

ISSN 1819-3161

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

6/2020

CONTROL  SCIENCES

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,  
И. А. Каляев, академик РАН,  
В. А. Левин, академик РАН,  
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,  
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,  
Е. А. Федосов, академик РАН

## РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,  
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,  
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,  
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,  
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,  
М. И. Гераськин, д-р экон. наук,  
В. В. Клочков, д-р экон. наук,  
С. А. Краснова, д-р техн. наук,  
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,  
В. В. Кульба, д-р техн. наук,  
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,  
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,  
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,  
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,  
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук  
(ответственный секретарь),  
А. С. Мандель, д-р техн. наук,  
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,  
А. И. Михальский, д-р биол. наук,  
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН  
(гл. редактор),  
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,  
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук  
(зам. гл. редактора),  
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,  
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,  
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,  
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,  
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,  
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,  
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,  
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

## РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,  
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,  
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,  
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,  
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,  
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,  
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,  
д-р техн. наук,  
Самара – В. Г. Засканов, д-р техн. наук,  
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,  
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

## ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS<sup>1</sup>,  
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,  
V. A. Levin, Academician of RAS,  
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,  
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,  
S. N. Vassilejev, Academician of RAS

## EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),  
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),  
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),  
V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),  
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),  
V. V. Klochkov, D. Sc. (Econ.),  
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),  
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),  
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),  
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),  
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),  
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),  
N. E. Maximova, Ph. D. (Tech.),  
Executive Editor-in-Chief,  
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),  
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),  
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),  
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,  
Editor-in-Chief,  
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,  
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),  
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),  
E. Ya. Rubinovich, D. Sc. (Tech.),  
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),  
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),  
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),  
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

## LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),  
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),  
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),  
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –  
D. Sc. (Tech.),  
Samara – V. G. Zaskanov, D. Sc. (Tech.),  
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),  
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)  
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),  
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),  
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

<sup>1</sup> Russian Academy of Sciences.



**CONTROL SCIENCES**

**Научно-технический  
журнал**

6 номеров в год  
ISSN 1819-3161  
Издается с 2003 года

**УЧРЕДИТЕЛЬ**

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор  
чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместитель главного  
редактора

Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь  
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор  
Л.В. Петракова

Издатель  
ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.  
Тел./факс (495) 334-92-00  
E-mail: pu@ipu.ru  
Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет и электронная версия  
подготовлены  
ИП Кишенкова Т. В.

Отпечатано в ООО «Адвансед солюшнз»  
Заказ № РВ620

Подписано в печать  
20.11.2020 г.

Журнал зарегистрирован  
в Министерстве Российской  
Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе  
Web of Science и Перечень  
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс  
научного цитирования (РИНЦ).  
На сайте Научной электронной  
библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) доступны  
полные тексты статей.

Подписные индексы:  
80508 и 81708 в каталоге Роспечати;  
38006 в объединенном каталоге  
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 6.2020

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Математические проблемы управления

Германчук М.С., Лемтюжникова Д.В., Лукьяненко В.А.  
Метаэвристические алгоритмы для многоагентных задач  
маршрутизации . . . . . 3

#### Анализ и синтез систем управления

Честнов В.Н. Абсолютная устойчивость систем с регуляторами,  
гарантирующими заданный показатель колебательности . . . . . 14

#### Управление в социально-экономических системах

Шумов В.В. Исследование функции победы в бою (сражении,  
операции) . . . . . 19

Мыльников Л.А. Управление экономической эффективностью  
производственных систем в условиях непрерывного потока новых  
проектов . . . . . 31

#### Информационные технологии в управлении

Стецюра Г.Г. Децентрализованная автономная синхронизация  
процессов взаимодействия мобильных объектов . . . . . 46

#### Управление техническими системами и технологическими процессами

Ковалев С.П., Небера А.А., Губко М.В. Цифровая платформа  
для реализации автоматизированных систем управления  
распределенными энергоресурсами . . . . . 57

Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Дектярев Д.Н. Оптимальное  
управление тепловым источником воздействия в процессах  
парофазного осаждения . . . . . 71

\* \* \*

Указатель статей, опубликованных в 2020 г. . . . . 81

Index of papers published in 2020 . . . . . 83



## CONTROL SCIENCES

### Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

#### FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute  
of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences

#### Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

#### Deputy Editor-in-Chief

F. F. Pashchenko

#### Executive Editor-in-Chief

N. E. Maximova

#### Editor

L. V. Petrakova

#### Publisher Sensidat-Plus LLC

#### Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,

Moscow 117997, Russia

☎ +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version

prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB620

Approved for print on 20.11.2020

The Journal is registered by the Ministry  
of Press, Broadcasting and Mass Media  
of the Russian Federation

Registration certificate of

ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI  
(Russian Science Citation Index)  
on the platform Web of Science  
and in the list of peer-reviewed  
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic  
library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) full texts of articles  
are available.

Subscription indexes:

**80508** and **81708** in the catalogue  
of Rospechat;

**38006** in the joint catalogue  
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control  
Sciences of Russian Academy of Sciences

# CONTROL SCIENCES

## 6.2020

### CONTENTS

---

#### Mathematical Problems of Control

---

**Germanchuk, M.S., Lemtyuzhnikova, D.V., Lukianenko, V.A.**

Metaheuristic Algorithms for Multi-Agent Routing Problems . . . . . 3

---

#### Analysis and Synthesis of Control Systems

---

**Chestnov, V.N.** Absolute Stability of Systems with Controllers That Provide

Given Oscillation Index . . . . . 14

---

#### Control in Social and Economic Systems

---

**Shumov, V.V.** A Study of Contest Success Function for Battles (Combats,

Operations) . . . . . 19

**Mylnikov, L.A.** Managing Economic Efficiency of Production Systems

in a Fluent Flow of New Projects . . . . . 31

---

#### Information Technologies in Control

---

**Stetsyura, G.G.** Decentralized Autonomic Synchronization of Interaction

Processes of Mobile Objects . . . . . 46

---

#### Control of Complex Technological Processes and Productions

---

**Kovalyov, S.P., Nebera, A.A., Goubko, M.V.** A Digital Platform

for Implementing Distributed Energy Resources Management Systems . . . . . 57

**Pervadchuk, V.P., Vladimirova, D.B., Dektyarev, D.N.** Optimal Control

of Thermal Exposure Source in the Processes of Vapor Phase Deposition . . . 71

\* \* \*

**Index** of papers published in 2020 . . . . . 83

# МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МНОГОАГЕНТНЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ<sup>1</sup>

М.С. Германчук, Д.В. Лемтюжникова, В.А. Лукьяненко

**Аннотация.** Рассматриваются задачи построения маршрутов в сложных сетях многими агентами-коммивояжерами. Формализация приводит к задачам псевдодулевой дискретной оптимизации с ограничениями, учитывающими специфику построения маршрутов. Разреженность матрицы ограничений позволяет применять декомпозиционные подходы и кластеризацию сети. Разработка приближенных алгоритмов выбора маршрутов в сложных сетях связана с учетом свойств структуры сети, ее сложности, наличия ограничений, предписаний, условий достижимости, числа агентов-коммивояжеров. Показано, что решение задач маршрутизации может базироваться на применении многоагентного подхода в сочетании с кластеризацией (декомпозицией) исходной задачи и метаэвристик. Многоагентные системы с роевым интеллектом применяются для решения сложных задач дискретной оптимизации, которые нельзя эффективно решить с помощью классических алгоритмов. Агентная модель для сложной сети задачи типа многих коммивояжеров становится интеллектуализированной системой, определяющей эвристические алгоритмы поиска оптимального решения реактивными агентами (следующими заложенным в них правилам). Применяются композиции подробно описанных алгоритмов, которые хорошо себя зарекомендовали в вычислительных экспериментах: модификации генетического алгоритма, муравьиного, роевого (пчелиной колонии), имитации отжига. Предложен и реализован обобщенный алгоритм, в котором исходной сети ставится в соответствие более простая сеть (сеть облета). Численный эксперимент в этом случае проведен для задачи маршрутизации по карте ГИС для городской инфраструктуры. Реализованы алгоритмы кластеризации, в которых первоначально пройденные маршруты уточняются с помощью алгоритмов 2-орт, имитации отжига и других метаэвристик. Дается сравнение применяемых алгоритмов и иллюстрация их работы.

**Ключевые слова:** метаэвристические алгоритмы, многоагентные задачи оптимизации, дискретная оптимизация, псевдодулевые задачи.

## ВВЕДЕНИЕ

Моделирование процессов на сетях определяется сложностью структуры сетей. Большинство известных сетей — социальные, инфраструктурные, ресурсные, транспортные — сложные. Актуальными являются задачи построения маршрутов на таких сетях, например, задача маршрутизации типа многих коммивояжеров. С другой стороны, задачи маршрутизации на сложных сетях приводят к типичным примерам постановок в виде задач дискретной оптимизации (ДО) с разреженными матрицами [1, 2], для которых применимы декомпозиционные подходы [3]. Однако не меньший интерес

представляют метаэвристические алгоритмы на основе моделей реальных процессов генетики, движения пчелиного роя и муравьиных колоний, отжига и др. В работе применен многоагентный подход, который реализуется с помощью эволюционных алгоритмов.

Рассматриваются многоагентные задачи маршрутизации (Multiple Traveling Salesman Problems, MTSP). В классической постановке коммивояжер должен объехать все города и вернуться в начальную точку. Задача MTSP формулируется как обобщение этой задачи для многих коммивояжеров, причем в качестве стандартных целевых функций в соответствующей задаче ДО выступают минимизация общей стоимости пути  $m$  обходов всех коммивояжеров или минимизация самого длинного обхода для любого коммивояжера.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00458, № 20-58-S52006).

Многие задачи этого типа содержат огромное число неизвестных и ограничений, поэтому они трудно решаемы. Известно, что MTSP в общем виде является NP-трудной, поэтому для больших задач весьма актуальными представляются способы уменьшения вычислений.

Разнообразие задач маршрутизации определяется структурой сети, на которой нужно выбрать наилучший маршрут. Актуальность таких задач следует из их практической полезности. Разнообразие публикаций по этой тематике подтверждает необходимость разработки приближенных алгоритмов выбора оптимальных маршрутов в сложных сетях — на графах большого размера. Задачи маршрутизации представляют собой важную составляющую прикладной (алгоритмической) теории графов, в рамках которой рассматривается построение различного рода путей, маршрутов, распределение потоков, разбиение, кластеризация и декомпозиция графов. Разработка алгоритмов в таких задачах связана с учетом свойств структуры сети, ее сложности, наличия ограничений, предписаний, условий достижимости, числа агентов-коммивояжеров.

В статье [4] показано, что для MTSP учет дополнительной информации меняет математическую постановку задачи и алгоритмы ее решения. В многоагентном подходе возникает свой класс задач, обусловленных поведением и управлением интеллектуальными агентами в условиях взаимодействия, например, в анализе алгоритмов маршрутизации, основанных на кластеризации графов. В работе предполагается, что сочетание различных постановок задач (псевдобулевой оптимизации большой размерности) с кластеризацией (декомпозицией), с применением генетических и эволюционных алгоритмов (метаэвристик [5]) позволяет эффективно применять многоагентный подход для решения задач MTSP.

В настоящей статье:

- приведен краткий обзор многоагентных систем для задачи коммивояжера;
- рассмотрен класс задач прикладной теории графов, который представляет собой продолжение исследования структуры сложных сетей;
- сделаны новые постановки задач маршрутизации типа многих коммивояжеров;
- предложен и реализован обобщенный алгоритм, в котором исходной сети ставится в соответствие более простая сеть, дугам соответствует расстояние по прямой (сеть облета);
- реализованы алгоритмы кластеризации, первоначально найденные маршруты уточняются с помощью алгоритмов 2-opt, имитации отжига и других метаэвристик;
- в результате вычислительного эксперимента выбраны такие алгоритмы, как обобщенный ге-

нетический, имитации отжига, обобщенного роя и др., которые необходимы для наполнения многоагентной системы;

— проведен численный эксперимент на примере многослойной сети ГИС Большой Ялты;

— проведен эксперимент, подтверждающий необходимость применения больших вычислений.

## 1. ОБЗОР МНОГОАГЕНТНЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

Многоагентные системы (МАС) состоят из самостоятельных интеллектуальных агентов (в нашем случае — агентов-коммивояжеров), взаимодействующих друг с другом и с окружающей средой. Агентом может быть программа со специфическими характеристиками или абстрактный интеллектуальный агент, представляющий собой формализованное описание действующего в реальной системе лица. У каждого агента есть свое представление о среде, текущее состояние, логика и цели, формирующие его поведение. Работа агента состоит в сборе и последующей обработке информации для принятия решения. Агенты могут быть независимыми или соревноваться между собой за некоторые ресурсы. Главным отличием МАС считаются интеллектуальность ее агентов и развитость их представлений о внешней среде. Агенты делятся на когнитивных (интеллектуальных) и реактивных (следующих заложенным в них правилам). В первую группу входят МАС, построенные на небольшом числе высокоинтеллектуальных агентов (сложные программы или системы искусственного интеллекта), пользующихся обучающимися нейронными сетями или экспертными системами. При этом система отвечает за распределение задач между исполнителями и обеспечивает общение агентов и их взаимодействие со средой. Вторая группа МАС строится с использованием большого числа (десятки — тысячи) агентов с простой структурой, которые не обладают сложным поведением. Их особенность заключается в проявлении сложного поведения как результате совместных действий множества простых реактивных агентов. Такие МАС называют многоагентными системами с роевым интеллектом. Как правило, возможности МАС используются для решения сложных задач ДО, которые нельзя эффективно решить классическими алгоритмами. Если в качестве среды взять сложную сеть задачи многих коммивояжеров, то агентная модель становится интеллектуализированной системой, определяющей эвристические алгоритмы для поиска оптимального решения реактивными агентами. Например, колония муравьев способна находить кратчайший путь до цели и может быть задействована агентом-коммивояжером для нахождения кратчайшего замкнутого мар-



шрута (гамильтонового цикла во взвешенном графе) [6, 7].

За годы исследований задачи коммивояжера было предложено большое число точных и эвристических алгоритмов [5]. Из точных применяются алгоритмы динамического программирования и алгоритмы, базирующиеся на методе ветвей и границ, а на практике чаще пользуются генетическими и эволюционными алгоритмами (алгоритмами роя частиц, муравьиной колонии [8]).

Приведем краткий обзор современных методов решения MTSP на основе моделирования реальных процессов. Самым распространенным для решения MTSP является генетический алгоритм (ГА). В работе [9] MTSP предлагается в качестве модели глобальной задачи оптимизации сбора нектара цветов, например, нектарными летучими мышами. Модель включает в себя несколько независимых животных и много цветов, содержание нектара в которых зависит от времени. Авторы с помощью ГА нашли оптимальное значение целевой функции с экспериментально полученными параметрами. Для определения расстояний применяется распределение Леви, что типично для естественных собирателей нектара. В отличие от многих моделей, в статье не делается предположений о природе распределения дальности полета. Представлены данные полевых экспериментов в Коста-Рике. Кроме подтверждения работоспособности модели авторы обнаружили, что летучие мыши способны запоминать положения источников пищи и частично оптимизировать свои маршруты.

Моделирование поведения капли как агента для поиска решения в задаче о рюкзаке было предложено в 2008 г. иранским ученым в работе [10].

В статье [11] рассматривается MTSP с минимизацией суммы расстояний всех маршрутов. Модель включает в себя несколько складов, закрытый путь и требование минимального числа городов, которые должен посетить каждый агент. Для решения задач предлагается два ГА. Первый применяется в сочетании с выбором рулетки и элитарным выбором, в котором предлагаются четыре новых вида мутационной операции. Второй связывает отбор и мутацию вместе. Применяются новый оператор селекции и более полный оператор мутации. Для сравнительного анализа приводятся алгоритм оптимизации роя частиц и алгоритм оптимизации инвазивных сорняков. Алгоритмы проверяются с помощью общедоступных тестов TSPLIB<sup>1</sup>. Производительность оценивается с помощью серии сравнительных экспериментов. Показано, что второй ГА показывает лучшие результаты в сравнении с алгоритмами роя частиц и инвазивных сорняков.

<sup>1</sup> <https://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/index.html>.

В работе [12] предложены новые операторы для основных шагов ГА: скрещивания и инициализации популяции. Основанная на теории групп методика генерации обеспечивает уникальность членов в популяции и, следовательно, отсутствие избыточности в пространстве поиска, а также устраняет эффект случайной инициализации. В предложенном операторе скрещивания расстояние Хэмминга сохраняется и существует очень мало шансов произвести нового потомка, который совпадет с членом популяции. Для эффективного представления пространства поиска применяется метод представления нескольких хромосом для кодирования пространства поиска MTSP. Авторы оценивают и сравнивают предложенную методику с методами, включающими описанные в статье [13] операторы скрещивания для двух стандартных целевых функций. Экспериментальные результаты показывают, что предложенный ГА дает лучший результат по сравнению со всеми четырьмя методами для второй целевой функции MTSP.

В статье [14] предлагается новый эффективный ГА с локальными операторами для решения MTSP и получения высококачественного решения в разумные сроки для реальных приложений. Два новых локальных оператора предназначены для ускорения конвергенции процесса поиска и повышения качества решения. Результаты показывают, что алгоритм находит лучший набор путей с экономией 9,62 % в среднем по стоимости.

Также в литературе встречается применение гибридных алгоритмов на базе ГА. В работе [15] предлагается новый гибридный подход, который представляет собой комбинацию трех алгоритмов: модифицированной колонии муравьев, 2-орт и ГА. С помощью алгоритма муравьиной колонии генерируются решения, на которых применяется алгоритм 2-орт для их улучшения. Далее происходит улучшение качества решений посредством ГА. Причина объединения вышеупомянутых алгоритмов заключается в использовании их сильных сторон как в глобальном, так и в локальном поиске. Предлагаемый подход оценивается с участием различных экземпляров данных из стандартных контрольных показателей. По критериям TSPLIB для больших задач предложенный алгоритм показывает лучшие результаты, чем нынешний наиболее известный M-GELS (Modified Gravitational Emulation Local Search) подход [16]. Для задач меньшей размерности он демонстрирует лучшие результаты, чем другие подходы, и сопоставимые результаты с M-GELS.

Разделение задачи между роем агентов не только позволяет сократить время поиска, увеличить вероятность нахождения глобального лучшего решения, но и создает широкий простор для применения многоагентных алгоритмов: от решения оптимизации перевозки грузов до управления роем

боевых роботов. Введение нескольких роев возникает в случае преобразования задачи многих коммивояжеров в несколько обычных задач коммивояжера. Область применения такого подхода только расширяется, поскольку зачастую при решении вопроса перевозки грузов число агентов-перевозчиков больше одного и тогда необходимо разделить, например, города между агентами как можно более эффективно [17].

В докладе [18] осуществляется группирование городов в кластеры, где каждый кластер представляет собой набор смежных городов, а затем применяется один из хорошо известных оптимизационных подходов для поиска оптимального маршрута для каждого кластера. Авторы применяют алгоритм муравьиных колоний, а также ГА для последовательного и параллельного программирования. Работы [15, 17, 18] наиболее близки к подходу, применяемому в настоящей работе.

Для решения MTSP в статье [13] авторы рассмотрели две различные целевые функции. Задача первой — свести к минимуму общее расстояние, пройденное всеми коммивояжерами, а второй — свести к минимуму максимальное расстояние, пройденное любым коммивояжером. Вторая целевая функция касается баланса рабочей нагрузки между коммивояжерами. Также предложены два метаэвристических подхода к MTSP. Первый подход основан на алгоритме искусственной пчелиной колонии, а второй — на алгоритме оптимизации инвазивных сорняков. Применен локальный поиск для дальнейшего улучшения решения, полученного с помощью представленных подходов. Результаты вычислительных экспериментов показывают превосходство предложенных алгоритмов над всеми другими современными подходами к этой задаче для обеих целевых функций.

В работе [19] авторами предложена система муравьиных колоний. Описаны два алгоритма, сочетающие кластеризацию  $K$ -средних и нечетких  $C$ -средних с системами муравьиных колоний. Экспериментально исследуется эффективность предложенных алгоритмов с целевой функцией, рассчитывающей общую длину/стоимость решения и степень его балансировки, измеряемую как амплитуда его подуровней.

Таким образом, существует множество подходов к решению многоагентных задач маршрутизации. Публикации подтверждают целесообразность выбора алгоритмов, используемых в работе.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ ТИПА МНОГИХ КОММИВОЯЖЕРОВ

Задача с несколькими агентами-коммивояжерами в общем случае может быть формализована так. Дано  $n > 1$  вершин и  $m$  агентов-коммивоя-

жеров, расположенных в одной вершине-депо. Оставшиеся вершины, которые необходимо посетить, будем называть промежуточными вершинами. Многоагентный подход к решению задачи MTSP включает в себя нахождение маршрутов для всех  $m$  коммивояжеров, которые начинают и заканчивают свой путь в определенной вершине, при этом посещая каждую промежуточную вершину не более одного раза, минимизируя общую длину маршрута для всех агентов.

Рассмотрим формализацию задач многих коммивояжеров при расположении всех агентов в одной вершине-депо. Пусть дан граф  $G(V, U)$ , где  $V$  — множество вершин  $V = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $U$  — множество дуг (ребер) и  $C = (c_{ij})$  — матрица весов (расстояний), связанная с каждой дугой  $(i, j) \in U, i, j = \overline{1, n}$ . Пусть  $m$  коммивояжеров расположены в вершине-депо  $i = 0$ . Многоагентная постановка при расположении всех агентов в одной вершине-депо включает в себя нахождение всех маршрутов для  $m$  коммивояжеров, таких, что они начинаются и заканчиваются в одной вершине. Все остальные вершины распределены по конкретным маршрутам. Число вершин, посещаемых агентом, находится в пределах предопределенного интервала, и общая стоимость посещения всех вершин минимизируется. Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если агент проходит по дуге } (i, j), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$u_i$  — число вершин, посещенных от источника до вершины  $i$  (т. е. номер посещения  $i$ -й вершины);  $L$  — максимальное число вершин, которые коммивояжер может посетить;  $K$  — минимальное число вершин, которые коммивояжер должен посетить, т. е.  $K \leq u_i \leq L$ . Формализация многоагентной задачи коммивояжера в этом случае имеет вид:

Найти

$$\min \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = \sum_{j=2}^n x_{j1} = m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{2, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{2, n}, \quad (3)$$

$$u_j + (L - 2)x_{1i} - x_{i1} \leq L - 1, \quad i = \overline{2, n}, \quad (4)$$

$$u_i + x_{1i} + (2 - K)x_{i1} \geq 2, \quad i = \overline{2, n}, \quad (5)$$

$$x_{1i} + x_{i1} \leq 1, \quad i = \overline{2, n}, \quad (6)$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L - 2)x_{ji} \leq L - 1, \quad 2 \leq i \neq j \leq n, \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in U. \quad (8)$$



Целевая функция (1) минимизирует общее пройденное расстояние в маршруте. Условия (2) гарантируют, что  $m$  коммивояжеров начинают и заканчивают свой путь в одной вершине. Равенства (3) представляют собой ограничения посещения вершин. Условия (4), (5) налагают ограничение на число вершин, которые коммивояжер посетит (при  $u_i = 1$ , если  $i$  — первая вершина в маршруте). Ограничение (6) не позволяет коммивояжеру посещать только одну вершину. Неравенство (7) гарантирует, что  $u_j = u_i + 1$  тогда и только тогда, когда  $x_{ij} = 1$ . Таким образом, ограничения запрещают формирование каких-либо подмаршрутов между вершинами в  $V/\{1\}$ , как показано в статье [20].

Следующая задача ставится при расположении всех агентов в разных вершинах и представляет собой обобщение рассматриваемой выше задачи, при котором у каждого агента разные вершины-депо. Пусть дан граф  $G(V, U)$ , где  $V$  — множество вершин  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  и  $U$  — множество дуг  $U = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ ,  $n$  — число вершин. Множество всех вершин графа есть объединение  $V = D \cup \tilde{V}$ , где  $D$  — множество стартовых позиций агентов — депо, а  $\tilde{V}$  — остальные вершины. В узле  $i$  расположен коммивояжер  $m_i$ , общее число агентов —  $m$ . Пусть  $\tilde{V} = \{d + 1, d + 2, \dots, n\}$  будет множеством клиентов, где  $|D| = d$ ;  $C$  — матрица стоимостей переходов из одной вершины в другую графа  $G$ , которая обладает свойствами:  $c_{ij} = c_{ji}$  и  $c_{ij} + c_{jk} \leq c_{ik}$  для каждого  $i, j, k = \overline{1, n}$ .

Пусть  $x_{ij}$ ,  $L$ ,  $K$  определены, как и раньше. Тогда получим формализацию многоагентной задачи коммивояжера MTSP:

найти

$$\min \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}, \quad (9)$$

$$\sum_{j \in \tilde{V}} x_{ij} = m_i, \quad i \in D, \quad \sum_{i \in \tilde{V}} x_{ij} = m_j, \quad j \in D, \quad (10)$$

$$\sum_{i \in \tilde{V}} x_{ij} = 1, \quad j \in \tilde{V}, \quad \sum_{j \in \tilde{V}} x_{ij} = 1, \quad i \in \tilde{V}, \quad (11)$$

$$u_j + (L - 2) \sum_{k \in D} x_{ki} - \sum_{k \in D} x_{ik} \leq L - 1, \quad i \in \tilde{V}, \quad (12)$$

$$u_i + \sum_{k \in D} x_{ki} + (2 - K) \sum_{k \in D} x_{ik} \geq 2, \quad i \in \tilde{V}, \quad (13)$$

$$x_{ki} + x_{ik} \leq 1, \quad k \in D, \quad i \in \tilde{V}, \quad (14)$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L - 2)x_{ji} \leq L - 1, \quad i \neq j, \quad i, j \in \tilde{V}, \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \tilde{V}. \quad (16)$$

Целевая функция (9) минимизирует общее пройденное расстояние на каждом маршруте. В данной формулировке для каждого  $i \in D$  равенства (10) гарантируют, что коммивояжер  $m_i$  начинает путь в вершине  $i$ . Равенства (11) представляют собой ограничения посещения вершин. Условия (12) и (13) накладывают ограничения на число вершин, которые коммивояжер посетит, при  $u_i = 1$ , если  $i$  — это первая вершина в маршруте. Ограничение (14) не позволяет коммивояжеру посещать только одну вершину. В статье [20] выявлено, что ограничение (15) разбивает все подмаршруты между агентами.

В постановке (1)–(16) агенты не конкурируют, а обеспечивают минимальный по стоимости (расстоянию) маршрут. В работах [4, 6] в данную модель добавляются ограничения в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Полученная задача псевдодвулевой условной оптимизации допускает декомпозицию по характерным блокам [1, 2], позволяет выделять задачу о назначении с дополнительными условиями. В случае конкуренции агентов вместо критерия (1) будет  $m$  критериев, отвечающих каждому агенту. Для полученной многокритериальной задачи псевдодвулевой оптимизации необходимо найти Парето-оптимальные решения.

### 3. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

Рассмотрим прикладные модели, методы и алгоритмы маршрутизации многих агентов-коммивояжеров в сложных сетях различной природы. Выбор алгоритмов, их обоснование и реализация определяются целями прикладных задач, вероятностными и метрическими характеристиками сетей, сложностью структуры соответствующих графов. Возникающие задачи ДО, как правило, NP-трудны. Разнообразие алгоритмов связано с наличием априорных знаний о решении или структуре сети, прецедентным характером знаний, а также требованиями к точности решения. Поиск приближенного решения не обходит алгоритмическую сложность таких задач. Более того, рационально применение, как точных, так и приближенных алгоритмов и их композиций. Заметим, что задачи прикладной маршрутизации возникают в сочетании с другими известными задачами, такими как распределение ресурсов, задача о ранце, кластеризации, максимального разреза, покрытия и пр. Поэтому соответствующие методы и алгоритмы должны базироваться на методах локального поиска и основанных на них метаэвристиках [21]. Численная реализация алгоритмов и их тестирование на различных прикладных задачах позволяют сформировать пакет прикладных программ маршрутизации в сложных сетях, что представляет собой актуальную задачу.

**Утверждение 1.** *Методология разработки алгоритмов решения задач маршрутизации может быть основана на формировании по исходной сложной сети более простой (относительно реализации алгоритмов маршрутизации) по своей структуре сети.*

Далее предлагается такой обобщенный алгоритм, не конкретизированный для многоагентной реализации.

Для решения ряда задач ДО на графах существуют хорошие алгоритмы в случае планарных, метрических графов с весовыми коэффициентами, удовлетворяющими неравенству треугольника  $l_{ij} \leq l_{ik} + l_{kj}$ ,  $l_{ij} \geq 0$ . В реальных задачах между вершинами заданы расстояния  $c_{ij} \geq 0$ , где  $(i, j) \in U$  — множество дуг,  $i \in V$  — множество вершин. Зная координаты вершин  $i \in V$ ,  $|V| = n$ , можно поставить расстояниям  $c_{ij}$ , не удовлетворяющим неравенству треугольника, в соответствие расстояния  $l_{ij} = \rho(i, j)$ , равные расстоянию по прямой между вершинами  $i$  и  $j$ . Такого типа задачи возникают для задач облета вершин (объектов) на некоторой высоте над поверхностью. Понятно, что в общем случае  $c_{ij} \geq l_{ij}$ , а некоторым маршрутам нельзя поставить в соответствие маршруты на поверхности, поскольку более короткий путь может лежать через море, горы и другие препятствия. Система запретов и предписаний позволяет выбирать серию модельных графов даже меньшей размерности, допускающих построение приближенных решений за приемлемое время. Для абстрактных сложных сетей построить отображение (обратимое), сводящее исходную задачу к более простой, не всегда возможно. Предлагается следующий обобщенный гибридный алгоритм.

Вход: исходный граф  $G(V, U)$  и весовая матрица  $C$ .

Выход: приближенное решение задачи ДО на графе  $G(V, U)$ .

1. Задать граф  $G(V, U)$  и весовую матрицу  $C$ .
2. Найти преобразование  $\rho: C \rightarrow L$ , т. е. по матрице  $C$  построить матрицу  $L$  с элементами  $l_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in U$ , удовлетворяющими неравенству треугольника.
3. Учесть априорную информацию, запреты и предписания; преобразовать матрицу  $L$  в матрицу  $\tilde{L}$ , учитывающую данную информацию.
4. Провести анализ и упрощение матрицы  $\tilde{L}$  (метрические характеристики; структурные составляющие: мосты, сочленения, висячие вершины; необходимость кластеризации), сформировать упрощенную матрицу  $\bar{\bar{L}}$ .
5. Для упрощенной матрицы  $\bar{\bar{L}}$  решить задачу ДО.
6. Построить обратное соответствие  $\bar{\bar{L}} \rightarrow \tilde{L} \rightarrow C$  и получить вариант решения, проверить на соответствие.

