УДК 519.816.813.7:65.012.122

ГОЛОСОВАНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ: СЛУЧАЙ ДВУХ ГРУПП

П.Ю. Чеботарев, А.К. Логинов, Я.Ю. Цодикова, З.М. Лезина, В.И. Борзенко

Для общества, состоящего из двух сплоченных групп близкой численности, изучена социальная динамика, определяемая голосованием в стохастической среде. Получены явные выражения приращений капиталов групп в зависимости от параметров среды и «порогов притязаний» групп в модели случайных блужданий, определяемых голосованием. В качестве процедур голосования рассмотрены правила «единогласного принятия предложений группами» и «единогласного отклонения предложений группами». Найдены пороги притязаний групп, наиболее выгодные для участников групп и для общества в целом.

Ключевые слова: голосование, социальная динамика, политическая конкуренция, двухпартийная система, стохастическая среда, случайные блуждания.

ВВЕДЕНИЕ

Работа выполнена в рамках проводимого авторами исследования социальной динамики, определяемой демократическими решениями в стохастической среде. Предметом исследования являются зависимости показателей социальной динамики от социальных установок участников, к числу которых относятся эгоизм, коллективизм (корпоративизм) и альтруизм. В работах [1, 2] представлены результаты анализа ситуаций, в которых сплоченная группа конкурирует с участниками-эгоистами; в статье [3] проанализирована конкуренция участников-эгоистов и двух сплоченных групп (партий). Изучен механизм «снежного кома кооперации», при определенных условиях побуждающий участников, исходно имевших эгоистические установки, поступать в соответствии с альтруистическими принципами.

В настоящей работе изучается специальный случай ситуации, рассмотренной в работе [3], — случай конкуренции двух групп. Относительная простота этой постановки позволяет получить явные выражения для большинства основных зависимостей.

Напомним основные положения модели голосования в стохастической среде. Общество, состоящее из конечного числа участников, последовательно голосует за предложения, генерируемые «средой» в соответствии со случайным законом. Предложение есть вектор приращений капиталов (согласно иной интерпретации, — значений полезности) всех участников. Приращения капиталов, входящие в предложение, трактуются как реализации независимых одинаково распределенных случайных величин. Как правило, рассматривается нормальное распределение. Участник-эгоист при голосовании поддерживает любое предложение, увеличивающее его капитал. Члены группы солидарно голосуют за те предложения, реализация которых ведет к увеличению благосостояния группы (характеризуемого тем или иным показателем). В частности, группа может поддерживать предложения, приводящие к увеличению значений капитала большинства ее членов или предложения, увеличивающие ее суммарный капитал. Каждое предложение принимается (и в этом случае реализуется) или отвергается с применением определенной процедуры голосования. Рассматриваются в основном процедуры «α-большинства», в которых для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы его поддержала доля общества, превосходящая $\alpha \in [0, 1)$.

Центральное для данной модели предположение стохастичности среды, с одной стороны, позволяет проявиться многим базовым феноменам социальной реальности, а с другой, дает возможность исследовать эти феномены аналитическими методами.

В теории голосований предположение стохастичности обычно применялось к выбору голосующими своих позиций (см., например, работу [4]), а в кооперативной теории игр — к платежам в игре [5]. Особенность нашей модели — стохастический механизм генерации предложений, которые ставятся на голосование. Иными словами, рассматривается модель случайных блужданий, «утверждаемых» голосованием. Упомянем в этой связи работы (см., например, работу [6]), изучающие динамическую коррекцию посредством голосования ставки налога и т. п., и отметим, что здесь объект выбора — указанная ставка, оптимизируемая в рамках специальных моделей производства и потребления, а не шаг случайного блуждания в пространстве капиталов. Отметим также недавно вышедший обзор моделей конкуренции, связанных с голосованием [7].

1. ОЖИДАЕМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КАПИТАЛА ЧЛЕНОВ ГРУПП

Пусть общество делится на две группы близкой численности, каждая из которых голосует солидарно. Одно из естественных правил голосования требует, чтобы принимаемое предложение было поддержано обеими группами. Соответствующую процедуру голосования будем называть *процедурой единогласного принятия предложений группами*. Пусть группа 1 поддерживает предложение тогда и только тогда, когда оно приводит к увеличению среднего капитала ее участников не менее чем на t_1, а группа 2 голосует «за», если предложение в среднем увеличивает капитал ее членов не менее чем на t_2, где t_1 и t_2 — варьируемые параметры, возможно, отрицательные. Представляет интерес зависимость будущих приращений капиталов групп и всего общества от «порогов притязаний» t_1 и t_2. Наряду с «процедурой единогласного принятия предложений группами» будем рассматривать также правило, согласно которому для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано любой из групп. Соответствующую процедуру голосования назовем *процедурой единогласного отклонения предложений группами*, поскольку при этой процедуре для отклонения предложения необходимо и достаточно, чтобы его отклонили обе группы. Выведем формулы средних приращений капитала при использовании указанных процедур голосования.

