

# СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ $H_\infty$ -ПОДХОДА

В.Н. Честнов, Д.В. Шатов

**Аннотация.** Для линейных многомерных объектов построен алгоритм синтеза регуляторов по измеряемому выходу, гарантирующий заданные либо достижимые инженерные показатели качества. Объект управления подвержен действию ограниченных внешних возмущений (из класса полигармонических функций с бесконечным числом гармоник и ограниченной суммой амплитуд гармоник по каждой компоненте возмущения), что приводит к появлению дополнительных ошибок слежения по регулируемым переменным. Поставлена задача синтеза многомерного регулятора по выходу, обеспечивающего заданные или достижимые ошибки слежения, время регулирования, характеризующее заданной или достижимой степенью устойчивости замкнутой системы, а также совокупность показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -регулируемой переменной. При этом регулятор должен обеспечивать выполнение условия  $M_i \leq \gamma$ , где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число. Показано, что аппарат  $H_\infty$ -теории весьма удобен для решения подобного рода задач. Приводится пример синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом.

**Ключевые слова:** линейные многомерные системы, ограниченные внешние возмущения, ошибки слежения, время регулирования, степень устойчивости, показатель колебательности  $i$ -го контура.

## ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория автоматического управления минимально-фазовыми нейтральными объектами с одним входом и одним выходом показала высокую практическую эффективность благодаря физической ясности инженерных критериев качества, положенных в ее основу: ошибки слежения, времени регулирования и показателя колебательности [1].

Для многомерных объектов подобный подход к синтезу регуляторов еще не сформировался, хотя очевидным первым шагом является решение задачи автономного управления [2–4], восходящей к И.Н. Вознесенскому [5].

Недавние работы авторов [6, 7] были посвящены одномерным объектам (как минимально-фазовым, так и неминимально-фазовым, а также устойчивым и неустойчивым), регуляторы которых строились на основе  $H_\infty$ -техники. Настоящая работа посвящена многомерным объектам и может рассматриваться как развитие подхода [8] на слу-

чай следящих систем, когда вместо радиуса запасов устойчивости для оценки робастности замкнутой системы используется показатель колебательности, более естественный и общепринятый в теории и практике следящих систем.

Уточним здесь, что под показателем колебательности многомерной системы мы будем понимать совокупность показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ . При этом задачей регулятора является обеспечение выполнения условия  $M_i \leq \gamma$ , где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число. В работе показано, что для решения подобного рода задач аппарат  $H_\infty$ -теории является весьма удобным.

На практике автоматические системы подвержены действию ограниченных внешних возмущений, которые приводят к появлению дополнительных ошибок слежения. В настоящей работе рассматриваются полигармонические внешние возмущения с неизвестными амплитудами (с ограничением их суммы по каждой компоненте возмущения) и не-

известными частотами, число которых неограниченно. Регулятор должен обеспечивать заданные (или достижимые) ошибки слежения в присутствии таких возмущений. Эти возмущения покрывают практически важный класс возмущений, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени [8, 9].

Другой инженерный показатель качества, рассматриваемый при синтезе, — это время регулирования, характеризующее быстродействие замкнутой системы, при ненулевых начальных условиях и/или при ступенчатом изменении задающих или возмущающих воздействий. В настоящей работе время регулирования косвенно учитывается путем обеспечения заданной степени устойчивости замкнутой системы. Хотя этот показатель весьма приближенно оценивает скорость протекания переходных процессов (особенно в случае близких корней характеристического полинома замкнутой системы), тем не менее он хорошо зарекомендовал себя в практических приложениях при начальной оценке времени регулирования. Кроме того, как демонстрируется в работах [6, 10], чрезмерное увеличение степени устойчивости (более минимального расстояния нуля объекта до мнимой оси), даже в минимально-фазовом случае с регулятором по выходу приводит к катастрофическому уменьшению радиуса запасов устойчивости (росту показателя колебательности) и запасов устойчивости по фазе и модулю, что неприемлемо на практике в силу больших выбросов (перерегулирования) в переходной характеристике замкнутой системы. Это аналог эффекта всплеска [11] для регуляторов по выходу. Поэтому в алгоритме синтеза регулятора, как и в работе [8], предусмотрено постепенное увеличение степени устойчивости.

В мировой научной литературе, насколько известно авторам, приоритет в постановке (в рамках теории LQ и  $H_\infty$ -оптимизации) и решении отдельных задач этой весьма непростой проблемы принадлежит А.Г. Александрову [12, 13] и его ученикам. Подробный обзор работ этого направления приведен в статье [8]. Что касается работ западных авторов, то с появлением  $H_\infty$ -теории в начале 80-х годов прошлого века вопросам запасов устойчивости уделялось в них большое внимание [10, 14]. Вместе с тем, вопросы точности, быстродействия и запасов устойчивости, объединенные в едином методе синтеза многомерных следящих систем по измеряемому выходу, не получили должного освещения.

Отметим здесь некоторые, на наш взгляд, важные работы, посвященные отдельным аспектам рассматриваемой проблемы. Так, в работе [15] рассматриваются вопросы негладкой оптимизации по  $H_\infty$ -критерию, что позволило решать задачу синтеза регуляторов заданной структуры и порядка (например, ПИД-регуляторов) [16]. Это тесно связа-

но с тем, что регуляторы, построенные на основе современных техник синтеза, имеют высокий порядок, что приводит к их «хрупкости» (потере устойчивости при малых отклонениях параметров регулятора от расчетных) [17], что обычно выражается в малых запасах устойчивости по фазе и модулю в контурах регулирования. Укажем также на нерешенную и поныне проблему выбора весовых функций в задаче синтеза многомерных  $H_\infty$ -регуляторов, что и отмечается в работе [18] (для скалярных систем некоторые правила имеются в монографии [14]). В настоящей же работе дано строгое математическое правило выбора весового коэффициента по заданной точности слежения.

