

## СИНТЕЗ ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.Н. Честнов, В.А. Александров, И.Г. Резков

**Аннотация.** Рассмотрен линейный дискретный минимально-фазовый объект с одним управляющим входом, одним измеряемым выходом и неизмеряемым внешним возмущением. Поставлена задача синтеза дискретного регулятора по выходу, обеспечивающего заданные инженерные показатели качества: ошибку регулирования, время регулирования, радиус запасов устойчивости. Получены аналитические формулы, позволяющие связать инженерные показатели качества с желаемыми корнями характеристического полинома замкнутой системы в задаче модального управления при выборе вещественных неотрицательных корней. При этом заданные ошибка и время регулирования приводят к ограничениям максимального по модулю значения желаемых корней, в то время как значения желаемых корней, обеспечивающие заданный радиус запасов устойчивости, могут не удовлетворять этим ограничениям, и заданные значения показателей качества должны быть пересмотрены. Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предлагаемого подхода.

**Ключевые слова:** линейная дискретная система, модальное управление, ошибка регулирования, время регулирования, радиус запасов устойчивости.

### ВВЕДЕНИЕ

Частотные методы синтеза классической теории управления целиком базируются на инженерных показателях качества, которые напрямую используются при построении регулятора [1, 2]. Среди этих показателей ошибка регулирования (при действии ограниченного внешнего возмущения) характеризует точность, время регулирования определяет быстродействие, а запасы устойчивости по фазе и модулю характеризуют робастность замкнутой системы. Эти показатели, положенные в основу проектирования систем управления, показали свою непревзойденную практическую эффективность на протяжении последних 70 лет.

Вместе с тем современные техники синтеза регуляторов  $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $L_1(I_1)$ ,  $\mu$ -синтез [3–5], а также методы модального управления по выходу, как правило, учитывают лишь отдельные показатели качества либо не учитывают их вовсе. В частности, пренебрежение к требованиям робастности в этих современных техниках приводит к регуляторам по

выходу, которые невозможно применить на практике из-за недопустимо малых запасов устойчивости [6]. Такое явление невозможно, если непрерывный регулятор строить по полному вектору состояния на основе техники  $LQ$ - или  $H_\infty$ -оптимизации, а запасы устойчивости оценивать на физическом входе объекта [7–9].

Вопросы точности и запасов устойчивости сначала для регуляторов по полному вектору состояния, а затем для регуляторов по выходу начал изучать А.Г. Александров [8, 9]. Для более полной характеристики запаса устойчивости по годографу Найквиста разомкнутой системы в 1980 г. им введено понятие радиуса запасов устойчивости, которое определяет минимальное расстояние годографа от критической точки  $(-1, j0)$  [10]. Это понятие названо запасом устойчивости в работе [11]. Радиус запасов устойчивости — это более адекватная характеристика робастности, нежели запасы по фазе и модулю [9, 11], и во многом определяет возможность реализации регулятора в инженерной практике.

В работе [12] строились непрерывные регуляторы по заданному радиусу запасов устойчивости путем минимизации  $H_\infty$ -нормы матрицы чувствительности. Точность многомерных систем с непрерывным регулятором по измеряемому выходу при действии полигармонических внешних возмущений, ограниченных по мощности с неизвестными амплитудами и частотами, но известным числом частот, изучалась в работах [13, 14]. Непрерывные  $H_\infty$ -регуляторы, обеспечивающие заданную точность и радиус запасов устойчивости получены в работе [15]. Непрерывные  $H_\infty$ -регуляторы, обеспечивающие заданные радиус запасов устойчивости на входе/выходе объекта и степень устойчивости, определяющую желаемое время регулирования, получены в работе [16].

Дискретный случай синтеза регуляторов по измеряемому выходу осложняется следующими важнейшими фактами.

- Даже регуляторы по полному вектору состояния, вообще говоря, не обеспечивают приемлемый на практике радиус запасов устойчивости. Это заведомо возможно только для устойчивых объектов [17–19].
- Достижимая ошибка регулирования для дискретных регуляторов по полному вектору состояния, и тем более по выходу, ограничена снизу некоторой предельной величиной, меньше которой не может обеспечить никакой линейный регулятор [20], в частности, для гармонических неизмеряемых внешних возмущений неизвестной частоты.
- Для линейных дискретных регуляторов по выходу достижимое время регулирования  $t_s \geq n_c h$ , где  $n_c$  — порядок замкнутой системы и  $h$  — период дискретности. Этот факт хорошо известен. Менее известен тот факт, что даже в непрерывном случае быстродействие системы ограничено абсолютным значением вещественной части нуля объекта, ближайшего к мнимой оси (даже для минимально-фазовых объектов!) [11]. При этом увеличение степени устойчивости (определяющей время регулирования) приводит к катастрофическому уменьшению радиуса запасов устойчивости [11, 16, 21], что не приемлемо на практике. Аналогичное явление имеет место и в дискретном случае [22].

В работах [23–26] рассмотрены вопросы выбора корней желаемого характеристического полинома замкнутой системы в задаче модального управления по заданному радиусу запасов устойчивости для непрерывных систем. Кроме того, в работах [25, 26] предложен метод выбора этих корней с учетом заданной точности при действии неизмеряемых ограниченных внешних возмущений.

Настоящая работа посвящена проблеме синтеза дискретных регуляторов для объектов с одним входом и одним выходом по заданным инженерным критериям качества: ошибке регулирования, времени регулирования и радиусу запасов устойчивости на основе метода модального управления. Модальный подход к решению этой проблемы позволяет глубже понять взаимосвязь и противоречивость этих требований качества управления, особенно для одномерных объектов.

В настоящей работе решается задача стабилизации при действии неизвестного ограниченного внешнего возмущения. Задача слежения [27–30] здесь не рассматривается. Вместе с тем вопрос выбора корней желаемого характеристического полинома в задаче модального управления, обеспечивающего запасы устойчивости в дискретном случае, остается актуальным и для следящих систем. Поэтому полученные в работе результаты могут использоваться и при решении задачи слежения, что показано в одном из примеров.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретный линейный объект с одним входом и одним выходом, описываемый разностным уравнением:

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) &= \\ &= b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0u(k) + \\ &+ g_{n-1}f(k+n-1) + \dots + g_0f(k), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $n$  — порядок объекта,  $y(k)$  — измеряемый и одновременно регулируемый выход объекта в дискретные моменты времени  $t = kh$  (где  $h$  — период дискретности),  $u(k)$  — управляющее воздействие,  $f(k)$  — неизмеряемое внешнее возмущение,  $a_i, b_i, g_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) — известные коэффициенты разностного уравнения.