Теорема. *Пусть для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано одной (любой) группой. Тогда математическое ожидание приращения капитала*[1] *члена группы i* ($i = 1, 2$) *за один шаг выражается формулой*

$$M(\tilde{d}_i) = \mu F_{3-i} + (\mu F_i + \sigma_i f_i)\bar{F}_{3-i}, \qquad (1)$$

где $F_i = F(\mu_i/\sigma_i)$, $\bar{F}_i = 1 - F_i$, $f_i = f(\mu_i/\sigma_i)$, $f(\cdot)$ *и* $F(\cdot)$ *— плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины*[2], $\mu_i = \mu - t_i$, $\sigma_i = \sigma/\sqrt{g_i}$, t_i *— порог среднего приращения капитала членов группы i, превышение которого приводит к поддержке предложения группой i,* g_i *— численность группы i,* μ *и* σ *— параметры нормального распределения* $N(\mu, \sigma^2)$, *которому подчиняются независимые приращения капитала всех участников, образующие предложение среды.*

Если же для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы его поддержали обе группы, то математическое ожидание приращения капитала члена группы i ($i = 1, 2$) *за один шаг выражается формулой*

$$M(\tilde{d}_i) = (\mu F_i + \sigma_i f_i)F_{3-i}. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — события, состоящие в поддержке предложения соответственно группой 1 и группой 2, G_1G_2, $G_1\bar{G}_2$ и $\bar{G}_1\bar{G}_2$ — события, состоящие в одновременной реализации G_1 и G_2, G_1 и дополнения G_2, дополнений G_1 и G_2. Пусть $P(\cdot)$ — вероятность события.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано любой из групп. По формуле полной вероятности для математических ожиданий

$$M(\tilde{d}_i) = M(\tilde{d}_i|G_{3-i})P(G_{3-i}) + $$
$$+ M(\tilde{d}_i|G_i\bar{G}_{3-i})P(G_i\bar{G}_{3-i}) + $$
$$+ M(\tilde{d}_i|\bar{G}_i\bar{G}_{3-i})P(\bar{G}_i\bar{G}_{3-i}). \qquad (3)$$

При $\bar{G}_i\bar{G}_{3-i}$ предложение не принимается, поэтому $M(\tilde{d}_i|\bar{G}_i\bar{G}_{3-i}) = 0$. При G_{3-i} предложение принимается, и из независимости компонент вектора приращений капитала следует $M(\tilde{d}_i|G_{3-i}) = \mu$. При $G_i\bar{G}_{3-i}$ предложение также принимается, и, в силу независимости компонент d_i, $M(\tilde{d}_i|G_i\bar{G}_{3-i}) = M(d_i|G_i\bar{G}_{3-i}) = M(d_i|G_i)$. Далее, $M(d_i|G_i) = M(d_i^{\text{ср}}|G_i)$, где $d_i^{\text{ср}}$ — результат усреднения компонент предложения среды, соответствующих

[1] Обозначения с тильдой соответствуют реальным, т.е. полученным в динамике (в отличие от предлагаемых средой) приращениям капитала.

[2] $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx$.

группе i. Заметим теперь, что $d_i^{\text{ср}}$ — случайная величина с распределением $N(\mu, \sigma_i^2)$, где $\sigma_i = \sigma/\sqrt{g_i}$, а событие G_i по условию состоит в том, что $d_i^{\text{ср}} > t_i$. Пользуясь выражением для условного среднего нормально распределенной случайной величины (оно находится интегрированием), получаем окончательно

$$M(\tilde{d}_i\,|G_i\overline{G}_{3-i}) = M(d_i^{\text{ср}}|d_i^{\text{ср}} > t_i) = \mu + \sigma_i f_i/F_i, \quad (4)$$

где $F_i = F(\mu_i/\sigma_i)$, $f_i = f(\mu_i/\sigma_i)$, $\mu_i = \mu - t_i$. Наконец, нетрудно показать, что $P(G_{3-i}) = F_{3-i}$ и, в силу независимости компонент предложения среды,

$$P(G_i\overline{G}_{3-i}) = P(G_i)P(\overline{G}_{3-i}) = F_i\overline{F}_{3-i}\,. \quad (5)$$

Подставив все найденные значения в формулу (3), получаем

$$M(\tilde{d}_i) = \mu F_{3-i} + (\mu + \sigma_i f_i/F_i)F_i\overline{F}_{3-i} = \\ = \mu F_{3-i} + (\mu F_i + \sigma_i f_i)\overline{F}_{3-i}\,,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано обеими группами. В этом случае

$$M(\tilde{d}_i) = M(\tilde{d}_i\,|G_iG_{3-i})P(G_iG_{3-i}). \quad (6)$$

Аналогично выводу формулы (4) получаем

$$M(\tilde{d}_i\,|G_iG_{3-i}) = M(d_i^{\text{ср}}|d_i^{\text{ср}} > t_i) = \mu + \sigma_i f_i/F_i \quad (7)$$

и, аналогично формуле (5),

$$P(G_iG_{3-i}) = P(G_i)P(G_{3-i}) = F_iF_{3-i}. \quad (8)$$

Подставляя соотношения (7) и (8) в формулу (6), имеем $M(\tilde{d}_i) = (\mu F_i + \sigma_i f_i)F_{3-i}$, что и требовалось доказать. ♦

Интерес представляют также *сравнительные* приращения капиталов двух групп: для группы важно не только сколько она получает, но и как ее результаты выглядят на фоне результатов другой группы. Ожидаемое значение приращения капитала группы 1 за один шаг по сравнению с группой 2 выражается величиной $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$. Доказанная теорема позволяет найти простые выражения для $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$.

