) = \int_0^1 \mathbf{x}^T\mathbf{R}(\lambda\mathbf{x})\lambda\mathbf{x}d\lambda =$ $= 0{,}5\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}$, и потенциальное векторное поле системы $\mathbf{f}_g = \mathbf{R}\mathbf{x}$; тангенциальное векторное поле $\mathbf{f}_t = \mathbf{J}\mathbf{x}$. Из изложенного следует

Предложение 1. *Векторное поле динамической системы* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ *может быть декомпозировано на потенциальное* $\mathbf{f}_g = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$ *и тангенциальное* $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$ *векторные поля, где скалярная потенциальная функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *определяется выражением* (2). ♦

Пример 2. Рассмотрим пример декомпозиции линейной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$; $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Симметрическая компонента матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{R} = 0{,}5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; кососимметрическая компонента: $\mathbf{J} = 0{,}5(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Применим оператор гомотопии с центром $\mathbf{x}^0 \equiv 0$ к симметрической части дуальной дифференциальной формы и получим скалярный потенциал:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x})) =$$

$$= \int_0^1 \left(\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right) \lrcorner \left(\left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\lambda\mathbf{x}d\mathbf{x}\right)\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{A}(\mathbf{x})).$$

Следовательно, потенциальное (градиентное) векторное поле

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{R}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

а тангенциальное векторное поле

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f} - \mathbf{f}_g =$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{J}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \ ♦$$

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМ $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}$

Рассмотрим преобразование вектора состояния динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$, и поставим задачу нахождения класса эквивалентности дифференциальных форм $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R} = (\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x})d\mathbf{x}$ при различных матрицах преобразования $\mathbf{S} \in SO(n)$. Применим метод SVD (singular-value decomposition) для определения эквивалентности форм $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}$. Для матрицы $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует SVD-декомпозиция $\mathbf{M} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^*$, где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — унитарные матрицы, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — диагональная матрица с неотрицательными числами. Для матрицы $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SVD-декомпозиция может быть представлена в форме $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \in SO(n)$. Если сингулярные собственные значения $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ упорядочены: $(i > j) \Rightarrow (\sigma_i \geqslant \sigma_j)$, то матрица Σ однозначно определяется матрицей $\mathbf{M}$. Значения σ_i определяются из выражения $\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{M}^T\mathbf{M})} = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)}$, где $\lambda_i(\mathbf{L})$ — собственные значения матрицы $\mathbf{L}$.

Представим скалярную потенциальную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ в форме (2): $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_\mathbf{R}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\mathbf{x}$. SVD-декомпозиция матрицы $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$: $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \in SO(n)$ позволяет классифицировать скалярный потенциал на основе определения сингулярных собственных значений — диагональных элементов матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$. Преобразованием вектора состояния $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ скалярная потенциальная функция приводится к диагональной форме:

$$\varphi(\mathbf{y}) = 0{,}5\mathbf{y}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y} = 0{,}5\sum_{i=1}^{n}\sigma_i y_i^2.$$

Матрица $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_n)$ не зависит от выбора матрицы преобразования $\mathbf{S} \in SO(n)$, т. е. представление скалярной потенциальной функции в форме (2) инвариантно по отношению к преобразованию $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$; $\mathbf{S} \in SO(n)$.

Изложенное позволяет сформулировать

Предложение 2. *Динамические системы, представленные в форме* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$*, можно классифицировать сингулярными собственными значениями матрицы* $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ *скалярной потенциальной функции динамической системы* (2) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})\mathbf{x}$*, причем классификация инвариантна по отношению к преобразованиям вектора состояния системы* $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$, $\mathbf{S} \in SO(n)$.

Пример 3. Для скалярного потенциала оператора гомотопии из Примера 2

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}(5x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 9x_3^2 + 10x_1x_3)$$

получим SVD-декомпозицию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\begin{pmatrix} -0{,}374 & 0{,}816 & -0{,}441 \\ -0{,}577 & -0{,}577 & -0{,}577 \\ -0{,}726 & 0{,}039 & 0{,}687 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 15{,}838 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}774 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}389 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}374 & -0{,}577 & -0{,}726 \\ 0{,}816 & -0{,}577 & 0{,}039 \\ -0{,}441 & -0{,}577 & 0{,}687 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