Подчеркнем принципиальную новизну подхода настоящей работы по сравнению с работой [8] (помимо другой меры робастности замкнутой системы, о чем сказано ранее) к вопросу точности. Здесь, в отличие от работы [8], не вводится новый вектор взвешенных регулируемых переменных, а взвешивается вектор внешних возмущений, что позволяет существенно уменьшить степень достаточности получаемого результата.

Показано, что поставленная задача обеспечения вышеперечисленных инженерных показателей качества сводится к специальным образом сконструированной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации [19, 20]. Численное решение такой вырожденной задачи удобно искать на основе метода линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI) [21, 22], например, в MATLAB — пакете Robust Control Toolbox [23]. Приводится пример синтеза при управлении взаимосвязанным электроприводом [8].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u, \quad z = Cx, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния объекта;  $u \in R^m$  — вектор управлений;  $z \in R^{m_1}$  — вектор регулируемых переменных;  $f \in R^{m_3}$  — вектор внешних возмущений, недоступный для измерения.

Пусть объект (1) замкнут стабилизирующим регулятором по измеряемому выходу

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c \varepsilon, \quad u = C_c x_c + D_c \varepsilon, \quad \varepsilon = g - z, \quad (2)$$

где  $x_c \in R^{n_c}$  — вектор состояния регулятора ( $n_c \leq n$ ),  $g \in R^{m_1}$  — вектор задающих воздействий,  $\varepsilon \in R^{m_1}$  — вектор ошибок слежения, доступный измерению,  $A_c, B_c, C_c, D_c$  — матрицы чисел.



Компоненты вектора внешних возмущений — ограниченные функции

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}, \quad (3)$$

где амплитуды  $f_{ik} \geq 0$ , начальные фазы  $\psi_{ik}$ , а также частоты  $\omega_k$  ( $i = \overline{1, m_3}, k = \overline{1, \infty}$ ) неизвестны, а число гармоник неограниченно.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \leq f_i^*, \quad i = \overline{1, m_3}, \quad (4)$$

где  $f_i^* > 0, i = \overline{1, m_3}$  — заданные числа.

Условия (3), (4) означают, что имеют место неравенства  $|f_i(t)| \leq f_i^*, (i = \overline{1, m_3})$ . Модель внешнего возмущения (3), (4) покрывает широкий практически важный класс возмущений, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные по времени [8] и, следовательно, разложимы в абсолютно сходящийся ряд Фурье [9], который является частным случаем (3) с кратными частотами. Кроме того, ряд (3) необязательно периодическая функция времени. Например, если все частоты в (3) взять нулевыми, а начальные фазы равными  $(2k+1)\pi/2$ , где  $k = \overline{0, \infty}$ , то придем к ступенчатой функции.

Определим ошибки слежения, вызванные действием внешнего возмущения (3), (4), соотношением

$$\varepsilon_{i,st} = \sup_{t \geq t_p} |\varepsilon_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_1},$$

где  $t_p$  — время регулирования. Обычно на практике требуется, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_{i,st} \leq \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i^* > 0$  — заданные числа (желаемые ошибки слежения).

Время регулирования в замкнутой системе (1), (2) можно оценить по приближенной формуле  $t_p \approx 3/\beta$ , где  $\beta$  — степень устойчивости замкнутой системы — минимальное расстояние собственных значений матрицы замкнутой системы (1), (2)  $A_{cl}$  до мнимой оси, где

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A - B_2 D_c C & B_2 C_c \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

**Задача.** Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, чтобы

- выполнялись требования к точности системы

$$\varepsilon_{i,st} \leq \gamma_1 \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (6)$$

где  $\gamma_1$  — заданное или минимизируемое число;

- индивидуальные показатели колебательности не превышали заданного или минимизируемого значения  $\gamma_2$ :

$$M_i = \|t_i\|_{\infty} \leq \gamma_2, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

где  $t_i(s)$  — передаточная функция замкнутой системы, связывающая  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , а  $\|t_i\|_{\infty}$  ее  $H_{\infty}$ -норма;

- собственные значения матрицы  $A_{cl}$  замкнутой системы (1), (2) удовлетворяли условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}) \leq -\beta, \quad i = \overline{1, n+n_c}, \quad (8)$$

где  $\beta \geq 0$  — заданное число.

Прокомментируем поставленную задачу.

Если объект управления (1) неминимально-фазовый по управлению (имеет правые нули), то исходное требование к точности (5) не может быть выполнено для любых  $\varepsilon_i^*$ , поэтому необходимо выполнить требования (6). Если дополнительно объект еще и неустойчивый [14], то величина  $\gamma_2$  в правой части неравенства (7) всегда больше единицы и она имеет нижнюю границу, меньше которой сделать величину  $M_i$  не удастся никаким линейным регулятором. И наконец, степень устойчивости  $\beta$  не может быть сделана больше нуля объекта, ближайшего к мнимой оси, что приводит к резкому уменьшению запаса устойчивости, т. е. требование высокой точности противоречит требованию малых показателей колебательности, а высокое быстродействие (большое значение  $\beta$ ) противоречит требованию к запасам устойчивости (малым значениям  $M_i$ ).