Следствие 1. *В обозначениях теоремы, если для принятия предложения достаточно поддержки любой группы, то*

$$M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2) = \sigma_1 f_1\overline{F}_2 - \sigma_2 f_2\overline{F}_1. \quad (9)$$

Если же необходима поддержка обеих групп, то

$$M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2) = \sigma_1 f_1 F_2 - \sigma_2 f_2 F_1.\ ♦ \quad (10)$$

Данное следствие устанавливается посредством простых тождественных преобразований.

2. АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

Для применения и интерпретации полученных результатов рассмотрим сначала случай, когда математическое ожидание предложений среды равно нулю, а среднеквадратичное отклонение равно 10: $\mu = 0$, $\sigma = 10$. Пусть в каждой группе по 300 участников, и группа 1 поддерживает предложение тогда и только тогда, когда оно приводит к увеличению ее суммарного капитала ($t_1 = 0$) а порог t_2 поддержки предложений группой 2 (ее «порог притязаний») варьируется.

При использовании процедуры единогласного принятия предложений группами зависимости ожидаемых приращений капиталов групп и всего общества от значения t_2, задаваемые теоремой, иллюстрируются следующей диаграммой (рис. 1).

В частности, среднее приращение капитала группы 2 выражается симметричной колоколообразной кривой. Это объяснимо: выбор положительного порога (высокие притязания) приводит к тому, что часть предложений, в среднем выгодных для группы 2, отвергается, а выбор отрицательного

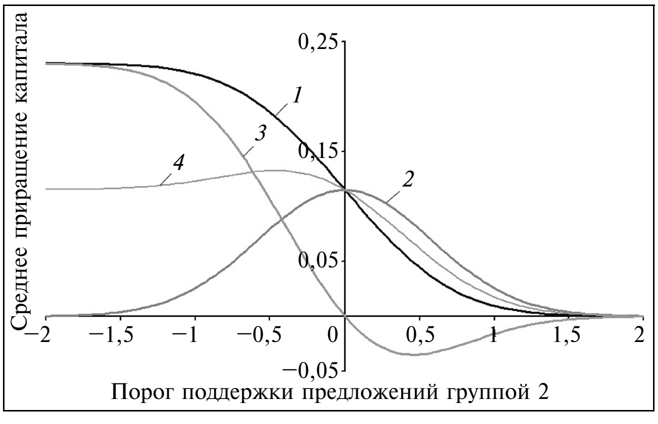

Рис. 1. Ожидаемые приращения капиталов участников групп 1 и 2 при голосовании по правилу «единогласного принятия предложений группами», совпадающему в данном случае с правилом большинства:
1 — группа 1; *2* — группа 2; *3* — разность между группами 1 и 2; *4* — общество в целом; $\mu = 0$; $\sigma = 10$; $g_1 = g_2 = 300$

порога (снижение притязаний) приводит к принятию, наряду с выгодными для группы 2 предложениями, также и ряда предложений, невыгодных для нее. И то, и другое снижает ожидаемые приращения капитала членов группы 2. Нетривиален тот факт, что повышение и понижение порога на одну и ту же величину приводит к одинаковым результатам. Докажем это.

Следствие 2. *Пусть* $\mu = 0$. *Тогда при фиксированных значениях параметров, кроме* t_2, *любом действительном* t *и обеих рассматриваемых процедурах голосования выполняется* $M(\tilde{d}_2|t_2 = t) = M(\tilde{d}_2|t_2 = -t)$.

Доказательство. По теореме при $\mu = 0$ и принятии предложения голосами одной группы имеет место

$$M(\tilde{d}_2) = \sigma_2 f_2 \bar{F}_1, \qquad (11)$$

а в случае необходимости для принятия предложения поддержки двух групп

$$M(\tilde{d}_2) = \sigma_2 f_2 F_1. \qquad (12)$$

Требуемое утверждение следует из того, что σ_2 и F_1 не зависят от t_2, а зависимость f_2 от t_2, $f_2 = f\left(\frac{\mu - t_2}{\sigma_2}\right)$, при $\mu = 0$ является четной функцией. ♦

Замечание 1. Вследствие соотношений (11) и (12) при обеих рассматриваемых процедурах голосования зависимость $M(\tilde{d}_2)$ от t_2 пропорциональна функции нормальной плотности, являющейся колоколообразной кривой с нулевыми предельными значениями при $t_2 \to -\infty$ и $t_2 \to \infty$. Наконец, если $t_1 = 0$, то при *обеих процедурах голосования* $M(\tilde{d}_2) = \frac{1}{2}\sigma_2 f_2$. ♦

Далее изучим особенности социальной динамики для каждой из рассматриваемых процедур голосования.

