

# АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С РЕГУЛЯТОРАМИ, ГАРАНТИРУЮЩИМИ ЗАДАННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ<sup>1</sup>

В.Н. Честнов

**Аннотация.** Рассмотрены линейные многомерные следящие системы, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности, в частности, минимизируют  $H_\infty$  норму передаточной матрицы замкнутой системы, связывающей вектор задающих воздействий с вектором регулируемых переменных. В качестве показателя качества системы рассмотрена совокупность индивидуальных показателей колебательности для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -й регулируемой переменной, которые представляют большой практический интерес для инженеров-проектировщиков автоматических систем. На основе многомерного кругового критерия абсолютной устойчивости доказана устойчивость в целом замкнутой системы при введении в контур управления на выходе объекта нестационарных секторных нелинейностей. Установлена связь достигнутого при синтезе значения показателя колебательности с размером сектора, ограничивающего характеристики допустимых нелинейностей. Этот результат работы имеет достаточный характер. Доказана связь между индивидуальным показателем колебательности и поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта.

**Ключевые слова:** линейные многомерные системы, показатель колебательности, годограф Найквиста, секторные нестационарные нелинейности, абсолютная устойчивость.

## ВВЕДЕНИЕ

Как правило, в практических приложениях для синтеза регулятора применяется линейная модель объекта управления, полученная путем линеаризации исходных уравнений объекта, которые зачастую нелинейные [1]. Поэтому после синтеза регулятора возникает естественный вопрос о применимости такого линейного регулятора в реальных условиях, когда объект управления нелинейный. Одним из возможных ответов на такой вопрос представляется теоретическое исследование абсолютной устойчивости синтезируемых систем, когда по физическому входу (или выходу) объекта

вводятся нелинейности, характеристики которых принадлежат некоторому сектору. Чем шире размер этого сектора, тем более широкий класс нелинейностей допускает контур управления без потери свойства асимптотической устойчивости при произвольных начальных условиях как объекта управления, так и регулятора. Это обстоятельство повышает уверенность инженера-проектировщика в работоспособности регулятора в реальных условиях на практике.

Многомерная линейная система характеризуется совокупностью индивидуальных показателей колебательности для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -й регулируемой переменной, которые представляют большой практический интерес для инженеров-проектировщиков автоматических систем. В работе установлена связь между достигнутым значением индивидуального показателя колебательности и

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-01067).



поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта управления, что также представляет несомненный практический интерес.

Настоящая работа посвящена исследованию абсолютной устойчивости систем, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности в качестве одного из инженерных показателей качества следящих систем как в одномерном [2], так и в многомерном случае. Заметим, что аппарат  $H_\infty$ -теории оптимизации оказался исключительно удобным для решения задач синтеза регуляторов такого рода.

Здесь необходимо подчеркнуть выдающийся вклад отечественных ученых в решение задачи об абсолютной устойчивости автоматических систем [1, 3]: от постановки задачи (А.И. Лурье, В.Н. Постников) до разработки частотных критериев абсолютной устойчивости (квадратичный критерий В.А. Якубовича), имеющих большое практическое значение. В настоящей работе применяется многомерный круговой критерий абсолютной устойчивости В.А. Якубовича [4] как следствие его квадратичного критерия.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z = Cx, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния объекта;  $u \in R^m$  — вектор управлений;  $z \in R^{m_1}$  — вектор регулируемых переменных, а тройка числовых матриц  $A, B, C$  задана.

Пусть объект (1) замкнут стабилизирующим регулятором по измеряемому выходу

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c \varepsilon, \quad u = C_c x_c + D_c \varepsilon, \quad \varepsilon = g - z, \quad (2)$$

где  $x_c \in R^{n_c}$  — вектор состояния регулятора ( $n_c \leq n$ ),  $g \in R^{m_1}$  — вектор задающих воздействий,  $\varepsilon \in R^{m_1}$  — вектор ошибок слежения, доступный измерению,  $A_c, B_c, C_c, D_c$  — матрицы чисел.

Передаточная матрица замкнутой системы (1), (2) от задающего сигнала  $g$  к регулируемым переменным  $z$  имеет вид:

$$T(s) = W(s)[I + W(s)]^{-1}, \quad W(s) = W_0(s)K(s), \quad (3)$$

где  $W(s) = W_0(s)K(s)$  — передаточная матрица системы (1), (2), разомкнутой по выходу объекта (пе-

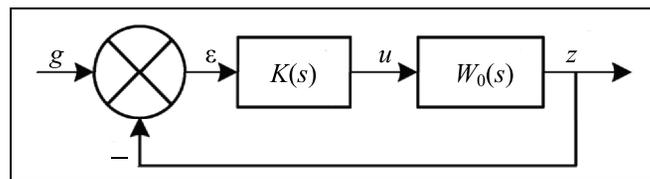


Рис. 1. Структурная схема замкнутой линейной системы

ременной  $z$  или  $\varepsilon$ ). Здесь  $W_0(s)$  и  $K(s)$  — передаточные матрицы объекта (1) и регулятора (2) соответственно:

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c, \quad (4)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующего размера,  $s$  — комплексная переменная преобразования Лапласа.