В настоящей работе ищется разумный компромисс между взаимопротиворечивыми инженерными показателями качества на основе техники  $H_{\infty}$ -оптимизации, которая оказалась весьма удобным инструментом для решения задач синтеза регуляторов, имеющим практическую направленность.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ $H_{\infty}$ -ПОДХОДА

Для решения поставленной задачи прежде всего установим связь индивидуальных показателей колебательности  $M_i, i = \overline{1, m_1}$  с  $H_{\infty}$ -нормой передаточной матрицы замкнутой системы  $T(s)$ , связывающей вектор задающих воздействий  $g$  с вектором регулируемых переменных  $z$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть выполнено неравенство

$$\|T\|_{\infty} \leq \gamma, \quad (9)$$

тогда

$$M_i \leq \gamma, \quad i = \overline{1, m_1}. \quad (10)$$

Заметим, что в силу выражения (9) подобное неравенство будет выполняться и для любого элемента матрицы  $T(s)$  [24], в частности, для любого диагонального элемента  $t_i(s)$ :  $\|t_i\|_\infty \leq \gamma$ . Но передаточная функция  $t_i(s)$  связывает  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , и тогда, по определению,  $M_i = \|t_i\|_\infty$ , что ведет к неравенству (10).

На вход замкнутой системы (1), (2) подается два внешних сигнала  $g$  и  $f$ , которые объединим в расширенный вектор  $w^T = [g^T f^T]$ . В качестве регулируемого выхода возьмем вектор  $z$ . В замкнутой системе эти векторы связаны передаточной матрицей  $T_{zw}(s)$ , которая имеет структуру

$$z = T_{zw}(s)w = [T(s) T_f(s)]w, \quad (11)$$

где  $T(s)$  — передаточная матрица замкнутой системы от вектора  $g$  к вектору  $z$ ;  $T_f(s)$  — передаточная матрица замкнутой системы от вектора  $f$  к вектору  $z$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу  $H_\infty$ -оптимизации

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma, \quad (12)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Учитывая структуру передаточной матрицы (11) условие (12) можно представить в эквивалентной частотной форме

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) + T_f^T(-j\omega)T_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (13)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующих размеров. Отсюда следуют два неравенства

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad T_f^T(-j\omega)T_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (14)$$

первое из которых эквивалентно неравенству (9), а второе означает, что  $\|T_f\|_\infty \leq \gamma$ .

Таким образом, находя регулятор (2) из решения задачи (12), мы добиваемся выполнения целевого условия (7) поставленной задачи для  $\gamma_2 = \gamma$ , где  $\gamma$  — реализовавшееся значение при решении задачи (12).

Обратимся теперь к требованиям к точности (6). Для их учета при решении задачи (12) заменим матрицу  $B_1$  объекта (1) на масштабированную матрицу  $B_1 Q^{1/2}$ , где  $Q^{1/2}$  — скалярный весовой коэффициент, выбираемый ниже. Тогда второе условие (14) примет вид:

$$T_f^T(-j\omega)QT_f(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty).$$

Обратившись теперь к Лемме о рабочем процессе из статьи [8], для установившихся значений регулируемых переменных  $z_{i, st} = \sup_{t \geq t_p} |z_i(t)|$ ,  $i = \overline{1, m_1}$ ,

можно записать

$$Qz_{i, st}^2 \leq \gamma^2 \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (15)$$

где  $f_j^*$  — известные границы компонент внешних возмущений из неравенства (4). В формуле (15), в отличие от работы [8], присутствует общий для всех переменных  $z_{i, st}$  весовой коэффициент  $Q$ . Поэтому выбор его осуществим по наименьшей заданной ошибке  $z_{\min} = \varepsilon_{\min} = \min\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_{m_1}^*\}$ , а именно:

$$Q = \left( \sum_{j=1}^{m_3} f_j^* \right)^2 / (\varepsilon_{\min}^*)^2. \quad (16)$$

В этом случае ошибка слежения от действия внешнего возмущения  $f$  удовлетворяет равенству  $\varepsilon_{i, st} = z_{i, st}$ . И тогда из неравенства (15) получим

$$\varepsilon_{i, st} \leq \gamma \varepsilon_{\min}^*, \quad i = \overline{1, m_1},$$

и, следовательно, требования к точности (6) выполняются.

Учтем теперь требования к степени устойчивости (8) замкнутой системы, определяющей время регулирования. Следуя работе [8], заменим при решении задачи (12) матрицу  $A$  объекта (1) на смещенную матрицу  $\tilde{A} = A + \beta I$ , где  $\beta$  — желаемая степень устойчивости. Тогда решение смещенной задачи (12) с такой матрицей  $\tilde{A}$  объекта даст смещенный регулятор с матрицами  $\tilde{A}_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ . Искомый регулятор (2), обеспечивающий решение поставленной задачи, имеет матрицы [8]

$$A_c = \tilde{A}_c - \beta I, \quad B_c, \quad C_c, \quad D_c. \quad (17)$$

Суммируя изложенное, сформулируем следующее утверждение.

**Теорема.** Регулятор (2), (17) разрешает поставленную задачу, если весовой коэффициент  $Q$  в смещенной  $H_\infty$ -проблеме (12) выбран из условия (16). При этом значения величин  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , фигурирующих в целевых условиях (6), (7) поставленной задачи, совпадают и равны значению  $\gamma$ , реализовавшемуся при численном решении задачи (12), (13).