2.1. Процедура единогласного принятия предложений группами

При использовании процедуры «единогласного принятия предложений группами» для группы 1 выгоден низкий (отрицательный) порог t_2 поддержки предложений группой 2. Действительно, при этом группа 2 не налагает вето практически ни на какие предложения, выгодные группе 1, и группа 1 максимизирует свою выгоду. При высоком пороге t_2, напротив, группе 1 не удается проводить выгодные для нее предложения.

Теперь предположим, что для группы 2 важно не достичь максимально возможного среднего приращения капитала, а обеспечить максимально возможное превосходство перед группой 1. Иными словами, группа 2 максимизирует не $M(\tilde{d}_2)$, а $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$. Эта задача может быть решена группой 2 посредством специального выбора «порога притязаний» t_2. Так, в примере, показанном на рис. 1, при $t_2 \approx 0{,}46$ $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$ как функция t_2 достигает своего минимума, а $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$, соответственно, — максимума. В следующем предложении найдем значение «порога притязаний» t_2 группы 2, доставляющее максимум величине $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$.

Предложение 1. *Пусть для принятия предложения среды необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано обеими группами. Тогда ожидаемое превосходство* $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ *участника группы* 2 *по отношению к участнику группы* 1 *по приращению капитала достигает максимума при пороге притязаний* t_2 *группы* 2, *равном*

$$t_2^+ = \mu + \sigma_1 f_1/F_1. \qquad (13)$$

Доказательство. Продифференцируем по t_2 выражение (10):

$$\frac{dM(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)}{dt_2} = \frac{d(\sigma_1 f_1 F_2 - \sigma_2 f_2 F_1)}{dt_2} =$$

$$= \sigma_1 f_1 f_2(-1/\sigma_2) - \sigma_2 f_2 \frac{-(t_2 - \mu)}{\sigma_2^2} F_1.$$

Приравняв эту производную к нулю, получим требуемое выражение (13). Найдя знак второй производной функции $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$ по t_2, устанавливаем, что данная точка является точкой минимума. Соответственно, функция $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ достигает в этой точке максимума. ♦

Замечание 2. Отметим, что найденный оптимальный «порог притязаний» t_2^+ группы 2 не зависит от ее численности g_2. Интересно также, что выражение (13) совпадает с выражением (4) при $i = 1$. В свою очередь, выражение (4) при $i = 1$ задает среднее значение приращения капитала группы 1 при условии, что оно выше порога t_1. На этом наблюдении основан следующий простой алгоритм оценивания группой 2 своего оптимального «порога притязаний» t_2^+: 1) регистрировать значения среднего приращения капитала участников группы 1 в предложениях среды, которые она поддерживает; 2) это усредненное по предложениям значение выбрать в качестве порога t_2. Итак, для получения максимального сравнительного преимущества группа 2 должна установить «порог притязаний», более высокий, чем у группы 1. Как отмечено выше, этот порог должен быть равен среднему «надпороговому» значению приращений капитала группы 1. В частности, для примера на рис. 1 формула (13) дает $t_2^+ = \sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}$. Если теперь группа 1 пожелает поступить так же, т. е. максимизировать свое превосходство $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$ при $t_2 = t_2^+$, она должна назначить еще более высокий порог, и если продолжить этот итерационный процесс, он приведет к бесконечному увеличению притязаний и не будет сходящимся (игра не имеет равновесия по Нэшу). ♦

Как наибольший сравнительный выигрыш $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ группы 2 зависит от фиксированного порога t_1 притязаний группы 1? Он максимален при $t_1 \to -\infty$, поскольку при этом группа 1 поддерживает все предложения, и решения определяются группой 2. При росте t_1 он уменьшается и стремится к нулю при $t_1 \to \infty$, когда никакие решения не принимаются из-за вето группы 1.

Не менее интересен следующий вопрос: «Какой порог притязаний t_2 группы 2 оптимален для общества в целом, т. е. приводит к наибольшему ожидаемому приращению капитала всего общества?» Ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть для принятия предложения среды необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано обеими группами. Тогда ожидаемое приращение капитала общества достигает максимума при пороге притязаний t_2 группы* 2, *равном*

$$t_2^0 = -\frac{g_1}{g_2}\left(\mu + \frac{\sigma_1 f_1}{F_1}\right). \qquad (14)$$

Доказательство. В силу теоремы (см. формулу (2)) ожидаемое значение приращения капитала всего общества равно

$$g_1M(\tilde{d}_1) + g_2M(\tilde{d}_2) = g_1(\mu F_1 + \sigma_1 f_1)F_2 + g_2(\mu F_2 + \sigma_2 f_2)F_1 = ((g_1 + g_2)\mu F_1 + g_1\sigma_1 f_1)F_2 + g_2\sigma_2 F_1 f_2.$$

