

## СИНТЕЗ ОДНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ЗАДАННОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ: МОДАЛЬНЫЙ И $H_\infty$ -ПОДХОДЫ<sup>1</sup>

В.Н. Честнов, Д.В. Шатов

Для линейных одномерных объектов построены алгоритмы синтеза регуляторов по выходу, гарантирующие заданные или достижимые значения показателя колебательности и степени устойчивости, определяющей время регулирования. В процедурах синтеза применены как модальное управление, так и  $H_\infty$ -подход. Построены примеры, демонстрирующие, что стремление обеспечить степень устойчивости больше, чем расстояние от ближайшего левого нуля передаточной функции объекта до мнимой оси (даже для минимально-фазовых объектов!) приводит к весьма малым запасам устойчивости по фазе и модулю, что недопустимо на практике.

**Ключевые слова:** линейные системы, синтез регуляторов, показатель колебательности, степень устойчивости, время регулирования.

### ВВЕДЕНИЕ

Вторая мировая война, несомненно, послужила сильному развитию теории и практики автоматического управления и, в частности, следящих систем. Сразу после ее окончания появляются фундаментальные монографии Г. Бодэ [1] и Л. МакКолла [2], последняя из которых и направлена на теорию следящих систем, которые в то время именовались сервомеханизмами. Само понятие показателя колебательности было введено впервые в закрытой в то время работе А. Холла [3]. В отечественной литературе это понятие появилось в статье В.В. Солодовникова [4], где был развит метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАЧХ) на случай, когда запас устойчивости системы оценивается не запасами по фазе и модулю, а собственно показателем колебательности. Надо сказать, что уже 70 лет назад из практики автоматического управления было хорошо известно, что стремление показателя колебательности  $M$  к единице (в следящих системах в контуре обязательно присутствует, по крайней мере, один чистый интегратор, и единица является начальным значением амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)

замкнутой системы) соответствует уменьшению и исчезновению перерегулирования в переходной характеристике замкнутой системы. Этот постулат весьма эффективно использовался инженерами в практике проектирования следящих систем на протяжении этих последних 70 лет. Для минимально-фазовых нейтральных объектов (имеющих только устойчивые нули и не имеющих правых полюсов) подход к синтезу регуляторов, обеспечивающих заданный показатель колебательности, на основе метода ЛАЧХ был развит в работах [5, 6].

В настоящей работе для синтеза регуляторов с заданным показателем колебательности применяются метод модального управления (для минимально-фазовых нейтральных объектов) и  $H_\infty$ -подход (как для минимально-фазовых, так и для неминимально-фазовых и неустойчивых объектов). Кроме того, предлагается способ учета заданной степени устойчивости замкнутой системы, определяющей желаемое время регулирования.

Фундаментально важно, что время регулирования даже для линейных непрерывных минимально-фазовых объектов с регуляторами по измеряемому выходу ограничено снизу. Отметим, что для регуляторов по полному вектору состояния такой проблемы не существует [7]. Как отмечено в работах [8, 9], стремление увеличить быстродействие путем увеличения степени устойчивости замкнутой системы может приводить к регулятору по вы-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-01067).



ходу с очень малыми запасами устойчивости по фазе и модулю (большому показателю колебательности и малому радиусу запасов устойчивости), что недопустимо на практике. Для неминимально-фазовых объектов этот факт давно известен [10]. В настоящей работе построены примеры, демонстрирующие, что стремление обеспечить степень устойчивости больше, чем расстояние от ближайшего левого нуля объекта до мнимой оси (даже для минимально-фазовых объектов!) приводит к весьма малым запасам устойчивости по фазе и модулю (значительному показателю колебательности и незначительному радиусу запасов устойчивости [11]), что приводит к огромным выбросам (перерегулированию) в переходной характеристике замкнутой системы и совсем не приветствуется на практике.

Отметим, что в цикле статей А.Г. Александрова, открывающегося работами [11, 12], на основе модального управления строились одномерные регуляторы по измеряемому выходу, обеспечивающие заданный радиус запасов устойчивости и необходимое быстродействие (а также требуемую точность при действии ограниченного внешнего возмущения). Настоящая работа продолжает исследования, выполненные ранее [9, 11, 12], когда вместо радиуса запасов устойчивости для оценки робастности замкнутой системы используется показатель колебательности, более естественный и общепринятый в теории и практике следящих систем.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением в форме «вход—выход»:

$$d(p)y(t) = b(p)u(t), \quad (1)$$

где  $y(t)$  — регулируемая переменная,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $d(p)$  и  $b(p)$  — заданные полиномы степеней  $n$  и  $(n - 1)$  оператора дифференцирования  $p = d/dt$ . Предполагается, что полиномы  $d(p)$  и  $b(p)$  не имеют общих корней (объект полностью управляем и наблюдаем).