7. Предъявить приближенное решение исходной задачи ДО.

Предложенный обобщенный алгоритм инспирирован рядом актуальных прикладных задач: задачей планирования многодневных туристических маршрутов на инфраструктурной сети достопримечательностей Крыма и задачей доставки ресурсов (воды) экипажами (агентами-коммивояжерами) по территории Большой Ялты в условиях чрезвычайных ситуаций (ЧС). В условиях ЧС МАС маршрутизации является довольно сложной для моделирования системой. Здесь сочетаются задачи выбора решения (принятия решения ЛПР); управления; распределения ресурсов; синтеза сети (вершин-источников ресурсов); устойчивости сети в зависимости от удаления вершины, дуги или некоторого маршрута; кластеризации сети в зависимости от изменяющихся условий ЧС; обмена тактической информацией между агентами; потоковые задачи; задачи прокладки кратчайших путей и замкнутых маршрутов. Для такой МАС необходим набор протестированных приближенных эвристических алгоритмов, композиция которых решает поставленную задачу.

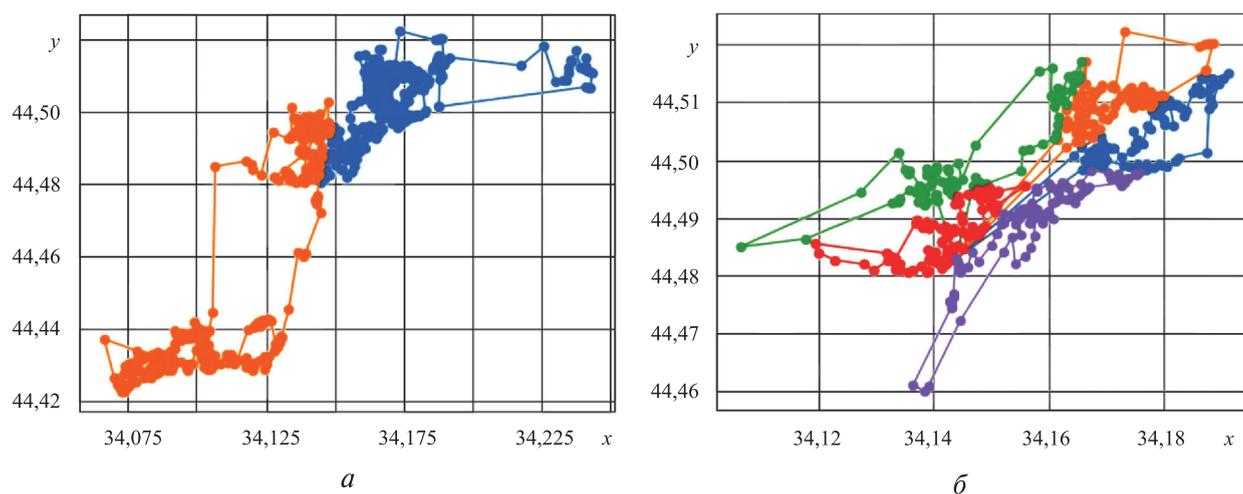
Минимальный набор таких алгоритмов предлагается в настоящей работе для решения задач типа MTSP. Проведена реализация обобщенного гибридного алгоритма для задачи маршрутизации в условиях ЧС. Входной информацией является Яндекс карта с дорожной инфраструктурой Большой Ялты, на которой отмечены источники ресурсов и их потребители. Заданы координаты объектов и можно найти расстояние по прямой или по дорогам, соединяющим эти объекты. В модельном случае варьировалось число коммивояжеров и параметры сети. На рис. 1 (см. третью стр. обложки) приведены случаи решения для двух и пяти коммивояжеров. На этапе кластеризации выделено три кластера, отвечающих Ялте и пригородам (рис. 1, а). На рис. 1, б представлено решение только для центрального кластера (Ялта).

На рис. 1 представлены сбалансированные маршруты (с дополнительным условием равномерного распределения вершин между коммивояжерами). Депо располагается в вершине, близкой к центру масс. Начальное приближение выбрано в результате упорядочивания вершин по углу (координаты вершин приведены к полярным координатам). Такое приближение подходит для алгоритмов имитации отжига или генетических алгоритмов. Для поиска субоптимального маршрута на начальном приближении исследована вариация алгоритма 2-opt, который лежит в основе алгоритма имитации отжига. Дальнейшее улучшение достигается обменом вершинами между коммивояжерами. Полученная структура маршрутов хорошо согласуется с дорожной инфраструктурой.

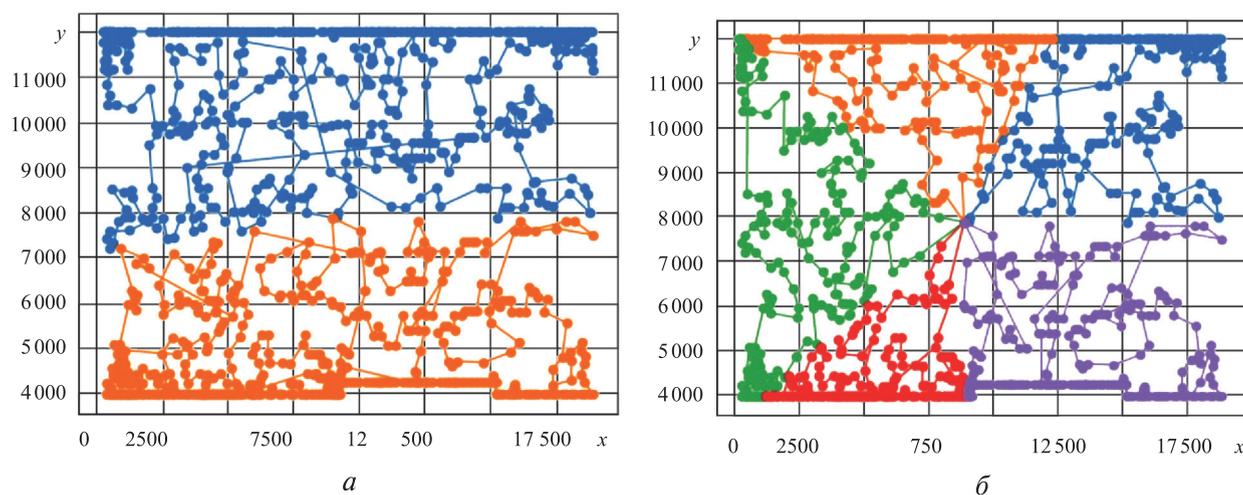
Рисунки к статье Германчук М.С., Лемтюжниковой Д.В., Лукьяненко В.А.

## «МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МНОГОАГЕНТНЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ»

(с. 3–13)



**Рис. 1. Решение задачи MTSP для:**  
*a* – двух коммивояжеров (Большая Ялта); *б* – пяти коммивояжеров (Ялта)



**Рис. 2. Решения задачи MTSP для:**  
*a* – двух коммивояжеров на 1084 вершинах; *б* – пяти коммивояжеров на 1084 вершинах



Рассмотрим более подробно применяемые в работе (наиболее известные) приближенные алгоритмы для решения задач маршрутизации: алгоритм муравьиной колонии, алгоритм пчелиного роя, метод имитации отжига. Алгоритм муравьиной колонии [22] основан на поведении муравьев в муравьиной колонии. Здесь муравьиная колония представляет собой многоагентную систему, в которой каждая отдельная особь или агент выполняет набор простых операций и в одиночку не способен обеспечить глобальное решение поставленной задачи. Сложность данного алгоритма зависит от времени жизни колонии  $t_{\max}$ , числа вершин  $n$  и числа муравьев в колонии  $m$ . Рассмотрим классический алгоритм муравьиной колонии.

1. Инициализируем граф  $G$  (например, вводим матрицу расстояний  $D$ ).

2. Задаем параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Q$ ,  $t_{\max}$ ,  $m$ .

3. Задаем значение маркера для каждого ребра  $\delta_{ij} \in G$  (феромон).

4. Помещаем муравьев в произвольно выбранные вершины, без повторов.

5. Задаем произвольный кратчайший маршрут  $T^*$  и его длину  $L^*$ .

6. Создаем цикл по времени жизни колонии от  $t = 1$  до  $t_{\max}$ .

6.1. Создаем цикл обхода всех муравьев колонии от  $k = 1$  до  $k = m$ . Строим путь  $T_k(t)$  и рассчитываем длину  $L_k(t)$ . Вероятность перехода муравья  $k$  в город  $i$  из города  $j$  определяется формулой

$$P_{ij,k} = \begin{cases} \tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t) / \sum_{j \in J_{ik}} \tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t), \\ 0, \end{cases}$$

где  $j \in J_{ik}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  задают значимость уровня феромона и видимости города при выборе следующего города. При  $\alpha = 0$  будет выбран ближайший город, что соответствует жадному алгоритму. Если  $\beta = 0$ , тогда работает лишь феромонное усиление, что влечет за собой быстрое вырождение маршрутов к одному субоптимальному решению.

6.2. Конец цикла обхода всех муравьев.

6.3. Проверка каждого полученного значения  $L_k(t)$  на лучший маршрут по сравнению с  $L^*$ .

6.4. Если  $L_k(t)$  лучше, чем  $L^*$ , обновить  $L^*$  и  $T^*$ .

6.5. Создаем цикл обхода всех ребер графа. Обновляем  $\tau_{i,j}$  согласно правилам:

$$\Delta\tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, (i,j) \in T_k(t), \\ 0; \end{cases}$$

где  $\tau_{ij}$  — количество феромона на ребре  $(i, j)$ ;  $\eta_{i,j} = 1/D_{ij}$ , где  $D_{ij}$  — длина ребра  $(i, j)$ ,  $J_{ik}$  — список городов, которые необходимо посетить муравью  $k$ , находящемуся в вершине  $i$ . Здесь  $T_k(t)$  — маршрут, пройденный муравьем  $k$  на итерации  $t$ ,  $L_k(t)$  — длина этого маршрута,  $Q$  — некоторый регулируемый параметр. Правило обновления феромона:

$$\tau_{ij,k}(t+1) = (1-p)\tau_{ij,k}(t) + \Delta\tau_{ij,k}(t),$$

где  $\Delta\tau_{ij,k}(t) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij,k}(t)$ ,  $m$  — число муравьев,  $p$  —

регулируемый параметр испарения феромона, принадлежащий отрезку  $[0, 1]$ .

6.6. Конец цикла по ребрам.

7. Конец цикла по времени жизни колонии.

8. Передать на вывод кратчайший маршрут  $T^*$  и его длину  $L^*$ .

Для рассмотрения алгоритма пчелиного роя [23, 24] введем обозначения:  $s$  — число пчел-разведчиков;  $m$  — число выбранных точек (решений) для дальнейшего исследования,  $m < s$ ;  $e$  — число лучших (элитных) точек,  $e < m$ ;  $s_e$  — число пчел для более полного исследования  $e$  элитных решений;  $s_m$  — число пчел для более полного исследования оставшихся  $m - e$  выбранных решений;  $\Delta$  — размер окрестности, в которой пчелы выполняют более тщательный поиск. Алгоритм пчелиного роя состоит в выполнении следующих шагов.

1. Случайно формируется  $s$  решений, каждое из которых представляет собой одну пчелу-разведчика.

2. Выбрать лучшие  $m$  из этих решений и провести локальный поиск, для этого в их  $\Delta$ -окрестности рассматриваются  $r$  случайных точек ( $r = s_e$  или  $r = s_m$  в зависимости от элитности данной точки), из которых отбирается лучшая.

3. Оставшиеся  $s - m$  решений отбрасываются и заменяются на случайные точки из пространства решений.

4. Алгоритм останавливается, когда выполняется некое условие останова (достигнута необходимая точность, исчерпано число итераций и др.).

Метод имитации отжига [25] основан на идее поведения материального тела при отвердевании, когда применяется процедура отжига, во время которой температура последовательно понижается до нуля. В ходе «отжига» металл сначала нагревают до некоторой температуры, из-за чего атомы покидают позиции в кристаллической решетке. Затем начинается медленное и контролируемое охлаждение. Атомы стремятся попасть в состояние с меньшей энергией, однако с определенной веро-

ятностью они могут перейти и в состояние с большей. Эта вероятность уменьшается вместе с температурой. Переход в худшее состояние помогает атомам отыскать состояние с энергией, меньшей, чем начальная. Процесс завершается, когда температура падает до заранее заданного значения. В задаче ДО минимизация энергии представляется как целевая функция, где  $S$  — множество всех состояний — решений задачи,  $s_i$  — состояние на  $i$ -м шаге,  $t_i$  — температура на  $i$ -м шаге. Алгоритм имитаций отжига формулируется так.

1. Инициализируем граф  $G$  (например, вводим матрицу расстояний  $D$ ).

2. Задаем параметры  $T_s$  и  $T_f$ .

3. Задаем произвольное начальное состояние  $S$  и считаем энергию для этого состояния  $E$  по формуле

$$E = \sum_{i \in S, i \neq n} w(i, i+1) + w(n, 0),$$

где  $w(i, j)$  — расстояние от вершины  $i$  до вершины  $j$ .

4. Создаем лучшее состояние  $S^*$  с энергией  $E^*$ .

5. Инициализируем цикл «остывания» до тех пор, пока  $T > T_f$ .

5.1. Случайным образом генерируем новое состояние-кандидат  $CS$ , считаем его энергию  $CE$ .

5.2. Сравниваем  $CE$  с  $E$ .

5.2.1. Если  $CE > E$ , то переходим в состояние-кандидат и делаем его текущим, т. е.  $E = CE$ ;  $S = CS$ .

5.2.2. Если  $CE < E$ , то переходим в это состояние с вероятностью  $P$ , вычисленной по формуле  $P_i = \exp(-\Delta E/T_i)$  где  $\Delta E = CE - E$ .

5.3. Сравниваем энергию текущего состояния  $E$  с энергией лучшего состояния  $E^*$ . Если  $E < E^*$ , то заменяем лучшее состояние на текущее, т. е.  $E^* = E$ ;  $S^* = S$ .

5.4. Изменяем  $T$  по правилу  $T_{i+1} = 0,1 T_i/i$ , где  $T_0 = T_s$ .

6. Конец цикла «остывания».

7. Выводим значение лучшей энергии  $E^*$  и соответствующего состояния  $S^*$ .

В алгоритме приняты обозначения:  $T_s$  — начальная температура;  $T_f$  — конечная температура; предполагается, что граф  $G$  полносвязный.

#### 4. МОДИФИКАЦИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Генетический алгоритм основан на идее естественного отбора. В общем виде он формулируется следующим образом.

1. Создание начальной популяции.

2. Скрещивание и/или мутация.

3. Отбор.

4. Формирование нового поколения.

4.1. Если результат не достигнут — переход к п. 2.

4.2. В противном случае текущая популяция является результирующей.

Рассмотрим модификацию генетического алгоритма для решения многоагентной задачи коммивояжера, в котором исходный граф разбивается на  $m$  кластеров и для каждого кластера решается обычная задача коммивояжера. Предложенный подход включает создание популяции из хромосом длины  $n + m$ , где  $n$  вершин представлены в виде перестановки чисел от 1 до  $n$ . Перестановка поделена на  $m$  подмаршрутов при помощи добавления  $m$  положительных чисел (от 1 до  $m$ ) для отличия одного коммивояжера от другого. Пусть  $m_i$  отвечает числу вершин, пройденных  $i$ -м коммивояжером, тогда, согласно условию задачи,  $K \leq m_i \leq L$ .

Один из лучших кроссоверов в смысле скорости и качества — это двухточечный кроссовер. Предлагаемая модификация кроссовера состоит в том, что случайно выбранные точки разделяют родительские строки на левые и правые подстроки и выбираются родительские правые — правила выбора подстрок. Далее процесс такой же, как и для двухточечного кроссовера, отличие состоит в том, что вместо выбора случайных нескольких позиций в родительском маршруте выбраны все позиции справа от случайно выбранной точки пересечения. В данном алгоритме может быть использован один из двух видов мутации: либо оператор выбирает две случайные точки (разрезающие точки) в строке и меняет их местами, либо реализуется возможность реверсирования всех точек, которые находятся между разрезающими точками. Данный подход обуславливает нахождение лучшего решения по сравнению с применением генетического, «жадного» или алгоритма муравьиной колонии для решения обычной задачи коммивояжера для каждого кластера графа, как следует из статьи [26]. В работе [27] показано, что снижение размерности задачи маршрутизации в прикладной теории сетей связывается с предобработкой доступных данных о сети, а также с использованием особенностей взвешенных графов для более быстрого определения их характеристик (центр, радиус, диаметр и др.).

**Утверждение 2.** *Снижение сложности вычислений в построении рациональных приближенных решений задач MTSP (многих коммивояжеров) на сложных сетях большой размерности может быть достигнуто по схеме:*

— на первом этапе решается задача распределения сети между коммивояжерами с помощью кластеризации (декомпозиции);

— на втором этапе решаются задачи коммивояжера на каждом кластере с помощью метаэвристики;

— в зависимости от полученного результата уточняются границы используемых кластеров;

— в дальнейшем агенты-коммивояжеры могут обучаться и быть автономными.

Пусть найдено разбиение исходного графа сети на подграфы, и задача построения маршрута коммивояжера решается на сети меньшей размерности. В качестве исходных данных выбрана база тестовых примеров для задачи коммивояжера, взятых из Национальных агентств изображений и картографии разных стран<sup>2</sup>. Каждый блок данных содержит в себе список двумерных координат. С помощью этого списка можно построить решение своими методами и сравнить с оптимальным решением, которое также входит в состав тестового примера. На первом этапе было выбрано несколько тестовых примеров графов небольшой размерности, соответствующих кластеру сложной сети — dj38, eil51 и qa194, d493, vm1084 с 38, 51 и 194, 493, 1084 вершинами соответственно. Затем проведен численный эксперимент с помощью реализованных алгоритмов.

Результаты приведены в таблице. Предварительно получено, что алгоритм муравьиной колонии нуждается в доработке, в то время как алгоритм имитации отжига дает хорошее приближение к оптимальному решению. Результаты по гибридным алгоритмам показывают возможность оптимизационной комбинации базовых алгоритмов.

Для иллюстрации на рис. 2 (см. третью стр. обложки) приведены решения задачи MTSP для двух и пяти коммивояжеров. Для сети из 1084 вершин начальное приближение, кластеризация и улучшение решения аналогичны представленным на рис. 1.

Подчеркнем, что в рамках разрабатываемой интеллектуализированной МАС, которая ориентирована на кластеризацию задачи (ее декомпозицию) и дальнейшее распараллеливание, обладание более точной дополнительной информацией о сети и задаче позволит подключать композицию алгоритмов, наиболее подходящих для конкретного случая.

В реализации алгоритмов использовались возможности объектно-ориентированного программирования, которые представляет Python. В реализации используется модуль tslib95<sup>3</sup> для импорта данных задачи коммивояжера из файлов. Эта библиотека содержит множество функций по предобработке данных [4]. Эксперимент с параллельными вычислениями на данном этапе показал, что

### Работа приближенных алгоритмов

Алгоритм	Граф					
	dj38		eil51		qa194	
	Длина пути	Время, мс	Длина пути	Время, мс	Длина пути	Время, мс
Муравьиный	7451	223	572	328	11 657	23 147
Генетический	7895	156	559	117	1164	10 938
Гибридный	7115	263	498	448	29 234	10 506
Имитация отжига	7158	15	441	20	10 506	69
Пчелиной колонии	6656	21	439	26	11 695	645

однопоточный вариант с ускорением Numba требует меньших затрат времени, чем модификация с параллельными вычислениями на потоках Python. Необходимо распараллеливание, которое предложено в работе [28] и использовалось в решении задач ДО.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен класс задач маршрутизации — многоагентные задачи. Исследованы современные методы для их решения. Установлены лучшие алгоритмы для разных типов задач среди метаэвристических алгоритмов, основанных на реальных моделях. Модификация ГА, муравьиной колонии, пчелиного роя, имитации отжига для MTSP зависит от сложности сети. Постановка MTSP в виде задач псевдодулевой оптимизации позволяет включать различные ограничения и предписания в виде ДНФ. На примере задачи маршрутизации в сложных условиях для Ялты показана реализация методологии, основанной на преобразовании сложной сети к сети, для которой уже применимы быстрые алгоритмы (например, полиномиальной сложности). Управляемое и согласованное с MTSP разбиение сети может применяться в МАС MTSP. Показана эффективность методов решения задачи многоагентной задачи коммивояжера, однако для решения разреженных задач маршрутизации представляет интерес распараллеливание, как это показано в статье [28]. В дальнейшем возможно распространение полученных результатов на нелинейные постановки по аналогии с работами [29, 30].

*Авторы выражают признательность рецензенту за замечания и рекомендации, которые привели к повышению качества представления материалов исследования.*

<sup>2</sup> <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/countries.html>.

<sup>3</sup> TSPLB 95 documentation. <https://tsplib95.readthedocs.io/en/stable/index.htm>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шербина О.А., Лемтюжникова Д.В., Цурков В.И. Многомерные задачи с квазиблочными матрицами. — М.: Физматлит, 2018. — 256 с. [Shcherbina, O.A., Lemtyuzhnikova, D.V., Tsurkov, V.I. *Mnogomernye zadachi s kvaziblochnymi matritsami*. — М.: Физматлит, 2018. — 256 s. (In Russian)]
2. Kovkov, D.V., Lemtyuzhnikova, D.V. Decomposition in Multi-dimensional Boolean-Optimization Problems with Sparse Matrices / J. Computer and Systems Sciences International. — 2018. — Vol. 57, no. 1. — P. 97–108.
3. Tsurkov, V.I. Decomposition Principle for Block-separable Systems // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1979. — Vol. 246, no. 1. — P. 27–31.
4. Германчук М.С. Использование дополнительной информации в задачах дискретной оптимизации типа многих коммивояжеров // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 4 (33). — С. 68–82. [Germanchuk, M.S. *Ispol'zovanie dopolnitel'noi informatsii v zadachakh diskretnoi optimizatsii tipa mnogikh kommivoyazherov* // Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki. — 2016. — № 4 (33). — S. 68–82. (In Russian)]
5. Шербина О.А. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор) / Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1. — С. 56–73. [Shcherbina, O.A. *Metaevristicheskie algoritmy dlya zadach kombinatornoj optimizatsii (obzor)* / Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki. — 2014. — № 1. — S. 56–73. (In Russian)]
6. Германчук М.С., Козлова М.Г., Лукьяненко В.А. Задачи дискретной оптимизации типа многих коммивояжеров // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 18-й Всероссийской конференции с международным участием. — Таганрог, 2017. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2017. — С. 48. [Germanchuk, M., Kozlova, M., Lukianenko, V. *The Problems of Discrete Optimization Such as Multiple Traveling Salesman Problem* // Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov: Tezisy dokladov 18-i Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. — Taganrog, 2017. — М.: TORUS PRESS, 2017. — S. 48. (In Russian)]
7. Германчук М.С., Козлова М.Г., Пивовар А.Е. Многоагентный подход к решению задачи коммивояжера // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО—2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В.А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2017. — С. 114–119. [Germanchuk, M.S., Kozlova, M.G., Pivovar, A.E. *Solving the Multiple Traveling Salesman Problem* // Matematika, informatika, komp'yuternye nauki, modelirovanie, obrazovanie: sbornik nauchnykh trudov nauchno-prakticheskoi konferentsii MIKMO—2017 i Tavrisheskoi nauchnoi konferentsii studentov i molodykh spetsialistov po matematike i informatike / Pod red. V.A. Luk'yanenko. — Simferopol': IP Kornienko, A.A., 2017. — S. 114–119. (In Russian)]
8. Poli, R. Analysis of the Publications of the Applications of Particle Swarm Optimization // Hindawi Publishing Corporation Journal of Artificial Evolution and Applications. — URL: <https://www.hindawi.com/journals/jaea/2008/685175/> <https://doi.org/10.1155/2008/685175>.
9. Jungbluth, M., Thiele, J., Winter, Y., et al. Vertebrate Pollinators: Phase Transition in a Time-Dependent Generalized Traveling-Salesperson Problem // arXiv preprint arXiv: 1803.08015. 2018.
10. Shah-Hosseini, H. Intelligent Water Drops Algorithm: A New Optimization Method for Solving the Multiple Knapsack Problem // International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics. — 2008. — Vol. 1, no. 2. — P. 193–212. URL: <https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/17563780810874717/full/html>.
11. Zhou, H., Song, M., Pedrycz, W. A Comparative Study of Improved GA and PSO in Solving Multiple Traveling Salesmen Problem // Applied Soft Computing. — 2018. — Vol. 64. — P. 564–580.
12. Singh, D.R., Singh, M.K., Singh, T., et al. Genetic Algorithm for Solving Multiple Traveling Salesmen Problem Using a New Crossover and Population Generation // Computación y Sistemas. — 2018. — Vol. 22, no. 2. — P. 491–503.
13. Venkatesh, P., Singh, A. Two Metaheuristic Approaches for the Multiple Traveling Salesperson Problem // Applied Soft Computing. — 2015. — Vol. 26. — P. 74–89.
14. Lo, K.M., Yi, W.Y., Wong, P.K., et al. A Genetic Algorithm with New Local Operators for Multiple Traveling Salesman Problems // International J. Computational Intelligence Systems. — 2018. — Vol. 11, no. 1. — P. 692–705.
15. Harrath, Y., Salman, A.F., Alqaddoumi, A., et al. A Novel Hybrid Approach for Solving the Multiple Traveling Salesmen Problem // Arab J. Basic and Applied Sciences. — 2019. — Vol. 26, no. 1. — P. 103–112.
16. Shokouhi, R.A., Farahnaz, M., Hengameh, K., Hosseinabadi, A.R. Solving Multiple Traveling Salesman Problem using the Gravitational Emulation Local Search Algorithm // Applied Mathematics & Information Sciences. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 699–709.
17. Huizing, D. Solving the mTSP for fresh food delivery / Report on behalf of the Delft Institute of Applied Mathematics. — Delft, Netherlands, 2015. — URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A8af405cc-bdd1-46c0-a790-a66471leadb3f>.
18. Othman, A., Mouhssine, R., Ezziyyani, M., et al. An Effective Parallel Approach to Solve Multiple Traveling Salesmen Problem // Intern. Conf. on Advanced Intelligent Systems for Sustainable Development. — Cham: Springer, 2018. — P. 647–664.
19. Necula, R., Raschip, M., Breaban, M. Balancing the Subtours for Multiple TSP Approached with ACS: Clustering-based Approaches vs. MinMax Formulation // EVOLVE-A Bridge between Probability, Set Oriented Numerics, and Evolutionary Computation VI. — Cham: Springer, 2018. — P. 210–223.
20. Kara, I., Bektas, T. Integer Linear Programming Formulations of Multiple Salesman Problems and its Variations // European J. Operational Research. — 2006. — Vol. 174. — P. 1449–1458.
21. Макаров О.О., Германчук М.С. Разработка алгоритмов маршрутизации в сложных сетях // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО—2018 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В.А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018. — Вып. 2. — С. 127–135. [Makarov, O.O., Germanchuk, M.S. *Razrabotka algoritmov marshrutizatsii v slozhnykh setyakh* // Matematika, informatika, komp'yuternye nauki, modelirovanie, obrazovanie: sbornik nauchnykh trudov nauchno-prakticheskoi konferentsii MIKMO—2018 i Tavrisheskoi nauchnoi konferentsii studentov i molodykh spetsialistov po matematike i informatike / Pod red. V.A. Luk'yanenko. — Simferopol': IP Kornienko A.A., 2018. — Vyp. 2. — С. 127–135. (In Russian)]
22. Dorigo, M., Stutzle, T. Ant Colony Optimization. — Cambridge: Bradford Book. — 2004.
23. Зайцев А.А., Курейчик В.В., Полупанов А.А. Обзор эволюционных методов оптимизации на основе роевого интеллекта // Известия Южного федерального университета. Технические науки. — 2010. — № 12 (113). — С. 7–12. [Zaitsev, A.A., Kureychik, V.V., Polupanov, A.A. *Review of evolutionary optimization methods based on swarm intelligence* // Proceedings of the southern Federal University. Technical Sciences. — 2010. — № 12 (113). — P. 7–12. (In Russian)]
24. Karaboga, D., Akay, B. A Survey: Algorithms Simulating Bee Swarm Intelligence // Artificial Intelligence Review. — 2009. — Vol. 31, no. 1–4. — P. 61–85.
25. Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, M.P. Optimization by Simulated Annealing // Science. — 1983. — Vol. 220, no. 4598. — P. 671–680.
26. Carter, A.E., Ragsdale, C.T. A New Approach to Solving the Multiple Traveling Salesperson Problem Using Genetic Algo-



- rithms // *Europ. J. Operational Research.* — 2006. — Vol. 175. — P. 246–257.
27. *Ураков А.Р., Тимеряев Т.В.* Использование особенностей взвешенных графов для более быстрого определения их характеристик // *Прикладная Дискретная Математика.* — 2012. — № 2 (16). — С. 95–99. [*Uraikov, A.R., Timeryaev, T.V.* Using Weighted Graphs Features for Fast Searching Their Parameters // *Prikladnaya Diskretnaya Matematika.* — 2012. — No. 2 (16). — P. 95–99. (In Russian)]
28. *Voloshinov, V.V., Lemtyuzhnikova, D.V., Tsurkov, V.I.* Grid Parallelizing of Discrete Optimization Problems with Quasi-Block Structure Matrices / *J. Computer and Systems Sciences International.* — 2017. — Vol. 56, no. 6. — P. 930–936.
29. *Миронов А.А., Федорчук В.В., Цурков В.И.* Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями. II // *Изв. РАН. ТиСУ.* — 2005. — No. 5. — С. 66–86. [*Mironov, A.A., Fedorchuk, V.V., Tsurkov, V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints: II // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* — 2005. — Vol. 44, no 5. — P. 732–752.]
30. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями. I // *Изв. РАН. ТиСУ.* — 2003. — No. 4. — С. 69–81. [*Mironov, A.A., Tsurkov, V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints: I // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* — 2003. — Vol. 42, no 4. — P. 562–574.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 29.01.2020, после доработки 4.08.2020.  
Принята к публикации 4.09.2020.

**Германчук Мария Сергеевна** — ассистент, Крымский Федеральный Университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, ✉ m.german4uk@yandex.ru,

**Лемтюжникова Дарья Владимировна** — канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва; доцент, Московский авиационный институт, ✉ darabbt@gmail.com,

**Лукьяненко Владимир Андреевич** — канд. физ.-мат. наук, Крымский Федеральный Университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, ✉ art-inf@yandex.ru.