Возмущение — ограниченный полигармонический сигнал [31]

$$f(k) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sin(\omega_i h k + \varphi_i), \quad f_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq f^*, \quad (2)$$

где амплитуды  $f_i$ , частоты  $\omega_i$  и фазы  $\varphi_i$  неизвестны, а сумма амплитуд  $f_i$  ограничена известным значением  $f^*$ .

**Задача:** найти линейный регулятор по выходу

$$\begin{aligned} c_m u(k+m) + \dots + c_0 u(k) &= \\ &= -d_m y(k+m) - \dots - d_0 y(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m \geq n-1$ , такой, чтобы замкнутая система (1), (3) удовлетворяла заданным инженерным критериям качества:



— ошибка регулирования должна быть не более заданной:

$$\sup_{k \geq k_s} |y(k)| \leq y^*, \quad (4)$$

где  $y^* > 0$  — желаемая ошибка регулирования,  $k_s$  — номер такта, соответствующий времени окончания переходных процессов (времени регулирования  $t_p$ );

— время регулирования  $t_p = k_s h$  не должно превышать значения  $t_p^* = k_s^* h$ , где  $k_s^*$  — заданное значение:  $k_s \leq k_s^*$ ;

— радиус запасов устойчивости не менее заданного значения  $r$  ( $0 < r < 1$ ). Обычно требуется значение  $r > 0,5$ .

Радиус запасов устойчивости — это максимальный радиус круга с центром в критической точке  $(-1, j0)$ , который не пересекает годограф Найквиста разомкнутой системы (1), (3) [9—11], как показано на рис. 1.

Переходя к  $Z$ -преобразованию, запишем дискретные передаточные функции объекта по управлению и по возмущению

$$W_u(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0},$$

$$W_f(z) = \frac{g(z)}{a(z)} = \frac{g_{n-1}z^{n-1} + \dots + g_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (5)$$

где  $z$  — комплексная переменная  $Z$ -преобразования. Передаточная функция регулятора

$$W_p(z) = -\frac{d(z)}{c(z)} = -\frac{d_m z^m + \dots + d_0}{c_m z^m + \dots + c_0},$$

и передаточная функция разомкнутой системы

$$W(z) = -W_u(z)W_p(z) = \frac{b(z)d(z)}{a(z)c(z)}. \quad (6)$$

Кроме того, полагая  $z = e^{j\omega h}$ ,  $0 \leq \omega \leq \pi/h$ , будем рассматривать частотные передаточные функции.

Тогда система (1), (3) будет обладать радиусом запасов устойчивости  $r$ , если [22]:

$$|1 + W(e^{j\omega h})| \geq r, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h. \quad (7)$$

Метод модального управления [27—29] состоит в том, что коэффициенты регулятора (3)  $c_i, d_i, i = 0, \dots, m$ , находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений, полученной приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях уравнения

$$a(z)c(z) + b(z)d(z) = \delta(z), \quad (8)$$

где слева характеристический полином замкнутой системы (1), (3), а справа желаемый полином сте-

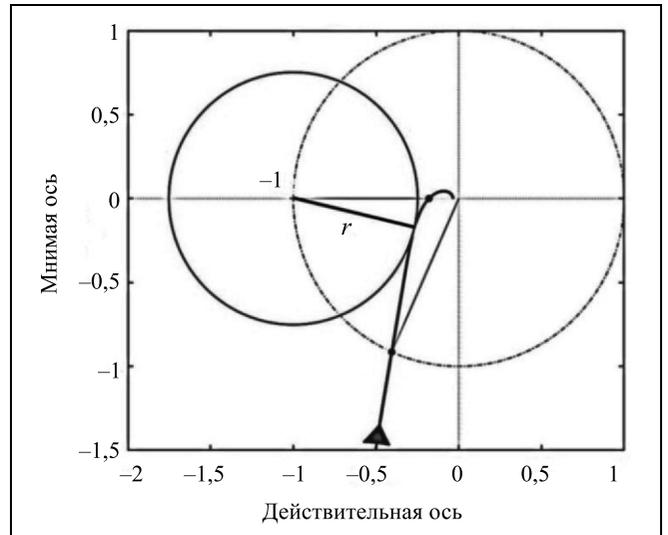


Рис. 1. Годограф Найквиста разомкнутой системы и радиус запасов устойчивости

пени  $n + m$ . Тогда Задача сводится к тому, чтобы сформировать полином  $\delta(z)$  такой, чтобы коэффициенты регулятора  $c_i, d_i, i = 0, \dots, m$ , полученные из решения уравнения (8), обеспечивали выполнение заданных инженерных критериев качества.

В настоящей статье рассматривается объект управления, у которого полином числителя  $b(z)$  передаточной функции (5) устойчивый (все его корни находятся внутри единичного круга), и его порядок равен  $n - 1$ .

В этом случае полином числителя  $b(z)$  может быть включен в желаемый характеристический полином замкнутой системы [27, 29]:  $\delta(z) = b(z)\delta_0(z)$ , где  $\delta_0(z)$  — полином степени  $n$ , в котором коэффициент при старшей степени равен коэффициенту при старшей степени полинома знаменателя передаточной функции объекта  $a(z)$ . Тогда из уравнения (8) получим полиномы передаточной функции регулятора:

$$c(z) = b(z), \quad d(z) = \delta_0(z) - a(z). \quad (9)$$

Для непрерывных систем такое условие использовано в работе [25].

Известно [27, 28], что включение полинома  $b(z)$  в характеристический полином замкнутой системы может приводить к длительным и колебательным переходным процессам по управляющему воздействию или по другим переменным состояния объекта.

## 2. ОШИБКА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Замкнутая система (1), (3) устойчива и линейна, поэтому выход системы при действии возму-

нения вида (2) после окончания переходных процессов имеет вид [30, 32]

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \sin(\omega_i h k + \theta_i), \quad y_i \geq 0,$$

где  $y_i = |W_{yf}(e^{j\omega_i h})| f_i$ ;  $W_{yf}(e^{j\omega h})$  — частотная передаточная функция замкнутой системы по возмущению. Тогда для выполнения требования к точности (4) можно записать

$$\begin{aligned} |y(k)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_i \sin(\omega_i h k + \theta_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |W_{yf}(e^{j\omega_i h})| f_i \leq \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |W_{yf}(e^{j\omega h})| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \leq \\ &\leq f^* \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |W_{yf}(e^{j\omega h})| \leq y^*, \quad k \geq k_s. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно достаточное условие

$$\sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |W_{yf}(e^{j\omega h})| \leq y^*/f^*. \quad (10)$$

Таким образом, если получен регулятор, обеспечивающий выполнение условия (10), то при возмущении (2) будет выполняться требование к точности регулирования (4).