Замкнем объект (1) стабилизирующим регулятором по выходу:

$$g(p)u(t) = r(p)(y^*(t) - y(t)), \quad (2)$$

где  $y^*(t)$  — задающее воздействие,  $y^*(t) - y(t) = \varepsilon(t)$  — измеряемая переменная (рассогласование, сигнал ошибки), а  $g(p)$  и  $r(p)$  — некоторые полиномы степени  $n_c \leq n$  оператора  $p$ .

Определим передаточную функцию разомкнутой системы выражением

$$W(s) = \frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)} = W_o(s)W_c(s), \quad (3)$$

где  $W_o(s) = b(s)/d(s)$  — передаточная функция объекта (1),  $W_c(s) = r(s)/g(s)$  — передаточная функ-

ция регулятора (2),  $s$  — переменная преобразования Лапласа.

Выпишем, учитывая выражения (1)—(3), передаточную функцию замкнутой системы от задающего воздействия  $y^*$  к регулируемой переменной  $y$  [6]:

$$T(s) = \frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s) + b(s)r(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)}, \quad (4)$$

которую в западной литературе называют дополнительной функцией чувствительности [13—17]. Сама же функция чувствительности (в отечественной терминологии передаточная функция замкнутой системы по ошибке [6] от  $y^*$  к  $\varepsilon$ ) имеет вид:

$$S(s) = \frac{d(s)g(s)}{d(s)g(s) + b(s)r(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}. \quad (5)$$

Смысл термина «дополнительная» ясен из очевидного тождества  $T(s) + S(s) = 1$ .

**Задача 1.** Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, чтобы:

$$\|T\|_\infty = \max_{0 \leq \omega < \infty} |T(j\omega)| = M \leq \gamma, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число. ♦

Слева в соотношении (6) стоит  $H_\infty$ -норма передаточной функции  $T(s)$  [15], которая по определению [5, 6] совпадает с показателем колебательности  $M$  ( $\omega$  — круговая частота,  $j = \sqrt{-1}$ ).

Заметим, что регулятор, найденный на основе соотношения (6), может не обеспечивать желаемого быстродействия замкнутой системы, поэтому возникает

**Задача 2.** Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, чтобы помимо условия (6) корни  $\lambda_i$ ,

$i = \overline{1, n + n_c}$  характеристического полинома замкнутой системы  $D_c(s) = d(s)g(s) + b(s)r(s)$ , удовлетворяли условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\beta, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где  $\beta \geq 0$  — заданная степень устойчивости замкнутой системы (1), (2). ♦

Известна приближенная оценка времени регулирования  $t_p$  (см. работы [6, 17—19]), когда доминирующие корни  $D_c(s)$  простые (не кратные):  $t_p \approx 3/\beta$ .

В работе [17] в числителе этой последней формулы вместо коэффициента 3 стоит коэффициент 4,6, что соответствует оценке времени регулирования, когда измеряемый выход объекта отличается от установившегося значения не более чем на 1%. Указанный в этой формуле авторами коэффициент 3 соответствует времени регулирования для 5%-й трубки, что более распространено в инженерной среде.

Решение поставленных задач в настоящей работе опирается на два подхода. Первый из них — модальный, он применим, когда объект управления (1) минимально-фазовый (все корни полинома  $b(s)$  левые) и нейтральный (один корень полинома  $d(s)$  нулевой, а остальные левые). Второй —  $H_\infty$ -подход, при котором объект управления (1) может быть неминимально-фазовым (некоторые (или все) корни полинома  $b(s)$  правые) и неустойчивым (некоторые (или все) корни полинома  $d(s)$  правые).

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. МОДАЛЬНЫЙ ПОДХОД

В данном параграфе предполагается, что полином  $b(s)$  устойчив, т. е. объект (1) минимально-фазовый, а характеристический полином объекта  $d(s)$  имеет один нулевой корень при остальных устойчивых (объект нейтральный).