## METAHEURISTIC ALGORITHMS FOR MULTI-AGENT ROUTING PROBLEMS

M.S. Germanchuk<sup>1</sup>, D.V. Lemtyuzhnikova<sup>2,3</sup>, V.A. Lukianenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Republic of Crimea

<sup>2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow Russia

<sup>3</sup>Moscow Aviation Institute

✉ m.german4uk@yandex.ru, ✉ darabbt@gmail.com, ✉ art-inf@yandex.ru

**Abstract.** The problems of constructing routes in complex networks by many sales agents are considered. Formalization leads to problems of pseudo-Boolean discrete optimization with restrictions that take into account the specifics of route construction. The sparsity of the constraint matrix makes it possible to apply decomposition approaches and network clustering. The development of approximate algorithms for selecting routes in complex networks involves taking into account the properties of the network structure, its complexity, the presence of restrictions, regulations, reachability conditions, and the number of sales agents. It is shown that the solution of routing problems can be based on the application of a multi-agent approach in combination with clustering (decomposition) of the original problem and metaheuristics. Multi-agent systems with swarm intelligence are used to solve complex discrete optimization problems that cannot be effectively solved by classical algorithms. The agent model for a complex network of problems like many traveling salesmen becomes an intellectualized system that defines heuristic algorithms for finding the optimal solution by reactive agents (that follow the rules laid down in them). The compositions of the algorithms described in detail, which have proven themselves well in computational experiments, are used; those are modification of the genetic algorithm, ant colony optimization, artificial bee colony algorithm, simulated annealing. A generalized algorithm is proposed and implemented, in which a simpler network (a flyover network) is matched to the source network. In this case, a numerical experiment was performed for the problem of routing on a GIS map for urban infrastructure. Clustering algorithms are implemented, in which the initially traversed routes are refined using 2-opt algorithms, simulated annealing, and other metaheuristics. A comparison of the algorithms used and an illustration of their operation are given.

**Keywords:** metaheuristic algorithms, multi-agent optimization problems, discrete optimization, pseudo-Boolean problems.

**Funding.** The work was performed with financial support of the Russian Foundation of Basic Research (grant no. 18-31-00458, no. 20-58-S52006).

**Acknowledgments.** The authors express their appreciation to the reviewer for his comments and recommendations which led to a better quality of representing the research contents.

# АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С РЕГУЛЯТОРАМИ, ГАРАНТИРУЮЩИМИ ЗАДАННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ<sup>1</sup>

В.Н. Честнов

**Аннотация.** Рассмотрены линейные многомерные следящие системы, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности, в частности, минимизируют  $H_\infty$  норму передаточной матрицы замкнутой системы, связывающей вектор задающих воздействий с вектором регулируемых переменных. В качестве показателя качества системы рассмотрена совокупность индивидуальных показателей колебательности для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -й регулируемой переменной, которые представляют большой практический интерес для инженеров-проектировщиков автоматических систем. На основе многомерного кругового критерия абсолютной устойчивости доказана устойчивость в целом замкнутой системы при введении в контур управления на выходе объекта нестационарных секторных нелинейностей. Установлена связь достигнутого при синтезе значения показателя колебательности с размером сектора, ограничивающего характеристики допустимых нелинейностей. Этот результат работы имеет достаточный характер. Доказана связь между индивидуальным показателем колебательности и поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта.

**Ключевые слова:** линейные многомерные системы, показатель колебательности, годограф Найквиста, секторные нестационарные нелинейности, абсолютная устойчивость.

## ВВЕДЕНИЕ

Как правило, в практических приложениях для синтеза регулятора применяется линейная модель объекта управления, полученная путем линеаризации исходных уравнений объекта, которые зачастую нелинейные [1]. Поэтому после синтеза регулятора возникает естественный вопрос о применимости такого линейного регулятора в реальных условиях, когда объект управления нелинейный. Одним из возможных ответов на такой вопрос представляется теоретическое исследование абсолютной устойчивости синтезируемых систем, когда по физическому входу (или выходу) объекта

вводятся нелинейности, характеристики которых принадлежат некоторому сектору. Чем шире размер этого сектора, тем более широкий класс нелинейностей допускает контур управления без потери свойства асимптотической устойчивости при произвольных начальных условиях как объекта управления, так и регулятора. Это обстоятельство повышает уверенность инженера-проектировщика в работоспособности регулятора в реальных условиях на практике.

Многомерная линейная система характеризуется совокупностью индивидуальных показателей колебательности для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие с  $i$ -й регулируемой переменной, которые представляют большой практический интерес для инженеров-проектировщиков автоматических систем. В работе установлена связь между достигнутым значением индивидуального показателя колебательности и

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08-01067).



поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта управления, что также представляет несомненный практический интерес.

Настоящая работа посвящена исследованию абсолютной устойчивости систем, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности в качестве одного из инженерных показателей качества следящих систем как в одномерном [2], так и в многомерном случае. Заметим, что аппарат  $H_\infty$ -теории оптимизации оказался исключительно удобным для решения задач синтеза регуляторов такого рода.

Здесь необходимо подчеркнуть выдающийся вклад отечественных ученых в решение задачи об абсолютной устойчивости автоматических систем [1, 3]: от постановки задачи (А.И. Лурье, В.Н. Постников) до разработки частотных критериев абсолютной устойчивости (квадратичный критерий В.А. Якубовича), имеющих большое практическое значение. В настоящей работе применяется многомерный круговой критерий абсолютной устойчивости В.А. Якубовича [4] как следствие его квадратичного критерия.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z = Cx, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$  — вектор состояния объекта;  $u \in R^m$  — вектор управлений;  $z \in R^{m_1}$  — вектор регулируемых переменных, а тройка числовых матриц  $A, B, C$  задана.

Пусть объект (1) замкнут стабилизирующим регулятором по измеряемому выходу

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c \varepsilon, \quad u = C_c x_c + D_c \varepsilon, \quad \varepsilon = g - z, \quad (2)$$

где  $x_c \in R^{n_c}$  — вектор состояния регулятора ( $n_c \leq n$ ),  $g \in R^{m_1}$  — вектор задающих воздействий,  $\varepsilon \in R^{m_1}$  — вектор ошибок слежения, доступный измерению,  $A_c, B_c, C_c, D_c$  — матрицы чисел.

Передаточная матрица замкнутой системы (1), (2) от задающего сигнала  $g$  к регулируемым переменным  $z$  имеет вид:

$$T(s) = W(s)[I + W(s)]^{-1}, \quad W(s) = W_0(s)K(s), \quad (3)$$

где  $W(s) = W_0(s)K(s)$  — передаточная матрица системы (1), (2), разомкнутой по выходу объекта (пе-

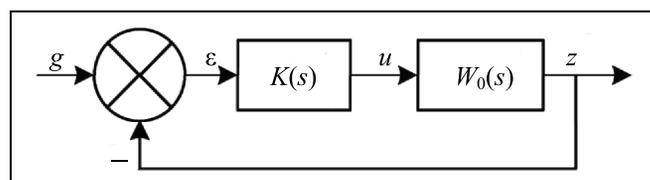


Рис. 1. Структурная схема замкнутой линейной системы

ременной  $z$  или  $\varepsilon$ ). Здесь  $W_0(s)$  и  $K(s)$  — передаточные матрицы объекта (1) и регулятора (2) соответственно:

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c, \quad (4)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующего размера,  $s$  — комплексная переменная преобразования Лапласа.

Структурная схема замкнутой системы (1), (2) с передаточными матрицами (4) приведена на рис. 1.

Пусть регулятор (2) разрешает задачу  $H_\infty$ -оптимизации

$$\|T\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow T^T(-j\omega)T(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (5)$$

где  $\gamma$  — заданное или минимизируемое число.

Тогда, как показано ниже, совокупность индивидуальных показателей колебательности  $M_i$  для  $i$ -го замкнутого контура, связывающего  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , удовлетворяет условию

$$M_i \leq \gamma, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — значение, реализовавшееся при решении задачи (5).

Введем в контур управления, изображенный на рис. 1, по регулируемому выходу объекта  $z$  (или по ошибкам слежения  $\varepsilon$ ) векторную нестационарную нелинейность  $\varphi(t, z) = [\varphi_1(t, z_1), \varphi_2(t, z_2), \dots, \varphi_{m_1}(t, z_{m_1})]^T \in R^{m_1}$ , элементы которой удовлетворяют секторным условиям

$$\alpha \leq \varphi_i(t, z_i)/z_i \leq \beta, \quad \varphi_i(t, 0) = 0, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

где  $\alpha < 1$  и  $\beta > 1$  — нижняя и верхняя границы сектора.

Структурная схема системы для исследования абсолютной устойчивости приведена на рис. 2.

Здесь  $W(p)$  — операторная передаточная матрица линейной части системы, совпадающая с  $W(s)$  из выражения (3) с точностью до замены аргумента  $s$  на символ дифференцирования  $p = d/dt$ .

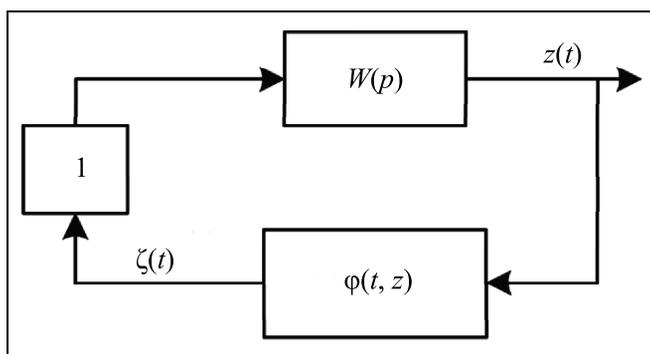


Рис. 2. Структурная схема замкнутой нелинейной системы

Структурная схема, изображенная на рис. 2, описывается уравнениями

$$z = -W(p)\zeta, \quad \zeta = \varphi(t, z). \quad (8)$$

Заметим, что в отсутствие нелинейностей, когда второе соотношение имеет вид  $\zeta = z$ , уравнения (8) описывают структурную схему линейной системы, изображенной на рис. 1, которая по построению регулятора (2) из условия (5) асимптотически устойчива.

**Задача.** Найти границы  $\alpha$  и  $\beta$  секторных нелинейностей (7), при которых нелинейная система (8) с регулятором (2), построенным исходя из целевого условия (5), была бы абсолютно устойчивой для всех нестационарных нелинейностей из класса (7).

## 2. ЧАСТОТНЫЙ ПОХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Прежде чем переходить к изложению общего результата работы, предварительно остановимся сначала на более простом случае, когда единственная нелинейность из класса (7) вводится исключительно только по одному  $i$ -му выходу объекта  $z_i$ , что позволит предугадать общий результат.

Обозначим  $i$ -й диагональный элемент  $T(s)$  как  $t_i(s)$ . Эта передаточная функция  $t_i(s)$  связывает  $i$ -е задающее воздействие  $g_i$  с  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ . Пусть  $w_i(s)$  — передаточная функция разомкнутой системы по  $i$ -й регулируемой переменной  $z_i$ , которая получается замыканием всех обратных связей по выходу  $z$  кроме  $i$ -й, т. е. переменной  $z_i$ . Структурная схема, поясняющая это, имеет классический вид и показана на рис. 3.

Связь данных передаточных функций также описывается классическим соотношением

$$t_i(s) = \frac{w_i(s)}{1 + w_i(s)}. \quad (9)$$

Заметим, что в силу выражения (5) подобное неравенство будет выполняться и для любого элемента матрицы  $T(s)$ , в частности, для любого диагонального [5, 6]

$$\|t_i\|_\infty = \sup_\omega |t_i(j\omega)| \leq \gamma, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует условие (6), если учесть, что по определению  $M_i = \|t_i\|_\infty$ .

Таким образом, значение  $\gamma$ , реализовавшееся при решении задачи (5), определяет и индивидуальный показатель колебательности  $M_i$ .

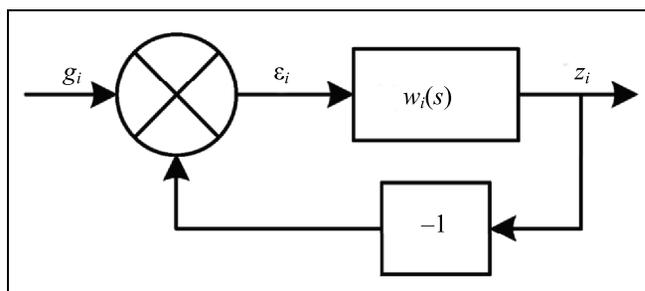
Теперь в силу выражений (9), (10), повторяя выкладки, содержащиеся в работе [7], при получении геометрической интерпретации классического показателя колебательности, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение условия (5). Тогда годограф Найквиста передаточной функции  $w_i(j\omega)$  разомкнутой системы по  $i$ -му выходу объекта не пересекает круга радиусом  $R = \gamma/(\gamma^2 - 1)$  с центром в точке  $(-C, j0)$  на плоскости годографа, где  $C = \gamma^2/(\gamma^2 - 1)$ .

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент усиления в замкнутом контуре, изображенном на рис. 3, без потери устойчивости можно изменять от 1 в интервале  $((\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma)$ . Заметим также, что геометрическая интерпретация поведения годографа Найквиста передаточной функции  $w_i(j\omega)$  теоремы 1 соответствует требованию кругового критерия абсолютной устойчивости [3, 4], когда секторная нелинейность из класса (7) вводится лишь по  $i$ -му выходу объекта  $z_i$  на рис. 3. Тогда приходим к следующему результату.

**Теорема 2.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение строгого неравенства (5). Тогда нелинейная система (11) будет абсолютно устойчивой для нестационарной нелинейности из класса (7), где  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ , а  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$

$$z_i = -w_i(p)\zeta_i, \quad \zeta_i = \varphi_i(t, z). \quad (11)$$


 Рис. 3. Система с  $i$ -й обратной связью



Заметим, что здесь нижние и верхние границы секторной нелинейности из класса (7) совпадают с границами возможных значений стационарного коэффициента усиления, вводимого в контур управления, изображенный на рис. 3, без потери устойчивости. Кроме того, если нелинейность  $\varphi_i(t, z_i) = k_i(t)z_i$  представляет собой просто линейный нестационарный коэффициент усиления  $k_i(t)$ , то такая линейная нестационарная система (11) будет асимптотически устойчивой при произвольном изменении во времени этого коэффициента в том же интервале  $[(\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma]$ . Подобный более общий результат справедлив, если в каждый контур управления по выходу объекта  $z$  вводятся нелинейности из класса (7), как показано на рис. 2. Для получения этого результата мы привлечем многомерный круговой критерий абсолютной устойчивости, сформулированный в работе [4].

Рассмотрим нелинейную систему (8) с нелинейностями из класса (7). Система (1), (2) с регулятором (2), найденным из условия (5), асимптотически устойчива. Это означает, что требование минимальной устойчивости кругового критерия выполнено (структурная схема представленной на рис. 1 устойчивой линейной системы эквивалентна нелинейной системе, представленной на рис. 2, в отсутствие нелинейностей, когда  $\zeta = z$ ). Кроме того, предположим, что ни объект, ни регулятор не имеют чисто мнимых полюсов (это требование можно ослабить).

В соответствии с круговым критерием для абсолютной устойчивости системы (8) на всех вещественных частотах  $\omega$  должно выполняться матричное частотное неравенство [4]

$$\operatorname{Re}\{[I + \alpha W(-j\omega)]^T \tau [I + \beta W(j\omega)]\} > 0, \\ \omega \in (-\infty, \infty),$$

где  $\operatorname{Re} Y(j\omega) = [Y^T(-j\omega) + Y(j\omega)]/2$  — эрмитова часть комплексной матрицы  $Y$ . Здесь  $\tau$  — диагональная положительно определенная матрица. Рассмотрим это неравенство при  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ ,  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$  и  $\tau = I$ , что дает выражение

$$\operatorname{Re}\{[I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] - \\ - \frac{1}{\gamma^2} W^T(-j\omega) W(j\omega) + V(j\omega)\} > 0, \quad \omega \in (-\infty, \infty),$$

где косоэрмитова матрица  $V(j\omega) = \frac{1}{\gamma} [W(j\omega) - W^T(-j\omega)]$  удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} V(j\omega) = 0$ . С учетом этого, придем к неравенству

$$[I + W(-j\omega)]^T [I + W(j\omega)] > \frac{1}{\gamma^2} W^T(-j\omega) W(j\omega), \\ \omega \in (-\infty, \infty), \quad (12)$$

выполнение которого для неотрицательных частот, в силу его симметрии, ведет к его выполнению и для отрицательных частот. Покажем теперь, что неравенство (12) эквивалентно строгому целевому неравенству (5). Для этого преобразуем второе строгое неравенство (5) с учетом выражения (3). Учитывая, что в силу связи (3)

$$T^T(-j\omega) = [I + W^T(-j\omega)]^{-1} W^T(-j\omega).$$

Получим

$$T^T(-j\omega) T(j\omega) = [I + W^T(-j\omega)]^{-1} W^T(-j\omega) \times \\ \times W(j\omega) [I + W(j\omega)]^{-1} < \gamma^2 I.$$

А последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$W^T(-j\omega) W(j\omega) < \gamma^2 [I + W^T(-j\omega)] [I + W(j\omega)],$$

которое, очевидно, совпадает с неравенством (12). Таким образом, доказана

**Теорема 3.** Пусть регулятор (2) обеспечивает выполнение строгого неравенства (5). Тогда нелинейная система (8) будет абсолютно устойчивой для нестационарных нелинейностей из класса (7), где  $\alpha = (\gamma - 1)/\gamma$ , а  $\beta = (\gamma + 1)/\gamma$ .

Очевидно, что теорема 2 есть простое следствие доказанной теоремы 3.

Заметим, что если нелинейности  $\varphi_i(t, z_i) = k_i(t)z_i$ ,  $i = \overline{1, m_1}$ , представляют собой просто линейные нестационарные коэффициенты усиления  $k_i(t)$ , то такая линейная нестационарная система (8) будет асимптотически устойчивой при произвольном и независимом изменении во времени этих коэффициентов в том же интервале  $[(\gamma - 1)/\gamma, (\gamma + 1)/\gamma]$ .

В случае систем с одним входом и выходом  $m_1 = m$ , очевидно, имеет место утверждение, аналогичное теореме 2, при этом нелинейная характеристика может вводиться как по входу объекта, так и по его выходу.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование абсолютной устойчивости многомерных систем, регуляторы которых обеспечивают заданные или достижимые индивидуальные показатели колебательности в качестве одного из инженерных показателей качества следящих систем.

Установлена связь достигнутого при синтезе значения показателя колебательности с размером сектора, ограничивающего характеристики допустимых нелинейностей. Полученные результаты опираются на многомерный круговой критерий

абсолютной устойчивости и поэтому имеют достаточный характер. Установлена связь между достигнутым значением индивидуального показателя колебательности и поведением годографа Найквиста системы, разомкнутой по соответствующему выходу объекта управления, что представляет несомненный практический интерес.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979. — 336 с. [Voronov, A.A. Ustoichivost', upravlyaemost', nablyudaemost'. — М.: Nauka, — 1979. — 336 s. (In Russian)]
2. Честнов В.Н., Шатов Д.В. Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и  $H_\infty$ -подходы // Проблемы управления. — 2019. — № 2. — С. 2—8. [Chestnov, V.N., Shatov, D.V. Design of given oscillation index scalar controllers: modal and  $H_\infty$ -approaches / Control Sciences. — 2019. — No. 2. — S. 2—8. (In Russian)]
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с. [Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. A.A. Krasovskogo. — М.: Nauka, 1987. — 712 s. (In Russian)]
4. Якубович В.А. Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматическо-

го управления (под ред. Р.А. Нелепина). — М.: Наука, 1975. — С. 74—180. [Yakubovich, V.A. Metody teorii absolutnoi ustoichivosti / Metody issledovaniya nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya (pod red. R.A. Nelepina). — М.: Nauka, 1975. — S. 74—180. (In Russian)]

5. The Control Handbook / Editor W.S. Levine. — N.Y.: IEEE Press, 1996. — 1548 p.
6. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе  $H_\infty$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 10. — С. 132—152. [Chestnov, V.N. Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on  $H_\infty$ -Optimization / Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, no. 10. — P. 1861—1877.]
7. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с. [Besekerskii, V.A., Popov, E.P. Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — М.: Nauka, 1975. — 768 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 20.02.2020, после доработки 03.09.2020.  
Принята к публикации 03.09.2020.

Честнов Владимир Николаевич — д-р техн. наук,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва, ✉ vnchest@yandex.ru.

## ABSOLUTE STABILITY OF SYSTEMS WITH CONTROLLERS THAT PROVIDE GIVEN OSCILLATION INDEX

V.N. Chestnov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ vnchest@yandex.ru

**Abstract.** Linear multivariable tracking systems are considered, which controllers provide given or achievable separate oscillation indices, in particular, they minimize  $H_\infty$  norm of the system closed loop transfer matrix that connects a vector of references with a vector of controlled variables. An aggregate of the separate oscillation indices for the  $i$ th closed loop connecting the  $i$ th reference signal with the  $i$ th controlled variable is considered as a performance index. Such an approach is of great practical interest for engineers that design automatic systems. Based on the multivariable circle criterion of absolute stability, it is proved that the closed loop system is stable in whole if non-stationary sector nonlinearities are entered in the control loop at the plant output. Relation between the oscillation index obtained during controller synthesis and the size of sector which bounds feasible nonlinearities characteristics is found. This result of the paper is sufficient. Relation between the separate oscillation index and the Nyquist plot of system with the break point at the corresponding plant output is proved.

**Keywords:** linear multivariable systems, oscillation index, Nyquist plot, sector non-stationary nonlinearities, absolute stability.

**Funding.** The work was performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research (grant No. 18-08-01067).

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПОБЕДЫ В БОЮ (СРАЖЕНИИ, ОПЕРАЦИИ)

В.В. Шумов

**Аннотация.** Выполнено статистическое исследование функций победы в бою, основанных на модели Г. Таллока, устанавливающей зависимость вероятности победы в бою (сражении, операции) от отношения боевых потенциалов сторон. Боевой потенциал определяется численностями боевых единиц сторон и учитывает их моральные и технологические характеристики. Параметр масштаба (по Г. Таллоку — параметр решительности) оценен на примере сражений XIX — начала XX в., по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны 1941—1945 гг., по данным о боестолкновениях пограничников с бандгруппами, а также на основе международной статистики о пиратских и разбойных актах на море. При проведении контртеррористических и специальных операций его значение мало, на тактическом уровне равно единице, на оперативном уровне примерно равно 2—4. Полученные статистические результаты не противоречат представлениям военной науки и искусства о планировании и ведении боевых действий. Функцию победы в бою (сражении, операции) целесообразно применять на этапе подготовки боя для обоснования потребного состава сил и средств для выполнения поставленных задач.

**Ключевые слова:** функция победы в бою, модель Таллока, оценка параметров, параметр масштаба, бой, сражение, операция.

### ВВЕДЕНИЕ

Поскольку существует два основных способа получения дохода (производительная и конфликтная деятельность), то им ставятся в соответствие производственные функции (Production function) и функции конкурса или конфликта (Contest Functions и Conflict Functions) [1]. Функции конфликта отличаются от производственных двумя особенностями. Первая из них состоит в том, что в качестве значений функций конфликта выступают вероятности победы, тогда как значения производственных функций — ожидаемый объем производства (детерминированный результат). Вторая особенность функций конфликта — в их антагонистичности: рост усилий первой стороны увеличивает ее шансы на успех, так же как и снижение усилий второй стороны.

Исторически первой производственной функцией является функция Кобба — Дугласа [2], устанавливающая степенную зависимость объема

выпуска продукции от затрат труда и капитала. Хотя первые модели боевых действий появились в начале XX в. [3, 4], в экономических исследованиях конфликтов акцент делается на вероятностные модели, описанные, в частности, в работах [5—9].

В общем случае функции конфликта (конкурса) по методу обоснования модели подразделяются на стохастические (теоретико-вероятностные) модели; модели, построенные на основе аксиом (предположений); конкурсные и аукционные модели, полученные на основе дизайна экономических механизмов (mechanism design); модели на основе агрегирования микроэкономических показателей (подмоделей) [10].

В настоящей работе представлен обзор наиболее известных функций конфликта и на основе данных военной статистики выполнена их верификация. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

## 1. ОБЗОР ФУНКЦИЙ КОНФЛИКТА

Положим, что в конфликте (конкурсе, аукционе) участвуют две стороны. Их усилия (ресурсы) обозначим через  $x > 0$  и  $y > 0$  соответственно. Любой комбинации усилий сторон поставлены в соответствие вероятности успеха (победы) —  $p_x(x, y)$  и  $p_y(x, y)$ . Достаточно хорошо исследован класс функций победы

$$p_x(x, y) = \frac{f_x(x)}{f_x(x) + f_y(y)}, \quad (1)$$

где  $f_x(\cdot)$  и  $f_y(\cdot)$  — неотрицательные строго возрастающие функции.

Отметим наиболее часто встречающиеся функциональные формы модели (1). Модель Г. Таллока

$$p_x(x, y) = \frac{x^\mu}{x^\mu + y^\mu} = \frac{(x/y)^\mu}{(x/y)^\mu + 1}, \quad (2)$$

где  $\mu > 0$  — параметр решительности сторон, относится к классу моделей на основе отношения потенциалов (результат зависит от отношения усилий сторон). Модель Д. Макфаддена и Д. Хиршляйфена

$$p_x(x, y) = \frac{\exp(\mu x)}{\exp(\mu x) + \exp(\mu y)} = \frac{1}{1 + \exp(\mu(x - y))} \quad (3)$$

относится к классу моделей на основе разности потенциалов. К этому же классу относится пробит-модель  $p_x(x, y) = \Phi(x - y)$ , где  $\Phi$  — функция Лапласа. При анализе конфликтов и аукционов неантагонистического характера применяется разностная модель вида

$$p_x(x, y) = \alpha_p + f_x(x) - f_y(y),$$

где параметр  $0 < \alpha_p < 1$  и функции  $f_x(\cdot)$ ,  $f_y(\cdot)$  подобраны так, чтобы выполнялось условие  $p_x(\cdot) \in [0, 1]$ . Параметр  $\alpha_p$  отражает условия конкурса (аукциона) и не зависит от усилий его участников.

Теоретико-вероятностное обоснование функций конфликта основано на анализе влияния неучитываемых факторов (случайных ошибок) на результат. Функции регрессии в общем случае имеют вид  $Y_x = h(x, \varepsilon_x)$ ,  $Y_y = h(y, \varepsilon_y)$ , где функции ошибок  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  имеют равные нулю математические ожидания. Тогда вероятность победы первой стороны в конфликте можно записать как  $p_x(x, y) = P(Y_x > Y_y) = P(h(x, \varepsilon_x) > h(y, \varepsilon_y))$ . В предположении, что функция регрессии линейна, а функция распределения ошибок имеет вид  $F(u) = \exp(-\exp(-u))$

(функция экстремального распределения), Д. Макфадден получил модель бинарного выбора вида (3). Для функции регрессии мультипликативного вида и в предположении, что плотность распределения ошибок экспоненциальная, получена модель вида (2).

Функции конфликта аксиоматизированы, в частности, Р. Люсом [11] и С. Скапердасом [12]. В основу аксиоматики положено свойство независимости от посторонних альтернатив (Independence of Irrelevant Alternatives property): исход конфликта зависит только от усилий двух сторон (участников) и не зависит от усилий третьих лиц. Это свойство актуально для социальных и политических исследований (например, выборы в парламент, см. теорему Эрроу [13]). Другое важное требование к функциям конфликта — их однородность нулевой степени, т. е.  $p_x(tx, ty) = p_x(x, y)$  для всех  $t > 0$ . Модели (2) и (3) обладают свойством симметрии или анонимности в том смысле, что если усилия сторон поменять местами, то и вероятности их победы также поменяются местами.

Отмечено, что несмотря на наличие значительного числа публикаций по моделированию конфликтов, конкурсов и аукционов в различных сферах деятельности, лишь в небольшом количестве публикаций затрагиваются вопросы верификации функций конфликта на реальных данных [10].

В серии статей [3] сформулированы основные требования к построению моделей боя:

- неразрывная связь военной статистики, военного искусства и математического моделирования;
- аналитические модели, основанные на тактических принципах и физических законах, представляются более предпочтительными, чем статистические, основанные на «подгонке» результатов под ограниченный набор статистических данных;
- свидетельство «правильности» моделей — соответствие результатов моделирования принципам военного искусства («правило — бить врага по частям служит несомненным подтверждением основного положения нашей теории, что потери сильнейшего числом должны быть меньше, чем у слабейшего» [3]) и др.

Рассмотрим функцию боя, основанную на модели Г. Таллока и учитывающую положения военного искусства и психологические характеристики бойцов [14, 15]:

$$p_x(x, y) = \frac{(\beta x)^m}{(\beta x)^m + y^m} = \frac{q^m}{q^m + 1},$$

$$p_y(x, y) = \frac{y^m}{(\beta x)^m + y^m} = \frac{1}{q^m + 1},$$

$$\beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \alpha, \quad \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad (4)$$



где  $m$  — параметр формы;  $0 < \lambda_x < 1$  ( $0 < \lambda_y < 1$ ) — доля «кровавых» потерь (убитыми и ранеными), выдерживаемая первой (второй) стороной;  $q$  — соотношение сил сторон (превосходство первой стороны);  $\beta > 0$  — параметр боевого превосходства первой стороны над второй;  $\alpha > 0$  — параметр технологического превосходства первой стороны над второй. Компоненты параметра  $\alpha$  вытекают из определения боя (бой представляет собой совокупность согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач) и произведения математических ожиданий независимых случайных величин  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , характеризующих превосходство первой стороны над второй соответственно в боевом опыте командиров и их подчиненных, в разведке, маневренности и огневых возможностях. Опыт командиров и слаженностью подразделений обеспечивается согласованность действий. Частные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты, а дальности обнаружения — с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и др.

Параметр морального превосходства  $\lambda_x/\lambda_y$  имеет решающее влияние на исход боя. По М.П. Осипову, «победа зависит не от продолжительности боя, а главным образом от понесенных сторонами потерь; поэтому вернее считать, что бой длится до тех пор, пока потери одной из сторон не достигнут некоторого определенного процента. Таким в среднем можно считать 20 %...» [3].