Структурная схема замкнутой системы (1), (2) с передаточными матрицами (4) приведена на рис. 1.

Пусть регулятор (2) разрешает задачу  $H_\infty$ -оптимизации

$$\|T\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow T^T(-j\omega)T(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (5)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Тогда, как показано ниже, совокупность индивидуальных показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , удовлетворяет условию

$$M_i \leq \gamma, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — значение, реализовавшееся при решении задачи (5).

Введем в контур управления, изображенный на рис. 1, по регулируемому выходу объекта  $z$  (или по ошибкам слежения  $\varepsilon$ ) векторную нестационарную нелинейность  $\varphi(t, z) = [\varphi_1(t, z_1), \varphi_2(t, z_2), \dots, \varphi_{m_1}(t, z_{m_1})]^T \in R^{m_1}$ , элементы которой удовлетворяют секторным условиям

$$\alpha \leq \varphi_i(t, z_i)/z_i \leq \beta, \quad \varphi_i(t, 0) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

где  $\alpha < 1$  и  $\beta > 1$  — нижняя и верхняя границы сектора.

Структурная схема системы для исследования абсолютной устойчивости приведена на рис. 2.

Здесь  $W(p)$  — операторная передаточная матрица линейной части системы, совпадающая с  $W(s)$  из выражения (3) с точностью до замены аргумента  $s$  на символ дифференцирования  $p = d/dt$ .

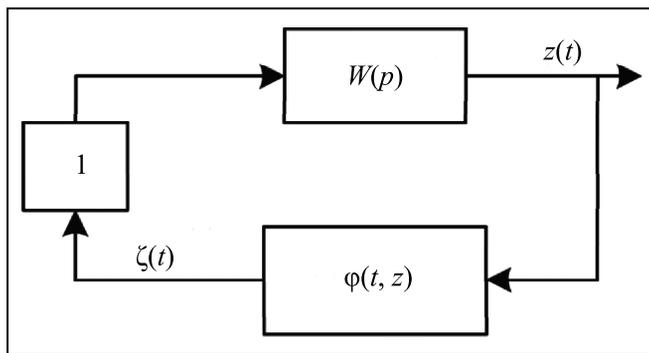


Рис. 2. Структурная схема замкнутой нелинейной системы

Структурная схема, изображенная на рис. 2, описывается уравнениями

$$z = -W(p)\zeta, \quad \zeta = \varphi(t, z). \quad (8)$$

Заметим, что в отсутствие нелинейностей, когда второе соотношение имеет вид  $\zeta = z$ , уравнения (8) описывают структурную схему линейной системы, изображенной на рис. 1, которая по построению регулятора (2) из условия (5) асимптотически устойчива.

**Задача.** Найти границы  $\alpha$  и  $\beta$  секторных нелинейностей (7), при которых нелинейная система (8) с регулятором (2), построенным исходя из целевого условия (5), была бы абсолютно устойчивой для всех нестационарных нелинейностей из класса (7).

## 2. ЧАСТОТНЫЙ ПОХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Прежде чем переходить к изложению общего результата работы, предварительно остановимся сначала на более простом случае, когда единственная нелинейность из класса (7) вводится исключительно только по одному  $i$ -му выходу объекта  $z_i$ , что позволит предугадать общий результат.

Обозначим  $i$ -й диагональный элемент  $T(s)$  как  $t_i(s)$ . Эта передаточная функция  $t_i(s)$  связывает  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ . Пусть  $w_i(s)$  — передаточная функция разомкнутой системы по  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , которая получается замыканием всех обратных связей по выходу  $z$  кроме  $i$ -й, т. е. переменной  $z_i$ . Структурная схема, поясняющая это, имеет классический вид и показана на рис. 3.

Связь данных передаточных функций также описывается классическим соотношением

$$t_i(s) = \frac{w_i(s)}{1 + w_i(s)}. \quad (9)$$

Заметим, что в силу выражения (5) подобное неравенство будет выполняться и для любого элемента матрицы  $T(s)$ , в частности, для любого диагонального [5, 6]

$$\|t_i\|_\infty = \sup_\omega |t_i(j\omega)| \leq \gamma, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует условие (6), если учесть, что по определению  $M_i = \|t_i\|_\infty$ .

Таким образом, значение  $\gamma$ , реализовавшееся при решении задачи (5), определяет и индивидуальный показатель колебательности  $M_i$ .