Используя предположения о гурвицевости полинома  $b(s)$  и что его степень равна  $(n - 1)$ , выберем полином  $g(s)$  регулятора (2) таким образом:  $g(s) = b(s)$  [11] ( $n_c = n - 1$ ), тогда передаточная функция (3) разомкнутой системы примет вид:

$$W(s) = \frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{r(s)}{d(s)}, \quad (7)$$

причем характеристический полином замкнутой системы  $D_c(s) = b(s)[d(s) + r(s)] = b(s)D(s)$  содержит полином  $b(s)$  в качестве множителя. Передаточная функция замкнутой системы (4) примет вид:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s) + d(s)r(s)} = \\ &= \frac{r(s)}{d(s) + r(s)} = \frac{r(s)}{D(s)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом выражении полином  $r(s)$  регулятора необходимо выбрать так, чтобы выполнялось целевое условие (6). Укажем на один из возможных путей решения этой задачи. Пусть  $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$  — корни желаемого полинома  $D(s)$  знаменателя передаточной функции (8):  $D(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_n)$ ,  $\text{Re} \lambda_i > 0, i = \overline{1, n}$ . Представим искомым полином  $r(s)$  регулятора так  $r(s) = r_0(s + z_2)(s + z_3) \dots (s + z_n)$ , где  $r_0, z_2, \dots, z_n$  некоторые числа  $\text{Re} z_i > 0, i = \overline{2, n}$ , подлежащие определению. В этом случае выражение (8) примет вид

$$T(s) = \frac{r_0(s + z_2)(s + z_3) \dots (s + z_n)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \dots (s + \lambda_n)}. \quad (9)$$

Если в выражении (9) положить  $r_0 = \lambda_1 > 0; z_i = \lambda_i, i = \overline{2, n}$ , то передаточная функция замкну-

той системы переходит в передаточную функцию инерционного звена

$$T(s) = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} = \frac{1}{(1/\lambda_1)s + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (10)$$

с единичным коэффициентом усиления и постоянной времени  $\tau = 1/\lambda_1$ .

Заметим, однако, что такой выбор  $z_i = \lambda_i, i = \overline{2, n}$  далеко не произволен. Действительно, из тождества  $D(s) = d(s) + r(s)$  при условии, что  $d(s) = s(s + s_2) \dots (s + s_n)$ ,  $\text{Re} s_i > 0, i = \overline{2, n}$ , следует  $D(\lambda_i) = d(\lambda_i) + r(\lambda_i) = 0$ . И поскольку  $r(\lambda_i) = r(z_i) = 0$ , то  $d(\lambda_i) = 0, i = \overline{2, n}$ . Это означает, что корни полинома  $D(s)$  должны совпадать с корнями полинома  $d(s)$  объекта (1), начиная со второго. Очевидно, что передаточная функция (7) разомкнутой системы в таком случае сводится к виду  $W(s) = \lambda_1/s$ , т. е. к чистому интегратору с коэффициентом усиления  $\lambda_1$ , который назначает проектировщик. Переходный процесс в замкнутой системе (10) при подаче ступенчатого задающего воздействия  $y^*(t) = \text{const}$  протекает монотонно и без перерегулирования. Время регулирования при этом составляет величину  $t_p = 3\tau = 3/\lambda_1$ . Наконец, максимум АЧХ замкнутой системы (10) составляет величину, равную единичному коэффициенту усиления звена. Таким образом, замкнутая система имеет показатель колебательности  $M = 1$  и время регулирования  $t_p = 3/\lambda_1$ , назначаемое проектировщиком. Отметим также, что запасы устойчивости по фазе и модулю у синтезированной системы весьма высоки ( $\varphi_3 = 90^\circ$  и  $L \rightarrow \infty$ ), поскольку годограф Найквиста передаточной функции (3) расположен на отрицательной части мнимой полуоси плоскости годографа.

**Замечание 1.** Подчеркнем, что оценка времени регулирования  $t_p = 3/\lambda_1$  относится только к случаю изменения задающего воздействия  $y^*$ . В случае действия возмущающего воздействия, приложенного не аддитивно с управлением, а также ненулевых начальных условиях этот показатель может быть существенно другим, поскольку в переходном процессе будут еще присутствовать ненулевые корни полиномов  $d(s), b(s)$ .

**Замечание 2.** При компенсации комплексных корней полиномов  $b(s)$  и  $d(s)$  с малыми коэффициентами демпфирования следует проявлять известную осторожность [13, 20, 21].