Производная этой величины по t_2:

$$\frac{d(g_1M(\tilde{d}_1) + g_2M(\tilde{d}_2))}{dt_2} = ((g_1 + g_2)\mu F_1 + g_1\sigma_1 f_1)f_2(-1/\sigma_2) + g_2\sigma_2 F_1 f_2\frac{-(t_2-\mu)}{\sigma_2^2}.$$

Приравняв ее к нулю, получим $g_2F_1(t_2^0 - \mu) = -(g_1 + g_2)\mu F_1 - g_1\sigma_1 f_1$, следствием чего является выражение (14). Нахождением второй производной устанавливаем, что это значение — точка максимума. ♦

Замечание 3. Сравнение предложений 1 и 2 приводит к неожиданному результату: при $g_1 = g_2$ значения «порога притязаний» t_2 группы 2, приводящие к наибольшему превосходству ее перед группой 1 и к наилучшим результатам для общества в целом, *противоположны.* В частности, это так в примере на рис. 1. Но даже если $g_1 \ne g_2$, пороги t_2^+ и t_2^0 всегда имеют разные знаки (либо оба равны 0), поскольку $t_2^0 = -(g_1/g_2)t_2^+$. ♦

Предложение 2 задает значение t_2, обеспечивающее максимальное приращение капитала всего общества при фиксированном t_1. Какое значение t_1 обеспечивает при этом глобальный максимум для всего общества? Очевидно, что искомые значения t_1 и t_2 удовлетворяют системе уравнений

$$t_1 = -\frac{g_2}{g_1}\left(\mu + \frac{\sigma_2 f_2}{F_2}\right); \quad t_2 = -\frac{g_1}{g_2}\left(\mu + \frac{\sigma_1 f_1}{F_1}\right), \qquad (15)$$

где σ_1, σ_2, f_1, f_2, F_1 и F_2 заданы в теореме. Решение системы (15), скорее всего, не может быть выражено посредством стандартных функций даже в простейшем случае $g_1 = g_2$, когда она приводится к виду

$$t_1 = -\mu - \sigma_1 f_1/F_1; \quad t_2 = t_1.$$

Тем не менее, это решение может быть найдено численно. Так, зависимость оптимального для общества порога притязаний t обеих групп от μ при $g_1 = g_2 = 300$ и $\sigma = 10$ показана на рис. 2.

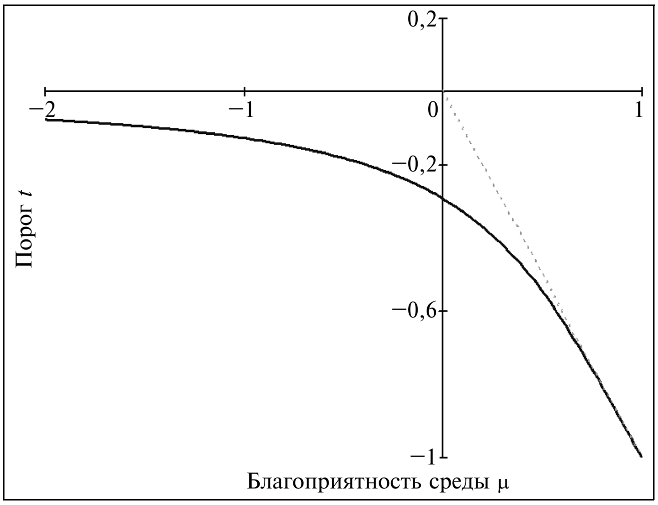

Рис. 2. Зависимость порога притязаний групп $t = t_1 = t_2$, максимизирующего приращение капитала всего общества, от параметра μ при $g_1 = g_2 = 300$ и $\sigma = 10$

В частности, при $g_1 = g_2 = \tilde{g}$ и $\mu = 0$ оптимально значение порога $t = -\sigma y_0/\sqrt{\tilde{g}}$, где $y_0 \approx 0{,}506$ — решение уравнения $y = f(y)/F(y)$, $f(y)$ и $F(y)$ — плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Один из наиболее интересных результатов данного этапа исследования состоит в том, что при голосовании по процедуре «единогласное принятие предложений группами» оптимальный для общества порог притязания групп отрицателен: в случае $g_1 = g_2$ он стремится к нулю снизу при $\mu \to -\infty$ и асимптотически приближается к прямой $t = -\mu$ при $\mu \to \infty$ (см. рис. 2). Отрицательность порогов притязания групп означает готовность к умеренно негативному результату, т. е. определенную склонность к риску.

2.2. Процедура единогласного отклонения предложений группами

Обратимся теперь к «процедуре единогласного отклонения предложений группами». При ее использовании для принятия нового предложения среды достаточно одобрения его любой из групп в отдельности. Аналитические результаты, полученные в § 1, иллюстрируются диаграммой, показанной на рис. 3.

Нетрудно заметить, что эта диаграмма выглядит как зеркальное отражение первой (см. рис. 1). Данное наблюдение соответствует действительности. А именно, выполняется следующее утверждение.