Модель (4) обладает свойством однородности нулевой степени. Содержательно данное свойство трактуется так: вероятность победы в бою не зависит от выбора единицы измерения ресурсов сторон  $x$  и  $y$ . Под боевыми единицами в оперативно-тактических расчетах могут пониматься как отдельные бойцы (танки, орудия, самолеты), так и ротные или батальонные тактические группы и пр. При планировании стратегических операций в качестве боевых единиц используются как численности сил и средств сторон, так и расчетные дивизии [16, 17]. Названному свойству в военном искусстве соответствует принцип масштабируемости. Основанием для объединения тактических, оперативных и стратегических действий в одной модели представляется анализ опыта Великой Отечественной войны. Г.К. Жуков выделил одни и те же факторы, определяющие успех любого боя, сражения и операции [18]. Параметр формы позволя-

ет разделить модели по видам на оперативно-стратегические, тактические и модели боестолкновения небольших по численности групп.

Свойство симметрии также выполняется в модели (4). Учет отдельных важных случаев (несимметричная информация сторон, разные продолжительности циклов действий наступающих и обороняющихся и др.) может быть выполнен в моделях более высокого уровня (к примеру, в модели «наступление — оборона») с помощью методов теории игр.

Отметим еще одно важное требование к модели (4) — учет ограничений на значение показателя  $q$ , характеризующего соотношение сил сторон. Значение показателя принадлежит интервалу  $[1/q^*, q^*]$ , где  $q^*$  не превышает 5—15 (для сражений и операций число  $q^*$  мало, для боя это число может достигать 10—15). Иначе боевые действия превращаются в партизанские (антипартизанские), специальные, контртеррористические и другие действия, которые протекают в иных формах и способах.

Таким образом, нами рассмотрен ряд моделей, которые можно применять в качестве функции конфликта (боя). Предпочтительным представляется класс моделей Г. Таллока, в максимальной степени удовлетворяющий сложившимся представлениям военной науки об оперативно-тактических расчетах [19]. Выбор лучшей из моделей возможен по результатам анализа данных военной статистики.

## 2. ВЕРИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ КОНФЛИКТА

### 2.1. Методы верификации

В математической статистике для проверки гипотез о виде распределения наиболее часто применяются критерии хи-квадрат Пирсона (для простых гипотез) и Фишера (для сложных, с оценкой параметров распределения). Пусть проводится  $n$  независимых испытаний, каждое из которых может иметь  $r$  различных исходов, вероятности этих исходов равны  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Пусть в последовательности испытаний исходы встретились  $c_1, c_2, \dots, c_r$  раз. По теореме Пирсона, в случае справедливости основной гипотезы, распределение статистики хи-квадрат

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(c_i - np_i)^2}{np_i}$$

при  $n \rightarrow \infty$  стремится к распределению хи-квадрат с  $r - 1$  степенями свободы. В противном случае эта статистика стремится к бесконечности.

Параметры  $\beta$  и  $m$  модели (4) также можно оценить методом максимального правдоподобия. Поскольку исход отдельного боя (сражения, операции) принимает одно из двух значений: 1 — победа

Таблица 1

## Начальные численности сторон и исходы сражений

Сражение	Начальная численность войск		Исход сражения $s_i$	Отношение численностей войск $q_i$	Разность численностей войск $\Delta_i$ , тыс. чел.
	первой стороны $x_i$ , тыс. чел.	второй стороны $y_i$ , тыс. чел.			
Аустерлиц	83	75	0	1,11	8
Тена	74	43	1	1,72	31
Ауэрштедт	48	30	0	1,60	18
Прейсиш-Эйлау	80	64	1	1,25	16
Фридланд	85	60	1	1,42	25
Асперн	75	70	1	1,07	5
Ваграм	160	124	1	1,29	36
Бородино	130	103	1	1,26	27
Березина	75	45	1	1,67	30
Люцен	157	92	1	1,71	65
Бауцен	163	96	1	1,70	67
Дрезден	160	125	0	1,28	35
Кацбах	75	65	1	1,15	10
Кульм	46	35	1	1,31	11
Дениевец	70	57	0	1,23	13
Лейпциг	300	200	1	1,50	100
Ганау	75	50	1	1,50	25
Краон	30	18	1	1,67	12
Лаон	100	45	1	2,22	55
Линьи	120	85	1	1,41	35
Ватерлоо	100	72	1	1,39	28
Грохово	72	56	1	1,29	16
Альма	62	34	1	1,82	28
Черная речка	60	56	1	1,07	4
Инкерман	90	63	0	1,43	27
Маджента	58	54	0	1,07	4
Сольферино	170	150	0	1,13	20
Кустоцца	70	51	1	1,37	19
Кениггрец	222	215	1	1,03	7
Верт	100	45	1	2,22	55
Марс ла Тур	125	65	1	1,92	60
Гравелот	220	130	1	1,69	90
Седан	245	124	1	1,98	121
Мец	200	173	1	1,16	27
Аладжа	60	36	1	1,67	24
Лаоян	150	120	0	1,25	30
Шахе	212	157	0	1,35	55
Мукден	330	280	0	1,18	50

первой стороны или 0 — ее поражение, то функция правдоподобия имеет вид:

$$L = \prod_{i=1}^n \left( \frac{(\beta x_i)^m}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} \right)^s \left( \frac{(y_i)^m}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} \right)^{1-s},$$

где  $s$  — доля боев, в которых победила первая сторона;  $x_i$  ( $y_i$ ) — численность войск первой (второй) стороны в  $i$ -м бою. Вычислив частные производные логарифмической функции правдоподобия по  $\beta$  и  $m$  и приравняв их к нулю, получим систему двух уравнений для оценки параметров:

$$sm \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{m(\beta x_i)^{m-1} x_i}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} = 0, \quad (5)$$

$$s \sum_{i=1}^n \ln(\beta x_i) + (1-s) \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - \sum_{i=1}^n \frac{(\beta x_i)^m \ln(\beta x_i) + (y_i)^m \ln(y_i)}{(\beta x_i)^m + (y_i)^m} = 0. \quad (6)$$

## 2.2. Верификация функций по результатам сражений XIX — начала XX вв.

В табл. 1 представлены численности войск и результаты сражений XIX — начала XX вв. Сражения подобраны М.П. Осиповым таким образом, что есть все основания считать, что параметр боевого превосходства  $\beta$  равен единице [3]. Исход  $i$ -го сражения  $s_i$  равен 1, если победила первая сторона, иначе  $s_i = 0$ .

Значения отношений и разностей численностей сторон разбиты на  $k = 6$  интервалов. Отношения численностей сторон используются в моделях (2) и (4), а разности численностей войск сторон — в модели (3). Результаты вычислений статистики хи-квадрат для модели (4) при  $\beta = 1$  и  $m = 0,5; 1; 2; 3; 3,5; 4; 5; 6$  и для модели (3) при  $\mu = 0,5; 1; 2$  представлены в табл. 2.

Из таблицы видно, что модели на основе разностей численностей войск сторон (№ 9—11) применять нецелесообразно в связи с большим значением статистики хи-квадрат. Предпочтительна модель на основе отношения потенциалов со значением параметра формы  $m \approx 3-4$ . Вместе с тем, для всех значений параметра модели (4) в интервале  $m = (3, 4)$  значения статистики хи-квадрат выше критической точки распределения хи-квадрат при уровне значимости 0,01 и числе степеней свободы  $k - 1 = 5$  ( $\chi_{0,01}^2; 5 = 15,1$ ). Следовательно, нельзя принять статистически значимое заключение о значении параметра модели (4), поскольку нам неизвестно значение параметра  $\beta$  боевого превосходства.



Таблица 2

## Значения статистики хи-квадрат по результатам сражений

№ п/п	Модель	Значение статистики хи-квадрат
1	$\sqrt{x}/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$	377
2	$x/(x + y)$	161
3	$x^2/(x^2 + y^2)$	63
4	$x^3/(x^3 + y^3)$	39
5	$x^{3,5}/(x^{3,5} + y^{3,5})$	35
6	$x^4/(x^4 + y^4)$	35
7	$x^5/(x^5 + y^5)$	44
8	$x^6/(x^6 + y^6)$	65
9	$\frac{\exp(x/2)}{\exp(x/2) + \exp(y/2)}$	155
10	$\frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(y)}$	158
11	$\frac{\exp(2x)}{\exp(2x) + \exp(2y)}$	158

Методом максимального правдоподобия (численное решение системы уравнений (5)–(6)) получены такие оценки параметров модели (4):  $\beta \approx 1$ ,  $m \approx 3$ .

Осипов М.П. [3] предположил, что если потери сторон в сражении определяются численностью войск противника и их боевой эффективностью (числом поражаемых боевых единиц за малый интервал времени), то получаем квадратичную модель боя (разность квадратов численностей сражающихся во всех фазах сражения постоянна), т. е.  $m = 2$ . Данные табл. 1 со статистической точки зрения лучше описываются другой моделью, но М.П. Осипов остановился на квадратичной модели в силу ее простоты и математической обоснованности.

### 2.3. Верификация функций по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны

Сведем данные по стратегическим операциям [16, 17] в табл. 3. Начальную численность советских войск в  $i$ -м сражении обозначим  $x_i$ , войск противника —  $y_i$ . Исход  $i$ -го сражения  $s_i$  равен 1, если победили советские войска, иначе  $s_i = 0$ .

Значения отношений численностей сторон разбиты на шесть интервалов. Результаты вычислений значения статистики хи-квадрат для каждой модели представлены в табл. 4.

Таблица 3

## Начальные численности сторон и исходы операций

Стратегическая операция	Начальная численность войск		Исход операции $s_i$
	советских $x_i$ , чел.	немецких $y_i$ , чел.	
Стратегическая оборонительная операция в Прибалтике (22 июня — 9 июля 1941 г.)	369 702	655 000	0
Стратегическая оборонительная операция в Белоруссии (22 июня — 9 июля 1941 г.)	673 472	820 000	0
Стратегическая оборонительная операция на Западной Украине (22 июня — 6 июля 1941 г.)	907 046	1 695 460	0
Стратегическая оборонительная операция в Заполярье и Карелии (29 июня — 10 октября 1941 г.)	131 683	253 000	0
Киевская стратегическая оборонительная операция (7 июля — 26 сентября 1941 г.)	187 990	670 000	0
Смоленское сражение (10 июля — 10 сентября 1941 г.)	1 469 551	1 045 000	0
Донбасско-Ростовская стратегическая оборонительная операция (29 сентября — 16 ноября 1941 г.)	413 229	301 800	0
Московская стратегическая оборонительная операция (30 сентября — 5 декабря 1941 г.)	1 250 010	1 800 000	0
Ростовская стратегическая наступательная операция (17 ноября — 2 декабря 1941 г.)	423 945	340 000	1
Московская стратегическая наступательная операция (17 ноября — 2 декабря 1941 г.)	1 069 173	801 000	1
Керченско-Феодосийская десантная операция (25 декабря 1941 г. — 2 января 1942 г.)	135 080	25 000	1
Ржевско-Вяземская стратегическая наступательная операция (8 января — 20 апреля 1942 г.)	723 211	624 800	1
Воронежско-Ворошиловградская стратегическая оборонительная операция (28 июня — 24 июля 1942 г.)	1 715 000	900 000	0
Сталинградская стратегическая оборонительная операция (17 июля — 18 ноября 1942 г.)	386 365	381 000	0

Стратегическая операция	Начальная численность войск		Исход операции $s_i$
	советских $x_i$ , чел.	немецких $y_i$ , чел.	
Северо-Кавказская стратегическая оборонительная операция (25 июля — 31 декабря 1942 г.)	134 892	167 000	0
Сталинградская стратегическая наступательная операция (19 ноября 1942 г. — 2 февраля 1943 г.)	2 084 600	2 023 000	1
Северо-Кавказская стратегическая наступательная операция (1 января — 4 февраля 1943 г.)	1 025 230	764 000	1
Операция по прорыву блокады Ленинграда «Искра» (12—30 января 1943 г.)	188 563	50 000	1
Воронежско-Харьковская стратегическая наступательная операция (13 января — 3 марта 1943 г.)	378 342	125 000	1
Харьковская оборонительная операция (4—25 марта 1943 г.)	172 256	160 000	0
Курская стратегическая оборонительная операция (5—23 июля 1943 г.)	1 392 065	900 000	0
Орловская стратегическая наступательная операция «Кутузов» (12 июля — 18 августа 1943 г.)	927 494	492 300	1
Белгородско-Харьковская стратегическая наступательная операция «Румянцев» (3—23 августа 1943 г.)	656 201	200 000	1
Смоленская стратегическая наступательная операция «Суворов» (7 августа — 2 октября 1943 г.)	754 948	850 000	1
Донбасская стратегическая наступательная операция (13 августа — 22 сентября 1943 г.)	719 889	540 000	1
Черниговско-Полтавская стратегическая наступательная операция (26 августа — 30 сентября 1943 г.)	978 616	700 000	1
Новороссийско-Таманская стратегическая наступательная операция (10 сентября — 9 октября 1943 г.)	337 178	440 000	1
Нижнеднепровская стратегическая наступательная операция (26 сентября — 20 декабря 1943 г.)	1 339 298	770 000	1
Киевская стратегическая наступательная операция (3—13 ноября 1943 г.)	412 826	500 000	1
Днепровско-Карпатская стратегическая наступательная операция (24 декабря 1943 г. — 6 мая 1944 г.)	1 466 500	1 800 000	1
Крымская стратегическая наступательная операция (8 апреля — 12 мая 1944 г.)	272 885	195 000	1
Выборгско-Петрозаводская стратегическая наступательная операция (10 июня — 9 августа 1944 г.)	290 975	280 000	1
Белорусская стратегическая наступательная операция (23 июня — 29 августа 1944 г.)	1 254 300	800 000	1
Львовско-Сандомирская стратегическая наступательная операция (13 июля — 29 августа 1944 г.)	1 070 953	600 000	1
Яско-Кишиневская стратегическая наступательная операция (20—29 августа 1944 г.)	873 322	643 000	1
Восточно-Карпатская стратегическая наступательная операция (8 сентября — 28 октября 1944 г.)	280 323	300 000	1
Прибалтийская стратегическая наступательная операция (14 сентября — 24 ноября 1944 г.)	1 214 978	700 000	1
Белградская стратегическая наступательная операция (28 сентября — 20 октября 1944 г.)	447 500	400 000	1
Петсамо-Киркенесская стратегическая наступательная операция (7—29 октября 1944 г.)	112 310	53 000	1
Висло-Одерская стратегическая наступательная операция (12 января — 3 февраля 1945 г.)	2 294 630	400 000	1
Западно-Карпатская стратегическая наступательная операция (12 января — 18 февраля 1945 г.)	719 857	550 000	1
Восточно-Прусская стратегическая наступательная операция (13 января — 25 апреля 1945 г.)	1 590 000	580 000	1
Восточно-Померанская стратегическая наступательная операция (10 февраля — 4 апреля 1945 г.)	380 259	230 000	1
Венская стратегическая наступательная операция (16 марта — 15 апреля 1945 г.)	664 925	410 000	1
Берлинская стратегическая наступательная операция (16 апреля — 8 мая 1945 г.)	2 062 100	1 000 000	1
Пражская стратегическая наступательная операция (6—11 мая 1945 г.)	1 196 390	900 000	1

Таблица 4

**Значения статистики хи-квадрат по результатам стратегических операций**

Значение параметра формы модели (4)	Значение статистики хи-квадрат	
	Оценка параметра боевого превосходства советских войск (*)	Оценка параметра боевого превосходства советских войск (**)
0,5	159	269
1	55	121
2	18	85
3	20	156
4	47	418

В одном случае (\*) параметр боевого превосходства в  $i$ -й операции полагался равным единице:  $\beta_i = 1$ ,  $q_i = x_i/y_i$ . В другом случае (\*\*) параметр  $\beta_i$  вычислялся по формуле

$$\beta = \frac{\beta_{ls} + \beta_r + \beta_t + \beta_s}{4}, \quad (7)$$

где  $\beta_{ls}$  — отношение начальных численностей войск сторон;  $\beta_r$  — отношение численностей орудий и минометов;  $\beta_t$  — отношение численностей танков, самоходных и штурмовых орудий;  $\beta_s$  — отношение численностей самолетов. Данное выражение учитывает опыт советских стратегических операций 1944—1945 гг.: в среднем по операциям пехота, танки, артиллерия и авиация вносили примерно одинаковый вклад в потери сторон [19].

Из табл. 4 видно, что применительно к стратегическим операциям значение статистики хи-квадрат минимально при параметре формы  $m = 2$ . Предложенный метод расчета параметра боевого превосходства по формуле (7) оказался некорректным, так как в этом случае значение статистики хи-квадрат существенно выше. Статистических данных в работах [16, 17] недостаточно, чтобы вычислить параметр боевого превосходства аналитически по формуле (4).

Для стратегических операций периода Великой Отечественной войны методом максимального правдоподобия получены такие оценки параметров модели (4):  $\beta \approx 1,4$ ,  $m \approx 3$ .

**2.4. Верификация функций по результатам боестолкновений с бандгруппами**

По статистическим данным о результатах боестолкновений пограничников с бандгруппами (объем выборки  $n = 56$ , значения отношений численностей сторон разделены на шесть интервалов) рассчитана статистика хи-квадрат (табл. 5).

Из результатов расчетов видно, что боестолкновения с нерегулярными формированиями достаточно хорошо описываются моделью отношения сил с параметром формы  $m = 0,5—1$ .

Применительно к боестолкновениям пограничников с бандгруппами (нерегулярными формированиями) методом максимального правдоподобия получены такие оценки параметров модели (4):  $\beta \approx 3,7$ ,  $m = 0,65$ .

**2.5. Верификация функций по результатам попыток захватов судов пиратами**

Результаты статистического анализа пиратских и разбойных актов в морском пространстве за период с 2009 по 2019 г. представлены в табл. 6.

В столбце 1 указана доля успешных актов по всей выборке, а в столбце 2 — только по тем актам, по которым в базе данных есть сведения о числе судов и пиратских катеров, а также указаны численности пиратов и экипажа. Коэффициент корреляции между данными последних двух столбцов таблицы равен 0,94.

Для анализа из общей выборки были отобраны факты нападений пиратов (морских разбойников) на суда типа Bulk carrier, Product tanker и Tanker (первая выборка) и на суда типа General cargo ship (вторая выборка), где пираты использовали для атаки одну лодку. Объем первой выборки составил  $n = 215$ , второй —  $n = 135$ . По первой выборке на рис. 1 и 2 показана зависимость соответственно количества и доли успешных пиратских актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов.

По второй выборке на рис. 3 показана зависимость доли успешных пиратских актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов.

На содержательном уровне действия пиратов разделяются на два этапа: первый — вынуждение судна к остановке и создание условий для его абордажа, второй — взятие пиратами контроля над управлением судном, захват экипажа. Поскольку, по данным двух выборок, в силовом акте участвует

Таблица 5

**Значение статистики хи-квадрат по результатам боестолкновений с бандгруппами**

Значение	
параметра формы модели (4)	статистики хи-квадрат
0,5	76
1	77
2	504

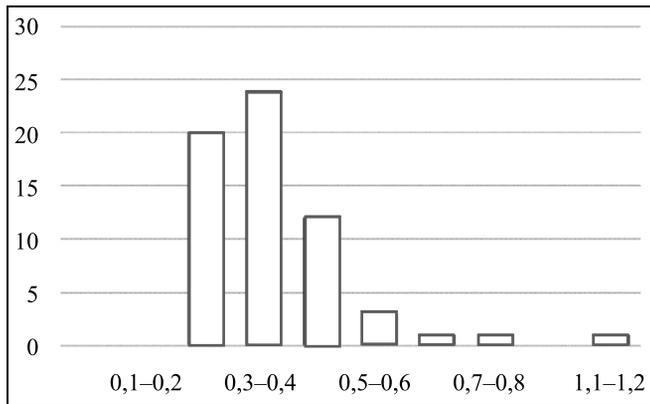


Рис. 1. График зависимости числа успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (первая выборка)

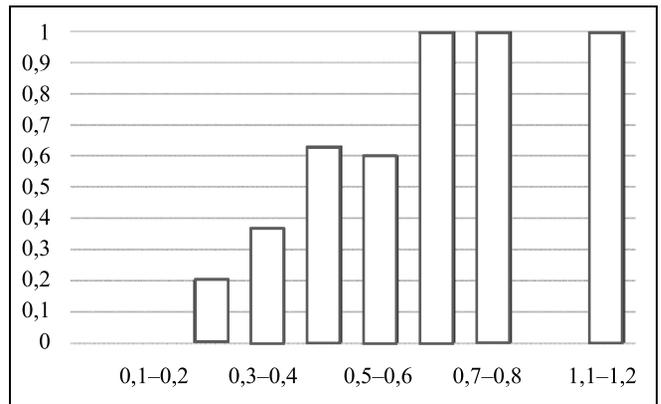


Рис. 2. График зависимости доли успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (первая выборка)

Таблица 6

Количество силовых актов и их результативность по типам судов

Тип судна (англ.)	Тип судна (рус.)	Число актов	Доля успешных актов	
			1	2
Dhow	Парусно-моторное судно	12	1,000	1,000
Yacht	Яхта	12	0,792	0,700
Tug	Буксир	44	0,732	0,758
Supply ship	Судно снабжения	16	0,625	0,714
Fishing vessel	Рыболовное судно	47	0,617	0,600
Oil product tanker	Танкер для нефтепродуктов	4	0,500	0,333
Barge carrier	Баржевоз	9	0,444	0,667
Passenger ship	Пассажирское судно	5	0,400	0,667
Product tanker	Танкер-продуктовоз	84	0,351	0,455
Refrigerated cargo carrier	Рефрижераторное судно	6	0,333	0,200
General cargo ship	Сухогруз общего назначения	126	0,310	0,357
Нет данных	—	11	0,273	0,167
Chemical tanker	Танкер-химовоз	127	0,268	0,294
Bulk carrier	Балкер (навалочник)	227	0,201	0,203
Tanker	Танкер	188	0,193	0,259
Ro-ro-cargo ship	Ролкер (перевозка грузов на колесах)	15	0,167	0,200
Oil tanker	Нефтяной танкер	39	0,132	0,136
Vehicle carrier	Ролкер (перевозка грузов на колесах)	16	0,125	0,167
Special purpose ship	Судно специального назначения	4	0,125	0,125
Heavy load carrier	Грузовое судно	4	0,125	—
LPG tanker	Газовоз	9	0,111	0,250
Container ship	Контейнеровоз	144	0,108	0,160
Военный корабль	—	1	0	—
Cement carrier	Цементовоз	1	0	0
Ore/bulk/oil Carrier	Нефтерудовоз	1	0	—
Reefer	Рефрижератор	1	0	0
Gas carrier — LNG	Газовоз СПГ	3	0	0
Gas carrier — non-specified	Газовоз	1	0	—
Патрульная лодка	—	1	0	0
Multipurpose ship	Многоцелевое судно	1	0	—
Livestock carrier	Судно для перевозки скота	1	0	0
Research ship	Исследовательское судно	5	0	—
Общий итог		1165	0,272	0,317

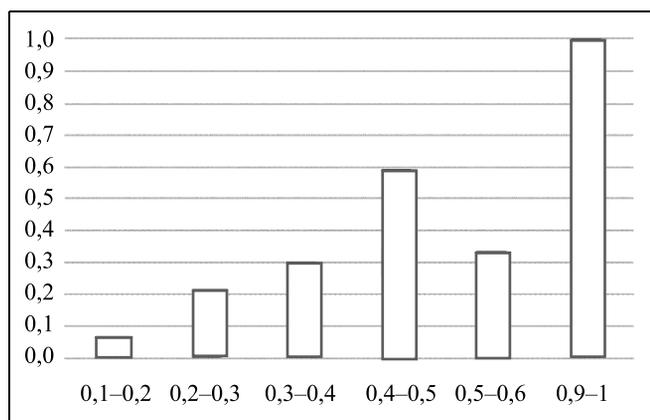


Рис. 3. График зависимости доли успешных актов от отношения численности пиратов к численности экипажа судов (вторая выборка)

одно пиратское судно (лодка, катер) и нападению подвергается только одно судно, то модифицируем модель (4) для учета характеристик силового акта. Функция успеха силового акта (вероятность победы нападающей стороны) будет иметь вид:

$$p_x(x, y) = \pi \frac{(\beta q)^m}{(\beta q)^m + 1}, \quad (8)$$

где  $\pi$  — вероятность успешных действий по остановке судна и созданию условий для абордажа;  $m$  — параметр формы;  $q > 0$  — отношение численности пиратов, участвующих в действиях по захвату судна, к численности экипажа;  $\beta > 0$  — параметр боевого превосходства нападающей стороны в действиях по взятию под контроль управления судном. Первый сомножитель отражает действия по остановке судна (в котором участвуют с каждой стороны по единице) и позволяет учесть маневренные и скоростные характеристики судов, технические средства нападения (гранатометы, пулеметы и др.) и защиты (колючая проволока, пожарные шланги, слепящие лазеры и др.), высоту борта и пр. Второй сомножитель характеризует действия сторон по захвату (недопущению захвата) судна и экипажа.

Запишем функцию правдоподобия для модели (8):

$$L = \prod_{i=1}^n \left( \pi \frac{(\beta q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1} \right)^s \left( 1 - \pi \frac{(\beta q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1} \right)^{1-s},$$

где  $s$  — доля успешных силовых актов;  $q_i$  — отношение численности пиратов и экипажа судна в  $i$ -м акте.

Вычислив частные производные логарифмической функции правдоподобия и приравняв их к ну-

лю, получим уравнения для оценки параметров  $\pi$  и  $\beta$  модели (8):

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} = \frac{sn}{\pi} + (1-s) \sum_{i=1}^n \frac{-(\beta q_i)^m}{1 + (1-\pi)(\beta q_i)^m} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{smn}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{m\beta^{m-1}(q_i)^m}{(\beta q_i)^m + 1} +$$

$$+ (1-s) \sum_{i=1}^n \frac{(1-\pi)m\beta^{m-1}(q_i)^m}{1 + (1-\pi)(\beta q_i)^m} = 0.$$

Каждая из двух выборок, отсортированная по дате совершения силового акта, была разделена на две части. По первой части выполнена оценка параметров  $\pi$  и  $\beta$  модели (8) при фиксированных значениях параметра формы  $m$ , а по второй части рассчитаны статистики хи-квадрат.

Результаты расчетов представлены в табл. 7.

Из результатов расчетов видно, что применительно к пиратским и разбойным актам в морском пространстве в качестве оценки параметра формы можно принять  $m = 1-1,25$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 4 при различных значениях параметра формы  $m$  показана зависимость победы первой стороны от отношения сил сторон  $q$  (модель Г. Таллока, учитывающая отношение сил сторон). Из рисунка видно, что вклад случайных факторов в результат конфликта снижается с увеличением значения параметра формы.

Таблица 7

Оценки значений параметров  $\pi$  и  $\beta$  и статистики хи-квадрат

Значение параметра формы $m$	Результаты оценок по выборке					
	первой			второй		
	$\pi$	$\beta$	$\chi^2$	$\pi$	$\beta$	$\chi^2$
0,25	7,5	0,568	117,4	8,86	0,43	41,6
0,5	7,17	0,525	160,7	8,4	0,4	21,3
0,75	7,02	0,49	112,8	8,16	0,37	17,0
1	6,9	0,46	91,4	7,96	0,35	16,0
1,25	6,78	0,44	79,2	7,86	0,33	16,8
1,5	8,68	0,39	100,7	7,71	0,32	18,2
2	11	0,35	174,1	7,67	0,3	24,8
3	10,79	0,328	339,9	7,76	0,27	62,0

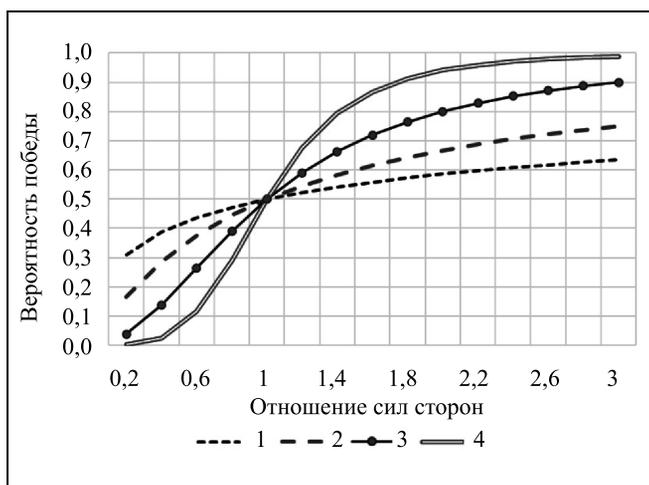


Рис. 4. Зависимость вероятности победы от отношения сил сторон

При малых численностях боевых единиц сторон и при преобладании нетрадиционных форм боя (нападения из засад, партизанские действия и др.) целесообразно использовать значение параметра формы  $m = 0,25-0,5$ . Успех боестолкновения в этом случае зависит от множества случайных факторов, учесть которые почти невозможно. Чтобы добиться высокой вероятности победы, необходимо обеспечить многократное превосходство в силах и средствах над противником. Например, при  $m = 0,5$  вероятность победы 0,75 достигается при боевом превосходстве над противником  $q \approx 9$ . Данный результат подтверждается практикой контртеррористических и специальных операций: опыт внутренних конфликтов свидетельствует о том, что соотношение численности правительственных войск к повстанцам должно быть в пределах (8–10): 1 (восемь — десять единиц к одной). Многие государства Запады исходят именно из таких показателей при определении численности сил правопорядка [20].

Действия небольших тактических подразделений (рот, батальонов, тактических групп) в наступлении и обороне могут быть описаны моделью отношения сил со значением параметра формы  $m = 1$ . В этом случае вероятность победы 0,75 достигается при трехкратном превосходстве в силах и средствах над противником, что соответствует сложившимся представлениям о ведении общевойскового боя.

При моделировании действий дивизий (корпусов, армий) в сражении (операции) представляется статистически обоснованным использовать значение параметра формы  $m = 2-3$ . Здесь успех сражения (операции) почти гарантирован при двух-

трехкратном общем превосходстве над противником в силах и средствах. Полученные статистические выводы подтверждаются специалистами в области военной науки и искусства. Президент Академии военных наук генерал армии М.А. Гареев отмечал, что за время Великой Отечественной войны не было ни одной успешной оборонительной операции, проведенной значительно меньшими силами, чем у наступающего противника. Возможно отражение атак превосходящих сил противника в тактическом звене, но не в оперативно-стратегическом [21].

Результаты расчетов и содержательный анализ боевых действий позволяет обобщить требования к достижению победы в бою, сражении, операции и представить в форме таблицы требуемое значение превосходства над противником в силах и средствах (табл. 8).