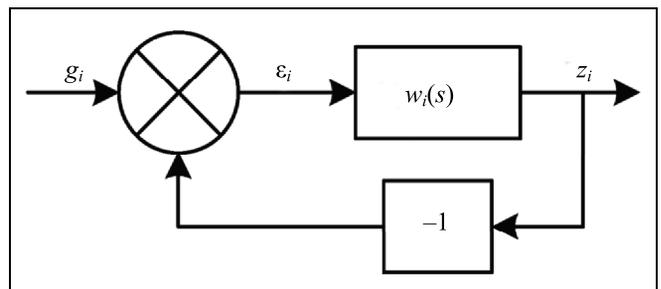
Теперь в силу выражений (9), (10), повторяя выкладки, содержащиеся в работе [7], при получении геометрической интерпретации классического показателя колебательности, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение условия (5). Тогда годограф Найквиста передаточной функции  $w_i(j\omega)$  разомкнутой системы по  $i$ -му выходу объекта не пересекает круга радиусом  $R = \gamma/(\gamma^2 - 1)$  с центром в точке  $(-C, j0)$  на плоскости годографа, где  $C = \gamma^2/(\gamma^2 - 1)$ .

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент усиления в замкнутом контуре, изображенном на рис. 3, без потери устойчивости можно изменять от 1 в интервале  $((\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma)$ . Заметим также, что геометрическая интерпретация поведения годографа Найквиста передаточной функции  $w_i(j\omega)$  теоремы 1 соответствует требованию кругового критерия абсолютной устойчивости [3, 4], когда секторная нелинейность из класса (7) вводится лишь по  $i$ -му выходу объекта  $z_i$  на рис. 3. Тогда приходим к следующему результату.

**Теорема 2.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение строгого неравенства (5). Тогда нелинейная система (11) будет абсолютно устойчивой для нестационарной нелинейности из класса (7), где  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ , а  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$

$$z_i = -w_i(p)\zeta_i, \quad \zeta_i = \varphi_i(t, z). \quad (11)$$


 Рис. 3. Система с  $i$ -й обратной связью



Заметим, что здесь нижние и верхние границы секторной нелинейности из класса (7) совпадают с границами возможных значений стационарного коэффициента усиления, вводимого в контур управления, изображенный на рис. 3, без потери устойчивости. Кроме того, если нелинейность  $\varphi_i(t, z_i) = k_i(t)z_i$  представляет собой просто линейный нестационарный коэффициент усиления  $k_i(t)$ , то такая линейная нестационарная система (11) будет асимптотически устойчивой при произвольном изменении во времени этого коэффициента в том же интервале  $[(\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma]$ . Подобный более общий результат справедлив, если в каждый контур управления по выходу объекта  $z$  вводятся нелинейности из класса (7), как показано на рис. 2. Для получения этого результата мы привлечем многомерный круговой критерий абсолютной устойчивости, сформулированный в работе [4].

Рассмотрим нелинейную систему (8) с нелинейностями из класса (7). Система (1), (2) с регулятором (2), найденным из условия (5), асимптотически устойчива. Это означает, что требование минимальной устойчивости кругового критерия выполнено (структурная схема представленной на рис. 1 устойчивой линейной системы эквивалентна нелинейной системе, представленной на рис. 2, в отсутствие нелинейностей, когда  $\zeta = z$ ). Кроме того, предположим, что ни объект, ни регулятор не имеют чисто мнимых полюсов (это требование можно ослабить).

В соответствии с круговым критерием для абсолютной устойчивости системы (8) на всех вещественных частотах  $\omega$  должно выполняться матричное частотное неравенство [4]

$$\text{Re}\{[I + \alpha W(-j\omega)]^T \tau [I + \beta W(j\omega)]\} > 0, \\ \omega \in (-\infty, \infty),$$

где  $\text{Re} Y(j\omega) = [Y^T(-j\omega) + Y(j\omega)]/2$  — эрмитова часть комплексной матрицы  $Y$ . Здесь  $\tau$  — диагональная положительно определенная матрица. Рассмотрим это неравенство при  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ ,  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$  и  $\tau = I$ , что дает выражение

$$\text{Re}\{[I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] - \\ - \frac{1}{\gamma^2} W^T(-j\omega)W(j\omega) + V(j\omega)\} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty),$$

где косоэрмитова матрица  $V(j\omega) = \frac{1}{\gamma} [W(j\omega) - W^T(-j\omega)]$  удовлетворяет условию  $\text{Re} V(j\omega) = 0$ . С учетом этого, придем к неравенству

$$[I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > \frac{1}{\gamma^2} W^T(-j\omega)W(j\omega), \\ \omega \in (-\infty, \infty), \quad (12)$$