Передаточная функция замкнутой системы (1), (3) по возмущению имеет вид:

$$W_{yf}(z) = \frac{g(z)c(z)}{a(z)c(z) + b(z)d(z)} = \frac{g(z)c(z)}{\delta_0(z)}. \quad (11)$$

Для регулятора (9) из формулы (11) получим

$$W_{yf}(z) = \frac{g(z)}{\delta_0(z)}. \quad (12)$$

Таким образом, передаточная функция  $W_{yf}(z)$  зависит только от известного полинома объекта  $g(z)$  и от полинома  $\delta_0(z)$ , который необходимо опделить так, чтобы выполнялось условие (10).

Желаемый полином  $\delta_0(z)$  будем выбирать так:

$$\delta_0(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i), \quad (13)$$

где его корни  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — вещественные, неотрицательные и меньше единицы. Тогда из выражений (10), (12) и (13) получаем

$$\sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} \left| \frac{g(e^{j\omega h})}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega h} - \lambda_i)} \right| \leq y^*/f^*. \quad (14)$$

Из работы [20] следует, что последнее неравенство не всегда может быть выполнено.

Достаточным условием его выполнения будет

$$\frac{\sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|}{\inf_{0 \leq \omega \leq \pi/h} \left| \prod_{i=1}^n (e^{j\omega h} - \lambda_i) \right|} \leq y^*/f^*.$$

Учитывая, что для  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , минимум в знаменателе левой части этого неравенства достигается при  $\omega = 0$ ,

$$\inf_{0 \leq \omega \leq \pi/h} \left| \prod_{i=1}^n (e^{j\omega h} - \lambda_i) \right| = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i),$$

получаем, что неравенство (14) выполняется, если

$$\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \geq \frac{f^*}{y^*} \cdot \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|. \quad (15)$$

Заметим, что так как при  $0 \leq \lambda_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) < 1,$$

то не для любых значений  $y^*$ ,  $f^*$  и  $\sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|$  можно найти такие значения  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , чтобы условие (15) было выполнено.

Для большей формализации правил выбора значений корней желаемого характеристического полинома замкнутой системы можно из неравенства (15) получить ограничение для максимального значения. Так как

$$\prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \geq (1 - \lambda_{\max})^n, \quad \lambda_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i,$$

то достаточным условием выполнения неравенства (14) будет

$$(1 - \lambda_{\max})^n \geq \frac{f^*}{y^*} \cdot \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|,$$

из которого следует ограничение максимального значения корней желаемого характеристического полинома замкнутой системы:

$$\lambda_{\max} \leq 1 - \sqrt[n]{\frac{f^*}{y^*} \cdot \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|}. \quad (16)$$

Условие  $0 \leq \lambda_{\max} < 1$  налагает ограничение на подкоренное выражение:

$$\frac{f^*}{y^*} \cdot \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})| < 1,$$

которое означает, что значение желаемой ошибки регулирования должно удовлетворять условию:

$$y^* > f^* \cdot \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} |g(e^{j\omega h})|.$$



Это условие отличается от полученной в работе [20] предельной достижимой точности линейных систем с дискретным регулятором для гармонического внешнего возмущения

$$|y| > f^* \frac{|g(e^{j\omega h})|}{2^n}$$

только тем, что принятое ограничение  $0 \leq \lambda_i < 1$ , а не ограничение  $-1 < \lambda_i < 1$ , приводит к тому, что нет деления на  $2^n$ , и рассмотрение возмущения вида (2), а не одной частоты, добавляет поиск верхней границы для  $0 \leq \omega \leq \pi/h$ .

Итак, модальный регулятор (3), найденный так, что корни желаемого полинома (13) удовлетворяют условию (16), обеспечивает требование Задачи к ограничению ошибки регулирования (4).

В частном случае, если о возмущении известно, что в нем преобладают низкочастотные составляющие, то целесообразно добавить интегральную составляющую в регулятор и таким образом получить астатическую систему [27]. Тогда регулятор можно получить как

$$c(z) = b(z)(z - 1), \quad d(z) = \delta_1(z) - a(z),$$

где  $\delta_1(z) = \delta_0(z)(z - \lambda_{n+1})$ ,  $0 \leq \lambda_{n+1} \leq \lambda_{\max}$ .

В этом случае частотная передаточная функция по возмущению

$$W_{yf}(e^{j\omega h}) = \frac{g(e^{j\omega h})(e^{j\omega h} - 1)}{\delta_1(e^{j\omega h})}$$

будет равна 0 для  $\omega = 0$  и близка к 0 при  $\omega h \ll 1$ , поскольку

$$e^{j\omega h} = \cos\omega h + j\sin\omega h \approx 1 + j\omega h$$

и

$$|W_{yf}(e^{j\omega h})| \approx \left| \frac{g(e^{j\omega h})}{\delta_1(e^{j\omega h})} \right| \omega h.$$

Это означает, что частотная передаточная функция по возмущению фактически уменьшается по сравнению с передаточной функцией (12) в  $1/\omega h$  раз, что при  $\omega h \ll 1$  весьма существенно для низкочастотных возмущений.

### 3. ВРЕМЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Известна [32] грубая оценка времени регулирования, определяемого простыми полюсами замкнутой системы с максимальным модулем, что в нашем случае даст:

$$t_s = k_s h = -\frac{3h}{\ln \lambda_{\max}} = \frac{3h}{\ln \lambda_{\max}^{-1}}, \quad \lambda_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|,$$

где  $\lambda_i$  — корни полинома  $\delta_0(z)$ , а значение 3 в числителе соответствует оценке времени регулирования, когда измеряемый выход отличается от установившегося значения не более чем на 5 %, что широко применяется на практике.

Тогда желаемое значение  $k_s^*$  приводит к требованию:

$$\lambda_{\max} \leq e^{-3/k_s^*}. \tag{17}$$

Следует учитывать, что это требование основано на грубой оценке, принимающей в расчет только максимальную постоянную времени замкнутой системы. Поэтому нужно проверять, что в замкнутой системе с регулятором, найденным по формулам (9), при условии (17), действительно выполняется требование к времени регулирования. Если оно не выполняется, то нужно соответственно уменьшить значение  $\lambda_{\max}$ .

Таким образом, заданные ошибка и время регулирования дают ограничения на  $\lambda_{\max}$ , определяемые соотношениями (16) и (17), меньшее из которых  $\lambda_{\max}^*$  и устанавливает максимальное значение модулей выбираемых корней характеристического полинома замкнутой системы.