Из таблицы видно, что для достижения вероятности победы над противником, равной 0,75, в ходе контртеррористических и специальных операций необходимо обеспечить превосходство в силах и средствах не ниже 9:1, тогда как при ведении боевых действий полком (батальоном) достаточно иметь превосходство 3:1.

Укажем ограничение на применение функций победы. Работа командиров и штабов по планированию и ведению боевых действий (наступления, обороны и др.) разделяется на два этапа: подготовка боевых действий и ведение боевых действий. Рассмотренные выше модели (функции боя, конфликта) целесообразно применять в основном на первом этапе для обоснования потребных сил и средств на бой (сражение, операцию). Моделирование ведения боевых действий выполняется в ходе военных игр, а также с применением дискретных моделей динамики боя, марковских цепей, имитационных моделей и пр.

Таблица 8

**Превосходство в силах и средствах  $q$ , необходимое для достижения победы над противником**

Требуемое значение вероятности победы над противником $p_x$	Значение параметра формы $m$ модели			
	$q = m \sqrt{\frac{p_x}{1-p_x}}$			
	$m = 0,5$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0,7	5,4:1	2,3:1	1,5:1	1,3:1
0,75	9,0:1	3,0:1	1,7:1	1,4:1
0,8	16,0:1	4,0:1	2,0:1	1,6:1
0,9	81,0:1	9,0:1	3,0:1	2,1:1



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено статистическое исследование функций победы в бою, основанных на модели Г. Таллока, устанавливающей зависимость вероятности победы в бою (сражении, операции) от отношения боевых потенциалов сторон. Боевой потенциал определяется численностями боевых единиц сторон и учитывает их моральные и технологические характеристики.

Параметр функции конфликта, определяемый Г. Таллоком как параметр решительности, применительно к моделям военных и боевых действий отражает характер и масштаб действий. При проведении контртеррористических и специальных операций его значение мало, на тактическом уровне равно единице, на оперативном уровне примерно равно 2—4. Параметр масштаба оценен на примере сражений XIX — начала XX в., по результатам стратегических операций Великой Отечественной войны 1941—1945 гг., по данным о боестолкновениях пограничников с бандгруппами, а также на основе международной статистики о пиратских и разбойных актах на море. Полученные статистические результаты не противоречат представлениям военной науки и искусства о планировании и ведении боевых действий.

Перспективными направлениями дальнейших исследований представляются разработка на основе функции победы теоретико-игровых моделей подготовки боя, сражения, операции, а также разработка и обоснование комплекса моделей, позволяющих учитывать многообразные боевые ситуации, возникающие по ходу боевых действий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirshleifer, J.* The Macrotechnology of Conflict // *Journal of Conflict Resolution*. — 2000. — Vol. 44 (6). — P. 773—792.
2. *Cobb, C.W., Douglas, P.H.* A Theory of Production // *The American Economic Review*. — 1928. — Vol. 18, no. 1. — P. 139—165.
3. *Осипов М.П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // *Военный сборник*. — 1915. — № 6. — С. 59—74; № 7. — С. 25—36; № 8. — С. 31—40; № 9. — С. 25—37. [*Osipov, M.P.* The Influence of the Number of Parties Fighting on Their Losses // *Voennyj Sbornik*. — 1915. — No. 6. — P. 59—74; No. 7. — P. 25—36; No. 8. — P. 31—40; No. 9. — P. 25—37. (In Russian)]
4. *Lanchester, F.W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, Ltd., 1916. — 243 p.
5. *Tullock, G.* Efficient rent seeking / In J.M. Buchanan, R.D. Tollison, G. Tullock (Eds.) *Toward a Theory of the Rent-Seeking Society*. — College Station, TX: Texas A&M University Press. — 1980. — P. 97—112.
6. *Schmalensee, R.* A model of advertising and product quality // *Journal of Political Economy*. — 1978. — No. 86. — P. 485—503.
7. *Konrad, K.A.* Strategy and Dynamics in Contests. — New York: Oxford University Press, 2009. — 232 p.

8. *Hirshleifer, J.* Conflict and Rent-Seeking Success Functions: Ratio vs. Difference Models of Relative Success // *Public Choice*. — 1989. — No. 63. — P. 101—112.
9. *McFadden, D.L.* Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior / In P. Zarembka, ed., *Frontiers in Econometrics*. — New York: Academic Press, 1974. — P. 105—142.
10. *Jia, H., Skaperdas, S., Vaidya, S.* Contest Functions: Theoretical Foundations and Issues in Estimation // *International Journal of Industrial Organization*. — 2013. — No. 31. — P. 211—222.
11. *Luce, R.D.* Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis. — New York: Wiley, 1959. — 176 p.
12. *Skaperdas, S.* Contest Success Functions // *Economic Theory*. — 1996. — No. 7. — P. 283—290.
13. *Arrow, K.J.* Social Choice and Individual Values. — New York: John Wiley, 1951. — 111 p.
14. *Шумов В.В., Корепанов В.О.* Математические модели боевых и военных действий // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2020. — Т. 12. — № 1. — С. 217—242. [*Shumov, V.V., Korepanov, V.O.* Mathematical Models of Combat and Military Operations / *Computer Research and Modeling*. — 2020. — Vol. 12, no. 1. — P. 217—242. (In Russian)]
15. *Шумов В.В.* Расширение модели «наступление — оборона» // *Проблемы управления*. — № 1. — С. 59—70. [*Shumov, V.V.* Expansion of the «Attack — Defense» Model / *Control Sciences*. — 2020. — No. 1. — P. 59—70. (In Russian)]
16. *Великая Отечественная война 1941—1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах*. — В 2 т. — Т. I. — М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. — 608 с. [*The Great Patriotic War of 1941—1945. Campaigns and Strategic Operations in Numbers*. — In 2 vol. — Vol. I. — M.: Ob'edinennaya redakciya MVD Rossii, 2010. — 608 p. (In Russian)]
17. *Великая Отечественная война 1941—1945 гг. Кампании и стратегические операции в цифрах*. — В 2 томах. — Том II. — М.: Объединенная редакция МВД России, 2010. — 784 с. [*The Great Patriotic War of 1941—1945. Campaigns and strategic operations in numbers*. — In 2 vol. — Vol. II. — M.: Ob'edinennaya redakciya MVD Rossii, 2010. — 784 p. (In Russian)]
18. *Речь Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г.* // *Военная мысль*. — 1985. — Спец. вып. (февраль). — С. 3, 17—33. [*Speech of G.K. Zhukov at the Military Scientific Conference, December 1945* // *Voennaya mysl'*. — 1985. — Spec. vyp. (fevral'). — P. 3, 17—33. (In Russian)]
19. *Цыгичко В.И., Стоили Ф.* Метод боевых потенциалов: история и настоящее // *Военная мысль*. — 1997. — № 4. — С. 23—28. [*Cygychko, V.I., Stoili, F.* The Method of Combat Potentials: History and Present // *Voennaya mysl'*. — 1997. — No. 4. — P. 23—28. (In Russian)]
20. *Контртеррористическая операция на Северном Кавказе: основные уроки и выводы (3)* // *Военная мысль*. — 2000. — № 4. — С. 2—17. [*Counter-Terrorist Operation in the North Caucasus: Main Lessons and Conclusions (3)* // *Voennaya mysl'*. — 2000. — No. 4. — P. 2—17. (In Russian)]
21. *Ионин Г.* Теория общевойскового боя требует переосмысления, развития и совершенствования // *Военно-промышленный курьер*. — 2005. — № 21 (88). — С. 4. [*Ionin, G.* The Theory of Combined Arms Combat Requires Rethinking, Development and Improvement // *Voенно-promyshlennyj kur'er*. — 2005. — No. 21 (88). — P. 4. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 31.05.2020, после доработки 16.09.2020.  
Принята к публикации 05.10.2020.

**Шумов Владислав Вячеславович** — д-р техн. наук, Международный научно-исследовательский институт проблем управления, г. Москва, ✉ v.v.shumov@yandex.ru.

# A STUDY OF CONTEST SUCCESS FUNCTION FOR BATTLES (COMBATS, OPERATIONS)

V.V. Shumov

International Research Institute for Advanced Systems, Moscow, Russia

✉ v.v.shumov@yandex.ru

**Abstract.** A statistical study of contest success functions for battles was performed, based on the model of G. Tullock, which establishes the dependence of battle (combat, operation) victory probability on the ratio of combat potentials of the sides. The combat potential is determined by the number of combat units of the sides and takes into account their moral and technological characteristics. The scale parameter (according to G. Tullock, the decisiveness parameter) is estimated by using the examples of battles that took part in the 19th and early 20th century, the results of strategic operations of the Great Patriotic War of 1941—1945, the data on clashes between border guards and bandit groups, and also on the base of international statistical data on acts of piracy and armed robbery at sea. For counter-terrorism and special operations, its value is small; at the tactical level, it equals one; at the operational level its approximate value is 2—4. The obtained statistical results do not contradict the military science and art ideas of planning and conduct of hostilities. Using the contest success function for battle (combat, operation) is advisable at the stage of preparation for the battle to substantiate the required forces and means for completing the tasks.

**Keywords:** contest success function, Tullock model, parameter estimation, scale parameter, battle, combat, operation.



## Содержание сборника «Управление большими системами»

### Вып. 86, 2020

- ✓ **Бурнаев Е.В.** Обнаружение аномалий на основе суррогатных моделей
- ✓ **Фуртат И.Б., Нехороших А.Н., Гуцин П.А.** Робастная стабилизация линейных объектов при наличии возмущений и высокочастотных помех измерения
- ✓ **Глуценко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.** Повышение качества управления электродвигателем постоянного тока на основе его линеаризации и компенсации немоделируемой динамики
- ✓ **Зоркальцев В.И., Полковская М.Н.** Аддитивная и мультипликативная модели выявления тренда и сезонных колебаний: приложение мультипликативной модели к динамике цен на сельскохозяйственную продукцию
- ✓ **Сочнев А.Н.** Планирование ресурсов производства на основе сетевых моделей

### Вып. 87, 2020

- ✓ **Уанкпо Г.Ж.К., Козырев Д.В., Нибасумба Э.** Анализ надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования
- ✓ **Чиркова Ю.В.** Задача выбора и размещения базовых станций в беспроводной сети
- ✓ **Казаков А.Л., Лемперт А.А., Та Ч.Т.** О задачах упаковок неравных шаров в трехмерном пространстве
- ✓ **Бурков В.Н., Сергеев В.А., Коргин Н.А.** Идентификация механизмов комплексного оценивания на основе унитарного кода
- ✓ **Мальсагов М.Х., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.** Динамическая модель оценивания при коррупции
- ✓ **Калмыков Н.С., Сидельников Ю.В.** Введение и экспериментальное исследование гистограммного коэффициента как инструмента для изучения явления сверхдоверия в среде экспертов

Тексты статей в свободном доступе на сайте <http://ubs.mtas.ru/>

# УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНОГО ПОТОКА НОВЫХ ПРОЕКТОВ

Л.А. МЫЛЬНИКОВ

**Аннотация.** В условиях постоянного появления новой инновационной продукции возникает необходимость осуществления более эффективного планирования и управления деятельностью производственных систем с помощью повышения уровня формализации при описании процессов, связанных с формированием производственного портфеля производственной системы. Цель статьи заключается в решении задачи объемно-календарного планирования и определении требований к потоку и проектам, которые позволяют производственной системе эффективно функционировать в условиях неопределенности внешней среды. Применены методы имитационного моделирования, системного анализа, статистической обработки полученных результатов с целью их обобщения и машинного обучения для поиска и классификации проектов и траекторий возможного развития производственных систем. В результате исследования получена модель, которая позволяет эмпирическим путем определить проекты и траектории развития производственных систем при заданных характеристиках проектов, которые приведут к эффективному функционированию систем на основе использования исторических данных о реализованных проектах для учета специфики рассматриваемой системы. Сформулирован ряд утверждений, позволяющих конкретизировать рассмотренную в статье задачу и обозначить границы применимости описанного подхода. Полученные знания о потоке проектов и самих проектах позволят сформулировать требования к проектам и деятельности, связанной с поиском и разработкой новых продуктов. Наибольшая ценность описанного исследования заключается в том, что полученные результаты показывают снижение значимости экспертных оценок при выборе проектов и определении целевых показателей, а также возможность перехода к формальным методам, что приводит к повышению объективности получаемых оценок.

**Ключевые слова:** производственная система, инновационный проект, поток проектов, модель, моделирование, объемно-календарное планирование, экономическая эффективность, поток Пуассона.

## ВВЕДЕНИЕ

Выпуск инновационной продукции представляет собой механизм, способствующий быстрому развитию предприятия. При этом неудачное внедрение инновационных проектов может привести к разорению при неэффективной организации производства. Это связано с тем, что рынок, на котором работают современные производственные системы, особенно ориентированные на выпуск инновационной продукции, — чрезвычайно динамичный. Поэтому производство такой продукции требует синхронизации выбора выпускаемой продукции с динамикой изменения потребительского

спроса, предъявляет повышенные требования к скорости принятия решений и их качеству. К тому же, инновационная продукция, как правило, обладает более коротким жизненным циклом, большим числом модификаций (можно наблюдать переход к мелкосерийному или штучному производству под нужды заказчика), большей наукоемкостью и конструктивной сложностью, требует большего количества средств для организации производства и повышенной организационной и технологической гибкости производственных систем. В связи с этим эффективность управления и ошибки, связанные с управлением и планированием в таких производственных системах, обретают эффект, непосредственно влияющий на их жизнеспособность.

Можно выделить три фактора, которые оказывают непосредственное влияние на эффективность производственной системы: множество проектов, из которого формируется портфель проектов, реализуемых производственной системой; синхронизацию объема выпуска с потоком заказов; оптимизацию процесса организации производства в соответствии с потребностями рынка с учетом особенностей выпускаемого портфеля продуктов. В таких условиях применение эффективных интеллектуальных методов принятия решений и управления становится необходимостью, особенно если предприятия-конкуренты уже пользуются такими методами.

Если рассматривать в качестве внешней среды множество рынков и проектов, возникает необходимость учета высокого уровня вариативности и динамики протекающих процессов в совокупности с инертностью производственных систем, что накладывает ограничения на применимость методов, на которых могут базироваться теории и концепции управления производственными системами [1]. Например, применение таких подходов, как управление по фактическим данным, рефлексивное управление, целевое управление без учета динамики изменения среды, в которой функционирует производственная система, приводит к задержкам в реализации решений и проявляется в ошибках управления, которые, в свою очередь, приводят к несогласованности действий подсистем, и нарушениях производственных циклов во времени.

Принципы управления, которыми руководствуются лица, принимающие решения, могут базироваться на разных стратегиях поведения. При взаимодействии производственных систем с рынком и инновационными проектами они могут искать оптимальные для себя стратегии, исходя из сложившейся или складывающейся (по прогнозным оценкам) ситуации, а могут заниматься выработкой воздействий на внешнее окружение, которые приведут к желаемому для конкретной производственной системы состоянию.

Вопросам, связанным с эффективной реализацией инновационных проектов, процессам повышения эффективности производственных систем (ПрС) с помощью внедрения новых проектов, посвящено большое число работ, в которых авторы учитывают различные аспекты управления, особенности организации ПрС, а также среды, в которой они функционируют. Различия подходов и методов связаны с уровнем формализации набором факторов и аспектов, которые они учитывают [2]. Большинство работ, связанных с управлением инновационными проектами и ПрС, рассматривают единичные проекты или группы проектов, а также динамику функционирования систем при их

реализации. Очевидно, что внедрение единичных проектов и рассмотрение групп проектов окажет эффект, ограниченный во времени. Для стабильной работы предприятия необходим непрерывный поток новых проектов. Для прогнозной оценки числа новых проектов и спроса на отдельные проекты применяются различные теоретические и эмпирические методы оценки и моделирования систем [3]: трендовые модели и прогнозирования значений числа новых проектов [4], объемов продаж и цены; методы популяционной динамики, получившие развитие на основе метода системной динамики [5] и дискретно-событийного моделирования; теория игр и игровых подходов в принятии решений [6]; подходы на основе диффузных явлений [7]; модели системного анализа в динамической постановке на основе данных прогнозирования, экономические модели.

Применение этих подходов ориентировано на поиск управленческих решений для того, чтобы выработать наилучшее для ПрС решение в предсказываемых условиях в рамках информационного управления ПрС. Развитием приведенных подходов служит выработка решений с учетом неопределенности динамики внешней среды. В практике управления проектами и ПрС, внедряющими инновационные проекты, для оценки неопределенности применяют оценки риска [8], которые получают на основе дисперсии, вероятностных оценок, экспертных оценок, ранжирования возможных решений и матрицы рисков, на основе имитационного моделирования и метода Монте-Карло.

Для эффективной работы ПрС в течение длительного времени возникает задача управления портфелем проектов [9] и определения параметров потока проектов, при котором обновление производственного портфеля будет на достаточном для эффективной работы ПрС уровне, и не будет вызывать ее перегрузки.

Определение требований к потоку проектов позволит сформулировать стратегию поведения ПрС при поиске и разработке новых проектов с учетом особенностей каждой ПрС. Такое исследование позволяет установить связь между методами экономико-математического моделирования, рассматривающего обобщенные характеристики, и методами управления и планирования, ориентированными на организацию производственной деятельности, с учетом особенностей и предпочтений ПрС в рамках кибернетического подхода [10].

Принятие решения всегда связано с выбором и обоснованием выбора решения. Большую группу составляют методы, позволяющие ранжировать возможные варианты. Среди них наиболее широкое распространение при управлении ПрС получили: теория портфелей [11], теория ожидаемой



полезности [12] и теория перспектив [13], методы анализа иерархий и анализа сетей [14, 15], множество методов работы с мультикритериальными задачами — VIKOR, TOPSIS [16], ELECTRE [17], PROMETHEE [18], методы сценариев [19].

В настоящее время при управлении ПрС недостаточно рассматривать только набор состояний и переходы между ними. Необходимо рассматривать последовательности состояний согласно принципу оптимальности Беллмана, что требует применения методов эвристического поиска для достижения поставленной лицом, принимающим решение, цели.

Современные исследования показывают, что процесс поддержки принятия управленческих решений не сводится к поиску оптимальных или хороших решений, а является итерационным процессом, который сам требует формализации процессов обоснования выбора того или иного решения во времени в связи с тем, что движение к целевым показателям представляет собой не одношаговый процесс, а траекторию взаимозависимых состояний. Целевые показатели изменяются во времени и могут представлять собой множество величин, связанных различными типами отношений [20], особенно это касается проектов, которые реализуются в конкурентной рыночной среде и имеют приоритет (проекты, необходимые для существования ПрС и влияющие на скорость их развития) [21]. В результате, процесс управления проектами в производственных системах рассматривается как процесс пересмотра и обновления списка реализуемых проектов и ресурсов, выделяемых на их реализацию [22], а задача управления проектами в производственных системах становится связанной с задачей управления производительностью и эффективностью производственной системы. Цель при этом становится переменной величиной, так как в процессе движения к ней меняются условия, в которых функционирует система и приоритеты лиц, принимающих решение. Кроме того, могут наступать события, которые не были предусмотрены при планировании. Учесть эти особенности в рамках таких известных подходов к управлению, как проектное управление, программно-целевое управление и планирование, ресурсно-целевое управление, информационное и рефлексивное управление, предиктивное управление, адаптивное управление, ситуативное управление можно, только если производить планирование на коротком интервале времени. Однако при рассмотрении процесса управления в динамике как непрерывного процесса необходимо говорить о программно-ситуативном управлении.

Исходя из сказанного, процесс управления и планирования производственной системой имеет

смысл рассматривать в рамках процессного подхода, который, по мнению современных ученых, характеризуется ограниченным набором действий, перечнем возможных начальных условий и результатов. К хорошо изученным процессам можно отнести: процессы, протекающие в производственных системах, продолжающиеся длительное время и не имеющие жестко определенного описания и конечного результата; хорошо формализованные и автоматизированные производственные процессы; продолжающиеся процессы управления и бизнес-процессы.

В отличие от процессов, реализацию проектов в производственных системах рассматривают, как правило, как разовую инициативу, которая затрагивает множество подсистем производственной системы и фокусируется на специфических целях (срочных, междисциплинарных, критических или особо важных), которые не могут быть достигнуты в сложившейся управленческой структуре и требуют специального контроля, что делает каждый проект уникальным. Однако при рассмотрении процессов управления внедрение и управление новыми инновационными проектами и портфелем проектов в целом можно формализовать до уровня процессного подхода, имеющего обозначенную лицом, принимающим решение, цель.

## 1. МЕТОДОЛОГИЯ

Для постановки задачи моделирования и исследования влияния параметров потока проектов на деятельность ПрС введем переменные:  $\beta$  — поток проектов;  $w$  — проект;  $i$  — шаг расчета/планирования/время изменения плана производства;  $W^{(i)}$  — производственная корзина на  $i$ -м шаге;  $\alpha_w$  — спрос на товар  $w$ ;  $\tau_w^{(i)}$  — время, необходимое для внесения изменений в работу ПрС при изменении производственного плана, связанного с внедрением/снятием/изменением объема выпуска товара  $w$  на шаге  $i$ ;  $t_w$  — время жизни проекта  $w$  и сформулируем

**Предположение 1.** Для каждой ПрС существует такое значение величины потока проектов  $\beta$ , а также характеристики проектов и системы  $\tau_w^{(i)}$ ,  $t_w$  и рынка  $\alpha_w$ ,  $\forall w \in W^{(i)}$ , при которых система перестанет быть экономически эффективной и перестанет обрабатывать все проекты, поступающие на ее вход. Тогда **существует** такое  $\beta$ , при котором для заданных характеристик проектов и системы  $\tau_w^{(i)}$  и  $t_w^{(i)}$ ,  $\forall w \in W^{(i)}$ , система остается экономически эффективной (ее чистый дисконтированный доход  $NPV > 0$ ).

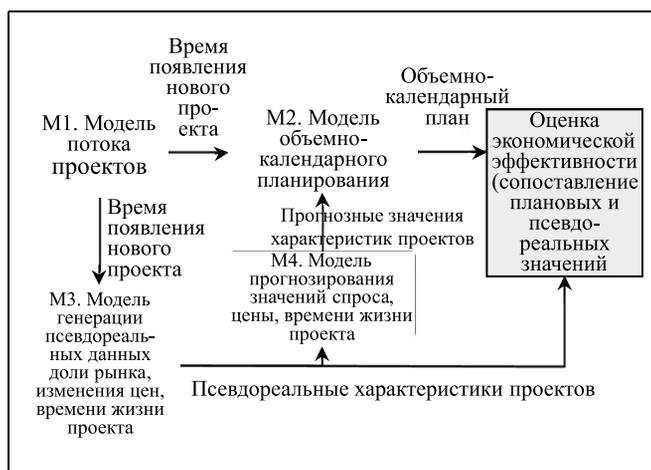


Рис. 1. Структура модели

Это предположение выступает обобщением таких явлений, как экономическая несостоятельность ПрС при отсутствии проектов и инновационный регресс при чрезмерном числе внедряемых новых проектов.

Для проверки предположения построим модель, структура которой приведена на рис. 1. На данный момент нет информации о том, каким случайным процессом должна описываться модель М1. Можно предположить, что в зависимости от предметной области описания могут быть различными. При планировании деятельности ПрС обычно выделяют различные уровни планирования в зависимости от временных горизонтов: оперативное (обычно 7–10 дней), тактическое (месяц или квартал), стратегическое (год и более). При решении задач оперативного и тактического планирования важной характеристикой представляется число новых проектов, рассматриваемых в эти интервалы времени, а не моменты времени, в которые они появляются. Эти диапазоны времени выступают как накопители в системах массового обслуживания (СМО). Тогда для функционирования ПрС наиболее важной характеристикой становится частота появления новых проектов. Жизненный цикл ПрС описывается инновационными кривыми. Однако у крупных ПрС он сильно растянут во времени и на этапе зрелости представляет собой линию с некоторыми колебаниями, сгладить и исключить переход к спаду которых стремится управленческий персонал с помощью повышения эффективности ПрС; при этом время появления новых проектов — случайная величина, которая выступает в качестве характеристики потока проектов  $\beta$ . Поэтому для исследования характеристик потока проектов будем рассматривать поток Пуассона. Данные об объеме спроса, сопоставляемые каждому

проекту, как известно, описываются S-образной или инновационной кривыми [23], а отклонения подчиняются нормальному закону распределения (в некоторых особых случаях описываются несимметричными вариантами нормального закона) [24]. Данные о цене и времени жизни могут быть сгенерированы на основе нормального закона распределения с заданным средним значением, которое соответствует типовым значениям для выпускаемых групп товаров рассматриваемой ПрС. В качестве прогнозных значений (М4) будем рассматривать базовые значения, используемые для генерации отклонений в модели М3. Такой подход позволяет избавиться от ошибок, связанных с прогнозированием, и тем самым повысить точность эксперимента для проверки предположения 1.

Модель объемно-календарного планирования (М2) в простейшей постановке без учета ограничений потребности материалов может быть описана так:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\Gamma} \left( \sum_{w=1}^{w^{(i)}} \left( C_w^{(i+1)} x_w^{(i+1)} - \mathbb{I}_w^{(i+1)} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{w_1=1}^{w_1^{(i)}} \sum_{w_2=1}^{w_2^{(i)}} \left( m_{w_1, w_2} \theta(x_{w_1}^{(i)}, x_{w_2}^{(i+1)}) \right) \right) - P^{(i)} \rightarrow \max, \end{aligned}$$

$$0 \leq x_w^{(i+1)} \leq \alpha_w^{(i+1)}, \quad \forall w,$$

$$\sum_{w=1}^{w^{(i)}} u_w x_w^{(i)} \leq U^{(i)},$$

где  $x_w^{(i+1)}$  — объем выпуска товара  $w$  на шаге  $i$ ;  $P^{(i)}$  — величина постоянных затрат, приходящихся на период времени, соответствующий шагу  $i$ ;  $u_w$  — потребность производственного ресурса на единицу товара  $w$ ;  $U$  — объем производственного ресурса в рассматриваемой ПрС;  $C_w^{(i)}$  — стоимость товара  $w$  на шаге  $i$ ;  $\mathbb{I}_w^{(i)}$  — объем производственных затрат, необходимых для организации выпуска товара  $w$  на  $i$ -м шаге;  $\Gamma$  — горизонт планирования (соответствует числу шагов работы модели);  $m_{w_1, w_2}$  — объем затрат, необходимый для переориентации производства с одного вида товара  $w_1$  на другой  $w_2$ ;  $\theta(x_{w_1}^{(i)}, x_{w_2}^{(i+1)})$  — булева функция, которая принимает значения согласно условию:

$$\theta(x_{w_1}^{(i)}, x_{w_2}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \left( (x_{w_1}^{(i)} = 0) \wedge (x_{w_2}^{(i+1)} > 0) \right), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для простоты будем считать, что:

— каждый шаг расчета  $i$  соответствует периоду времени, равному  $\max(\tau_w^{(i)}, \forall w \in W^{(i)})$ , которое включает, при необходимости, время на переналадку оборудования (в результате шаг расчета  $i$  в реальности соответствует разным интервалам времени);

— все новые проекты сразу попадают в производственную корзину ПрС и исключаются из нее через время  $t_w$ .

Такие параметры, как  $\beta$ ,  $\alpha_w$  вносят неопределенность. Если влияние потока проектов  $\beta$  мы будем исследовать путем многократного моделирования, то такие параметры, как  $\alpha_w$ ,  $C_w$  и  $t_w$  мы определяем на основе прогнозирования и пользуемся для этого данными статистики. Строя функции для интервалов времени, для которых известна статистика, можно определить, каким законом распределения будут описываться отклонения (при постановке рассматриваемой в статье задачи мы пользовались нормальным распределением) и тогда перевести на основе этих распределений прогнозы в нечеткую форму. Для нечетких функций, заданных трапециевидными функциями принадлежности, известны методы решения оптимизационных задач [25]. Перевод в трапециевидную форму осуществим, если принять за большие границы значения  $\pm 2\sigma$ , а меньшие границы  $\pm \sigma$ , где  $\sigma$  — доверительный интервал (в нашем случае для критерия Пирсона). Это позволит оценить диапазоны возможных отклонений при решении задачи объемно-календарного планирования.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Результатом моделирования будет множество моментов времени появления новых проектов, их характеристик, а также объемно-календарный план производства. Если считать, что в начальном положении система не имеет проектов в производственной корзине, то значение критерия на каждом шаге расчета будет представлено функцией принадлежности, тогда изменение значения критерия можно увидеть на рис. 2. Моменты появления новых проектов отмечены черными точками, реальные значения критерия иллюстрирует черная сплошная кривая. Как видно из иллюстрации, возможный диапазон может уходить в отрицательные значения. Тогда задача сводится к поиску таких характеристик, при которых ПрС окажется экономически эффективной. В качестве таких характеристик выступают вероятность появления нового проекта (непосредственно влияет на частоту появления новых проектов), средняя цена, время жизни проектов и их доверительные интервалы.

Получаем комбинаторную задачу, в которой параметры цены и времени жизни можно принять, исходя из характеристик реализуемых проектов, а доверительные интервалы — на основе статистики реализуемых ПрС проектов. Таким образом, проверку гипотезы о наличии граничных значений проверим только при изменении вероятности появления проектов. При этом, так как процесс носит вероятностный характер, требуется множественное

Таблица 1

Значения, полученные после 100 повторений моделирования на интервале в 1000 шагов

Вероятность появления проекта	Число проектов	Число внедрений	Число повторных запусков	Прибыль (у. е.)
0,01	8,9 дисперсия 0,42	8,8 дисперсия 0,43	5,58 дисперсия 11,72	-17 511 484,25 дисперсия 748 139,05
0,02	20,34 дисперсия 0,095	20,03 дисперсия 0,067	27,27 дисперсия 10,667	17 143 805,35 дисперсия 1 097 300,039
0,05	49,44 дисперсия 0,777	47,06 дисперсия 0,595	96,8 дисперсия 4,354	86 844 718,98 дисперсия 2 314 833,277
0,1	94,89 дисперсия 0,984	80,9 дисперсия 1,249	195,92 дисперсия 1,4067	157 103 519,81 дисперсия 436 698,49
0,2	182,17 дисперсия 2,175	115,51 дисперсия 2,170	294,42 дисперсия 3,521	232 092 926,03 дисперсия 948 859,189
0,3	258,35 дисперсия 2,570	126,19 дисперсия 0,038	342,82 дисперсия 1,641	278 637 237,250 дисперсия 1 173 966,081
0,4	329,26 дисперсия 3,906	132,37 дисперсия 1,260	386,57 дисперсия 3,750	312 672 823,45 дисперсия 6 996 049,981
0,6	451,79 дисперсия 3,50	141,65 дисперсия 2,35	461,32 дисперсия 5,558	35 0205 995,63 дисперсия 4 933 983,117
0,9	592,22 дисперсия 5,675	147,31 дисперсия 2,124	575,55 дисперсия 4,980	380 804 571,34 дисперсия 8 234 122,756

моделирование (применение метода Монте-Карло). Число экспериментов при этом будем определять, опираясь на центральную предельную теорему [26], из которой следует, что среднее случайных величин есть величина неслучайная (табл. 1).