выполнение которого для неотрицательных частот, в силу его симметрии, ведет к его выполнению и для отрицательных частот. Покажем теперь, что неравенство (12) эквивалентно строгому целевому неравенству (5). Для этого преобразуем второе строгое неравенство (5) с учетом выражения (3). Учитывая, что в силу связи (3)

$$T^T(-j\omega) = [I + W^T(-j\omega)]^{-1} W^T(-j\omega).$$

Получим

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) = [I + W^T(-j\omega)]^{-1} W^T(-j\omega) \times \\ \times W(j\omega)[I + W(j\omega)]^{-1} < \gamma^2 I.$$

А последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$W^T(-j\omega)W(j\omega) < \gamma^2 [I + W^T(-j\omega)][I + W(j\omega)],$$

которое, очевидно, совпадает с неравенством (12). Таким образом, доказана

**Теорема 3.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение строгого неравенства (5). Тогда нелинейная система (8) будет абсолютно устойчивой для нестационарных нелинейностей из класса (7), где  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ , а  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$ .

Очевидно, что теорема 2 есть простое следствие доказанной теоремы 3.

Заметим, что если нелинейности  $\varphi_i(t, z_i) = k_i(t)z_i$ ,  $i = \overline{1, m_1}$ , представляют собой просто линейные нестационарные коэффициенты усиления  $k_i(t)$ , то такая линейная нестационарная система (8) будет асимптотически устойчивой при произвольном и независимом изменении во времени этих коэффициентов в том же интервале  $[(\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma]$ . В случае систем с одним входом и выходом  $m_1 = m$ , очевидно, имеет место утверждение, аналогичное теореме 2, при этом нелинейная характеристика может вводиться как по входу объекта, так и по его выходу.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование абсолютной устойчивости многомерных систем, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности в качестве одного из инженерных показателей качества следящих систем.

Установлена связь достигнутого при синтезе значения показателя колебательности с размером сектора, ограничивающего характеристики допустимых нелинейностей. Полученные результаты опираются на многомерный круговой критерий

абсолютной устойчивости и поэтому имеют достаточный характер. Установлена связь между достигнутым значением индивидуального показателя колебательности и поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта управления, что представляет несомненный практический интерес.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 336 с. [Voronov, A.A. Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost'. — М.: Nauka, — 1979. — 336 s. (In Russian)]
2. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Проблемы управления. — 2019. — № 2. — С. 2—8. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Design of given oscillation index scalar controllers: modal and  $H_\infty$ -approaches / Control Sciences. — 2019. — No. 2. — S. 2—8. (In Russian)]
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с. [Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. A.A. Krasovskogo. — М.: Nauka, 1987. — 712 s. (In Russian)]
4. Якубович В.А. Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматическо-

го управления (под ред. Р.А. Нелепина). — М.: Наука, 1975. — С. 74—180. [Yakubovich, V.A. Metody teorii absolutnoi ustoichivosti / Metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya (pod red. R.A. Nelepina). — М.: Nauka, 1975. — S. 74—180. (In Russian)]

5. *The Control Handbook* / Editor W.S. Levine. — N.Y.: IEEE Press, 1996. — 1548 p.
6. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 10. — С. 132—152. [Chestnov, V.N. Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on  $H_\infty$ -Optimization / Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, no. 10. — P. 1861—1877.]
7. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с. [Besekerskii, V.A., Popov, E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — М.: Nauka, 1975. — 768 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 20.02.2020, после доработки 03.09.2020.  
Принята к публикации 03.09.2020.

Честнов Владимир Николаевич — д-р техн. наук,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва, ✉ vnchest@yandex.ru.

## ABSOLUTE STABILITY OF SYSTEMS WITH CONTROLLERS THAT PROVIDE GIVEN OSCILLATION INDEX

V.N. Chestnov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ vnchest@yandex.ru

**Abstract.** Linear multivariable tracking systems are considered, which controllers provide given or achievable separate oscillation indices, in particular, they minimize  $H_\infty$  norm of the system closed loop transfer matrix that connects a vector of references with a vector of controlled variables. An aggregate of the separate oscillation indices for the  $i$ th closed loop connecting the  $i$ th reference signal with the  $i$ th controlled variable is considered as a performance index. Such an approach is of great practical interest for engineers that design automatic systems. Based on the multivariable circle criterion of absolute stability, it is proved that the closed loop system is stable in whole if non-stationary sector nonlinearities are entered in the control loop at the plant output. Relation between the oscillation index obtained during controller synthesis and the size of sector which bounds feasible nonlinearities characteristics is found. This result of the paper is sufficient. Relation between the separate oscillation index and the Nyquist plot of system with the break point at the corresponding plant output is proved.

**Keywords:** linear multivariable systems, oscillation index, Nyquist plot, sector non-stationary nonlinearities, absolute stability.

**Funding.** The work was performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research (grant No. 18-08-01067).