Следствие 3 (из теоремы). *Пусть* $\mu = 0$. *Тогда при фиксированных значениях параметров, кроме* t_2, *и любом действительном* t $M_{G_1 \vee G_2}(\tilde{d}_1 | t_2 = t) = M_{G_1 \wedge G_2}(\tilde{d}_1 | t_2 = -t)$, *где* $M_{G_1 \wedge G_2}$ *относится к процедуре голосования, в которой для принятия предложения необходимо и достаточно одобрение его обеими группами, а* $M_{G_1 \vee G_2}$ *— к процедуре, где необходимо и достаточно одобрение любой из групп. Если, кроме того,* $t_1 = 0$, *то имеем также* $M_{G_1 \vee G_2}(\tilde{d}_2 | t_2 = t) = M_{G_1 \wedge G_2}(\tilde{d}_2 | t_2 = t)$ *при любом действительном* t.

Доказательство. По теореме при $\mu = 0$ имеет место

$$M_{G_1 \wedge G_2}(\tilde{d}_1 | t_2 = -t) = \sigma_1 f_1 F(t/\sigma_1),$$

$$M_{G_1 \vee G_2}(\tilde{d}_1 | t_2 = t) = \sigma_1 f_1 (1 - F(-t/\sigma_1)) =$$

$$= \sigma_1 f_1 F(t/\sigma_1) = M_{G_1 \wedge G_2}(\tilde{d}_1 | t_2 = -t).$$

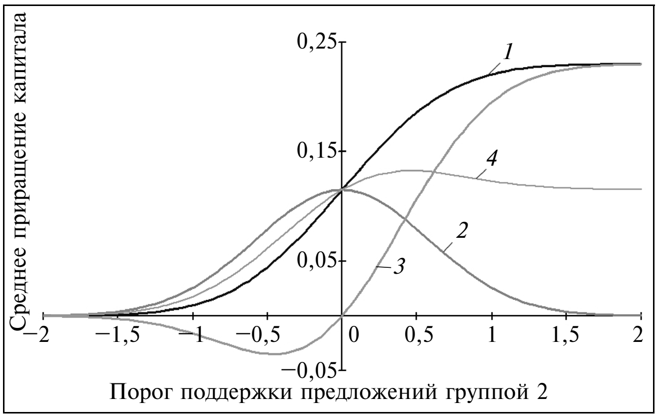

Рис. 3. Ожидаемые приращения капиталов участников групп 1 и 2 при «процедуре единогласного отклонения предложений группами»:
1 — группа 1; *2* — группа 2; *3* — разность между группами 1 и 2; *4* — общество в целом; $\mu = 0$; $\sigma = 10$; $g_1 = g_2 = 300$

Если, кроме того, $t_1 = 0$, то $M_{G_1 \wedge G_2}(\tilde{d}_2 | t_2 = t) = \sigma_2 f(-t/\sigma_2) F(0) = M_{G_1 \vee G_2}(\tilde{d}_2 | t_2 = t)$, что и требовалось доказать. ♦

Замечание 4. Поскольку в силу следствия 2 при $\mu = 0$ $M(\tilde{d}_2 | t_2 = t) = M(\tilde{d}_2 | t_2 = -t)$ для каждой из рассматриваемых процедур голосования, выполнение условий $\mu = 0$ и $t_1 = 0$ приводит к тому, что зависимости, построенные при процедуре голосования $G_1 \vee G_2$, получаются из соответствующих зависимостей при процедуре $G_1 \wedge G_2$ отражением относительно оси ординат. Таким образом, случаи голосования с правилами «единогласного принятия предложений группами» и «единогласного отклонения предложений группами», нейтральной среде ($\mu = 0$), $t_1 = 0$ и любых численностях групп в определенном смысле «обратнодополнительны». ♦

Отметим, что при процедуре $G_1 \vee G_2$ группе 1 выгодно, чтобы группа 2 имела завышенные притязания (высокий порог t_2). Тогда при не столь высоком положительном пороге t_1 большинство решений принимается в интересах группы 1. Напротив, при низком пороге t_2 группа 2 обеспечивает реализацию практически всех предложений среды, и большинство предложений, невыгодных для группы 1, также проходит через «сито» голосования.

Рассмотрим задачу максимизации группой 2 своего превосходства $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ перед группой 1 при процедуре голосования $G_1 \vee G_2$.

Предложение 3. *Пусть для принятия предложения необходимо и достаточно, чтобы оно было под-*

держано любой из групп. Тогда ожидаемое превосходство $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ участника группы 2 по отношению к участнику группы 1 по приращению капитала достигает максимума при пороге притязаний t_2 группы 2, равном

$$t_2^+ = \mu - \sigma_1 f_1/\bar{F}_1. \qquad (16)$$

Доказательство. Продифференцируем по t_2 выражение (9):

$$\frac{dM(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)}{dt_2} = \frac{d(\sigma_1 f_1 \bar{F}_2 - \sigma_2 f_2 \bar{F}_1)}{dt_2} =$$
$$= \sigma_1 f_1 f_2 (1/\sigma_2) - \sigma_2 f_2 \frac{-(t_2 - \mu)}{\sigma_2^2} \bar{F}_1.$$

Приравняв эту производную к нулю, получим требуемое выражение (16). Найдя знак второй производной функции $M(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)$ по t_2, устанавливаем, что данная точка является точкой минимума (доставляющей максимум величине $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$). ♦

Наибольший сравнительный выигрыш $M(\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1)$ группы 2, достигаемый при пороге притязаний t_2^+, стремится к нулю при $t_1 \to -\infty$ (при этом все предложения принимаются голосами группы 1) и максимален при $t_1 \to \infty$, когда группа 1 устраняется от принятия решений.