При преобразовании вектора состояния $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -0{,}374 & -0{,}577 & -0{,}726 \\ 0{,}816 & -0{,}577 & 0{,}039 \\ -0{,}441 & -0{,}577 & 0{,}687 \end{pmatrix}\mathbf{x}$ получим потенциальную функцию в диагональной форме $\varphi(\mathbf{y}) = 0{,}5\mathbf{y}^T\Sigma\mathbf{y} = 0{,}5(1{,}538y_1^2 + 3{,}774y_2^2 + 1{,}389y_3^2)$ и компоненты векторного поля в координатах $\mathbf{y} = (y_1\ y_2\ y_3)^T$:

$$\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{y})}{\partial y_1}\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{y})}{\partial y_2}\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{y})}{\partial y_3}\right)^T = (1{,}538y_1\ 3{,}774y_2\ 1{,}389y_3)^T. \ \blacklozenge$$

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ВИДА $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

Для линейных стационарных динамических систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}$ с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$ выберем в качестве функции Ляпунова функцию [8, 9]: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} > 0$, $p_{ii} > 0$, $p_{ij,\, i \neq j} = 0$, $V(0) = 0$, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \mathbf{x}^T((\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}))\mathbf{x}.$$

Если декомпозировать матрицу **A** на кососимметрическую и симметрическую части в форме (1): $\mathbf{A} = \mathbf{J} + \mathbf{R}$; $\mathbf{J} = 0{,}5(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$; $\mathbf{R} = 0{,}5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, то матрица $(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA})$ будет симметрической, так как матрицы $(\mathbf{J}^T\mathbf{P} + \mathbf{PJ})$ и $(\mathbf{R}^T\mathbf{P} + \mathbf{PR})$ — симметрические, и обеспечение устойчивости сводится к нахождению такой матрицы **K**, которая обеспечит выполнение условия

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA})\mathbf{x} < -\mathbf{x}^T((\mathbf{BK})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{BK}))\mathbf{x}.$$

Из изложенного следует

Предложение 3. *Для линейных динамических систем вида* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(b_{11}\ b_{22}\ \dots\ b_{nn})$, *с управлением* $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$ *и функцией Ляпунова* $V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, $\mathbf{P} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *условие стабилизации может быть представлено в виде условия для потенциальной функции* (2):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} < -\mathbf{x}^T\mathbf{BKx}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{R} = 0{,}5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ *— симметрическая компонента матрицы* **A**. ♦

В неравенстве (3) используются компоненты вектора состояния **x**. В следующем примере показано, как можно получить оценку компонент матрицы **K**, которая не зависит от вектора состояния **x**, $\|\mathbf{x}\| > 0$.

Пример 4. Для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ при $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{B} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, получим $\mathbf{R} = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $i, j = 1,...3$, и условие (3) выполняется для матрицы $\mathbf{K} = (k_{ij}) = \begin{pmatrix} -11{,}26 & 0 & 0 \\ 0 & -16{,}72 & 0 \\ 0 & 0 & -24{,}65 \end{pmatrix}$, $\forall x_i, x_j \in \mathbb{R}$, $i, j = 1...3$, так как справедливо неравенство $r_{ii}x_i^2 + 2r_{ij}x_ix_j + r_{jj}x_j^2 \leqslant \left(1 + \frac{|r_{ij}|}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}}\right)(r_{ii}x_i^2 + r_{jj}x_j^2)$, $\forall x_i, x_j \in \mathbb{R}$, $r_{ii} > 0$, $r_{jj} > 0$, $i, j = 1,...3$, которое следует из неравенства $(\sqrt{r_{ii}}x_i - \sqrt{r_{jj}}x_j)^2 \geqslant 0$, $\forall x_i, x_j \in \mathbb{R}$. Следовательно, оценка максимальных значений компонент матрицы k_{ij} следующая:

$$r_{11}\left(1 + \frac{|r_{12}|}{\sqrt{r_{11}r_{22}}} + \frac{|r_{13}|}{\sqrt{r_{11}r_{33}}}\right) < 11{,}26 \leqslant -k_{11};$$

$$r_{22}\left(1 + \frac{|r_{12}|}{\sqrt{r_{11}r_{22}}} + \frac{|r_{23}|}{\sqrt{r_{22}r_{33}}}\right) < 16{,}72 \leqslant -k_{22};$$