Заметим, что при наличии задающего сигнала передаточная функция замкнутой системы (1), (3) по задающему воздействию имеет вид:

$$W_3(z) = \frac{b(z)d(z)}{a(z)c(z) + b(z)d(z)} = \frac{b(z)d(z)}{\delta(z)},$$

которая для регулятора (9), когда  $\delta(z) = b(z)\delta_0(z)$ , принимает вид

$$W_3(z) = \frac{d(z)}{\delta_0(z)},$$

т. е. знаменатель этой передаточной функции — тот же полином  $\delta_0(z)$ , что и в функции (12).

### 4. РАДИУС ЗАПАСОВ УСТОЙЧИВОСТИ

Преобразуем условие (7) с учетом выражений (6) и (8):

$$\left| \frac{\delta(e^{j\omega h})}{a(e^{j\omega h})c(e^{j\omega h})} \right| \geq r, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h. \tag{18}$$

Если регулятор построен по формулам (9), то из неравенства (18) приходим к неравенству

$$\left| \frac{\delta_0(e^{j\omega h})}{a(e^{j\omega h})} \right| \geq r, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h. \tag{19}$$

Заметим, что в неравенстве (19) нет полиномов регулятора, т. е. выполнение этого условия зависит только от известного полинома объекта  $a(z)$  и от полинома  $\delta_0(z)$ , который необходимо определить. Нужно помнить, что полиномы  $a(z)$  и  $\delta_0(z)$  имеют одинаковый порядок, и коэффициенты при старших степенях этих полиномов равны. Поэтому добиться выполнения условия (19) можно только выбором корней полинома  $\delta_0(z)$ , которые из условия устойчивости замкнутой системы должны быть по модулю меньше 1.

В случае, если все полюса объекта вещественны, можно записать

$$a(e^{j\omega h}) = \prod_{i=1}^n (e^{j\omega h} - z_i), \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h,$$

где  $z_i, i = 1, \dots, n$  — корни полинома  $a(z)$ . Тогда, учитывая выражение (13), условие (19) можно представить как

$$\left| \prod_{i=1}^n \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| \geq r, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h. \quad (20)$$

Для выполнения условия (20) достаточно выполнение подобного условия для каждого сомножителя отдельно:

$$\left| \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| \geq r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq \omega \leq \pi/h, \quad (21)$$

где  $r_i, i = 1, \dots, n$ , выбираются такие, что

$$\prod_{i=1}^n r_i = r. \quad (22)$$

Неравенства (21) выполняются, если

$$\min_{0 \leq \omega \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| = r_i. \quad (23)$$

Значения модулей можно определить как

$$\begin{aligned} \left| \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| &= \left| \frac{(\cos \omega h + j \sin \omega h - \lambda_i)}{(\cos \omega h + j \sin \omega h - z_i)} \right| = \\ &= \frac{\sqrt{(\cos \omega h - \lambda_i)^2 + \sin^2 \omega h}}{\sqrt{(\cos \omega h - z_i)^2 + \sin^2 \omega h}} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_i^2 + 1 - 2\lambda_i \cos \omega h}}{\sqrt{z_i^2 + 1 - 2z_i \cos \omega h}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Минимумы могут быть на границах интервала  $0 \leq \omega \leq \pi/h$  или при таких значениях  $\omega$ , где производная по  $\omega$  полученного выражения (24) равна 0. Так как корень квадратный — монотонная функ-

ция, то для нахождения экстремумов выражения (24), достаточно найти нули производной подкоренного выражения, которая имеет вид

$$\psi(\omega) = \frac{2h \sin \omega h (z_i - \lambda_i)(\lambda_i z_i - 1)}{(z_i^2 + 1 - 2z_i \cos \omega h)^2}. \quad (25)$$

Рассмотрим варианты полюсов объекта.

**Устойчивый объект**,  $0 \leq z_i < 1, i = 1, \dots, n$ . Будем выбирать значения  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , такие, что  $0 \leq \lambda_i \leq z_i$ . Тогда сомножитель числителя производной (25)  $(\lambda_i z_i - 1)$  всегда меньше 0, а сомножитель  $(z_i - \lambda_i)$  больше или равен 0. Сомножитель  $\sin \omega h = 0$  при  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi/h$ , а для остальных значений  $0 < \omega < \pi/h$  выполняется  $\sin \omega h > 0$ . Таким образом, если  $\lambda_i = z_i$ , то  $\left| \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| = 1$ , а если  $0 \leq \lambda_i < z_i$ , то производная  $\psi(\omega) < 0$  для  $0 < \omega < \pi/h$  и, следовательно, минимум значения (24) будет при  $\omega = \pi/h$ . Для  $\omega = \pi/h$  получаем

$$\left| \frac{(e^{j\frac{\pi}{h}h} - \lambda_i)}{(e^{j\frac{\pi}{h}h} - z_i)} \right| = \left| \frac{-1 - \lambda_i}{-1 - z_i} \right| = \frac{\lambda_i + 1}{z_i + 1},$$

т. е. условие (23) в этом случае имеет вид

$$\frac{\lambda_i + 1}{z_i + 1} = r_i, \quad (26)$$

и теперь у нас есть формула для получения значений  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ :

$$\lambda_i = r_i(z_i + 1) - 1, \quad (27)$$

где  $r_i$  выбрано из условия (22), и кроме того, для получения значения  $0 \leq \lambda_i < 1$  по формуле (27) значение  $r_i$  должно удовлетворять условию

$$\frac{1}{(z_i + 1)} \leq r_i < \frac{2}{(z_i + 1)}. \quad (28)$$

Если для каких-то  $\lambda_i$  допустить, что  $\lambda_i > z_i$ , то производная  $\psi(\omega)$  будет положительна для  $0 < \omega < \pi/h$  и, следовательно, минимум значения модулей (24) будет при  $\omega = 0$ . Тогда вместо условия (26) получаем

$$\frac{1 - \lambda_i}{1 - z_i} = r_i,$$

и значение  $\lambda_i$  определяется как

$$\lambda_i = 1 - r_i(1 - z_i), \quad (29)$$

где, учитывая соотношение  $\lambda_i > z_i$ , должно выполняться

$$0 < r_i < 1. \quad (30)$$



Суммируя изложенное, сформулируем рекомендации для определения корней полинома  $\delta_0(z)$  для объектов с вещественными неотрицательными полюсами:

— выделить «быстрые» устойчивые полюса объекта  $z_i \ll \lambda_{\max}^*$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $l < n$ , для которых принять  $\lambda_i = z_i$ ;

— остальные значения  $\lambda_i$ ,  $i = l + 1, \dots, n$ , получить из формулы (27), приняв,  $r_i = \sqrt[n-l]{r}$ , например;

— проверить, что выполняется неравенство  $\lambda_i < \lambda_{\max}^*$ , а если не выполняется, то подбирать другие значения  $r_i$ , соблюдая условие (22).