Заметим, что переход от неравенства (12) к неравенствам (14) придает достаточный характер представленному результату.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поскольку вектор регулируемых переменных в системе (11) не содержит управлений, то задача (12) вырождена и численно не может быть решена на базе 2-Риккати похода [19]. Более предпочтительно ее решение на основе LMI-техники [21, 22] MATLAB-пакета [23], как представлено ниже. Как отмечалось ранее, чрезмерное увеличение степени устойчивости  $\beta$  ведет к резкому увеличению показателей колебательности и, как следствие, большим выбросам в переходной функции замкнутой системы. Поэтому в алгоритме синтеза, представленном ниже, применяется принцип постепенного увеличения быстродействия или значения  $\beta$ .

1. Заменим матрицу  $A$  объекта на матрицу  $\tilde{A} = A + \beta I$ , полагая сначала  $\beta = 0$ .

2. Выбираем весовой коэффициент  $Q$  из равенства (16) и строим четверку матриц  $A_{об}$ ,  $B_{об}$ ,  $C_{об}$ ,  $D_{об}$  уравнений состояния обобщенного объекта  $A_{об} = \tilde{A}$ ,

$$B_{об} = [0 \ B_1 \cdot Q^{1/2} \ B_2], \ C_{об} = \begin{bmatrix} C \\ -C \end{bmatrix}, \ D_{об} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix},$$

$D_{11} = [0 \ 0]$ ,  $D_{21} = [I \ 0]$ ,  $D_{22} = 0$ ,  $D_{12} = 0$ , где размерности матриц должны быть согласованы.

3. Формируем системную матрицу обобщенного объекта с помощью команды

$$P = \text{ltisys}(A_{об}, B_{об}, C_{об}, D_{об}).$$

4. Находим оптимальное значение  $\gamma_0 = \text{hinflmi}(P, [m_2, m])$  в задаче (12), где  $m_2$  и  $m$  — число входов и выходов регулятора соответственно.

5. Выбираем  $\gamma > \gamma_0$  и строим системную матрицу регулятора  $K$ , разрешающего задачу (12), с помощью процедуры  $[\gamma, K] = \text{hinflmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — точность вычисления  $\gamma$ .

6. Из системной матрицы  $K$  извлекаем матрицы уравнений состояния смещенного регулятора процедурой  $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$ .

7. Находим матрицы  $A_c = \tilde{A}_c - \beta I$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$  искомого регулятора (17).

8. Строим переходный процесс в замкнутой системе при действии внешних возмущений из класса (3), (4), находим ошибки слежения и время регулирования, а также показатели колебательности  $M_i$ . Если требования к точности (6) и/или показателям колебательности (7) не выполнены, то задача неразрешима данным подходом. Иначе, переходим к п. 9.

9. Если требования к быстродействию не выполняются, то увеличиваем значение параметра  $\beta$  и переходим к п. 1, иначе задача решена.

При первом проходе алгоритма естественно использовать  $\gamma = \gamma_0$ . Если требования (6) и/или (7) не выполнены, то целесообразно решить отдельные задачи синтеза по показателю колебательности (здесь  $T_{zw}(s) = T(s)$ ) или заданной точности (здесь  $T_{zw}(s) = T_f(s)$  с весовым коэффициентом из формулы (16)). Эти задачи имеют необходимый и достаточный характер, что позволяет найти значение  $\gamma_0$ , определяющее достижимые значения точности (6) либо показатели колебательности  $M_i = \gamma_0$ .

### 4. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

Рассмотрим взаимосвязанный электропривод, модель которого приведена в статье [8]. В работе [25] такая модель отнесена к классу параллельных систем. Структурная схема модели приведена на рис. 1.

На схеме  $x_1, x_2$  — отклонения выходных напряжений тиристорных преобразователей от номинальных, подаваемых в якорные цепи двигателей;  $x_3, x_4$  — отклонения якорных токов приводных двигателей;  $x_5$  — отклонение угловой скорости вращения вала двигателей;  $u_1, u_2$  — отклонения управляющих напряжений, подаваемые на тиристорные преобразователи с системы управления приводами;  $M_{дв1}, M_{дв2}$  — отклонения электромагнитных моментов, развиваемых двигателями от номинала;  $M_c$  — отклонение момента сопротивления (нагрузки);  $T_{ТП1}, T_{ТП2}$  — постоянные времени тиристорных преобразователей;  $k_{ТП1}, k_{ТП2}$  — коэффициенты передачи тиристорных преобразователей;  $c_{M1}, c_{M2}, c_{e1}, c_{e2}$  — конструктивные постоянные двигателей;  $R_{я1}, R_{я2}$  — активные сопротивления якорных цепей двигателей;  $T_{э1}, T_{э2}$  — электромагнитные постоянные якорных цепей двигателей;  $J$  — суммарный момент инерции, приведенный к одному из валов двигателя.