**Замечание 3.** В отличие от работы [22], в которой рассматривались так называемые регуляторы с двумя степенями свободы, где дополнительно, кроме сигнала рассогласования (ошибки), доступен непосредственному измерению задающий сигнал (или выход объекта), в нашем случае измерению доступен только сигнал ошибки, что довольно часто встречается в практике следящих систем.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. $H_\infty$ -ПОДХОД

В этом параграфе объект управления может быть и неминимально-фазовым и неустойчивым. Для решения  $H_\infty$ -проблемы (6) приведем уравнения объекта (1) и регулятора (2) к стандартному виду, принятому в литературе [13–27]. Пусть  $(A, B, C)$  — тройка известных матриц, соответствующих описанию объекта (1) в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad y = Cx, \\ x &\in R^n, \quad u \in R^1, \quad y \in R^1. \end{aligned} \quad (11)$$

Опишем регулятор (2) также уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c(y^* - y), \quad u = C_c x_c + D_c(y^* - y), \\ x_c &\in R^n, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A_c, B_c, C_c, D_c$  — искомые матрицы регулятора, а  $x$  и  $x_c$  — векторы состояния объекта и регулятора соответственно.

Запишем уравнения обобщенного объекта [24] в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{06}x + B_{06}w, \quad z = C_1x + D_{11}y^* + D_{12}u, \\ \varepsilon &= C_2x + D_{21}y^* + D_{22}u, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $w^T = [y^* \ u]$  — вектор внешних воздействий, действующих на объект,  $z = y$  — регулируемая переменная объекта;  $\varepsilon = y^* - y$  — измеряемая переменная (входной сигнал регулятора). Сравнивая выражения (11)–(13), заключаем, что

$$\begin{aligned} A_{06} &= A, \quad B_{06} = [0 \ B], \quad A_{06} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \\ D_{06} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad C_1 = C; \quad C_2 = -C, \\ D_{11} &= D_{12} = 0; \quad D_{21} = 1; \quad D_{22} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом передаточная функция обобщенного объекта (14), (15), замкнутого регулятором (12), от  $y^*$  к  $z$  совпадает с исходной передаточной функцией  $T(s)$  — см. формулы (4), (6). И таким образом, проблема (6) — это стандартная задача  $H_\infty$ -оптимизации [13–15, 19–21, 24].

Отметим одну особенность уравнений (13), (14): выражение для регулируемой переменной не содержит управляющего воздействия, поэтому такая  $H_\infty$ -задача (6) является вырожденной [19, 23] и не может быть решена известным 2-Риккати-подходом [24]. Для решения вырожденной проблемы (6) можно применить метод на основе линейных

матричных неравенств [25, 26], реализованный в MATLAB-пакете Robust Control Toolbox [27].

Следующий алгоритм реализует численное решение задач 1 и 2. Он опирается на применение широко известных стандартных процедур, разработанных в среде MATLAB [27], и формально подобен предложенному в работе [19], однако с другим внутренним содержанием:

1) формируем матрицы обобщенного объекта (14); для решения задачи 1 они имеют вид (14), а в случае задачи 2:  $A_{06} = A + \beta I$ , где  $\beta \geq 0$  — заданная степень устойчивости, а символ  $I$  — единичная матрица соответствующего размера [19];

2) строим системную матрицу обобщенного объекта:  $P = \text{ltisys}(A_{06}, B_{06}, C_{06}, D_{06})$ ;

3) определяем оптимальное значение  $\gamma = \gamma_{opt}$  из (6) с помощью процедуры  $\gamma_{opt} = \text{hinflmi}(P, [m_2, m])$ , где  $m_2 = m = 1$  — число входов и выходов регулятора соответственно;

4) выбираем  $\gamma \geq \gamma_{opt}$  — заданный показатель колебательности и ищем системную матрицу смещенного регулятора  $K$ , которая является решением задач 1 и 2, для чего применяется процедура  $[\gamma, K] = \text{hinflmi}(P, [m_2, m], \gamma, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность вычисления  $\gamma$ ;

5) по системной матрице смещенного регулятора  $K$  находим матрицы его уравнений состояния:  $[\tilde{A}_c, B_c, C_c, D_c] = \text{ltiss}(K)$ , где в случае решения задачи 2 матрица  $\tilde{A}_c$  представляет собой смещенную матрицу регулятора; находим искомую матрицу регулятора (12)  $A_c = \tilde{A}_c - \beta I$  (в случае задачи 1  $A_c = \tilde{A}_c$  при  $\beta = 0$ ). Остальные матрицы регулятора  $B_c, C_c, D_c$  остаются без изменений [19];

6) формируем передаточную функцию регулятора (2) как

$$W_c(s) = \frac{r(s)}{g(s)} = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c.$$

Строим частотные характеристики передаточных функций (3) и (4).