**Неустойчивый объект**,  $z_i \geq 1$  (для некоторых  $i$ ).

В этом случае производная (25) остается отрицательной для  $0 < \omega < \pi/h$  при выполнении условия  $\lambda_i < 1/z_i$  и  $\lambda_i$  также определяются по формуле (27). Но учитывая соотношение  $\lambda_i < 1/z_i$ , вместо условия (28) будет ограничение

$$\frac{1}{(z_i + 1)} \leq r_i < \frac{1}{z_i}.$$

Из выражения (24) видно, что выбор  $\lambda_i = 1/z_i$  дает значение

$$\left| \frac{(e^{j\omega h} - \lambda_i)}{(e^{j\omega h} - z_i)} \right| = \frac{1}{z_i} = r_i$$

При  $\lambda_i > 1/z_i$  производная (25) будет положительна для  $0 < \omega < \pi/h$ , и минимум значения выражения (24) будет при  $\omega = 0$ . Для  $z_i > 1$  получаем

$$\frac{1 - \lambda_i}{z_i - 1} = r_i,$$

и значение  $\lambda_i$  определяется как  $\lambda_i = 1 - r_i(z_i - 1)$ , где для выполнения соотношения  $\lambda_i > 1/z_i$  значение  $r_i$  можно выбирать из диапазона  $0 < r_i < 1/z_i$ .

Нужно учитывать, что при больших значениях неустойчивых полюсов объекта  $z_i$  выбор значений  $r_i$  ограничивается малым числом  $1/z_i$ , что может не позволить выполнить требование (22), и, следовательно, не любой желаемый радиус запасов устойчивости может быть получен, как уже было показано [23].

**Объект с отрицательным значением полюса**,  $z_i < 0$ . Заметим, что при дискретизации непрерывных объектов такие значения не могут получаться [32]. В этом случае производная (25) будет положительна для  $0 < \omega < \pi/h$ , и минимум значения (24) будет при  $\omega = 0$ . Тогда значения  $\lambda_i$  можно опреде-

лять по формуле (29), но вместо условия (30) значение  $r_i$  можно выбирать из диапазона

$$0 < r_i < \frac{1}{(1 - z_i)}.$$

В этом случае значение  $r_i$  может быть ограничено малым числом, т. е. не любой желаемый радиус запасов устойчивости может быть получен.

Случай объекта с комплексно-сопряженными полюсами требует отдельного рассмотрения.

## 5. ПРИМЕРЫ

### 5.1. Управление мотоциклом

Рулевое управление движением мотоцикла можно описать упрощенной линейной моделью [11]:

$$y = \frac{as + 1}{s^2} (u + f),$$

где  $y$  — это курсовой угол (в градусах),  $u$  — угол поворота руля (в градусах). Значение коэффициента  $a$ , соответствующее положению центра масс относительно задней оси, примем равным 0,5. Для периода дискретности  $h = 0,1$  с получим эквивалентную дискретную модель объекта [27, 29, 32]:

$$W_u(z) = \frac{0,055(z - 0,8182)}{(z - 1)^2}. \quad (31)$$

Пусть желаемый радиус запасов устойчивости  $r = 0,75$ , желаемое время регулирования  $t_p^* = 1$  с и ошибка регулирования при возмущении (2), для которого  $f^* = 10$ , должна быть не более  $y^* = 1$ .

Максимальное значение корней характеристического полинома, определенное по формуле (16), исходя из допустимой ошибки регулирования, для исходных данных этого примера получилось равным 0. Такие значения корней не обеспечат желаемого радиуса запасов устойчивости. В этом случае после нахождения регулятора по заданному времени регулирования и радиусу запасов устойчивости определим достижимую ошибку регулирования.

Максимальное значение корней характеристического полинома исходя из желаемого времени регулирования, определенное по формуле (17):  $\lambda_{\max} = 0,7408$ .

Для объекта второго порядка (31) необходимо определить два корня полинома второго порядка  $\delta_0(z)$ . Примем  $\lambda_1 = \lambda_{\max} = 0,7408$ . Тогда по формуле (27)

$$r_1 = \frac{\lambda_1 + 1}{z_1 + 1} = \frac{1,7408}{2} = 0,8704.$$

Определим  $r_2 = r/r_1 = 0,8617$  и получим по формуле (27) значение  $\lambda_2 = 0,7233$ .

Возвращаясь к вопросу ошибки регулирования, заметим, что условие (16) — это достаточное, но не необходимое условие выполнения условия (14). Поэтому проверим значение ошибки регулирования для исходных

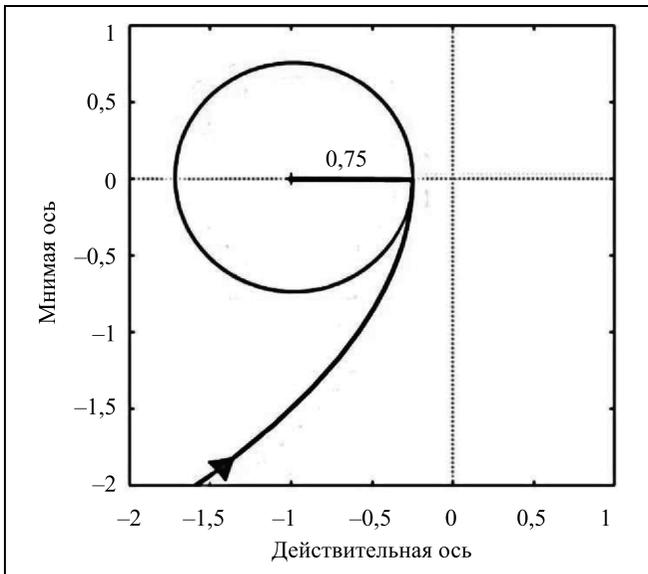


Рис. 2. Годограф Найквиста разомкнутой системы (31), (32)

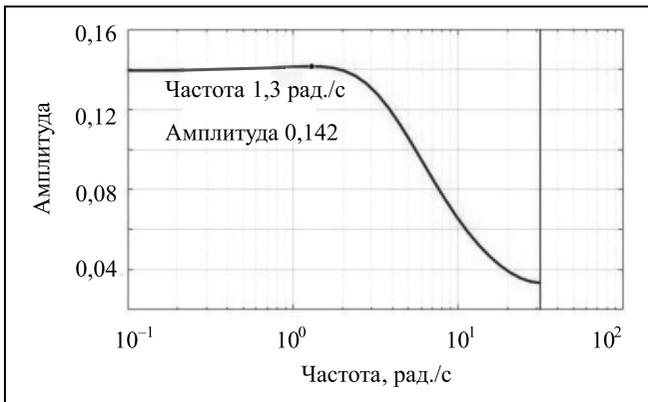


Рис. 3. Амплитудная частотная характеристика замкнутой системы (31), (32)