Из приведенных расчетов видно, что эффективность системы зависит от числа проектов и частоты их появления. При этом можно наблюдать, с одной стороны, ситуацию недостатка проектов, когда система показывает отрицательную эффек-

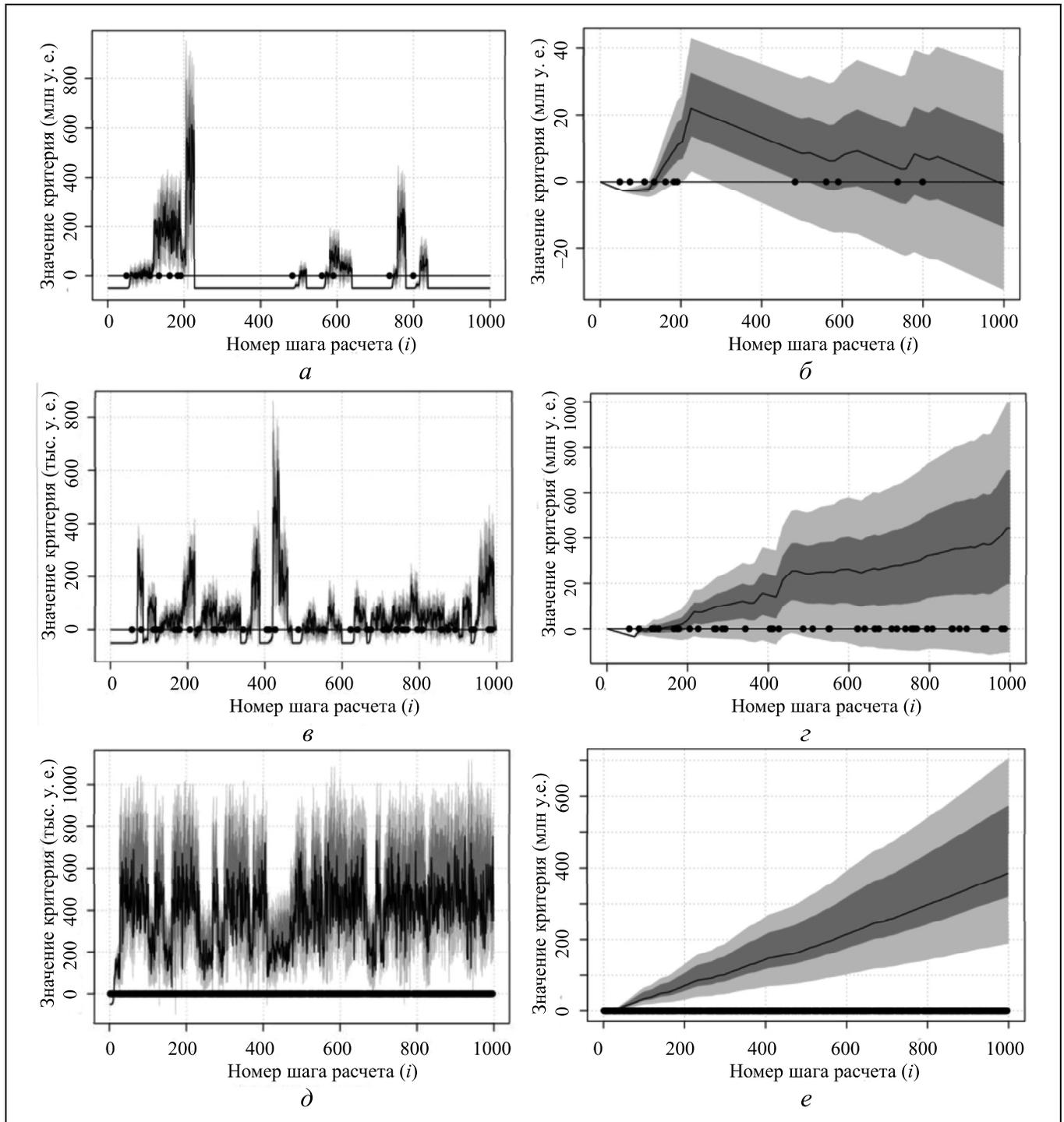
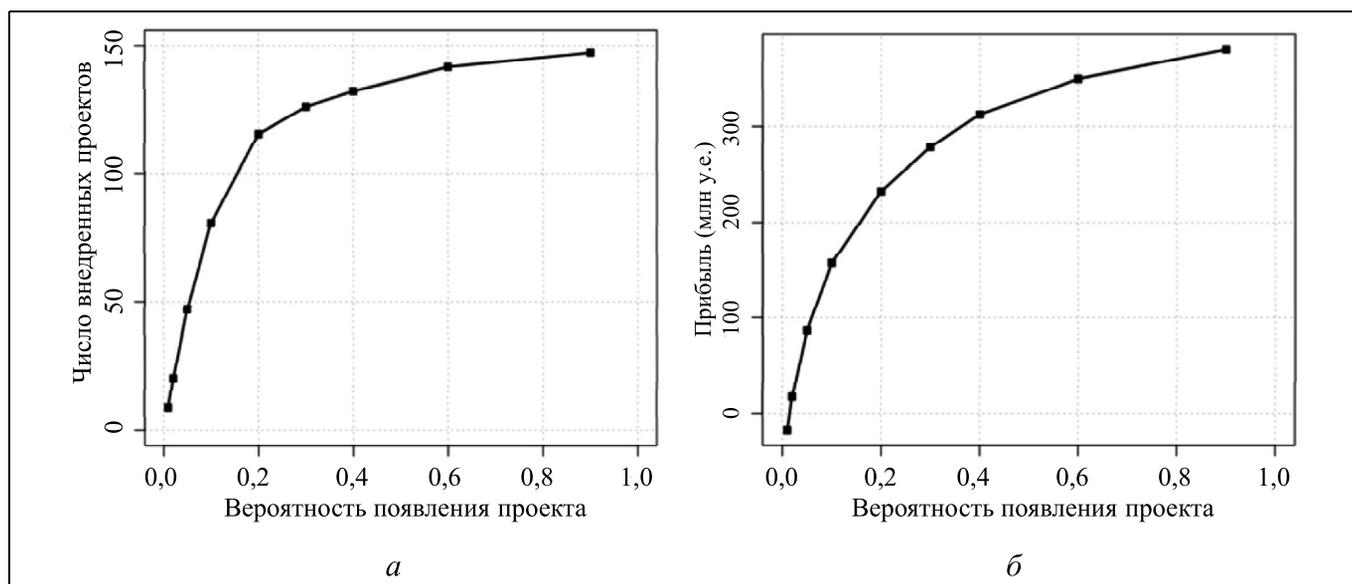


Рис. 2. Примеры решения задачи объемно-календарного планирования: моментальные значения критерия (*a*, *в*, *д*), значения критерия накопительным итогом (*б*, *г*, *е*); для значения вероятности появления проекта, равному 0,01 (*a*, *б*), 0,05 (*в*, *г*), 0,9 (*д*, *е*)



**Рис. 3. Характеристические кривые рассматриваемой системы:** зависимость числа внедренных проектов от вероятности их появления (а) и зависимость объема прибыли от вероятности появления проектов (б)

тивность (ситуация для вероятности появления проектов, равной 0,01 на рис. 2 и в табл. 1), а с другой стороны — ситуацию, связанную с насыщением проектами, когда большая часть проектов не внедряется и рост числа проектов не приводит к росту экономической эффективности (ситуация для вероятности появления проектов, равной 0,2 на рис. 2 и в табл. 1).

При этом каждая ПрС имеет некоторые предельные значения (значения, к которым она асимптотически приближается) числа проектов, которые она может внедрить, и объем средств, которые она сможет заработать при реализации этих проектов (соответствующие характеристические кривые для рассматриваемой системы изображены на рис. 3).

Решая сформулированную задачу в моменты времени, когда в системе происходят изменения (принцип особых состояний), получим нечеткую функцию от времени, заданную таблично. Использование нечетких чисел приводит к тому, что критерий и ограничения переходят в нечеткую форму и могут в некоторых случаях нарушаться. Это будет сигнализировать о необходимых изменениях ПрС.

Согласно теореме Байеса, вероятность успешного перехода в новое состояние будет зависеть от предыдущего состояния (состояния, в котором находится объект/система управления). Поэтому при реализации полученного плана необходимо проводить мониторинг реакции системы. В этом случае можно будет идентифицировать отклонения и осуществить корректирующие действия. В качестве отклонений можно рассматривать недостаточную или чрезмерную частоту появления новых проектов.

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматриваемый в статье подход имеет широкое применение в СМО, им традиционно пользуются при моделировании материальных потоков ПрС. Он подходит для случаев, когда ПрС работает на медленно меняющихся рынках, выпускает продукцию с длинным жизненным циклом, невысокой долей инновационной составляющей.

Тенденции, наблюдающиеся на рынках продукции и ПрС, связаны с тем, что оборудование становится все более универсальным, продукция более технологичной, ее время жизни сокращается, стоимость и объем средств для организации внедрения увеличиваются. Это приводит к увеличению рисков, связанных с реализацией каждого отдельного проекта. При этом сам факт вывода нового проекта на рынок не является целью, так как при постоянном необоснованном внедрении инновационных проектов может возникнуть такое явление, как инновационный регресс. Отсутствие необходимости обязательного внедрения новых проектов подтверждается и насыщением ПрС проектами, показанным в результате моделирования. Однако функционирование ПрС в таких условиях не должно быть зависимым только от удачи. В условиях, когда сам проект становится товаром для ПрС, определение параметров, связанных с этими товарами и их количеством, становится необходимым условием успешного развития ПрС. Уже появились организации, ориентированные на проектную работу [27]. Может показаться, что решение

задачи объемно-календарного планирования устаревает проблему выбора проектов. Однако такой подход только смещает риски из области планирования в область внутренней организации ПрС. Каждая ПрС имеет опыт реализации проектов, которые менеджмент квалифицирует как удачные или неудачные. В этом случае можно выдвинуть предположение 2 о том, что проекты перед включением их в производственную корзину могут быть предварительно квалифицированы как такие, реализация которых в конкретной ПрС будет удачна либо нет. Таким образом, можно выполнить прореживание проектов-кандидатов на включение в производственную корзину, а задачу формирования потока проектов свести к формированию потока потенциально успешных проектов.

**Предположение 2.** Пусть задано множество проектов  $W$ , характеризующееся множеством значений параметров  $P_w, \forall w$ . Тогда **выбор проектов** для рассматриваемой ПрС заключается в определении категорий для значений из подмножества  $S_u$  и нахождении функции отображения  $F$  посредством описания преобразования сущностей из множества  $W$  в категории множества  $S, F: W \rightarrow S, \forall w$ .

Очевидно, что разные ПрС ориентированы на выпуск различной продукции. Существуют предприятия с длинным производственным циклом и длительным периодом жизни изделий (например, в авиастроении), средним жизненным циклом продукции (в автомобильной отрасли сменяемость моделей происходит в течение 3–5 лет), малые инновационные предприятия ориентированы на выпуск продукции с коротким жизненным циклом; к тому же, ПрС делятся по отраслям, имеют специализацию, связанную с видами работ, стоимостью реализуемых проектов, их технологической сложностью и пр. Таким образом исходное множество проектов можно сузить, в результате чего сформируется множество проектов-кандидатов, наилучшим образом подходящих рассматриваемой ПрС.

Первичный отбор проектов и выведение проектов из производственной корзины может быть осуществлено с помощью фильтрации. Входной и выходной фильтры включают в себя оценку NPV и экспертную оценку.

Для включения проекта  $w$  в производственную корзину необходимо провести оценку NPV на среднесрочную перспективу:

$$\sum_{j=i}^{\Gamma} \left( \frac{\sum_{w=1}^{w^{(j)}} C_w^{(j)} x_w^{(j)} - \mathbb{I}_w^{(j)}}{(1+d)^{(j-i)}} \right) > 0,$$

где  $d$  — ставка дисконтирования.

Для проектов, претендующих на исключение из производственной корзины на  $i$ -м шаге, необходимо выполнение условий:

- эффективный объем производства должен быть равен нулю ( $x_w^{(j)} = 0, \forall j: i < j \leq \Gamma$ , для проекта  $w$ );
- вложенные в его реализацию средства уже были возвращены:

$$\sum_{j=i}^{\Gamma} \left( \frac{\sum_{w=1}^{w^{(j)}} C_w^{(j)} x_w^{(j)} - \mathbb{I}_w^{(j)}}{(1+d)^{(j-i)}} \right) \geq 0.$$

Решение задачи классификации проектов будет сводиться к определению множества значимых параметров  $P_w, \forall w$ . Очевидно, что набор таких параметров для разных ПрС и отраслей может быть разным. Однако достоверность предположения можно проверить на сгенерированных для рассмотренного эксперимента данных (прогноз спроса, цены, времени жизни проекта и данные о потребностях в мощностях). Для этого в качестве успешных проектов, рекомендуемых для внедрения, отметим проекты, которые были внедрены в производство.

Для проведения эксперимента будем выполнять несколько прогонов: первый — для генерации обучающей выборки и обучения классификатора, последующие — для проверки влияния фильтрации проектов на экономическую эффективность ПрС. Выбор классификатора представляется отдельной задачей, так как, согласно теореме [28], нет одного метода, который во всех условиях будет показывать хорошие результаты. На рис. 4 приведено

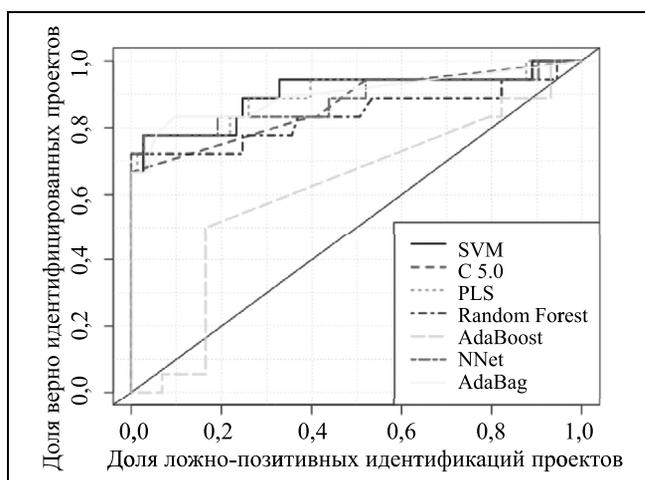
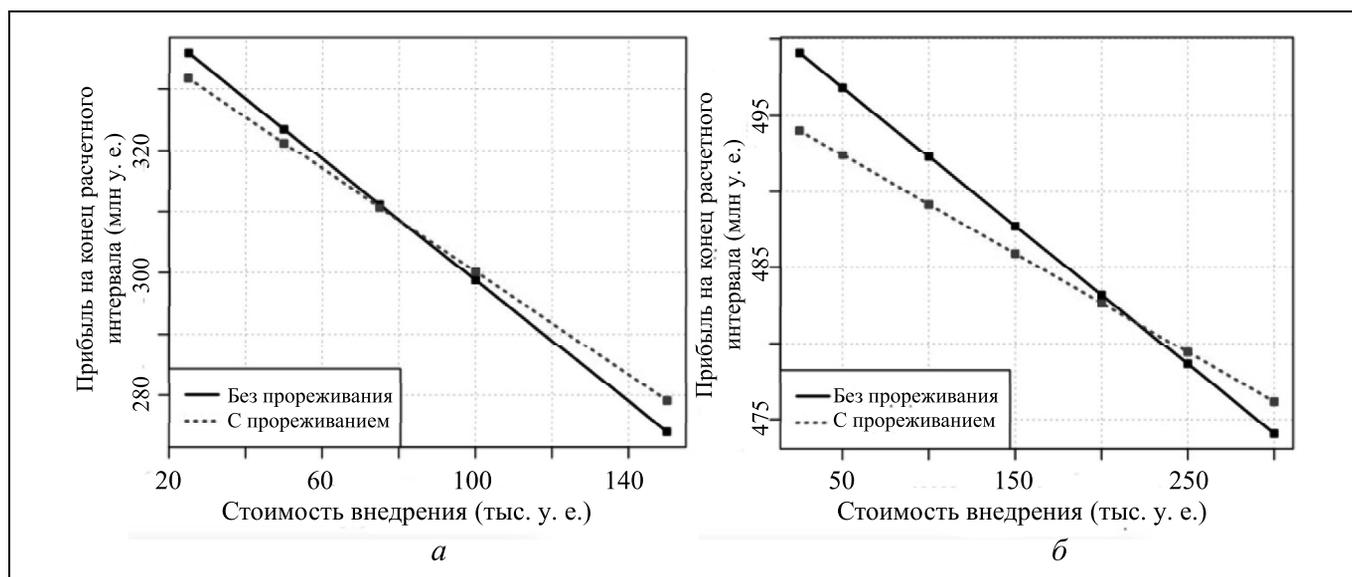


Рис. 4. ROC-кривые соответствующие различным примененным методам классификации



**Рис. 5. Зависимость прибыли от стоимости внедрения проекта:** один вариант потока, 386 проектов (а); другой вариант потока, 363 проекта (б)

сравнение методов для рассматриваемой задачи на основе ROC-кривой (англ. *Receiver Operating Characteristic*, рабочая характеристика приемника) при размере обучающей выборки, полученной при генерации 1000 значений в течение пяти циклов расчета с вероятностью появления проекта 0,5, и тестовой выборке, полученной в течение одного цикла при генерации 1000 значений.

Для классификации проектов при проверке гипотезы будем применять метод SVM (англ. *Support Vector Machine*, метод опорных векторов). Несмотря на то, что качество классификатора может быть лучше, фильтрация проектов позволяет снизить нагрузку на ПрС. Это способствует повышению экономической эффективности при превышении определенной величины стоимости внедрения проектов. На рис. 5 изображены графики, позволяющие сравнить зависимость прибыли от стоимости внедрения проекта в ПрС с прореживанием и без прореживания потока проектов на интервале в 1000 шагов при вероятности появления проектов 0,5.

При этом численное моделирование показывает, что генерация нового потока проектов смещает значения величин стоимости внедрения и разницы в стоимостях проектов в производственной корзине, однако находится точка, при которой прореживание проектов приводит к повышению эффективности ПрС. Возможность нахождения такой точки подтверждается множественным моделированием [26], которое показывает, что при увеличении вероятности появления проекта наблюдается увеличение прибыли; при прореживании и умень-

шении значения вариации (разницы между значениями) прибыли между проектами при решении задачи планирования с учетом всех проектов и при реализации только тех проектов, которые останутся после прореживания (например, при вероятности появления проектов 0,8 и стоимости внедрения 500 000 у. е. прореживание позволяет увеличить прибыль в среднем на 492 317,2976 у. е. при вариации этого значения, равной 4,42660724).

Таким образом последовательность появления проектов в производственной корзине и интервалы между их появлением оказывают существенное влияние на эффективность функционирования ПрС. Это говорит о том, что эти параметры характеризуют не только саму ПрС, но и поток проектов и корзину проектов, с которой ПрС работает. Это подтверждает мнение, что важен не только проект, но и время, когда он появляется. Численный эксперимент подтверждает возможность прореживания проектов и повышения за счет этого экономической эффективности ПрС. При этом если учитывать, что ПрС для обучения классификатора может задействовать опыт успешной и неуспешной реализации проектов, то это приведет еще и к снижению рисков, связанных с реализацией проектов.

Можно ожидать, что дальнейшее исследование этого вопроса позволит сформировать формализованные требования к проектам и времени их появления. Такое знание, без сомнения, снизит величину влияния слабо формализуемых факторов, связанных с применением экспертных оценок при разработке и поиске новых проектов под конк-

ретную ПрС, их адаптации и внедрении, и может рассматриваться как отдельная область исследований [29].

Описанная модель не рассматривает как функциональную зависимость переменные затраты, связанные с функционированием ПрС. Однако величина этих затрат может оказывать существенное влияние на ее эффективность. В работе [7] показано, что существуют факторы, которые могут изменить планы по реализации инновационной продукции. Тогда плавный вывод товаров на рынок и учет при построении прогнозов факторов, связанных с диффузией проектов, приводящей к удовлетворению части прогнозируемого спроса конкурентами, позволяет снизить расходы ПрС за счет уменьшения величины переменных затрат. При этом происходит и снижение рисков, связанных с выводом нового товара на рынок.

В результате мы получаем два типа вариантов формирования возможных траекторий развития ПрС с помощью управления портфелем проектов: варианты наполнения портфеля во времени (время и типы появления проектов в производственной корзине ПрС) и варианты реализации портфеля в форме объемно-календарного плана с учетом диффузных явлений и без.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА РЕШЕНИЯ ОБ ОБЪЕМАХ ВЫПУСКА НА НЕСКОЛЬКО ШАГОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

При реализации портфеля проектов существуют различные траектории его реализации, имеющие различную прибыльность и риски для ПрС. Как и в ситуации с проектами, можно предположить, что особенности ПрС могут обуславливать дополнительные особенности способа реализации, исходя из опыта, организационной структуры и предпочтений ПрС.

**Предположение 3.** Пусть задано множество наборов последовательностей состояний (траекторий), которое необходимо структурировать:  $J = J_l \cup S_u$ ,  $J_l \cap J_u = \emptyset$ . Определенное значение класса из множества известных классов  $S_l$  поставлено в соответствие траекториям в  $J_l$ . Траектории в подмножестве  $J_u$  не размечены.  $S_l$  — неизвестное подмножество классов из полной коллекции:  $S = S_l \cup S_u$ ,  $S_l \cap S_u = \emptyset$ . Тогда **ранжирование решений** заключается в определении категорий для значений из подмножества  $S_u$  и нахождении функции отображения  $F$  посредством описания преобразования сущностей из множества  $J$  в категории множества  $S$ ,  $F: J \rightarrow S, \forall J$ .

Каждая ПрС, реализуя проекты, придерживается определенного плана, связанного с плавностью наращивания объемов производства и вывода про-

дуктов из производства, периодичностью в выпуске определенных изделий и переналадки для этого производственных линий. Часто такие особенности в организации производства представляют собой отражение опыта и квалификации управленческого персонала, принципов организации труда, возможностей оборудования. Используя статистические данные о работе ПрС, можно учитывать такие особенности при составлении производственной программы.

Для выбора траектории необходимо формирование множества траекторий при решении задачи объемно-календарного планирования и формирование обучающей выборки с учетом динамики изменения значений за рассматриваемый период планирования. Формирование обучающей выборки можно осуществлять на основе экспертной оценки поведения производственной системы в прошедшие периоды и формирования на их основе размеченного множества траекторий (обучающей выборки), согласно схеме, приведенной на рис. 6. Для учета фактора времени при обучении и применении классификатора значение, соответствующее каждому моменту времени, рассматривается как отдельная переменная. Такой подход учета времени успешно применяется в технических системах (например, при предсказании аварийной работы на основе данных вибродиагностики [30]). При отсутствии данных о реализации проектов ПрС в качестве данных для обучения модели можно пользоваться целевыми данными программ развития. В этом случае будет выбираться вариант, позволяющий реализовать заложенные в программу показатели развития.

Наиболее сложной задачей при такой постановке представляется формирование достаточного для обучения и тестирования множества размеченных решений. Сложность связана еще и с тем, что изменение среды, в которой функционирует ПрС, налагает ограничение на глубину выборки в прошлое, которую можно задействовать. Для увеличения объема выборки в рамках группы предприятий, имеющих аналогичную структуру, можно пользоваться данными других ПрС, а также при наличии альтернативных планов, которые были рассчитаны, но не реализованы, рассматривать их как размеченные данные, которые могут быть классифицированы и добавлены в обучающую выборку [31].

Применение методов машинного обучения позволяет решить задачу классификации в вероятностной форме, т. е. найти вероятность принадлежности траектории к классу успешно реализуемых производственных программ. Такое решение позволяет ранжировать рассматриваемые траектории,

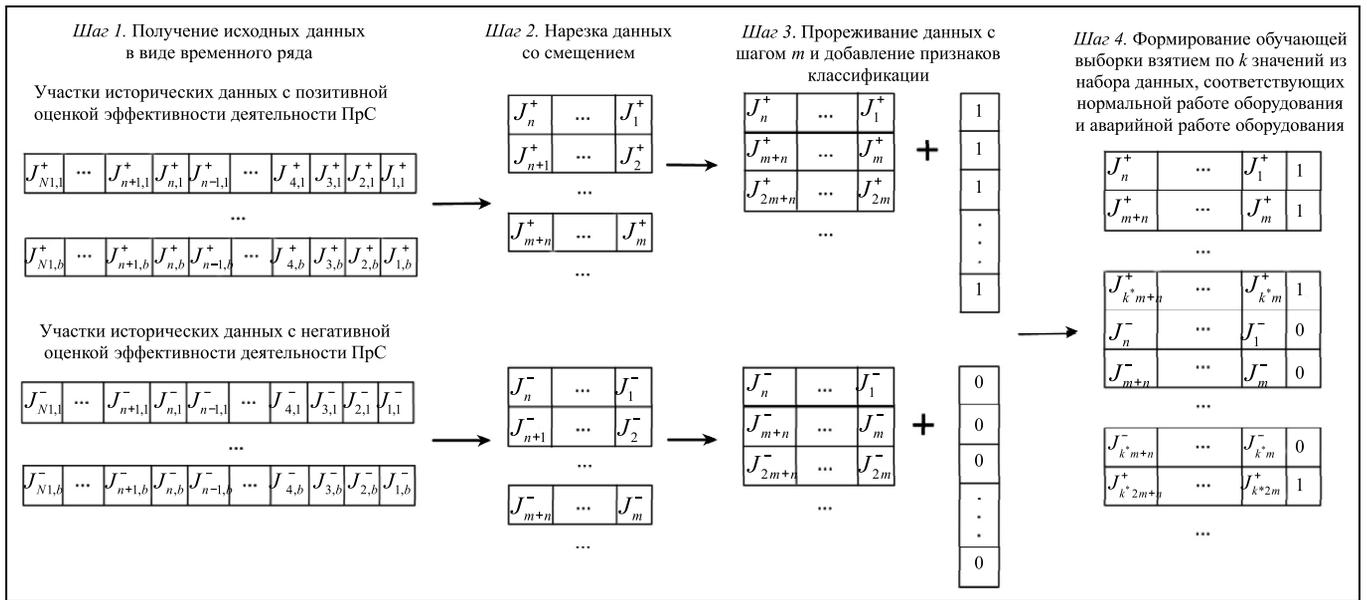


Рис. 6. Принцип формирования обучающей и тестовой выборок для решения задачи выбора траекторий развития ПрС

связанные с реализацией производственного портфеля.

Сформировав множество возможных траекторий на основе имеющихся вариантов появления проектов, их типов и моментов реализации, рассмотрим каждый момент времени в будущем (до горизонта планирования  $\Gamma$ ) как множество возможных состояний. Если при рассмотрении появления проектов во времени существуют моменты, когда в разных вариантах производственной корзины имеются аналогичные проекты, возможен переход с одной траектории на другую (соответствующую другой последовательности реализации проектов). Такая ситуация возникает, например, при рассмотрении реализации одного и того же производственного портфеля с учетом явления диффузии и без. Вероятности того, что система попадет в каждое из состояний, определяются функцией принадлежности. Вероятность реализации траектории целиком определяется цепным правилом:

$$P(X^{(0)}, \dots, X^{(\Gamma)}) = \prod_{i=1}^{\Gamma} P(X^{(i)} | X^{(i-1)}, \dots, X^{(1)}).$$

Таким образом, каждой траектории в соответствие ставятся вероятность ее реализации и вероятность ее принадлежности к классу успешно реализуемых, тем самым мы формируем область выбора и множество решений, выбор из которых будет осуществлять эксперт (рис. 7).

Каждому решению будет соответствовать график выпуска продукции на рассматриваемом горизонте планирования (рис. 8).

В основе описанного подхода лежит предположение, что рассматриваемые траектории представляются значимыми для задач классификации. Если бы это было не так, то добавление новых данных в выборки приводило бы не к повышению качества классификации, а его снижению [33].

Подход, связанный с решением задачи классификации, базируется на предположении об однородности данных.

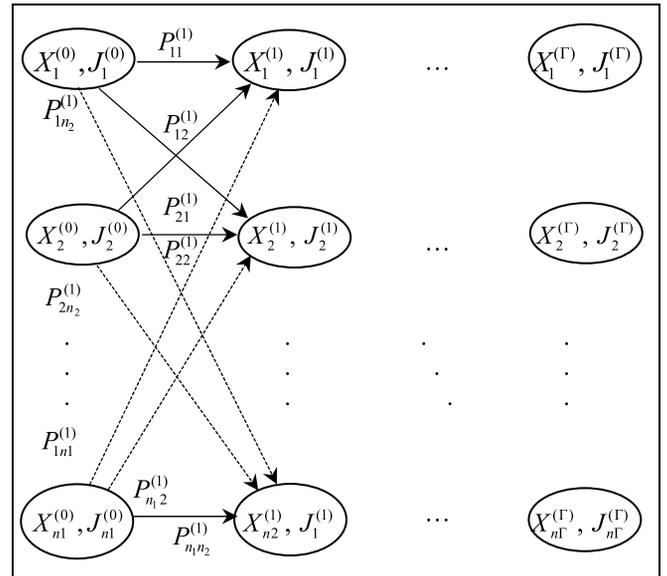


Рис. 7. Область выбора решений задачи объемно-календарного планирования

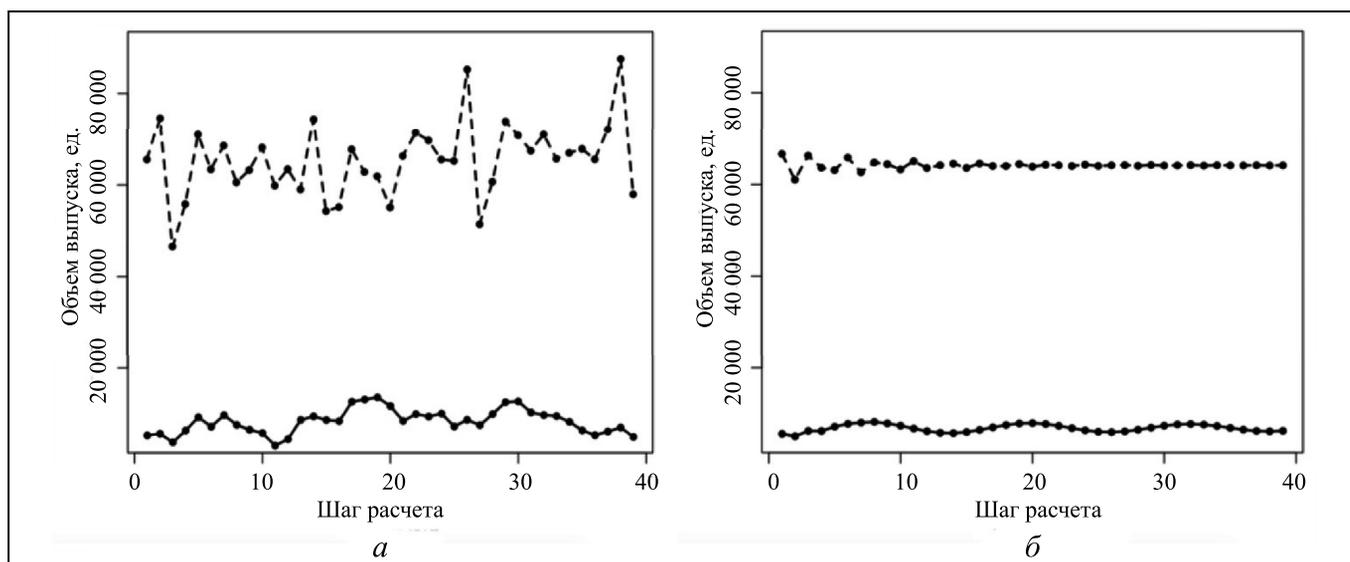


Рис. 8. Пример объемно-календарного плана для производственной корзины из двух товаров при выборе: *а* — одной траектории; *б* — другой траектории развития

**Предположение 4.** Если две траектории  $J_1$  и  $J_2$  расположены близко друг к другу, тогда должны быть соответствующие им выходы  $S_1, S_2$ , находящиеся в тех же отношениях.