Как и в случае голосования по процедуре $G_1 \wedge G_2$, обратимся к задаче максимизации капитала всего общества посредством выбора t_2. Решение ее дается следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть для принятия предложения среды необходимо и достаточно, чтобы оно было поддержано любой из групп. Тогда ожидаемое приращение капитала всего общества достигает максимума при пороге притязаний группы 2*

$$t_2^0 = -\frac{g_1}{g_2}\left(\mu - \frac{\sigma_1 f_1}{\bar{F}_1}\right). \qquad (17)$$

Доказательство. В силу теоремы (см. формулу (1)) ожидаемое значение приращения капитала всего общества равно

$$g_1 M(\tilde{d}_1) + g_2 M(\tilde{d}_2) = g_1(\mu F_2 + (\mu F_1 + \sigma_1 f_1)\bar{F}_2) +$$
$$+ g_2(\mu F_1 + (\mu F_2 + \sigma_2 f_2)\bar{F}_1) = (g_1 + g_2)\mu F_1 + g_1\sigma_1 f_1 +$$
$$+ g_2\sigma_2 \bar{F}_1 f_2 + (g_1(\mu - \mu F_1 - \sigma_1 f_1) + g_2\mu\bar{F}_1)F_2.$$

Производная этой величины по t_2:

$$\frac{d(g_1 M(\tilde{d}_1) + g_2 M(\tilde{d}_2))}{dt_2} = g_2\sigma_2 \bar{F}_1 f_2 \frac{-(t_2 - \mu)}{\sigma_2^2} +$$
$$+ (g_1(\mu - \mu F_1 - \sigma_1 f_1) + g_2\mu\bar{F}_1)f_2(-1/\sigma_2).$$

Приравняв ее к нулю, получим: $-g_2\bar{F}_1(t_2^0 - \mu) = g_1(\mu\bar{F}_1 - \sigma_1 f_1) + g_2\mu\bar{F}_1$, что приводит к соотношению (17). Нахождением второй производной устанавливаем, что данное значение — точка максимума. ♦

Замечание 5. Сравнивая предложения 3 и 4, как и в случае процедуры $G_1 \wedge G_2$ получаем, что при $g_1 = g_2$ значения «порога притязаний» t_2 группы 2, приводящие к наибольшему ее превосходству перед группой 1 и к наилучшим результатам для общества в целом, *противоположны*. В частности, это так в примере, показанном на рис. 3. Но и в случае, когда $g_1 \ne g_2$, пороги t_2^+ и t_2^0 всегда имеют разные знаки (либо оба равны 0), поскольку, как и при голосовании по процедуре $G_1 \wedge G_2$, $t_2^0 = -(g_1/g_2)\, t_2^+$. ♦

Рассмотрим теперь вопрос о максимизации приращения капитала всего общества при процедуре $G_1 \vee G_2$. Здесь также результат в некотором смысле двойственен полученному для процедуры $G_1 \wedge G_2$. А именно, в силу предложения 4, пороги притязания групп t_1 и t_2, максимизирующие при-

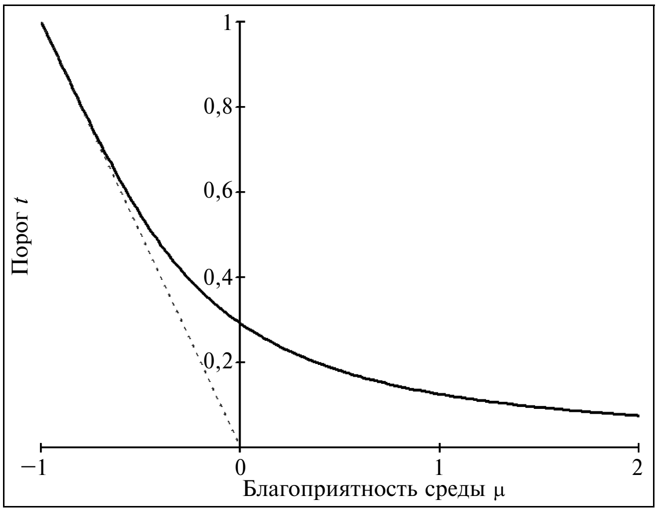

Рис. 4. Зависимость порога притязаний групп $t = t_1 = t_2$, максимизирующего приращение капитала всего общества, от параметра μ при $g_1 = g_2 = 300$ и $\sigma = 10$