По годографу Найквиста  $W(j\omega)$  находим запасы устойчивости (по фазе и модулю, а также радиус запасов устойчивости) синтезированной системы.

По характеристике  $T(j\omega)$  определяем показатель колебательности системы как максимальное значение ее модуля для всех вещественных частот  $\omega$ . Дополнительно строим переходные процессы в замкнутой системе (11), (12) и определяем фактическое время регулирования и перерегулирование.

Заметим, что решение задачи 1 с помощью  $H_\infty$ -подхода имеет необходимый и достаточный характер по отношению к параметрам регулятора, а решение задачи 2 только достаточный.

#### 4. О ДОСТИЖИМОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ И НЕГРУБОСТИ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ

Данный параграф работы (как и § 5) имеет самостоятельное значение и непосредственно не связан с результатами § 2.

Техника модального управления чрезвычайно популярна среди инженеров и исследователей. Известно, что модальное управление позволяет разместить корни характеристического полинома замкнутой системы  $D_{cl}(s)$  в произвольных точках комплексной плоскости. Однако при инженерном подходе к синтезу желательно, если возможно, обеспечить и значительный радиус запасов устойчивости. Этот радиус обозначается  $r$  и определяется как максимальный радиус круга с центром в точке  $(-1, j0)$ , который годограф Найквиста системы (3) не пересекает [11]. Для выполнения условия  $r \rightarrow 1$  необходимо в минимально-фазовом случае иметь  $g(s) = b(s)$  [11]. Радиус  $r$  может быть найден, используя  $H_\infty$ -норму функции чувствительности (5):  $r = 1/\|S\|_\infty$  [15, 20].

Рассмотрим объект управления с передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{k_0(s+1/\tau)}{s(s+1/T)}, \quad k_0 > 0, \quad \tau > 0, \quad T > 0. \quad (15)$$

Требуется найти передаточную функцию линейного регулятора по измеряемому выходу

$$W_c(s) = \frac{r_1 s + r_0}{g_1 s + g_0} \quad (16)$$

такую, что корни желаемого характеристического полинома замкнутой системы  $D_{cl}^*(s)$ :

$$\lambda_1 = -1/(a_1 T), \quad \lambda_2 = -1/(a_2 T), \quad \lambda_3 = -1/(a_3 T), \\ a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Сформируем модальное тождество  $D_{cl}(s) = D_{cl}^*(s)$ :

$$s\left(s + \frac{1}{T}\right)(g_1 s + g_0) + k_0\left(s + \frac{1}{\tau}\right)(r_1 s + r_0) = \\ = k_0\left(s + \frac{1}{a_1 T}\right)\left(s + \frac{1}{a_2 T}\right)\left(s + \frac{1}{a_3 T}\right),$$

где слева выписан характеристический полином замкнутой системы (15), (16), а справа — желаемый полином. Разрешая это тождество относительно коэффициентов регулятора, получим:

$$r_0 = \frac{\tau}{a_1 a_2 a_3 T^3}, \\ g_0 = \frac{k_0}{\tau} + \frac{k_0 \tau^2 T}{T - \tau} \left(\frac{1}{a_1 T} - \frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{a_2 T} - \frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{a_3 T} - \frac{1}{\tau}\right), \\ r_1 = \frac{\tau}{a_1 a_2 a_3 T^3} \left(1 - \frac{T}{T - \tau} (1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)\right), \\ g_1 = k_0. \quad (17)$$

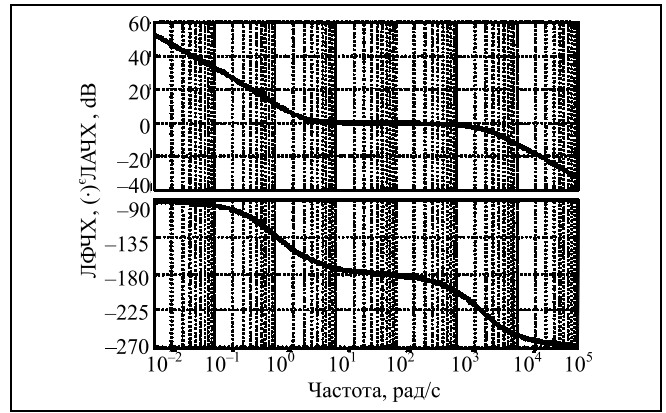


Рис. 1. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы (15), (16) при модальном подходе