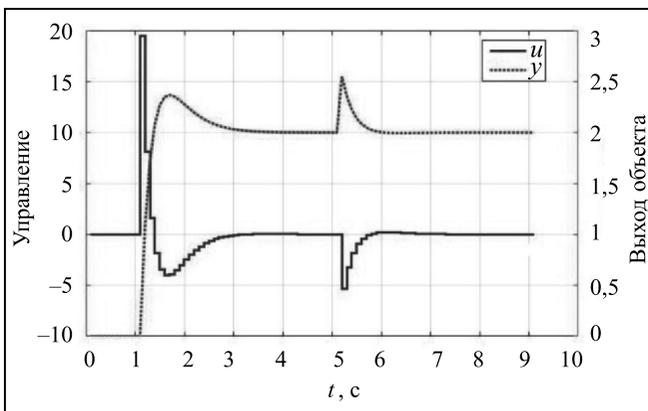


Рис. 4. Переходные процессы в замкнутой системе (31), (32)

данных этого примера и полученных корней характеристического полинома  $\lambda_1, \lambda_2$  по формуле, выведенной из выражения (14):

$$y^* = f^* \sup_{0 \leq \omega \leq \pi/h} \left| \frac{g(e^{j\omega h})}{\prod_{i=1}^n (e^{j\omega h} - \lambda_i)} \right| = 1,42,$$

что будем считать приемлемым результатом.

Тогда формируем полином

$$\delta_0(z) = (z - 0,7408)(z - 0,7233),$$

и получаем по формулам (9) полиномы передаточной функции регулятора

$$c(z) = 0,055z - 0,045, \quad d(z) = 0,5359z - 0,4641. \quad (32)$$

В соответствии с формулой (3) получаем дискретный регулятор:

$$u(k) = -9,744y(k) + 8,438y(k-1) + 0,8182u(k-1).$$

Годограф Найквиста разомкнутой системы (31), (32) показан на рис. 2, где видно, что радиус запасов устойчивости равен заданному значению 0,75. Амплитудная частотная характеристика замкнутой системы (31), (32) по возмущению  $|W_{yf}(e^{j\omega h})|$  показана на рис. 3. Переходный процесс в замкнутой системе (31), (32) при изменении уставки с 0 на 2,0 в момент времени  $t = 0$  и при импульсном возмущении (физический смысл импульсного возмущения — это, например, неровности дороги, приводящие к изменению направления движения)  $f = 10$  в момент времени  $t = 5,0$  показан на рис. 4.

На рис. 4 видно, что при изменении уставки на  $2^\circ$  управление достигает значения, близкого к 20, что в трактовке реального процесса управления выглядит чрезмерным, а кроме того приводит к перерегулированию. Очевидно, что задачу рулевого управления лучше формулировать как следящую систему с регулятором [27] вида

$$c_m u(k+m) + \dots + c_0 u(k) = q_m y_{sp}(k+m) + \dots + q_0 y_{sp}(k) - d_m y(k+m) - \dots - d_0 y(k), \quad (33)$$

который в случае выбора  $q(z) = d(z)$  не отличается от регулятора (3), но в ином случае позволяет формировать динамику системы относительно уставки  $y_{sp}(k)$ . Так, если задана желаемая передаточная функция замкнутой системы

$$W_{ж}(z) = \frac{b_0(z)}{a_0(z)},$$

то, как показано в работе [27], она будет реализована в замкнутой системе, если полином

$$q(z) = \frac{b_0(z)\delta(z)}{a_0(z)b(z)}. \quad (34)$$

Пусть для рассматриваемого примера желаемая передаточная функция замкнутой системы сформирована, исходя из желаемого времени регулирования:

$$W_{ж}(z) = \frac{1 - \lambda_{\max}}{z - \lambda_{\max}} = \frac{0,2592}{z - 0,7408}.$$

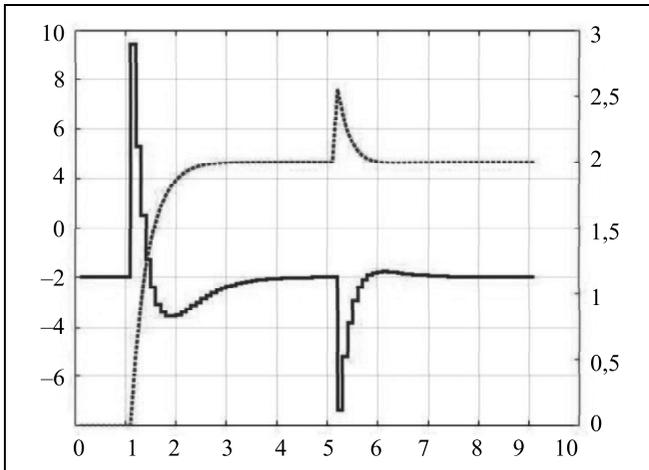


Рис. 5. Переходные процессы в замкнутой системе (31), (32), (35)

Сохраняя тот же желаемый характеристический полином, кроме полученных полиномов регулятора (32) по формуле (34) получим полином

$$q(z) = \frac{b_0(z)\delta_0(z)}{a_0(z)} = 0,2592(z - 0,7233). \quad (35)$$

Переходный процесс в замкнутой системе (31), (32), (35) с регулятором вида (33) при тех же условиях показан на рис. 5, где максимальное значение управления в 2 раза меньше, и перерегулирования нет.

### 5.2. Управление электродвигателем

Рассмотрим управление электродвигателем постоянного тока без учета динамики якорной цепи [27], где выход  $y$  — это угол поворота вала двигателя. Упрощенная непрерывная модель имеет вид:

$$s(Ts + 1)y = K_1u + K_2f.$$

Пусть коэффициенты  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = -0,5$ , постоянная времени  $T = 1$ , период дискретности  $h = 0,1$  с. Тогда эквивалентная [27, 29, 32] дискретная модель объекта будет

$$W_u(z) = \frac{0,00484(z + 0,9672)}{(z - 1)(z - 0,9048)},$$

$$W_f(z) = -\frac{0,00242(z + 0,9672)}{(z - 1)(z - 0,9048)}. \quad (36)$$

Пусть желаемый радиус запасов устойчивости  $r = 0,75$ , желаемое время регулирования  $t_p^* = 1,5$  с и ошибка регулирования при возмущении (2), для которого  $f^* = 1$ , должна быть не более  $y^* = 0,1$ .

Максимальное значение корней характеристического полинома, исходя из допустимой ошибки регулирования, определенное по формуле (16):  $\lambda_{\max} = 0,7819$  и исходя из желаемого времени регулирования, определенное по формуле (17):  $\lambda_{\max} = 0,8187$ .