Это свидетельствует о том, что если в пространстве данных существует движение к какому-либо классу, то можно делать обобщения в рамках модели. Иначе говоря, если данное предположение верно, то получив объемно-календарный план в нечеткой форме при отклонении значений прогнозов, используемых при решении задачи в пределах доверительного интервала, можно не производить перерасчет модели, так как отклонения значений целевой функции также окажутся в пределах доверительного интервала и ее значения будут иметь те же тенденции к изменению (т. е. к уменьшению или увеличению).

Исходя из сказанного, можно сделать вывод о том, что при рассмотрении траекторий реализации производственных проектов возможны отклонения, которые, однако, не будут приводить к значительным изменениям в объемах производства и значении критерия. Эти отклонения описываются функциями принадлежности при решении задачи объемно-календарного планирования в нечеткой форме.

Возможность ранжирования объемно-календарных планов исходя из характеристик потока проектов позволяет сформировать производственную программу на время горизонта планирования. Ранжирование при этом осуществляется на основе решения задачи классификации в вероятностной

постановке. Мерой будет выступать вероятность успешной реализации рассматриваемого объемно-календарного плана.

Для рассмотрения вариантов для каждого из проектов-кандидатов необходимо рассчитать бизнес-план при реализации в рассматриваемой ПрС. Таким образом мы получим характеристики проектов и, моделируя время их реализации с помощью потока проектов, получим множество вариантов, которые могут быть ранжированы.

В качестве примера реализации производственной программы можно рассмотреть создание малых инновационных предприятий (МИП) университетами. Университет рассматривает каждый МИП как отдельный инновационный проект в рамках программы развития. Таким образом, на примере университета можно промоделировать ситуацию с потоком проектов, отбором лучших из них и выбора для них лучшего времени реализации. При этом к 2010 г., когда университетам на законодательном уровне было разрешено формировать вокруг себя пояс инновационных предприятий, накопился избыток проектов-кандидатов, и такая ситуация сохранялась с 2010 г. по 2014 г. В этот период через МИП в Пермском национальном исследовательском политехническом университете (ПНИПУ) было реализовано 17 проектов согласно графику, приведенному в табл. 2.

Успешная реализация программы подтверждается интегральными характеристиками доходов, которые постоянно росли (рис. 9) [7]. За рассматриваемый период число проектов-кандидатов со-

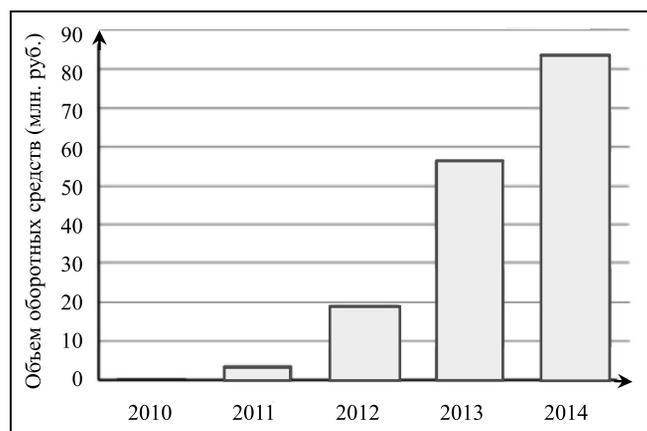
ставило 50, из них 11 было рекомендовано к безусловной реализации, 13 отклонено, а по оставшимся 26 однозначное решение не было принято (их реализация могла быть осуществлена при удачной рыночной конъюнктуре) [7]. В результате анализа на модели было реализовано 17 проектов.

Основной сложностью, связанной с применением методов моделирования, представляется проблема наличия необходимых данных. Сбор данных становится основной задачей. При этом задачу упрощает знание о том, какие именно данные необходимы, что может быть учтено при разработке корпоративных информационных систем и поиске потенциальных проектов для реализации.

Таблица 2

**Статистическая информация о МИП, созданных с участием Пермского национального исследовательского политехнического университета по состоянию на начало 2015 г.**

Название	Дата создания
ООО «Вулкан-Плазма»	13.01.2010
ООО «Институт Инновационных ИТ-решений»	03.11.2010
ООО «Научно-производственный центр «Энергия»	20.08.2010
ООО «Малое инновационное предприятие «ИНТЕЛЛЕКТ»	27.05.2011
ООО «Математические модели сплошных сред»	05.07.2011
ООО «Институт Стратегических Материалов и Технологий»	30.06.2011
ООО Малое Инновационное Предприятие «Техноресурс»	04.06.2011
ООО «Международная исследовательская группа»	01.06.2011
ООО «Научно-производственная компания «Новые технологии»	26.12.2011
ООО «Малое инновационное предприятие «Реализация инженерно-технических целей порошковой металлургии»	20.02.2012
ООО «Смарт-Ап»	01.03.2012
ООО «Центр инженерного консалтинга»	23.06.2012
ООО «Центр ЭЛТ»	15.04.2013
ООО МИП «ИНТЭК»	11.09.2013
ООО «НТЦ Электротехники»	24.09.2013
ООО «ЭКОПОТЕНЦИАЛ»	21.02.2014
ООО «МИП «Прогноз РНМ»	17.07.2014



**Рис. 9. Статистические данные об оборотах реализованных проектов через МИП ПНИПУ**



**Рис. 10. Цикл реализации и корректировки производственной программы в условиях динамики внешней среды**

Информационные системы смогут быть активным элементом при принятии решений, а не только выполнять роль поддержки управленческих концепций, реализуемых в ПрС. Кроме этого, в условиях динамики внешней среды и непрерывных внутренних изменений цели ПрС тоже меняются, что накладывает особые условия на применение моделей и реализацию решений, получаемых на моделях в практической деятельности (рис. 10).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В статье представлена модель, позволяющая определять характеристики потока проектов для ПрС и проектов, позволяющих системе находиться в экономически эффективном состоянии. Приведенное исследование системы позволяет обосновывать управленческие решения, связанные с изменениями в деятельности ПрС, расширением или сокращением производственных мощностей, сменой типа выпускаемой продукции, необходимостью ее модернизации, проводить сравнение ПрС и типов проектов для реализации на основе оценок их экономической эффективности. Получаемые результаты показывают не только предполагаемый итог, но и возможные отклонения. Таким образом может быть решен широкий круг производственно-экономических задач, связанных с определением стратегии поведения ПрС [33, 34].

Учитывая, что внедрение инновационных проектов сопряжено с повышенными рисками, особенно в условиях глобального рынка, при появлении кризисных явлений и перестройки структуры рынка повышение уровня объективности принимаемых решений становится существенным конкурентным преимуществом при управлении ПрС.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Chuvaev, A., Khayrullina, M., Kislytsyna, O.* Production Systems Continuous Improvement Modelling // *Quality Innovation Prosperity*. — 2015. — Vol. 19, no. 2. — P. 73–86.
2. *Tirrole, J.* The Theory of Industrial Organisation. — Cambridge: MIT, 1988. — 479 p.
3. *Ouyang, M.* Review on Modeling and Simulation of Interdependent Critical Infrastructure Systems // *Reliability Engineering & System Safety*. — 2014. — Vol. 121. — P. 43–60.
4. *Koedela, C., Mihalyb, K., Rockoffe, J.E.* Value-Added Modeling: A Review // *Economics of Education Review*. — 2015. — Vol. 47. — P. 180–195.
5. *Forrester, J.W.* Industrial Dynamics // *Journal of the Operational Research Society*. — 1997. — Vol. 40, no. 10. — P. 1037–1041.
6. *Schlagenhauser, C., Amberg, M.* A Descriptive Literature Review and Classification Framework for Gamification in Information Systems // *ECIS 2015 Completed Research Papers*. — 2015. — P. 1–15.
7. *Мыльников Л.А.* Управление и внедрение результатов инновационных проектов в условиях динамики внешней среды и диффузии проектов // *Инновации*. — 2019. — № 12 (254). — С. 104–112. [*Mylnikov, L.A.* Management and Implementation of Innovation Project Outcomes under Environment Dynamics and Project Diffusion // *Innovations*. — 2019. — No. 12 (254). — P. 104–112. (In Russian)]
8. *Olson, D.L., Wu, D.* Enterprise Risk Management Models. — Berlin: Springer, 2015. — 224 p.
9. *Мыльников Л.А.* Вопросы эффективного управления динамическим портфелем инновационных проектов производственных систем // *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*. — 2019. — Т. 46, № 2. — С. 10–21. [*Mylnikov, L.A.* Project Portfolio Management of Dynamic Innovation Projects in Production Systems // *The Caspian Journal: Management and High Technologies*. — 2019. — Vol. 46, no. 2. — P. 10–21. (In Russian)]
10. *Новиков Д.А.* Комплексные модели системной оптимизации производственно-экономической деятельности предприятия // *Управление большими системами: сборник трудов*. — 2017. — Вып. 65. — С. 118–152. [*Novikov, D.A.* Integrated Models of System Optimization of the Enterprise Activity // *Large-Scale Systems Control*. — 2017. — Iss. 65. — P. 118–152. (In Russian)]
11. *Markowitz, H.* Portfolio Selection // *The Journal of Finance*. — 1952. — Vol. 7, no. 1. — P. 77–91.
12. *Von Neumann, J., Morgenstern, O.* Theory of Games and Economic Behavior: 60th Anniversary Commemorative Edition. — Woodstock: Princeton University Press, 2007. — 776 p.
13. *Tversky, A., Kahneman, D.* Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty // *Journal of Risk and Uncertainty*. — 1992. — Vol. 5, no. 4. — P. 297–323.
14. *Saaty, T.L.* The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation. — New York, London: McGraw-Hill International Book Co., 1980. — 287 p.
15. *Saaty, T.L., Oezdemir, M.S.* The Encyclicon: a Dictionary of Decisions with Dependence and Feedback Based on the Analytic Network Process. — Pittsburgh. PA: RWS Publications, 2005. — 292 p.
16. *Walczak, D., Rutkowska, A.* Project Rankings for Participatory Budget Based on the Fuzzy TOPSIS Method // *European Journal of Operational Research*. — 2017. — Vol. 260, no. 2. — P. 706–714.
17. *Van der Heijden, K.* Scenarios: The Art of Strategic Conversation. — Chichester, West Sussex, Hoboken, N.J: John Wiley & Sons, 2005. — 382 p.
18. *Avdeev, V.P., Kiseleva, T.V., Burkov, V.N.* Multivariant Active Systems // *Automation and Remote Control*. — 2001. — Vol. 62, no. 10. — P. 1645–1650.
19. *Wooldridge, M.J.* An introduction to Multiagent systems. — Chichester, U.K: John Wiley & Sons, 2009. — 484 p.
20. *Mia, L., Winata, L.* Manufacturing Strategy and Organisational Performance: The Role of Competition and MAS Information // *Journal of Accounting & Organizational Change*. — 2014. — Vol. 10, no. 1. — P. 83–115.
21. *Kaschny, M., Nolden, M., Schreuder, S.* Innovationsmanagement im Mittelstand: Strategien, Implementierung, Praxisbeispiele. — Wiesbaden: Springer Gabler, 2015. — 419 p.
22. *Buchmann, J.* Valuing the Innovation Potentials of Firms: What Theory Suggests, Practitioners Do, and Both Implies for Existing Theory. — Wiesbaden: Springer Gabler, 2015. — 239 p.
23. *Мыльников Л.А., Алькдируу Р.Х.* Подход к прогнозированию развития и управления жизненным циклом инвестиционных проектов // *Управление большими системами: сборник трудов*. — 2009. — Вып. 27. — С. 293–307. [*Mylnikov, L.A., Alkdiroo, R.H.* Method for Investment Projects Lifecycle Forecasting // *Large-Scale Systems Control*. — 2009. — Iss. 27. — P. 293–307. (In Russian)]
24. *Sadiakhmatov, M.* Production Planning Model in the Conditions of Changing Demand with a Stochastic Component: Master Thesis. — Koethen: HS Anhalt, 2018. — 38 p.
25. *Villacorta, P.J., Rabelo, C.A., Pelta, D.A., Verdegay, J.L.* FuzzyLP: An R Package for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. Granular, Soft and Fuzzy Approaches for Intelligent Systems. — Cham: Springer International Publishing. — 2017. — P. 209–230.
26. *Doyle, P.G.* Grinstead and Snell's Introduction to Probability. — American Mathematical Society, 2006. — 518 p.
27. *Gemuenden, H.G., Lehner, P., Kock, A.* The Project-Oriented Organization and Its Contribution to Innovation // *Internation-*



- tional Journal of Project Management. — 2018. — Vol. 36, no. 1. — P. 147–160.
28. *Wolpert, D.H., Macready, W.G.* No Free Lunch Theorems for Optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation 1997. — Vol. 1, no. 1. — P. 67–82.
29. *Holahan, P.J., Sullivan, Z.Z., Markham, S.K.* Product Development as Core Competence: How Formal Product Development Practices Differ for Radical, More Innovative, and Incremental Product Innovations // The Journal of Product Innovation Management. — 2013. — Vol. 31, no. 2. — P. 329–345.
30. *Мыльников Л.А., Ефимов Н.А.* Идентификация аварийного режима работы динамического оборудования на основе данных вибродиагностики и методов машинного обучения // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. Т. 4. — Саратов: Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., 2020. — С. 9–13. [*Mylnikov, L.A., Efimov, N.A.* Detection of the dynamic equipment fault mode based on vibration diagnosis data and machine learning methods // *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh: sb. tr. mezhhdunar. nauch. konf. T. 4.* — *Saratov: Saratov Gosudarstveniy Tekhn. un-t im. Gagarina Yu.A.*, 2020. — P. 9–13. (In Russian)]
31. *Constrained Clustering: Advances in Algorithms, Theory, and Applications.* / Ed. S. Basu, I. Davidson, K.L. Wagstaff. — Boca Raton: CRC Press, 2009. — 441 p.
32. *Мыльников Л.А., Краузе Б., Кютц М.* и др. Интеллектуальный анализ данных в управлении производственными системами (подходы и методы). — М.: Издательский дом «БИБЛИО-ГЛОБУС», 2017. — 334 с. [*Mylnikov, L.A., Krause, B., Kuetz, M., et al.* *Intellektual'nyi analiz dannykh v upravlenii proizvodstvennymi sistemami (podkhody i metody).* — Moscow: Izdatel'skii dom «BIBLIO-GLOBUS», 2017. — 334 s. (In Russian)]
33. *Mezhov, S., Mylnikov, L.* Specifics of Project Management on Industrial Innovation // Proceedings of International Conference on Applied Innovation in IT. — Koethen (Anhalt), Germany, 2018. — Vol. 6, no. 1. — P. 103–108.
34. *Tavakoli, A., Schlagwein, D., Schoder, D.* Open Strategy: Literature Review, Re-analysis of Cases and Conceptualisation as a Practice // The Journal of Strategic Information Systems. — 2017. — Vol. 26, no. 3. — P. 163–184.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Ключковым.*

*Поступила в редакцию 20.05.2020, после доработки 23.07.2020.  
Принята к публикации 31.07.2020.*

**МЫЛЬНИКОВ Леонид Александрович** — канд. техн. наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
✉ leonid.mylnikov@pstu.ru

## MANAGING ECONOMIC EFFICIENCY OF PRODUCTION SYSTEMS IN A FLUENT FLOW OF NEW PROJECTS

L.A. Mylnikov

Perm National Research Polytechnic University, Russia

✉ leonid.mylnikov@pstu.ru

**Abstract.** In conditions when new innovative products appear constantly, there is a need for implementing more effective planning and production systems activity management by means of formalization level increase while describing the processes related to formation of production portfolio of a production system. The aim of the article is to solve the scheduling problem and to define requirements for the projects and their flow, which allow the production system to function effectively in conditions of environment uncertainty. The methods of simulation modeling, system analysis, statistical processing of the received results are applied for the purpose of their generalization and machine learning for search and classification of projects and routes of the possible development of production systems. As a result of the research, the model has been obtained, that allows determining empirically the projects and trajectories of the production systems development for the given characteristics of the projects, which will lead to the effective functioning of the systems on the basis of using historical data about the implemented projects to take into account the specifics of the considered system. A number of statements have been formulated that allow us to specify the problem considered in the article and to designate the described approach applicability limits. Knowledge received about the stream of projects and the projects themselves will allow formulating requirements for projects and activities connected with the search and development of new products. The greatest value of the described research lies in the fact that the obtained results show a decrease in the significance of expert assessments when choosing projects and setting targets, as well as a possibility of transition to formal methods, which leads to increasing the objectivity of the obtained assessments.

**Keywords:** production system, innovation project, project flow, model, simulation, scheduling, economic efficiency, Poisson point process.

## ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ АВТОНОМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Г.Г. Стецюра

**Аннотация.** Предложен полностью децентрализованный автономный способ синхронизации взаимодействия объектов в распределенных системах мобильных объектов (например, роботов). Он синхронизирует одновременную передачу сигналов от группы объектов-источников сигналов группе объектов-приемников сигналов, ускоряет групповую передачу данных и выполнение распределенных вычислений непосредственно в сетевых средствах системы. Децентрализация исключает наличие внутри группы объектов центра, управляющего процессами синхронизации. Автономность позволяет выполнять синхронизацию без взаимодействия с внешними управляющими техническими средствами. Объекты группы обмениваются ненаправленными сигналами по беспроводным оптическим или радиоканалам связи. В способе применены два взаимодействующих процесса синхронизации. Основное назначение первого процесса групповой синхронизации — упорядочить действия группы асинхронных объектов и предоставить исходную информацию для второго процесса коррекции синхронизации. Второй процесс ускоряет групповую передачу данных и выполнение распределенных вычислений непосредственно в сетевых средствах системы с помощью более быстрого и точного, чем в первом процессе, учета изменения расположения движущихся объектов. Первый процесс может использоваться независимо от второго процесса для определения расположения, скорости и ускорения движущихся объектов относительно друг друга и внешних активных или пассивных объектов. В целом, предложенная синхронизация без воздействия выделенного центра управления переводит находящуюся в случайном состоянии группу мобильных объектов в синхронно функционирующую мобильную систему.

**Ключевые слова:** группа мобильных объектов, синхронизация, автономность, децентрализация, самоорганизация системы, синхронные распределенные сетевые вычисления.

### ВВЕДЕНИЕ

В статье рассмотрена задача децентрализованной автономной синхронизации процессов взаимодействия объектов в группе распределенных мобильных объектов, в частности роботов. Децентрализация исключает наличие в группе центра, управляющего процессом синхронизации. Автономность позволяет выполнять синхронизацию без взаимодействия с внешними средствами управления.

Синхронизация — очень широкое понятие. В предлагаемой статье процесс синхронизации на-

чинается в группе исходно не взаимодействующих между собой объектов. Все или несколько объектов по собственной инициативе асинхронно передают по одному синхросигналу. Должно выполняться частичное совмещение синхросигналов во времени. Обнаружив момент завершения такого совместного синхросигнала, объекты начинают процесс групповой синхронизации, который упорядочивает дальнейшие действия объектов. В общем случае возникшее синхронное состояние длится в течение заранее неизвестного объектам интервала времени и вновь начинается также в неизвестный момент времени. На основе такого вида синхро-



низации в статье и создается автономное, децентрализованное взаимодействие объектов.

Для выполнения синхронизации группа мобильных объектов пользуется беспроводными сетевыми средствами обмена оптическими или радиосигналами; наличие таких средств переводит группу в систему мобильных объектов.

Требования к точности синхронизации существенно зависят от решаемых системой задач. Наиболее жесткие требования к способам синхронизации предъявляет выполнение распределенных вычислений непосредственно сетевыми средствами систем. Интерес к таким вычислениям возрос в последнее двадцатилетие при создании высокопроизводительных стационарных распределенных компьютерных систем. Наиболее известные направления этих исследований представлены в работах [1–6]. Среди них можно выделить направление работ In-Network Computing [3–6]. Здесь сложные распределенные компьютерные системы имеют в своих сетях компьютерные средства, которые и проводят распределенные вычисления над данными в передаваемых сообщениях.

В работах [7, 8] для менее сложных стационарных систем был предложен другой способ распределенных вычислений в сети. Здесь сетевые средства, в отличие от рассмотренных в работах [3–6] упрощены, не содержат компьютеры, но при этом они выполняют ряд широко востребованных вычислительных операций непосредственно в сети за время, не зависящее от числа участников операции. Это потребовало точной, побитной синхронизации сообщений, передаваемых через сеть одновременно многими объектами, что предъявило дополнительные требования к процессу синхронизации.

В статье [9] были предложены способы переноса решений, рассмотренных в работах [7, 8], на мобильные системы. Основную сложность при этом составила быстрая и точная коррекция синхронизации обмена сообщениями между объектами, компенсирующая их движение. Технические средства непрерывно дают возможность повышать скорость выполнения распределенных вычислений, и качество синхронизации не должно этому мешать.

В настоящей статье решения, предложенные в работе [9] взяты за основу, но процесс синхронизации в ней существенно улучшен с помощью новых возможностей.

- В статье [9] перед началом синхронизации объекты системы выделяют центр, управляющий синхронизацией. Он назначает модуль связи  $MS$ , в котором будут выполняться распределенные вычисления, и посылает объектам последовательность

команд для поочередного определения объектами их расстояния до модуля  $MS$ . Эти действия вносят дополнительные затраты времени и усложняют аппаратуру. В предлагаемой статье отсутствует центр, упрощены и частично исключены указанные выше действия. В работе [9] имеется еще один недостаток, снижающий точность синхронизации. Между моментом завершения измерений, определяющих точность синхронизации, и моментом использования этих измерений в статье [9] проходит интервал времени, существенно ограничивающий точность синхронизации. Ее нельзя улучшить из-за того, что процесс синхронизации и обмен сообщениями совмещены в общем канале. Этот недостаток также устранен.

- В настоящей статье для устранения указанных недостатков кроме канала обмена сообщениями введены два канала синхронизации, в которых выполняются два взаимосвязанных процесса синхронизации: в первом — основной децентрализованный процесс групповой синхронизации объектов  $SP_0$ , во втором — процесс коррекции синхронизации  $SP$ .

- В процессе  $SP_0$  объекты выполняют указанную выше синхронизацию, возможности которой достаточны для определения расположения объектов и выполнения в сетевых средствах вычислений, не требующих высокого быстродействия. Однако процесс  $SP_0$  имеет существенное временное ограничение. Если в процессе  $SP_0$  участвуют  $n$  объектов, то для каждого объекта синхронизацию, нарушенную из-за перемещения объектов, можно корректировать только через  $n$  интервалов времени, требуемых для синхронизации каждого объекта. Процесс коррекции групповой синхронизации  $SP$ , работающий совместно с процессом  $SP_0$ , корректирует времена всех  $n$  объектов за время, требуемое процессу  $SP_0$  для синхронизации только одного объекта. Это упрощает и ускоряет мониторинг состояния мобильной системы.

В § 1 приведена структура связей системы и возможности объектов. В § 2 изложен процесс  $SP_0$ . В § 3 изложен процесс  $SP$ . В § 4 даны примеры применения процессов  $SP_0$  и  $SP$  при выполнении сетевыми средствами распределенных вычислений, требующих быстрой и точной синхронизации.

В целом в статье представлен полностью децентрализованный автономный способ синхронизации передачи данных и распределенных вычислений в системах мобильных объектов с одновременным участием в указанных операциях многих объектов.

## 1. СТРУКТУРА СВЯЗЕЙ, ФУНКЦИИ ОБЪЕКТОВ СИСТЕМЫ

Так как ниже развиваются результаты, полученные в работе [9], выделим сохраненные в настоящей статье существенные особенности структуры системы из статьи [9], и расширим их.

Объекты обмениваются беспроводными оптическими или радиосигналами. Так как текущее расположение объектов неизвестно, то сигналы ненаправленные.

В используемой процессом  $SP$ , процессами передачи сообщений и процессами сетевых вычислений структуре, источники в объектах посылают сигналы или сообщения в модуль связи  $MS$ , который без задержки отправляет их приемникам объектов. Такие же действия выполняются в статье [9]. Сигналы источников и сигналы модуля связи  $MS$  различаются по частоте, и приемники объектов воспринимают только сигналы единственного источника — модуля  $MS$ . Каждому объекту присваивается порядковый номер, в соответствии с которыми объекты упорядочивают свои действия.

Распределенные вычисления, представленные в § 4, как и в статье [9] проводятся непосредственно в модуле связи  $MS$ , и объекты передают в модуль  $MS$  сообщения так, чтобы их одноименные разряды поступали в модуль  $MS$  одновременно. Вычисления проводятся без задержки получаемых сообщений объектов, длительность вычисления не зависит от числа участников операции и не превышает времени, требуемого только двум участникам. Результат вычисления передается параллельно всем объектам.

Обычная передача сообщений также ускоряется ввиду того, что группа объектов получает данные от другой группы объектов одновременно синхронно в виде одного общего для всех объектов-источников сообщения.

Для выполнения групповой синхронизации  $SP_0$  объекты упорядочивают свои действия без использования модуля  $MS$ . Ее применение подробно описано в § 2.

В ряде случаев применения процесса  $SP_0$  потребуется работать с группой объектов, разделенной на две группы объектов  ${}^1O$  и  ${}^2O$ , состоящих из мобильных объектов  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$  соответственно. В общем случае группа  ${}^2O$  является частью группы  ${}^1O$ . При включении объекта в группу ему присваивается порядковый номер в группе, отображаемый индексом, где  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$ . Объекты обмениваются сигналами и сообщениями через сеть, объединяющую их в общую систему. Обмен сигналами исходно асинхронен.

Объекты  ${}^1O_i$  из группы  ${}^1O$  активны и содержат средства управления взаимодействием между другими объектами из группы  ${}^1O$  и объектами из группы  ${}^2O$ . Объект  ${}^2O_j$  только принимает сигналы, посланные ему от объекта  ${}^1O_i$ , преобразует их частоту и возвращает к объекту  ${}^1O_i$ . Преобразование частоты позволяет объекту  ${}^1O_i$  при приеме сигналов от объекта  ${}^2O_j$  исключить помехи от сигналов, передаваемых другими объектами  ${}^1O_i$ . Имеется два типа объектов  ${}^2O_j$ . Первый тип объектов  ${}^2O_j$  принимает от объекта  ${}^1O_i$  ненаправленный сигнал  $S_{ij}$  и в ответ посылает всем объектам  ${}^1O_i$  сигнал также ненаправленно. Второй тип объекта  ${}^2O_j$  работает только с оптическими сигналами и просто отражает сигнал в направлении объекта  ${}^1O_i$ , пославшего сигнал  $S_{ij}$ , т. е. представляет собой ретрорефлектор.

## 2. ГРУППОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ $SP_0$

### 2.1. Начальное упорядочение объектов

Как указано в § 1, в процессах синхронизации  $SP_0$  и  $SP$  объекты при включении в группу синхронизируемых объектов должны быть упорядочены. Одновременно поступающие заявки объектов на включение в группу может упорядочить централизованное средство. Но допустимы и другие варианты децентрализованного упорядочения. Как правило, технические объекты при изготовлении получают индивидуальный код. При объединении объектов в группу он должен быть преобразован в порядковый номер. В статье [9] для этого применен алгоритм ДКУ (децентрализованное кодовое управление), в котором объекты представляют свои номера в двоичном коде и на первом шаге передают старший разряд своего номера. В передаче следующего разряда участвуют объекты, передавшие перед этим 0, и т. д. Остается единственный объект, которому присваивается новый порядковый номер — ноль. Так поочередно нумеруются все объекты, одновременно подавшие заявку на вход в группу. Нумерация следующего пакета заявок продолжается полученную ранее нумерацию.

Если индивидуального кода нет, то каждому объекту присвоим случайное двоичное число. Применим к набору этих чисел алгоритм ДКУ. Если после его окончания выделено более одного объекта, то к этим объектам применим эту же процедуру и т. д. Выделенному таким образом объекту



присвоим номер ноль. Так будут упорядочены все объекты. Если объекты имеют отличительные признаки, то выделенный объект может использоваться ими для управления ходом всех указанных выше процессов упорядочения объектов.

## 2.2. Процесс групповой синхронизации $SP_0$

В групповой синхронизации  $SP_0$ , как указано выше, участвует группа активных объектов  ${}^1O$ , инициаторов сигналов и группа пассивных объектов  ${}^2O$ . Любой объект  ${}^1O_i$  группы  ${}^1O$  должен получить возможность без помех от других объектов послать адресованный любому объекту  ${}^2O_j$  группы  ${}^2O$  сигнал  $S_{ij}$  и определить время  $T_{ij}$  передачи сигналов между этими объектами. Каждый объект  ${}^1O_i$  при этом действует автономно, не требуя управления от каких-либо других объектов системы или внешних средств. Значение времени  $T_{ij}$  используется для синхронизации указанных далее действий объектов.