$$r_{33}\left(1 + \frac{|r_{13}|}{\sqrt{r_{11}r_{33}}} + \frac{|r_{23}|}{\sqrt{r_{22}r_{33}}}\right) < 24{,}65 \leqslant -k_{33}. \ \blacklozenge$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Метод оператора гомотопии [6, 10]. Обозначим элементы тангенциального векторного пространства в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $f_i \in \mathbb{R}$, элементы котангенциального пространства (дифференциальные формы): $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\mathbf{x})dx_i$, $\omega_i \in \mathbb{R}$. Для дифференциальных форм можно ввести дифференциальный оператор d со свойствами $d(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1 + d\omega^2$; $d\phi = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i$; $d(d\boldsymbol{\omega}) = 0$; и оператор $\rfloor$ внутреннего произведения векторного и ковекторного поля $\mathbf{X} \rfloor \boldsymbol{\omega}$ со свойствами: $\mathbf{X} \rfloor \mathbf{f} = 0$; $\mathbf{X} \rfloor \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X})$; $X \rfloor (\omega^1 + \omega^2) = X \rfloor \omega^1 + X \rfloor \omega^2$. Построим оператор гомотопии $\mathbb{H}$ — линейный оператор, действующий на форму $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left((x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \rfloor \boldsymbol{\omega}(\lambda\mathbf{x})\lambda^{k-1}d\lambda$, $k = \deg(\boldsymbol{\omega})$. При $k = 1$, $\mathbf{x}^0 \equiv 0$: $(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \rfloor \boldsymbol{\omega}(\lambda\mathbf{x})d\lambda$. Свойства оператора гомотопии:

$$d\mathbb{H} + \mathbb{H}d = \mathbb{I};$$

$$(\mathbb{H}(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}))(x_i) = 0;\ (\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})(x_i^0) = 0;$$

$$\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \rfloor \mathbb{H} = 0.$$

Первый член разложения формы $\boldsymbol{\omega} = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$ — точная форма $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})$ является замкнутой; форма $\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}d\omega$ является антиточной. Для случая $\boldsymbol{\omega} = d\phi$ получим: $(\mathbb{H}d\phi)(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Метод приведения к форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$. В работе [11] представлен точный метод приведения гладкой динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, к форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $a_{ij}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{-1} f_i(\mathbf{x})x_j$, $\|\mathbf{x}\| \neq 0$. Выбор матрицы $\mathbf{A}$ не является однозначным: так, замена $m_{ij} - \phi(\mathbf{x})x_k$ на $m_{ik} + \phi(\mathbf{x})x_j$ не меняет формы представления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод декомпозиции векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии. Предложен метод определения эквивалентности векторных полей на основе SVD-декомпозиции потенциальной компоненты векторного поля. Метод декомпозиции векторного поля динамической системы может быть применен для построения функций Ляпунова систем управления вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saffman P.G.* Vortex dynamics. — Cambridge: Cambridge University Press. — 1992. — 312 p.
2. *Chukanov S.N.* Definitions of invariants for *n*-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2009. — Vol. 19, N 2. — P. 303—305.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 211 с.
4. *Зубов В.И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). — М.: Высшая школа, 1984. — 232 с.
5. *Multimedia* tools for communicating mathematics / Ed. K. Polthier, J. Rodrigues. — Berlin: Springer-Verlag, 2002. — P. 241—264.
6. *Edelen D.G.B.* Applied Exterior Calculus. — N.-Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1985. — 472 p.
7. *Wang Y., Lia Ch., Cheng D.* Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39. — 2003. — P. 1437—1443.
8. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* III. Оптимальное управление системами. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 р.
9. *Wang Y., Cheng D., Ge S.S.* Approximate Dissipative Hamiltonian Realization and Construction of Local Lyapunov Functions // Systems and Control Letters. — 2007. — Vol. 56. — P. 141—149.
10. *Hudon N., Hoffner K., Guay M.* Equivalence to Dissipative Hamiltonian Realization // Proc. of the 47-th Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008. — P. 3163—3168.
11. *Cheng D., Shen T., Tarn T.J.* Pseudo-hamiltonian realization and its application // Communications in information and systems. — 2002. — Vol. 2, N 2. Dec. — P. 91—120.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ю.В. Рутковским.

Чуканов Сергей Николаевич — д-р техн. наук,
Омский филиал Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
☎ (3812) 23-67-39, ✉ ch_sn@mail.ru,

Ульянов Дмитрий Владимирович — аспирант,
Омский государственный технический университет,
☎ (3812) 65-20-84, ✉ grayfox@list.ru.