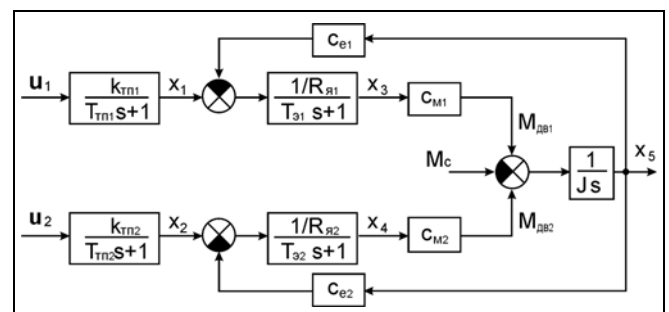


Рис. 1. Структурная схема объекта управления

На структурной схеме рис. 1 коэффициенты модели имеют такие числовые значения:  $c_{M1} = 8,1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А}}$ ,  $c_{M2} = 8,262 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А}}$ ,  $c_{e1} = 8,15 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ ,  $c_{e2} = 8,313 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ ,  $T_{\Theta 1} = 0,0886 \text{ с}$ ,  $T_{\Theta 2} = 0,090372 \text{ с}$ ,  $T_{\text{ТП1}} = 0,01 \text{ с}$ ,  $T_{\text{ТП2}} = 0,012 \text{ с}$ ,  $R_{Я1} = 0,0819 \text{ Ом}$ ,  $R_{Я2} = 0,08358 \text{ Ом}$ ,  $k_{\text{ТП1}} = 161,2$ ,  $k_{\text{ТП2}} = 164,424$ ,  $J = 32,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Внешнее возмущение  $f = M_c$  — отклонение момента сопротивления (нагрузки) от номинального, не превышает величины  $f^* = 600 \text{ Нм}$  (20 % номинального момента двигателя). Измеряемые переменные для этого объекта связаны с физическими переменными соотношениями  $y_1 = x_3$ ,  $y_2 = x_4$ ,  $y_3 = x_5$ ; внешнее возмущение  $f$  и управляющие воздействия  $u_1$ ,  $u_2$  приложены в разных точках. Главной регулируемой переменной объекта является угловая скорость двигателей  $z_3 = y_3 = x_5$ . Помимо этого важным практическим требованием к параллельным системам является требование равномерности двигателей (близости их якорных токов) при работе на общую нагрузку, что при использовании стандартных ПИ-регуляторов зачастую не выполняется [25]. Численные эксперименты показали, что если в качестве регулируемой переменной рассматривать только угловую скорость двигателей  $z_3 = x_5$ , то требование равномерности двигателей может не выполняться, и самое главное, запасы устойчивости на выходе объекта по измеряемым переменным  $y_1 = x_3$  и  $y_2 = x_4$  (тока двигателям) могут быть весьма малыми, что недопустимо на практике. Поэтому в качестве регулируемых переменных далее будем рассматривать все измеряемые переменные объекта  $z_1 = y_1 = x_3$ ,  $z_2 = y_2 = x_4$ ,  $z_3 = y_3 = x_5$  (токи и угловую скорость двигателей). Таким образом, задающие воздействия  $g_1$  и  $g_2$  фактически будут фиктивными, используемыми только при синтезе регулятора. Надо сказать, что поведение токов двигателей в номинальном режиме определяется только изменениями момента нагрузки — возмущения.

Матрицы объекта (1) имеют вид [8]:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,333 & 0 & 0 & 0 \\ 137,811 & 0 & -11,287 & 0 & -1123,155 \\ 0 & 132,459 & 0 & -11,065 & -1101,133 \\ 0 & 0 & 0,2487 & 0,254 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,031 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16 & 120 & 0 \\ 0 & 13 & 702 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требования к системе:

- ошибка слежения по угловой скорости  $\varepsilon_{3,sl} = z_{3,sl} \leq z_3^* = 1 \text{ рад/с}$ , а отклонения токов в переходных режимах не должны превышать  $|z_1| \leq 375 \text{ А}$ ,  $|z_2| \leq 375 \text{ А}$ ;
- показатели колебательности не более единицы обеспечиваются по измеряемому выходу объекта — переменным  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ;
- время регулирования  $t_p = 0,25 \text{ с}$ .

Для решения задачи синтеза по алгоритму из § 3 настоящей статьи найдем весовой коэффициент из формулы (16)  $Q^{1/2} = f^*/z_3^* = 600/1 = 600$  и положим  $\beta = 0$ . Это дает следующие матрицы регулятора (2) и реализовавшееся значение  $\gamma$ :

$$A_c = \begin{bmatrix} -387,822 & -91,669 & 421,791 & 902,372 & -4003,386 \\ -18,692 & -371,046 & -82,211 & 1772,776 & -7073,098 \\ -74,743 & -12,302 & -65,282 & 170,106 & -613,257 \\ -6,386 & -24,3 & -3,326 & -10,924 & 135,406 \\ 0,0525 & 0,0697 & 0,066 & -484,352 & -484,698 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,00119 & 0,00132 & 0,000937 \\ 0,000693 & -0,000701 & 0,00003 \\ -0,00223 & 0,00252 & 0,000215 \\ 0,552 & 0,579 & 4,817 \\ 63,954 & 62,713 & -13,418 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0,00639 & 0,0118 & 0,0162 & -0,0697 & 0,265 \\ 0,0197 & 0,0161 & -0,0237 & -0,12 & 0,506 \end{bmatrix},$$

$$D_c = 0_{2 \times 3}, \quad \gamma = 51,86.$$

Заметим, что реакция замкнутой системы (1), (2) ( $g_3 \rightarrow z_3$ ) на задающее воздействие  $g_3 = 1$  дает большую статическую ошибку по угловой скорости. Поэтому для устранения последней масштабируем задающее воздействие величиной, обратной этой ошибке (коэффициентом передачи замкнутой системы, который легко найти из годографа разомкнутой системы по угловой скорости, приведенного ниже). После такого масштабирования

амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы по задающему воздействию примет вид, представленный на рис. 2, б, а переходный процесс по угловой скорости представлен на рис. 3, б. На рис. 2, а, приведена промасштабированная (величиной 600 Нм) амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы по возмущению ( $f \rightarrow z_3$ ). Из этой монотонно убывающей характеристики очевидно, что наихудшим возмущением из класса (3), (4) для замкнутой системы является ступенчатое. Соответствующий переходный процесс по угловой скорости на такое возмущение величиной 600 Нм приведен на рис. 3, а и, следовательно, требования к точности выполнены. Из приведенных переходных процессов также очевидно,

что требования к быстродействию замкнутой системы выполнены,  $t_p \leq 0,25$  с. Токи двигателей в переходных режимах весьма близки и, следовательно, двигатели равнонагружены, а их отклонения от номинала много меньше допустимого значения 375 А.