Отметим, что хотя полином  $b(z)$  передаточной функции (36) устойчивый, но так как его корень отрицательный, то включение его в характеристический полином

дискретной замкнутой системы не желательно [27]. Поэтому в таком случае мы не можем находить регулятор по формулам (9), а будем находить коэффициенты регулятора  $c_i, d_i, i = 0, \dots, (n - 1)$ , решая систему алгебраических уравнений, полученных из уравнения (8). Для этого нужно выбрать еще один корень полинома  $\delta(z)$ . Например, примем  $\lambda_3 = \lambda_{\max}^* = 0,7819$ , а значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  найдем по формуле (27), приняв значения  $r_i$  как  $r_1 = r_2 = \sqrt{r} = 0,866$ . Эти значения удовлетворяют неравенствам (28). Тогда получаем  $\lambda_1 = 0,7321, \lambda_2 = 0,6496$ .

Сформировав желаемый характеристический полином

$$\delta(z) = (z - 0,7321)(z - 0,6496)(z - 0,7819),$$

получаем полиномы передаточной функции регулятора

$$c(z) = z - 0,3377, \quad d(z) = 16,32z - 14,17. \quad (37)$$

Радиус запасов устойчивости замкнутой системы (36), (37) равен 0,757, что больше заданного. Переходный процесс в замкнутой системе (36), (37) при ступенчатом возмущении  $f = 1$  показан на рис. 6, откуда видно, что время регулирования составляет 1,94 с, что несколько больше требуемого значения 1,5 с. Ошибка регулиро-

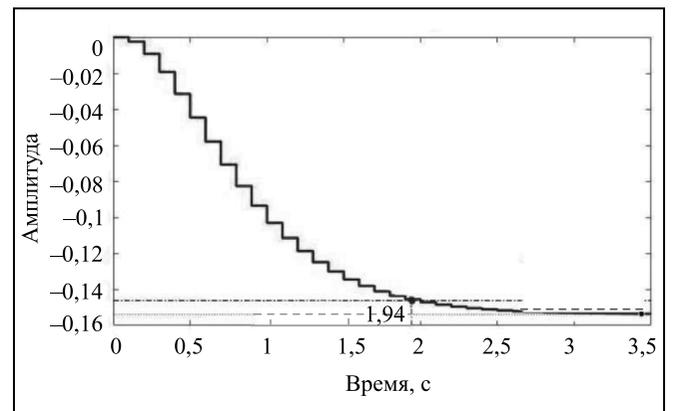


Рис. 6. Переходный процесс в замкнутой системе (36), (37)

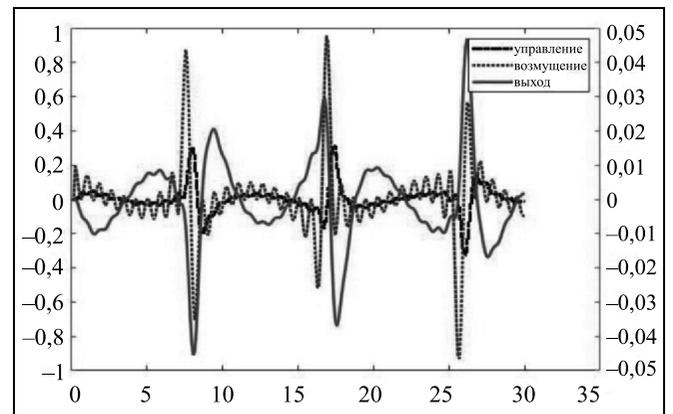


Рис. 7. Реакция замкнутой системы (36), (37) на полигармоническое возмущение

вания равна 0,154, что также больше заданного значения 0,1. Это обусловлено тем, что при построении регулятора для этого примера не может быть соблюдена процедура, описанная в статье, и предлагаемое решение следует рассматривать как основу для поиска регулятора, более полно удовлетворяющего поставленным требованиям. Но и полученный регулятор (37) может быть полезен. На рис. 7 приведен результат моделирования замкнутой системы (36), (37) при возмущении вида

$$f(k) = \sum_{i=1}^{10} \frac{f^*}{10} \sin((0,5 + 0,7i)hk + (i - 1)),$$

при  $f^* = 1$ . Видно, что при этом выход объекта остается в пределах  $\pm 0,05$ , что меньше заданного значения максимальной ошибки регулирования 0,1.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен синтез дискретных регуляторов по измеряемому выходу для одномерных объектов по заданным инженерным критериям качества на основе метода модального управления. Модальный подход к решению этой проблемы выявляет противоречивость этих инженерных показателей качества: требования к ошибке и времени регулирования определяют максимальные значения корней характеристического полинома замкнутой системы, что при высоких требованиях может приводить к корням, близким к нулю, в то время как требование к радиусу запасов устойчивости связывает значения корней характеристического полинома замкнутой системы с полюсами объекта управления. Приведены аналитические формулы для выбора корней желаемого характеристического полинома замкнутой системы, которые обеспечивают заданные ошибку регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости для минимально-фазового объекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. — М.: Энергия, 1980. [*Voronov, A.A.* Fundamentals of Automatic Control Theory: Automatic Control of Continuous Linear Systems. — М.: Energy, 1980. (In Russian)]
2. *MacFarlane, A.G.J.* The Development of Frequency-response Methods in Automatic Control // *IEEE Trans. Autom. Control.* — 1979. — Vol. 24, No. 2. — P. 250—65.
3. *Zhou, K., Doyle, J., Glover, K.* Robust and Optimal Control. — NJ: Prentice-Hall, 1996.
4. *Zhou, K., Doyle, J.C.* Essentials of Robust Control. — NJ: Prentice-Hall, 1998.
5. *Skogestad, S., Postlethwaite, I.* Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2006.
6. *Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // *IEEE Trans. Autom. Control.* — 1997. — Vol. 42. — P. 1098—1105.
7. *Anderson, B.D.O., Moore, J.B.* Optimal Control. Linear Quadratic Methods. — N.-Y.: Prentice Hall, 1990.

8. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. [*Alexandrov, A.G.* Control Design for Multivariable Systems. — М.: Mashinostroenie, 1986. (In Russian)]
9. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического регулирования. — М.: Физматлит, 2008. [*Alexandrov, A.G.* Design Methods for Automatic Control Systems. — М.: Fizmatlit, 2008. (In Russian)]
10. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. — Саратов: Саратов. политехн. ин-т. — 1980. — С. 3—14. [*Alexandrov, A.G.* The Robustness Criteria for Non-stationary Control Systems // Analytical Methods for Control Design — Saratov, 1980. — P. 3—14. (In Russian)]
11. *Åström, K.J., Murray, R.M.* Feedback Systems: an Introduction for Scientists and Engineers. — NJ: Princeton University Press, 2008.
12. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 7. — С. 100—109. [*Chestnov, V.N.* Synthesis of Controllers for Multivariate Systems with a Given Radius of Stability Margin by the  $H_\infty$ -optimization Method // Automation and Remote Control. — 1999. — Vol. 60, No. 7 — P. 986—993.]
13. *Alexandrov, A.G., Chestnov, V.N.* Accurate Control of Steady-state and  $H_\infty$  Suboptimal Control // Proc. Conf. ECC. — Brussels, 1997. — P. 712—716.
14. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 8. — С. 124—138. [*Alexandrov, A.G., Chestnov, V.N.* Synthesis of Multivariable Systems of Prescribed Accuracy. II. Use of Procedures of  $H_\infty$ -optimization // Automation and Remote Control. — 1998. — Vol. 59, No. 8. — P. 1153—1164.]
15. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе  $H_\infty$ -подхода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 101—108. [*Agafonov, P.A., Chestnov, V.N.* Controllers of a Given Radius of Stability Margin: Their Design by the  $H_\infty$ -approach with Regard for External Disturbances // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, No. 10. — P. 1611—1617.]
16. *Честнов В.Н.* Синтез робастных  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 199—205. [*Chestnov, V.N.* Design of Robust  $H_\infty$ -controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Automation and Remote Control. — 2007. — Vol. 68, No. 3. — P. 557—563.]
17. *Александров А.Г.* Построение дискретных систем управления с заданными свойствами // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 9. — С. 57—66. [*Alexandrov, A.G.* Construction of Discrete Control Systems with Given Properties // Automation and Remote Control. — 1973. — Vol. 34, No. 9. — P. 1414—1423.]
18. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Свойства аналитически сконструированных систем с цифровыми регуляторами // Известия вузов. Приборостроение. — 1987. — № 4. — С. 13—17. [*Alexandrov, A.G., Chestnov, V.N.* Properties of Analytically Designed Systems with digital controllers // Journal of Instrument Engineering. — 1987. — No. 4. — P.13—17. (In Russian)]
19. *Shaked, U.* Guaranteed Stability Margins for the Discrete-Time Linear-Quadratic Optimal Regulator // *IEEE Trans. Autom. Control.* — 1986. — Vol. 31, No. 2. — P. 162—165.
20. *Честнов В.Н.* Предельно достижимая точность линейных систем с дискретными регуляторами // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 2. — С. 193—214. [*Chestnov, V.N.* Maximum Achievable Precision of Linear Systems with Discrete



- Controllers // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, No. 2. — P. 333–350.]
21. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Проблемы управления. — 2019. — № 2. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Scalar Controllers Design of Given Oscillation Index: Modal and  $H_\infty$  approaches. — Control Sciences. — 2019. — No. 2. (In Russian)]
  22. *Честнов В.Н.* Синтез дискретных  $H_\infty$ -регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 9. — С. 65–82. [Chestnov, V.N. Synthesis of Discrete  $H_\infty$ -controllers with Given Stability Margin Radius and Settling Time // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, No. 9. — P. 1593–1607.]
  23. *Честнов В.Н.* Модальное управление одномерными объектами с учетом заданного радиуса запасов устойчивости // Тр. междунар. науч. конф. «Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения». — Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. — С. 159–164. [Chestnov, V.N. Modal Control of One-dimensional Plants with Allowance for the Given Radius of the Stability Margins // Proc. Int. Conf. Analytical Theory of Automatic Control and its Applications, Saratov: SGTU, 2000. — P. 159–164. (In Russian)]
  24. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления. // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 8. — С. 4–20. [Alexandrov, A.G. Stability Margins of the Systems of Optimal and Modal Control // Automation and Remote Control. — 2007. — Vol. 68, No. 8. — P. 1296–1308.]
  25. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 5. — С. 27–42. [Alexandrov, A.G. Controller Design in Precision and Speed. I. Minimal Phase One-dimensional Plants // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, No. 5. — P. 749–761.]
  26. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые объекты // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 6. — С. 3–17. [Alexandrov, A.G. Controller Design in Precision and Speed. II. Nonminimal-phase Plants // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, No. 6. — P. 961–973.]
  27. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. [Åström, K.J., Wittenmark, B. Computer-Controlled Systems: Theory and Design. — Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984.]
  28. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). — М.: Физматлит, 2012. [Gaiduk, A.R. Theory and Methods for the Automatic Control Systems Analytical Synthesis (Polynomial Approach). — M.: Fizmatlit, 2012. (In Russian)]
  29. *Ким Д.П.* Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. — М.: Физматлит, 2014. [Kim, D.P. Algebraic Methods for the Automatic Control System Synthesis. — M.: Fizmatlit, 2014. (In Russian)]
  30. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. [Pervozvanskiy, A.A. The Course of the Automatic Control Theory. — M.: Nauka, 1986. (In Russian)]
  31. *Chestnov, V.N., Shatov, D.V.* Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H-Infinity Optimization Procedures // Proc. of the European Control Conference. — Limassol, Cyprus, 2018. — P. 2511–2516.
  32. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005. [Miroshnik, I.V. Theory of Automatic Control. Linear Systems. — SPb.: Piter, 2005. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*
- Поступила в редакцию 20.12.2018, после доработки 27.06.2019.  
Принята к публикации 29.07.2019.*
- Честнов Владимир Николаевич** — д-р техн. наук,  
✉ vnchest@yandex.ru,
- Александров Вадим Альбертович** — канд. техн. наук,  
✉ va.alexandrov@yandex.ru,
- Резков Илья Геннадьевич** — канд. техн. наук,  
✉ fagothmail@gmail.com,
- Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## SYNTHESIS OF DISCRETE MODAL SISO CONTROLLERS BY ENGINEERING PERFORMANCE INDICES

V.N. Chestnov, V.A. Alexandrov<sup>#</sup>, I.G. Rezkov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>#</sup>✉ va.alexandrov@yandex.ru

**Abstract.** The linear discrete minimum-phase plant with one control input, one measured output and with an unmeasured external disturbance is considered. The problem is stated of the design of the discrete output controller that provides the preset engineering performance indices: control error, settling time, stability margins radius. Analytical formulas are obtained that allow to relate the engineering performance indices with the desired closed system characteristic polynomial roots in the modal control problem when choosing real non-negative roots. At the same time, the specified control error and the settling time lead to the constraints on the maximum absolute value of the desired roots, while the values of the desired roots, providing the given radius of stability margins, may not satisfy these constraints, so the specified values of the performance indices should be revised. Examples are given showing the effectiveness of the approach proposed.

**Keywords:** discrete linear system, modal control, control error, settling time, stability margin radius.