Зададимся значениями  $k_0 = 10$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $T = 1$  и  $a_1 = 0,25$ ,  $a_2 = 0,025$ ,  $a_3 = 0,015$ . Такой выбор  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , обеспечивает степень устойчивости  $\beta = |\lambda_1| = 4$ , что в два раза больше модуля нуля объекта  $1/\tau = 2$ .

С помощью выражения (17) найдем регулятор (16) с полиномами:  $r(s) = -2,3497 \cdot 10^3 s + 5,333 \cdot 10^3$ , корень которого равен 2,2698 — регулятор неминимально-фазовый;  $g(s) = 10s + 2,46 \cdot 10^4$ . Такой регулятор устойчив и обеспечивает значение показателя колебательности  $M = \|T\|_\infty = 22$ ,  $H_\infty$ -норма функции чувствительности  $\|S\|_\infty = 22,9$ , что соответствует радиусу запасов устойчивости [15, 20]  $r = 1/\|S\|_\infty = 0,0437$  — это недопустимо мало. Последнее означает, что малы запасы и по фазе  $\varphi_3 = 7,48^\circ$ , и по модулю  $L \approx 1,046$  (увеличение коэффициента усиления, например, объекта управления, в это число раз приводит к неустойчивости). На рис. 1 изображена частотная характеристика разомкнутой системы (15), (16), имеющая характерный вид с пологим участком на средних частотах (подробнее см. § 5).

Переходная характеристика системы (15), (16) с таким регулятором имеет огромные выбросы по сравнению с единицей: отрицательный до  $-15,4$  и положительный до 2,55. Она приведена на рис. 2. Такая система практически неработоспособна.

Легко проверить, что выбор  $a_1 = 1$ ,  $a_2 T = \tau$ ,  $(a_3 T)^{-1} = \lambda_1$  приводит к регулятору из § 2.

#### 5. О ДОСТИЖИМОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ И НЕГРУБОСТИ $H_\infty$ -ПОДХОДА

Решим задачу 2 для объекта (15) при тех же значениях  $k_0 = 10$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $T = 1$ . Объект (15) с этими параметрами имеет нуль  $z = -2$  и полюсы в точках  $p_1 = 0$  и  $p_2 = -1$ . Зададимся степенью устойчивости



$\beta = 4$  (как и ранее в § 4), в два раза превышающей значение модуля нуля  $z$ . Решение задачи синтеза на основе техники § 3 дает регулятор:

$$W_c(s) = \frac{7,09 \cdot 10^5 (s - 2)}{s + 7,57 \cdot 10^6},$$

который неминимально-фазовый и имеет нуль в точке  $z_c = 2$  и полюс в точке  $p_c = -7,57 \cdot 10^6$ , корни  $\lambda_i$  полинома  $D_c(s)$  имеют значения:  $-4,735 \cdot 10^5$ ;  $-9,993$ ;  $-6$ . Значение показателя колебательности  $M = \|T\|_\infty$  составило 15, при этом  $\|S\|_\infty = 16$ . Радиус запасов устойчивости  $r = 1/\|S\|_\infty = 0,06$ , что говорит о практической неработоспособности данного регулятора (система имеет запасы устойчивости по фазе  $\varphi_3 = 7,9^\circ$ , по модулю  $L \approx 1,066$ ). На рис. 3 приведены логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы (3), которые имеют характерный пологий участок в области средних частот. Как показывают многочисленные эксперименты, чем большую степень устойчивости  $\beta$  (по сравнению с минимальным расстоянием от нуля объекта до мнимой оси) мы хотим обеспечить, тем ближе этот пологий участок к оси частот (почти параллелен ей), что приводит к весьма малым запасам устойчивости по фазе и модулю (малому радиусу запасов устойчивости). Отметим, что обнаружить этот эффект по годографу Найквиста невозможно. Переходная характеристика такой замкнутой системы имеет огромные (по сравнению с единицей) как отрицательный (значение  $y = -15$ ), так и положительный (значение  $y = 2,54$ ) выбросы (рис. 4). Естественно, как и в § 4, такой регулятор не может быть применен на практике. Заметим, что при  $\beta = |z| = 2$  такого эффекта не наблюдается.