ращение капитала всего общества, удовлетворяют системе уравнений

$$t_1 = -\frac{g_2}{g_1}\left(\mu - \frac{\sigma_2 f_2}{\bar{F}_2}\right); \quad t_2 = -\frac{g_1}{g_2}\left(\mu - \frac{\sigma_1 f_1}{\bar{F}_1}\right),$$

где σ_1, σ_2, f_1, f_2, F_1 и F_2 заданы в теореме 1. В простейшем случае, когда $g_1 = g_2$, эта система уравнений сводится к системе

$$t_1 = -\mu + \sigma_1 f_1/\bar{F}_1; \quad t_2 = t_1.$$

Зависимость оптимального для общества порога притязаний t обеих групп от μ при $g_1 = g_2 = 300$ и $\sigma = 10$ показана на рис. 4. В частности, при $g_1 = g_2 = \tilde{g}$ и $\mu = 0$ значение этого порога $t = \sigma y_0/\sqrt{\tilde{g}}$, где $y_0 \approx 0{,}506$ — решение уравнения $y = f(y)/F(y)$, $f(y)$ и $F(y)$ — плотность и функция распределения стандартной нормальной величины.

В отличие от голосования по процедуре $G_1 \wedge G_2$, оптимальный для общества порог притязаний групп здесь положителен: при $g_1 = g_2$ он стремится к нулю сверху при $\mu \to \infty$ и асимптотически приближается к прямой $t = -\mu$ при $\mu \to -\infty$ (см. рис. 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучается социальная динамика, определяемая голосованием двух сплоченных групп в стохастической среде. Рассматриваются группы, примерно равные по численности («двухпартийная система»), что делает естественной процедуру голосования, предполагающую необходимость поддержки предложения обеими группами для принятия этого предложения — «процедуру единогласного принятия предложений группами». Несколько менее естественна процедура, в соответствии с которой для принятия нового предложения достаточно поддержки его любой из групп — «процедура единогласного отклонения предложений группами».

Использование этой процедуры, однако, не приводит к бесконечному чередованию противоречащих друг другу решений, предлагаемых двумя группами, поскольку предложения в модели генерируются по случайному закону.

Каждая из групп поддерживает те, и только те предложения, которые приводят к приращению среднего капитала ее участников, превосходящему выбранный группой «порог притязаний». Изучается зависимость социальной динамики от порогов притязаний групп.

Аналитически получены зависимости приращений капиталов групп от порогов их притязаний. Установлено, что при «процедуре единогласного принятия предложений группами» и одинаковой численности групп пороги притязаний группы, обеспечивающие ей наибольшее превосходство перед другой группой и наибольшее приращение капитала общества в целом, — противоположны. Первый из этих порогов равен среднему приращению капитала членов конкурирующей группы по предложениям, которые последняя поддерживает. Установлено, что пороги притязаний групп, обеспечивающие максимальное приращение капитала всего общества, всегда отрицательны, и найден вид зависимости этих порогов от параметров среды. Аналогичные (а по существу, двойственные) результаты получены для случая использования процедуры «единогласного отклонения предложений группами».

Изученные феномены не специфичны для рассматриваемой модели; наиболее важные из них имеют описанные в литературе прототипы в социальной реальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стратегии* при голосовании в стохастической среде: эгоизм и коллективизм / В.И. Борзенко, З.М. Лезина, А.К. Логинов и др. // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 2. — С. 154—173.
2. *Чеботарев П.Ю.* Аналитическое выражение ожидаемых значений капиталов при голосовании в стохастической среде // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 3. — С. 152—165.
3. *Анализ* феноменов коллективизма и эгоизма в контексте общественного благосостояния / П.Ю. Чеботарев, А.К. Логинов, Я.Ю. Цодикова и др. // Проблемы управления. — 2008. — № 4. — С. 30—37.
4. *Anderson S.P., Kats A., Thisse J.-F.* Probabilistic voting and platform selection in multi-party elections // Social Choice and Welfare. — 1994. — Vol. 11, N 4. — P. 305—322.
5. *Suijs J.* Cooperative Decision Making in a Stochastic Environment: Ph.D. thesis. — Tilburg: Tilburg University, 1998.
6. *Aiyagari S.R., Peled D.* Social insurance and taxation under sequential majority voting and utilitarian regimes // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1995. — Vol. 18. — N 8. — P. 1511—1528.
7. *Захаров А.В.* Модели политической конкуренции: обзор литературы // Экономика и математические методы. — 2009. — Т. 45. — № 1. — С. 110—128.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Чеботарев Павел Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-88-69, ✉ pchv@rambler.ru,

Логинов Антон Константинович — ст. математик, ☎ (495) 334-91-39, ✉ ak_l@mail.ru,

Цодикова Яна Юльевна — вед. инженер, ☎ (495) 334-91-39, ✉ codikova@mail.ru,

Лезина Зоя Марковна — канд. техн. наук, вед. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-91-39, ✉ lezina_zo@mail.ru,

Борзенко Владимир Игоревич — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-91-39,

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, г. Москва.