На рис. 4 приведены годографы Найквиста системы, разомкнутой по соответствующим измеряемым переменным: токам двигателей слева и угловой скорости справа. Из этих характеристик очевидно, что по измеряемым переменным система имеет бесконечный запас по фазе, поскольку годографы  $w_i(j\omega)$  целиком находятся внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

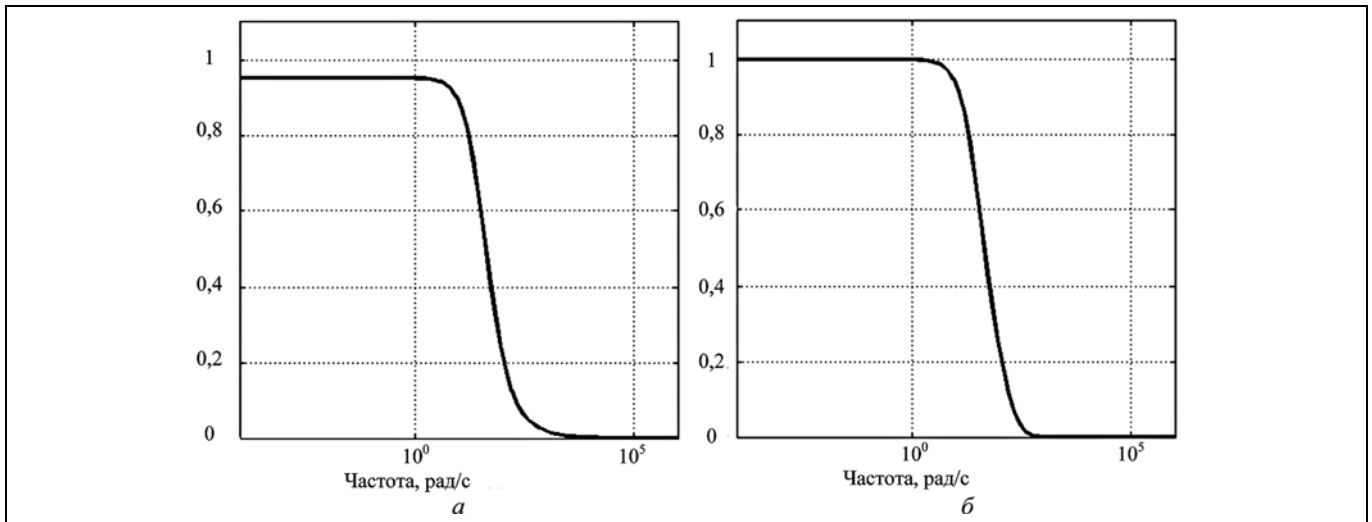


Рис. 2. АЧХ замкнутой системы: а — по возмущению; б — по заданию

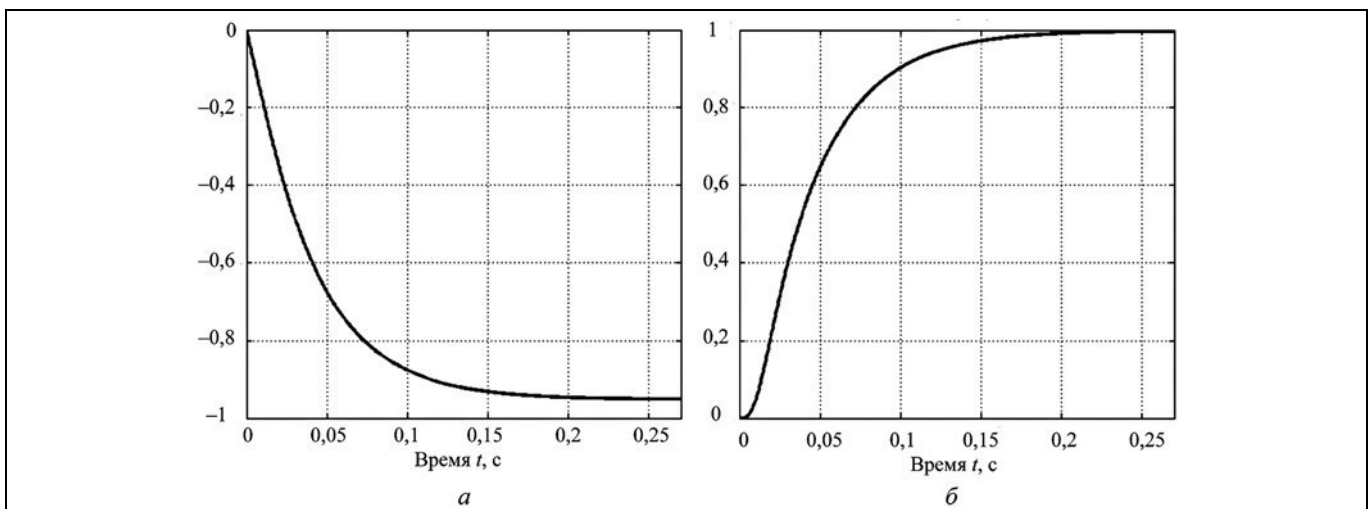


Рис. 3. Реакция системы на ступенчатое возмущение и задающее воздействие: а — выход системы при  $f(t) = 600$ ; б — выход системы при  $g_3(t) = 85,47$