Авторы построили аналогичные примеры для объекта третьего порядка с комплексными устойчивыми нулями, в которых данное явление малых запасов устойчивости также имеет место. Анализируя представленные примеры синтеза, легко заметить, что причиной малых запасов устойчивости является собственно регулятор, который при большой желаемой степени устойчивости становится неминимально-фазовым с неустойчивым полиномом числителя его передаточной функции. Можно подумать, что это явление определяется всего лишь методом синтеза регулятора. Однако легко привести примеры для тех же объектов, когда, например,  $LQ$ -оптимизация по выходу с наблюдателем состояния приводит к аналогичному эффекту. Таким образом, быстродействие замкнутой системы ограничено расстоянием от ближайшего нуля объекта до мнимой оси. Строгое математическое доказательство этого факта — предмет дальнейших исследований авторов. В системе без нулей, когда числитель  $b(s) = k_0 = \text{const}$ , такого ограничения нет.

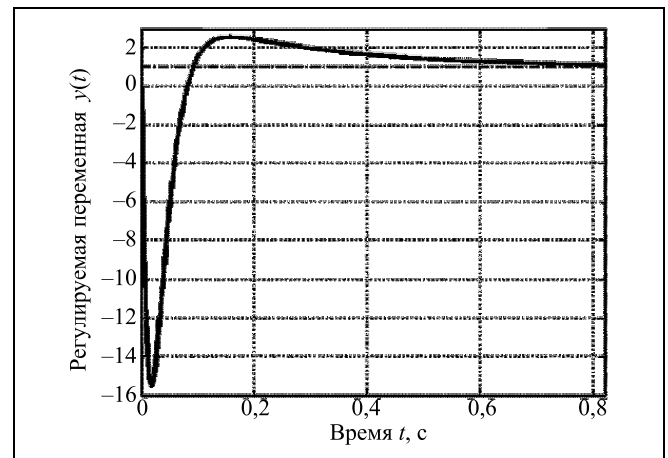


Рис. 2. Переходная характеристика системы (15), (16) при модальном подходе

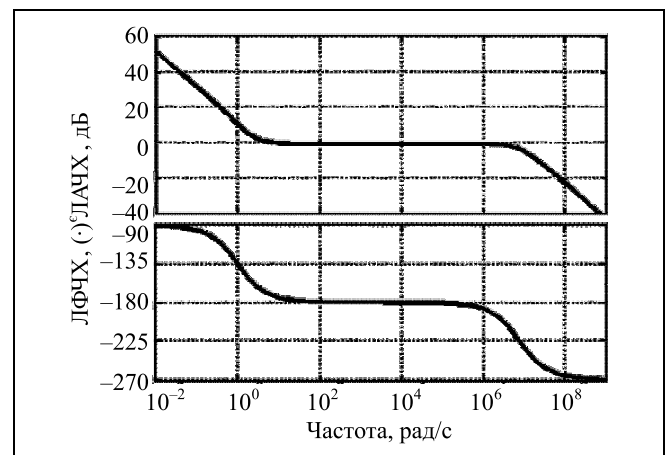


Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы (15)–(17) при  $H_\infty$ -подходе

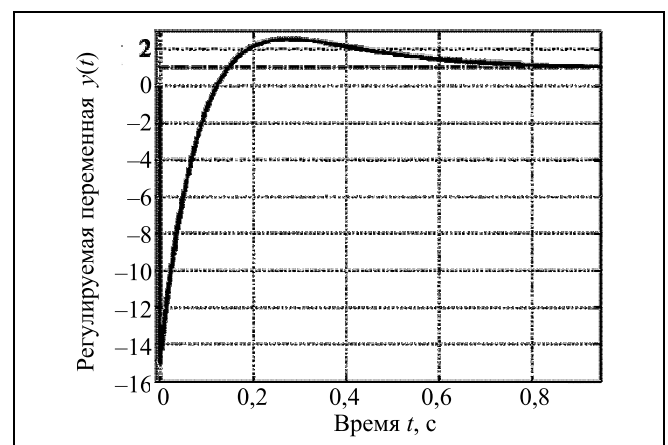


Рис. 4. Переходная характеристика системы (15), (16) при  $H_\infty$ -подходе

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача синтеза регуляторов для линейных одномерных объектов по заданному или достижимому показателю колебательности, а также другая задача, где дополнительно обеспечивается заданная степень устойчивости системы, определяющая желаемое время регулирования. Эти задачи решаются на основе модального управления и  $H_\infty$ -подхода.