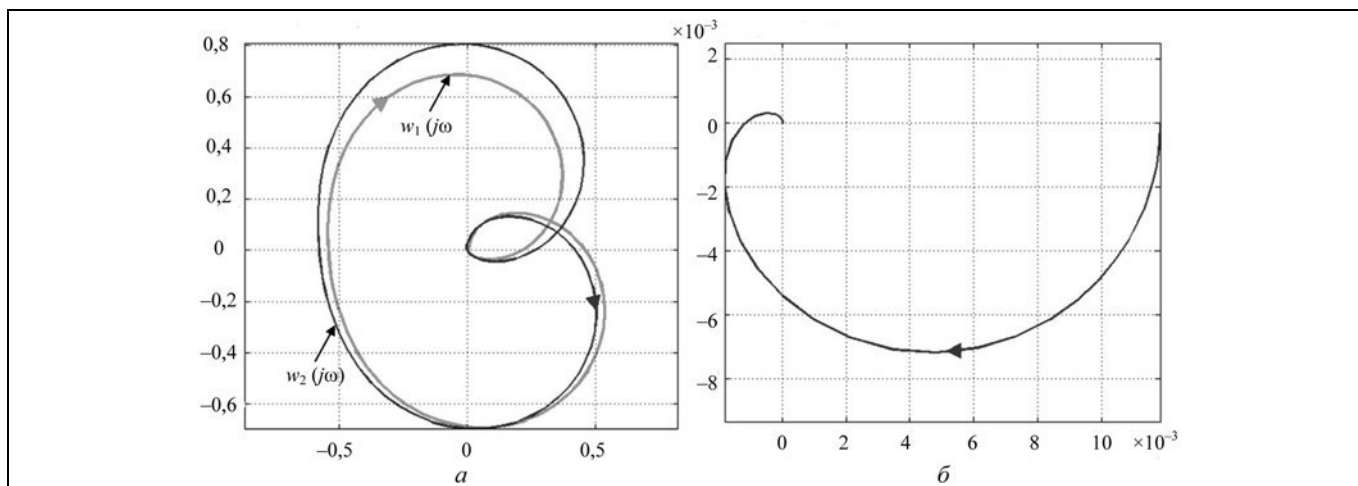


Рис. 4. Годографы Найквиста разомкнутой системы по каждому выходу: а —  $w_1(j\omega)$  и  $w_2(j\omega)$ ; б —  $w_3(j\omega)$

Запас по модулю для первой измеряемой переменной (току первого двигателя) составил 1,6, по току второго двигателя составил 1,4, а по главной регулируемой переменной угловой скорости двигателя составил величину, равную 833. Таким образом, по измеряемым переменным система обладает внушительными запасами устойчивости. Кроме того, поскольку годографы не охватывают критической точки  $(-1, j0)$ , то разомкнутые системы устойчивы, что важно с практической точки зрения. Проверка запасов устойчивости на физическом входе объекта (по управлениям  $u_1, u_2$ ) показала, что радиус запасов устойчивости по управлениям  $u_1$  и  $u_2$  имеет значения 0,46 и 0,42 соответственно, а разомкнутые системы по управлению  $u_1$  или  $u_2$  устойчивы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено решение задачи синтеза многомерных следящих систем по инженерным показателям качества: ошибкам слежения от действия внешних неизмеряемых возмущений, совокупности показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , а также времени регулирования. Отметим некоторые привлекательные с инженерной точки зрения особенности предлагаемого подхода:

- применяются ясные инженерные показатели качества;
- процедура синтеза сведена к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации, для решения которой существует богатое программное обеспечение;
- порядок регулятора не превышает порядка исходного физического объекта;

— в качестве внешних возмущений рассматривается практически важный класс функций, которые непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные.

Отметим также, что если требуется обеспечить показатели колебательности на физическом входе объекта, то следует дополнительно ввести фиктивные внешние возмущения аддитивно с управлениями, а в качестве регулируемых переменных рассматривать управления.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с. [Besekerskiy, V.A., Popov, E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — M.: Nauka, 1975. — 768 s. (In Russian)]
2. Wang, Q.-G. Decoupling Control. — Springer, Berlin, 2003.
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. III. Многомерные объекты, устойчивые по управлению // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 2. — С. 51—70. [Aleksandrov, A.G. Design of controllers by indices of precision and speed. III. Control-stable multidimensional plants // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 2. — P. 241—257.]
4. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. IV. Метод диагонального доминирования // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 4. — С. 3—18. [Aleksandrov, A.G. Design of controllers by the indices of precision and speed. IV. Method of diagonal domination // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 4. — P. 581—593.]
5. Вознесенский И.Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // Автоматика и телемеханика. — 1938. — № 4-5. — С. 65—78. [Voznesenskii, I.N. On regulation of machines with a large number of parameters regulated // Automation and Remote Control. — 1938. — Vol. 4-5. — P. 65—78.]
6. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Проблемы управления. — 2019. — № 2. — С. 2—8. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Design of given oscillations by a given oscillation index: modal and  $H_\infty$  approaches // Problems of Control Theory and Engineering. — 2019. — No. 2. — P. 2—8.]



- tion index scalar controllers: modal and  $H_\infty$ -approaches // Control Sciences. — 2019. — No. 2. — P. 2–8. (In Russian)]
7. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез  $H_\infty$ -регуляторов одномерных следящих систем по инженерным критериям качества / Тр. 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). — М.: ИПУ РАН, 2019. — С. 88–93. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Sintez  $H_\infty$ -regulyatorov odnomernykh sledyashchih sistem po inzhenernym kriteriyam kachestva / Tr. 13-go Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU XIII, Moskva, 2019). — M.: IPU RAN, 2019. — S. 88–93. (In Russian)]
  8. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 10. — С. 132–152. [Chestnov, V.N. Synthesis of multivariable systems according to engineering quality criteria based on  $H_\infty$ -optimization // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, no. 10. — P. 241–257.]
  9. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. — М.: Госуд. издат. физ.-мат. лит., 1961. [Bari, N.K. Trigonometricheskie ryady. — M.: Gosud. izdat. fiz.-mat. lit., 1961. (In Russian)]
  10. Åström, K.J., Murray, R.M. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. — New Jersey: Princeton University Press, 2008. — 396 p.
  11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Шербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 560 с. [Polyak, B.T., Hlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnih vozmushcheniyah. Tekhnika linejnykh matrichnykh neravenstv. — M.: LENAND, 2014. — 560 s. (In Russian)]
  12. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с. [Aleksandrov, A.G. Sintez regulyatorov mnogomernykh sistem. — M.: Mashinostroenie, 1986. — 272 s. (In Russian)]
  13. Александров А.Г. Методы построения систем автоматического управления. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2008. — 232 с. [Aleksandrov, A.G. Metody postroeniya sistem avtomaticheskogo upravleniya. — M.: Izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury, 2008. — 232 s. (In Russian)]
  14. Skogestad, S., Postlethwaite, I. Multivariable feedback control. Analysis and design. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2006. — 595 p.
  15. Apkarian, P., Noll, D. Nonsmooth  $H_\infty$  Synthesis // IEEE Trans. Autom. Contr. — 2006. — Vol. 51, no. 1. — P. 71–86.
  16. Gahinet, P., Apkarian, P. Structured  $H_\infty$ -Synthesis in MATLAB // Preprints of the 18th IFAC World Congress. — Milano, Italy, 2011. — P. 1435–1440.
  17. Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P. Robustness and Fragility of High Order Controllers: A Tutorial // Proceedings of IEEE Conference on Control Applications (CCA). — Buenos Aires, Argentina, 2016. — P. 191–202.
  18. Pittet, C., Mignot, J., Viaud, F. Attitude and active payload control: the  $H_\infty$ -revolution // Preprints of the 20th IFAC World Congress. — Toulouse, France, 2017. — P. 6619–6624.
  19. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., Francis, B.A. State-space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$ -control problem // IEEE Trans. Autom. Contr. — 1989. — Vol. 34, no. 8. — P. 831–846.
  20. Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K. Robust and Optimal Control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1996. — 596 p.
  21. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear matrix inequality in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
  22. Gahinet, P., Apkarian, P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — Vol. 4. — P. 421–448.
  23. Balas, G.J., Chiang, R.Y., Packard, A., Safonov, M.G. Robust Control Toolbox 3. User's guide. — Natick (Mass.). The Math Works, Inc, 2010. — 178 p.
  24. The Control Handbook / Ed. W.S. Levine. — IEEE Press, 1996.
  25. Åström, K.J., Hägglund, T. Advanced PID control. — NC: ISA, 2006. — 460 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 13.02.2020, после доработки 13.05.2021.  
Принята к публикации 13.05.2021.

Честнов Владимир Николаевич — д-р техн. наук,  
✉ vnchest@yandex.ru.

Шатов Дмитрий Владимирович — канд. техн. наук,  
✉ dvshatov@gmail.com,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## DESIGN OF MULTIVARIABLE TRACKING SYSTEMS VIA ENGINEERING PERFORMANCE INDICES BASED ON $H_\infty$ -APPROACH

V.N. Chestnov and D.V. Shatov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ vnchest@yandex.ru, ✉ dvshatov@gmail.com

**Abstract.** This paper proposes an algorithm for designing a measured output-feedback controller with given or achievable engineering performance indices for linear multivariable systems. The control plant is subjected to bounded external disturbances from the class of polyharmonic functions with an infinite number of harmonics and a bounded sum of their amplitudes for each disturbance component. As a result, additional tracking errors appear in controlled variables. The problem is to design a multivariable output-feedback controller ensuring given or achievable tracking errors, the settling time determined by a given or achievable degree of stability of the closed loop system, and a set of the oscillation indices  $M_i$  for the  $i$ th closed loop relating the  $i$ th reference signal  $g_i$  to the  $i$ th controlled variable  $z_i$ . In addition, the controller should ensure the conditions  $M_i \leq \gamma$ , where  $\gamma$  is a given value or the minimand. As shown below,  $H_\infty$  control methods are quite convenient for solving such problems. An illustrative example of designing an interconnected electric drive is presented.

**Keywords:** linear multivariable systems, bounded external disturbances, tracking errors, settling time, degree of stability, oscillation index of the  $i$ th loop.