Для модального синтеза описан способ выбора желаемого полинома, разрешающего задачи синтеза. Этот подход справедлив только для минимально-фазовых и нейтральных объектов без правых нулей и полюсов.

В общем случае, когда объект может быть и неминимально-фазовым и неустойчивым, дано решение задач синтеза на основе  $H_\infty$ -теории. При этом при решении первой из указанных задач синтеза по собственному показателю колебательности этот подход приводит к неупрощаемому регулятору (задача решается с точностью до необходимых и достаточных условий), который обеспечивает минимально возможное значение показателя колебательности. Приведен алгоритм синтеза на основе широко распространенного в инженерной среде MATLAB-пакета Robust Control Toolbox [27], где применяется техника линейных матричных неравенств [25, 26].

Приведен фундаментально важный факт, состоящий в том, что стремление обеспечить степень устойчивости замкнутой системы больше, чем расстояние от ближайшего левого нуля объекта до мнимой оси, приводит к негрубости (малому радиусу запасов устойчивости) даже в минимально-фазовом случае (независимо от метода расчета регулятора) и, как следствие, к огромным выбросам в переходной характеристике замкнутой системы, что недопустимо на практике.

Дальнейшее развитие результатов работы состоит в исследовании задач, в которых дополнительно обеспечивается заданная ошибка слежения при действии внешнего полигармонического возмущения и задающего воздействия, ограниченных по модулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бодэ Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. — М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1948. — 641 с.
2. МакКол Л.А. Основы теории сервомеханизмов: пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. — М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1947. — 154 с.
3. Hall A.C. The Analysis and Synthesis of Linear Servomechanisms. — Cambridge: MIT Press, 1943. — 193 p.
4. Солодовников В.В. Применение метода логарифмических частотных характеристик к исследованию устойчивости и к оценке качества следящих и регулируемых систем // Автоматика и телемеханика. — 1948. — Т. 9, № 2. — С. 85—103.
5. Бесекерский В.А., Фабрикант Е.А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. — Л.: Судостроение, 1968. — 348 с.
6. Бесекерский В.А., Понов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с.
7. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Control. Linear Quadratic Methods. — N.-Y.: Prentice Hall, 1989. — 380 p.
8. Åström K.J., Murray R.M. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. — New Jersey: Princeton University Press, 2008. — 396 p.
9. Честнов В.Н. Синтез робастных  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 199—205.
10. Горюхи А.М. Синтез систем с обратной связью. — М.: Советское радио, 1970. — 600 с.
11. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 5. — С. 27—42.
12. Александров А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. II. Неминимально-фазовые объекты // Там же. — 2017. — № 6. — С. 3—17.
13. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1996. — 596 p.
14. Zhou K., Doyle J.C. Essentials of Robust Control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1998. — 411 p.
15. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable feedback control. Analysis and design. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2006. — 595 p.
16. Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear optimal control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1971. — 399 p.
17. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
18. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005. — 336 с.
19. Честнов В.Н. Синтез  $H_\infty$ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 10. — С. 170—185.
20. Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R. Feedback Control Theory. — N.-Y.: Macmillan, 1990. — 202 p.
21. Åström K.J., Hägglund T. Advanced PID control. — NC: ISA, 2006. — 460 p.
22. Гайдук А.П. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 360 с.
23. Садомцев Ю.В. Решение задач  $H_\infty$ -оптимизации на основе принципа разделения // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 62—81.
24. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problem // IEEE Trans. Autom. Contr. — 1989. — Vol. 34, N 8. — P. 831—846.
25. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequality in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
26. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — Vol. 4. — P. 421—448.
27. Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G. Robust Control Toolbox 3. User's guide. — Natick (Mass.). The Math Works, Inc., 2010. — 178 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Честнов Владимир Николаевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, ✉ vnchest@yandex.ru,

Шатов Дмитрий Владимирович — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ dvshatov@gmail.com,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Поступила в редакцию 29.10.2018, после доработки 28.11.2018.

Принята к публикации 12.12.2018.