Как отмечалось, групповая синхронизация выполняется в выделенном только для нее канале связи, сигналы в этом канале не влияют на сигналы в других каналах. Предполагается, что за время выполнения всех требуемых для конкретного объекта измерений перемещение объектов не влияет на требуемую точность измерений (см. § 2.3).

Как будет показано, способ групповой синхронизации, определив время  $T_{ij}$ , позволяет решить следующие задачи.

- При известных значениях времени  $T_{ij}$  и скорости распространения сигналов определяется расстояние между объектами и скорость изменения расстояния.
- Если группа  ${}^2O$  содержит несколько объектов, расположение которых фиксировано, то каждый объект  ${}^1O_i$  определяет в пределах одного интервала измерения свое положение относительно указанной им группы объектов  ${}^2O_j$ .
- В интервале времени, выделенном для определения времени  $T_{ij}$ , объект имеет возможность послать сообщение другим объектам. Также объект может выполнить показанные в § 4 распределенные вычисления, но существенно медленнее, чем в случае применения процесса  $SP$ .

Процесс  $SP_0$  кроме сигналов  $S_{ij}$  использует сигналы  $S$  и  ${}^*S_{ij}$ , уточненные ниже. Сигналы  $S$ ,  $S_{ij}$ ,  ${}^*S_{ij}$  ненаправленные, кроме направленных сигналов  ${}^*S_{ij}$ , возвращаемых ретрорефлектором. Задан интервал времени  $T$ , достаточный для переноса сиг-

налов между любыми объектами  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$ . Для выполнения синхронизации процесс  $SP_0$  определяет  $T_{ij}$  — интервалы времени передачи сигналов между объектами  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$ .

Процесс  $SP_0$  состоит из четырех шагов.

**Шаг 1.** Объекты группы  ${}^1O$  обнаруживают отсутствие сигналов  $S$ ,  $S_{ij}$ ,  ${}^*S_{ij}$  в течение заданного интервала времени, не меньшего интервала времени  $T$ , и переходят к шагу 2.

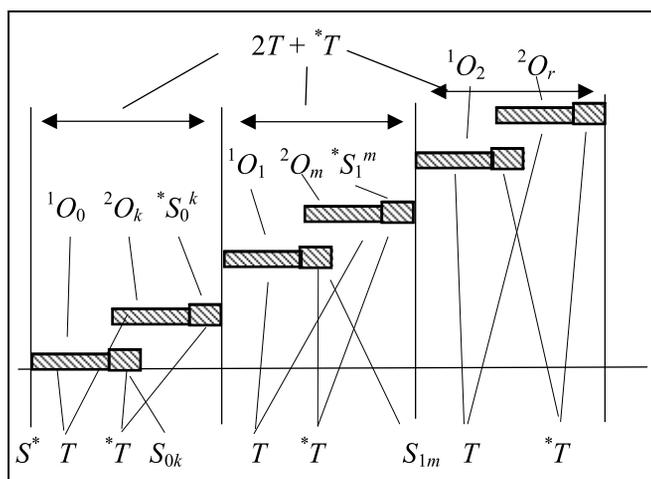
*Замечание:* далее вместе с выражением «время распространения сигнала» и подобных ему по смыслу будем также употреблять «расстояние».

**Шаг 2.** Один или несколько объектов  ${}^1O_i$  посылают сигнал  $S$  длительности не менее  $T$ . При посылке сигналов  $S$  несколькими объектами эти сигналы накладываются, образуя общий сигнал  $S$  не меньшей длительности. В момент обнаружения объектом завершения сигнала  $S$  объект переходит к шагу 3. Далее момент завершения сигнала  $S$  будем обозначать как  $S^*$ .

**Шаг 3.** Объект  ${}^1O_0$ , (объект с наименьшим порядковым номером) при получении сигнала  $S^*$  посылает объекту  ${}^2O_k$ , до которого определяется расстояние, сигнал  $S_{0k}$  (или сообщение  $S_{0k}$  — см. ниже «Расширение возможностей процесса  $SP_0$ ») длительности  ${}^*T$ , который достигнет объекта  ${}^2O_k$  не позднее интервала времени  $T$ . В ответ объект  ${}^2O_k$  пошлет сигнал  ${}^*S_{0k}$ , — копию сигнала  $S_{0k}$ , который достигнет объекта  ${}^1O_0$  также в течение интервала времени  $T$ . Через интервал времени  $2T + {}^*T$  после получения объектом сигнала  $S^*$  все приведенные сигналы покинут канал связи.

Следующий по порядку объект  ${}^1O_1$  ожидает прихода сигнала  $S_{0k}$  и с задержкой  $2T + {}^*T$  посылает сигнал  $S_{1m}$  длительности  ${}^*T$  объекту  ${}^2O_m$ , расстояние до которого он определяет. Так как к моменту посылки сигнала  $S_{1m}$  все инициированные объектом  ${}^1O_0$  сигналы исчезнут, то они не создадут помех объекту  ${}^1O_1$ . Аналогично действуют следующие объекты  ${}^1O_i$ .

Таким образом, каждый объект  ${}^1O_i$  с  $i \geq 1$  добавляет к моменту появления сигнала  $S_{ij}$  иницирующего передачу объектами сигналов, задержку  $\tau = i(2T + {}^*T)$ . Объекты измеряют интервал времени  $T_{ij}$  между началом посылки сигнала  $S_{ij}$  и началом приема сигнала  ${}^*S_{ij}$ , возвращаемого объектом  ${}^2O_j$ . Учет скорости переноса сигналов позво-



Процесс групповой синхронизации

ляет также определить расстояние от объекта  ${}^1O_i$  до объекта  ${}^2O_j$ .

Таким образом, любой объект  ${}^1O_i$  получает возможность измерить временную и пространственную удаленность от требуемого объекта  ${}^2O_j$ .

**О синхронном варианте шага 3.** Выше инициатором действий объекта  ${}^1O_0$  служит обнаружение им события  $S^*$ , остальные объекты ожидают от предшественника появления сигнала  $S_{ij}$ . Но на шаге 3 все объекты могут переходить в режим поочередного определения расстояний, реагируя только на появление события  $S^*$ . Этот вариант реализуется проще, но он более медленный, так как учитывает наихудшее взаимное расположение объектов.

**Шаг 4.** Процесс  $SP_0$  завершается по команде от приложения или после обслуживания всех объектов, начавших процесс.

Рассмотрим для упрощения изложения только синхронный вариант шага 3 и обратимся к рисунку.

На рисунке для каждой пары объектов  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$  выделены области длительностью  $2T + *T$  для обмена сигналами  $S_{ij}$  и  $*S_{ij}$ . В пределах каждой области каждому объекту выделены зоны  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$  длительности  $T$ , в пределах которых сигналы  $S_{ij}$  и  $*S_{ij}$  достигнут адресата.

Все объекты группы  ${}^1O$  обнаруживают момент завершения сигнала  $S$  ( $S^*$  на рисунке). Объект  ${}^1O_0$  в этот момент начинает передавать сигнал  $S_{0k}$  длительности  $*T$ . Начало этого сигнала достигнет объекта  ${}^2O_k$  не позднее интервала времени  $T$  и еще через интервал, не превышающий  $T + *T$ , исчезнет

из канала связи, т. е. из поля наблюдения объектов. Только после этого объект  ${}^1O_1$  начнет бесконфликтно выполнять свое измерение для произвольного объекта  ${}^2O_m$ . Аналогично поступят следующие объекты группы  ${}^1O$ .

Таким образом, задержку, равную  $i(2T + *T)$ , выполняет каждый объект  ${}^1O_i$ , что обеспечивает бесконфликтность требуемых объектам измерений расстояний.

### Расширение возможностей процесса $SP_0$

Приведем несколько расширений процесса  $SP_0$ , увеличивающих возможности процессов  $SP_0$  и  $SP$ . Их легко внести в состав процесса  $SP_0$ , но это заметно увеличит объем статьи.

- **Передача в процессе  $SP_0$  дополнительной информации.** Часто объекту  ${}^1O_i$  требуется не только определить интервал  $T_{ij}$ , но сообщить другим объектам дополнительную информацию. Для этого значение времени  $*T$  достаточно увеличить до произвольной, единой для всех объектов длительности и в пределах интервала  $*T$  передавать сообщение. Это сообщение может быть командой, требующей ответной реакции приемника сообщения в пределах времени  $*T$ .

Интервал  $*T$  может также различаться для разных объектов  ${}^1O_i$ , о чем объект должен указать в начале интервала  $*T$ . Так как объекты  ${}^1O_i$  посылают ненаправленные сигналы, то продолжительность интервала  $*T$  станет известна всем объектам.

Отметим полезную возможность процесса  $SP_0$ . Широковещательную передачу дополнительных данных объекты  ${}^1O_i$  могут выполнять сигналами  $F$  частоты, которую не ретранслируют объекты  ${}^2O_j$ . При этом данные любого объекта из группы  ${}^1O$  передаются в первом интервале  $T$  передачи сигналов следующим по порядку объектом группы  ${}^1O$ , что не замедляет процесс  $SP_0$ .

- **Динамическая перенумерация объектов.** Разрешим отдельным объектам  ${}^1O_i$  не участвовать в процессе  $SP_0$ , т. е. не передавать сигнал  $S_{ij}$ . Если объекты не передают сигнал  $S_{ij}$ , то потребуем, чтобы следующие по порядку  $i$ -е объекты все равно учитывали выделенные «молчащим» объектам задержки  $\tau$ . Так как объектам известна задержка  $\tau$ , фиксируется момент появления сигнала  $S^*$  и моменты появления сигналов  $S_{ij}$ , то такой учет выполняется просто. Например, если «молчат» объекты с  $i = 0, \dots, k$ , то объект с  $i = k + 1$  получит новый номер  $i = 0$ .



- **Определение числа участников процесса  $SP_0$ .** Процесс  $SP_0$  задействует заранее известное число участников процесса  $n$ . Откажемся от этого. Пусть в процессе  $SP_0$  задано только допустимое число расположенных подряд «молчащих» объектов. Превышение этой границы (признак достижения последнего объекта в группе) определяет  $*n$  — реальное максимальное число объектов-участников процесса  $SP_0$ .

### 2.3. Границы влияния подвижности объектов на точность процесса $SP_0$

Выясним, при каких условиях допустимо пренебречь влиянием движения объектов на точность процесса  $SP_0$  (объекты квазистационарны). Пусть задано  $t$  — время переноса сигнала между наиболее удаленными друг от друга подвижными объектами  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$ . Определим, насколько за время измерения  $t$  изменится  $x_{\max}$  — расстояние между  ${}^1O_i$  и  ${}^2O_j$ .

Время  $t = x_{\max}/v$ , где  $v$  — скорость перемещения объекта. Но также  $t = (2L \pm x_{\max})/c$ , где  $L$  — расстояние между указанными объектами,  $c$  — скорость света. Отсюда  $x_{\max} = 2Lv/(c \pm v) \approx 2Lv/c$ .

Расстояние  $x_{\max}$  сигнал проходит за время  $\Delta t = x_{\max}/c \approx 2Lv/c^2$ . Интервал  $\Delta t$  процесс  $SP_0$  не учитывает, что вносит ошибку в измерение времени.

В процессе  $SP_0$  за время определения расстояния  $n$  объектов  ${}^1O_i$  относительно  $m$  объектов  ${}^2O_j$  результаты измерения для первого из участников измерения могут отклониться в  $nm$  раз.

Приведем пример. В большинстве применений величина  $x_{\max}$  мала. Например, при  $v_{\max} = 100$  м/с (360 км/ч) и  $L = 150$  м изменение значения  $L$  составит  $x_{\max} = 0,1$  мм и  $\Delta t = 0,33$  пс.

При достаточных для многих задач  $n \leq 100$ ,  $m \leq 4$  это отклонение составит 4 см, и изменение  $t$  составит  $nm\Delta t \approx 0,33$  нс. Если допустимо такое значение  $nm\Delta t$ , то система квазистационарная, ошибка в измерении расстояния — не более 4 см.

Но для выполнения распределенных вычислений, кратко рассмотренных в § 4, нужна более высокая точность, и время  $t$  потребуются корректировать чаще, что и делается в § 3.

### 2.4. Примеры применения групповой синхронизации

Приведем примеры решения способом  $SP_0$  ряда задач, не требующих привлечения способа  $SP$ .

**Определение местоположения объектов из  ${}^1O$ .** Пусть объект  ${}^1O_i$  определил расстояния относи-

тельно трех объектов группы  ${}^2O_j$ , расположенных в вершинах треугольника с известными длинами сторон. Тогда объект  ${}^1O_i$  находится на пересечении трех отрезков, соединяющих объект  ${}^1O_i$  с объектами  ${}^2O_j$ . Это частный вариант применяемой в геодезии трилатерации.

Как показано в § 1, объекты  ${}^2O_j$  могут быть пассивными и активными. В пассивных объектах  ${}^2O_j$  при определении местоположения объектов очень просто реализовать требуемое выше измерение трех расстояний одновременно, используя сигналы  $*S_{ij}$  разных частот. Для активных объектов это сделать сложнее и более приемлемо последовательно измерять расстояния. Так как требуется измерить расстояния до небольшого числа объектов  ${}^2O_j$ , то накопление ошибки измерения не влияет на точность расположения объекта  ${}^1O_i$ .

**Определение максимальной и минимальной удаленности группы  ${}^1O$  от группы  ${}^2O$ .** Для этого достаточно использовать сигнал  $F$ , как показано в § 2.2.

Посылаемый каждым объектом  ${}^1O_i$  сигнал  $S_{ij}$  получают все объекты  ${}^1O_i$ . В момент получения сигнала  $*S_{ij}$  от объекта  ${}^2O_j$  объект  ${}^1O_i$  посылает сигнал  $F$ . Получив указанные два сигнала объекты  ${}^1O$  одновременно определяют интервал  $T_{ij}$ , а после завершения измерений всей группой объектов определяют максимальное  $T_{\max}$  и минимальное  $T_{\min}$  расстояние группы  ${}^1O$  относительно группы  ${}^2O$ . В результате каждый объект  ${}^1O_i$  получает сведения о расположении всей группы  ${}^1O$  и перемещениях ее объектов. Если объекты группы  ${}^2O$  располагаются компактно, то можно ограничиться измерением объектом  ${}^1O_i$  расстояния только до одного объекта из группы  ${}^2O$ .

## 3. ПРОЦЕСС $SP$ -КОРРЕКЦИИ ГРУППОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

### 3.1. О необходимости коррекции групповой синхронизации

Как показано выше, в способе  $SP_0$  любой объект корректирует расстояние между объектами и уточняет свою синхронизацию только после завершения измерения расстояния всеми объектами. Накапливающаяся за это время из-за движения объектов ошибка снижает точность синхронизации.

ции. Для уменьшения этой ошибки и введен способ коррекции синхронизации  $SP$ . В нем за время, требуемое для синхронизации только двух объектов, проводится коррекция для всей группы объектов, что обеспечивает более точную синхронизацию.

Способ  $SP$  для устранения накопленной ошибки  $SP_0$  задействует выделенный только для него канал. Для функционирования процесса  $SP$  ему требуется указать модуль связи ( $MS$ ), который будет получать сигналы источников сообщений и без задержки пересылать их приемникам сообщений. Сведения о модуле связи  $MS$  предоставляет процесс  $SP_0$ , или процесс  $SP$  получает их другим заранее известным способом.

Участвующие в процессе  $SP$  объекты получают от процесса  $SP_0$  имя объекта —  $MS$ , значение времени передачи сигнала от них до модуля связи  $MS$  и затем корректируют изменение времени. В основном процесс  $SP$  требуется для выполнения распределенных вычислений, примеры которых представлены в § 4. При вычислениях все объекты составляют одну общую группу  ${}^1O$ , и модуль связи  $MS$  также может входить в ее состав.

Объект  ${}^1O_i$ , определивший в процессе  $SP_0$  расстояние до модуля связи  $MS$ , немедленно входит в синхронный процесс  $SP$  и начинает многократно корректировать расстояние до модуля связи  $MS$ , не ожидая определения в процесс  $SP_0$  расстояния до модуля связи  $MS$  другими объектами.

### 3.2. Выполнение коррекции синхронизации

Так как в процессе  $SP$  все объекты  ${}^1O_i$  определяют расстояние  $T_{ims}$  только до единственного объекта  ${}^2O_j$  (или объекта из группы  ${}^1O$ ) — модуля связи  $MS$ , то вместо сигнала  $S_{ij}$  введем обозначение  $S_{ims}$ . Модуль  $MS$  далее считается активным объектом, возвращающим ненаправленные сигналы.

Рассмотрим общую схему организации процесса  $SP$ , взаимодействующего с процессом  $SP_0$ . Будем считать, что до начала процесса  $SP$  два раза выполнен процесс  $SP_0$ . После первого выполнения процесса  $SP_0$  объекты выбирают модуль  $MS$ , используя сообщения  $*T$  (см. расширение 1 в процессе  $SP_0$ ). Однако модуль  $MS$  может быть задан и заранее. После второго выполнения становятся известны  $T_{max}$  — время прихода сигнала в модуль связи  $MS$  от наиболее удаленного от модуля  $MS$  объекта и времена  $T_{ims}$ .

Удобно описать процесс  $SP$ , используя логическую шкалу  $Q$ , посылаемую объектами  ${}^1O_i$  в модуль

связи  $MS$ . Она состоит из последовательности двоичных разрядов, каждый из которых ставится в соответствие одному из объектов  ${}^1O_i$  согласно его номеру  $i$ . Объект  ${}^1O_i$  участвует в создании шкалы, посылая сигнал  $S_i$  в своем разряде шкалы.

Процесс коррекции синхронизации объектов  ${}^1O_i$  начинается с действий объекта  ${}^1O_0$  при получении от процесса  $SP_0$  значения расстояния  $T_{0ms}$  (здесь индекс объекта  ${}^1O_0$  соответствует динамически определенному номеру этого объекта, т. е. номеру первого из реально работающих в данный момент времени объектов группы  ${}^1O$  (см. в § 2.2 динамическую перенумерацию объектов)).

Объект  ${}^1O_0$  посылает в модуль  $MS$  синхроманду (или действующий как команда сигнал)  $Sk$ . Объект  $MS$  ненаправленно возвращает команду всем объектам  ${}^1O_i$  в виде сигнала  $*Sk$ .

Объект, успевший до этого получить от процесса  $SP_0$  значение интервала  $T_{ims}$ , посылает в модуль  $MS$  сигнал  $S_i$  в соответствующем ему разряде шкалы  $Q$ . Это делается следующим способом.

Объект  ${}^1O_i$  с  $i \leq 0$  посылает сигнал  $S_i$  со стандартной для всех объектов  ${}^1O_i$  задержкой  $D = 2(T_{max} - T_{ims}) + iT_f$ , где  $T_f$  — интервал времени передачи разряда шкалы. Такие действия размещают каждый сигнал  $S_i$  в соответствующий объекту  ${}^1O_i$  разряд  $i$  шкалы  $Q$ . Покажем это.

Временно не будем учитывать интервал  $T_f$ , тогда  $D = *D = 2(T_{max} - T_{ims})$ . Пусть команда  $*Sk$  поступила к объекту  ${}^1O_{max}$ , максимально удаленному от модуля  $MS$  на интервал  $T_{max}$ . При задержке  $*D = 2(T_{max} - T_{ims})$  объект  ${}^1O_{max}$  вернет сигнал в модуль  $MS$  через время  $2T_{max}$  после отправки команды  $*Sk$  объектом  $MS$ , так как для объекта  ${}^1O_{max}$  задержка  $*D = 0$ . Но и для произвольного объекта  ${}^1O_i$  его сигнал при отсутствии задержки поступит в модуль  $MS$  через время  $2T_{ims}$ , а при задержке  $*D$  через время  $2T_{ims} + *D = 2T_{ims} + 2(T_{max} - T_{ims}) = 2T_{max}$ . Таким образом, сигналы  $S_i$  всех объектов при задержке  $*D$  поступают в модуль  $MS$  одновременно.

При задержке  $D$  все объекты с помощью члена  $iT_f$  получают вначале сигнал  $*S_i$  от объекта  ${}^1O_0$ , затем от объекта  ${}^1O_1$  и т. д, что и требовалось.

Если передачу объектом  ${}^1O_i$  сигнала  $S_i$  выполнять с задержкой  $0,5T_f$ , то он будет помещен в центр разряда шкалы, соответствующего объекту



${}^1O_i$ . Размер разряда шкалы (длительность его передачи) выбирается таким, чтобы сигнал  $S_i$ , посылаемый в середину разряда шкалы, при изменении интервала  $T_{oms}$  из-за перемещения объекта, не покинул размеры разряда шкалы.

Объекты  ${}^1O_i$  получают от модуля связи  $MS$  всю шкалу  ${}^*Q$ , и в своем разряде шкалы получают сигнал  ${}^*S_i$  — копию отправленного в модуль  $MS$  сигнала  $S_i$ . По сдвигу в разряде полученного сигнала объекты корректируют свое перемещение.

Длительность  $T_f$  может быть выбрана много меньше длительности  $T$ , что позволяет многократно измерять в процессе  $SP$  расстояния до модуля  $MS$  всеми объектами группы за время определения только одного расстояния в процессе  $SP_0$ . Интервал времени между передачей объектом сигнала  $S_i$  и приемом им сигнала  ${}^*S_i$  не может быть меньше  $2T_{ims}$ , что определяет минимально достижимую ошибку синхронизации.

Приведенные действия выполняют коррекцию.

Заметим, что после получения от процесса  $SP_0$  текущих значений интервалов  $T_{ims}$  процесс  $SP$  выполняется независимо от процесса  $SP_0$ .

Существенно, что для определения расстояния  $T_{ims}$  в процессе  $SP_0$  отводится значительно больше времени, чем в процессе  $SP$ , и начальные измерения в процессе  $SP_0$  можно выполнять более точно, чем в процессе  $SP$ .

Коррекция  $SP$  устранила имеющуюся в процессе  $SP_0$  зависимость точности синхронизации от числа объектов системы. Достижимая точность процесса синхронизации  $SP$  определяется временем переноса сигнала между объектом и модулем связи  $MS$  и не может быть уменьшена.

Приведенное выше двукратное выполнение процесса  $SP_0$  перед началом процесса  $SP$  требуется при начальном запуске и должно повторяться только при существенном изменении в системе синхронизации объектов. Например, при смене модуля  $MS$ .

#### Дополнительная информация

**Многократная посылка шкалы  $Q$ .** Для многократной коррекции синхронизации объект  ${}^1O_0$  после завершения приема шкалы  ${}^*Q$  вновь посылает команду  $Sk$ , и процесс коррекции продолжается. Ценой усложнения объектов коррекцию можно несколько ускорить. Для этого создается шкала  $Q_i$ , состоящая из нескольких шкал  $Q$ . Объекты помещают сигналы в соответствующие им разряды всех шкал  $Q$ .

**Варианты завершения процесса коррекции.** Объект  ${}^1O_0$  завершает коррекцию по команде от вы-

полняемого системой приложения или при отсутствии в сети любых сигналов свыше заданного интервала времени. Для завершения применения шкалы  $Q_i$  в начало каждой шкалы  $Q$ , входящей в  $Q_i$ , добавим дополнительный управляющий разряд. Объект  ${}^1O_0$  внесет в него единицу — команду завершения  $Q_i$ , направленную всем объектам.

## 4. ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Приведем несколько примеров, показывающих, как быстрая синхронизация  $SP$  ускоряет выполнение ряда востребованных в мобильных системах распределенных операций. Более детально эти операции рассмотрены в работах [7–9]. Используются беспроводные связи объектов с модулем  $MS$ , в которых 1 и 0 передаются сигналами с частотой  $f_1$  и  $f_0$  соответственно. Модуль  $MS$  превращает эти сигналы в  ${}^*f_1$  и  ${}^*f_0$ .

Пусть выполнен процесс  $SP$  и определены интервалы  $T_{max}$  и  $T_{ims}$ . Для выполнения операций объекты синхронно посылают в модуль связи  $MS$  сообщения с задержкой  $D = 2(T_{max} - T_{ims})$ , что обеспечивает совпадение их одноименных разрядов при входе в модуль  $MS$ . Полученная шкала с «совмещенными разрядами» всех сообщений поступает ко всем объектам. Эта схема взаимодействия объектов применена ниже во всех примерах.

**1. Определение состояния системы.** Задана  $n$ -разрядная шкала, подобная приведенной выше шкале  $Q$ . Каждый двоичный разряд шкалы соответствует одному из признаков, характеризующих состояние объекта: 1 ( $f_1$ ) — значение в норме, 0 ( $f_0$ ) — критично. Группа из  $N$  объектов синхронно передает свои шкалы в модуль связи  $MS$ , где одноименные разряды шкал совмещаются. Такую совмещенную шкалу модуль  $MS$  посылает всем объектам. В ней совокупность сигналов 1 и 0 отражает состояние всей системы. За время передачи только одного сообщения из  $n$  разрядов обнаруживается наличие критичных признаков для всех  $N$  объектов. Отсутствует зависимость времени выполнения операции от количества объектов.

**2. Поиск максимального числового значения признака во всех объектах.** Пусть, например, используется десятичная система счисления и каждая десятичная цифра числа, соответствующего признаку, представлена шкалой из девяти разрядов, в которой все разряды содержат 0, кроме разряда с единицей, соответствующего значению цифры. Все объекты одновременно передают старшую цифру числа в модуль связи  $MS$ . От модуля  $MS$  объекты получают объединенную шкалу. По нахо-

дьящимся в ней единицам объекты определяют максимальное значение переданной цифры. Объекты, передавшие такое значение, передают следующую цифру и т. д. до определения максимума числа. Длительность операции также не зависит от числа объектов. Увеличение основания системы счисления уменьшает количество пересылок сообщений между объектами и модулем *MS*, что существенно ускоряет вычисление.

**3. Аналого-цифровые операции.** Пусть сигналы, посылаемые объектом для вычислений, имеют равную энергию, и модуль связи *MS* имеет аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Пусть также цифры передаются в виде указанных выше шкал. Тогда при совмещении в модуле *MS* одноименных разрядов шкалы АЦП сформирует численное значение суммарной энергии сигналов в каждом разряде и передаст результат одновременно всем объектам, где будет выполнено завершающее суммирование. Здесь также нет зависимости от числа участников операции.

**4. Распределенный ассоциативный поиск.** Для распределенных вычислений часто требуется привлекать данные, расположенные в различных объектах системы. Эти данные составляют распределенный массив, в котором требуется находить совокупности данных, соответствующие условиям поиска. В компьютерах наиболее быстрый способ такого сосредоточенного поиска обеспечивают ассоциативная память и ассоциативные процессоры. Распределенные операции пп. 1—3 также выполняют ассоциативный поиск в указанном выше распределенном массиве, ускоряя поиск данных и распределенную их обработку в сети. В такой распределенной ассоциативной системе наличие в каждом ее объекте компьютера позволяет по сравнению с обычной ассоциативной памятью выполнять дополнительно сложную локальную обработку данных, соответствующую требованиям поиска. Для суперкомпьютеров подобный ассоциативный поиск предложен в статье [8].

### 5. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ СВЯЗЕЙ МОБИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Простая структура связей § 2 позволила процессу  $SP_0$  упорядочить действия асинхронных объектов. Связка «группа источников сигналов → модуль *MS* → группа источников сигналов» в § 3 позволила процессу *SP* объединять группу сообщений в единое сообщение. Но часто требуются более сложные структуры взаимодействия объектов с разделением всей совокупности объектов на кластеры, работающие независимо, но в динамике объединяемые в единую структуру или в новый набор

кластеров. Такие структуры были предложены автором для стационарных суперкомпьютеров [7, 8] и для более простых компьютерных кластеров [10].

Представляет практический интерес перенести результаты статьи [10] на рассмотренные в настоящей статье системы мобильных объектов. Это позволит задействовать многоуровневые связи с сохранением возможностей рассмотренных выше процессов синхронизации.

В статье [10] в иерархическую структуру объединены простые кластеры, состоящие из компьютеров, взаимодействующих через единственный модуль связи. Простые кластеры подобны рассмотренным в настоящей статье системам мобильных объектов. Объединение выполняется через модули связи простых кластеров. В составном кластере простые кластеры могут действовать автономно, но посылка единственной команды переводит составной кластер в единый простой кластер, в котором все компьютеры синхронно действуют под управлением единственного компьютера со скоростями взаимодействия, не меньшими, чем скорости в простых кластерах. Беспроводные связи упростят реорганизацию связей в мобильной системе, но при этом выделение отдельных беспроводных каналов для каждого кластера накладывает существенные ограничения на число одновременно действующих кластеров.

### 6. О СРЕДСТВАХ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ОБЪЕКТАМИ

В настоящей статье активно применяются способы измерения расстояний, но не предлагается новый способ их измерения. Выбор способа из известных диктуется условиями конкретного приложения. Часто применяется наиболее простой способ измерения интервала времени между посылкой и приемом импульсного сигнала.

Из большого количества используемых технических средств измерения расстояния выделим два решения для стационарных и мобильных объектов, наиболее полезные для настоящей статьи. Очень точные стационарные измерения реализованы в проекте White Rabbit для физических экспериментов в ЦЕРН [11—13]. Обеспечивается точность синхронизации передачи сообщений в сети лучше 100 пс на расстоянии свыше 16 км при изменении температуры в диапазоне (12,5—85,0) °С. Применен нониусный способ измерения дальности, в аппаратуру сети встроены специальные устройства, корректирующие синхронизацию.

В связи с интенсивным развитием в последние годы различного вида автоматических мобильных устройств (автомобилей, квадрокоптеров и др.)



промышленность начала выпуск компактных и точных измерителей расстояния. Последние разработки дают точность в субнаносекундном диапазоне [14].

Для повышения быстродействия предлагаемых способов требуются высокоскоростные источники цифровых сигналов. Здесь также появляются новые скоростные решения. Примером может быть работа [15], в которой для источника оптических ненаправленных цифровых сигналов получена скорость передачи 400 Гб/с.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном в статье способе синхронизации ее выполняет собственными средствами система мобильных объектов, применяющих процессы синхронизации  $SP_0$  и  $SP$ .

Процесс  $SP_0$  выполняет две задачи. Он проводит начальную синхронизацию исходно асинхронных процессов в объектах, не имеющих информации о расстояниях между объектами и параметрах их движения. При этом объекты асинхронно посылают синхронизирующий сигнал, который позволяет объектам упорядочить их действия, определить расстояния между объектами, направление, скорость и ускорение движения объектов, а также позволяет объектам передавать сообщения и управляющую информацию. Такие задачи широко востребованы.

Но  $SP_0$  не имеет возможности корректировать быстрые движения с точностью, достаточной для выполнения распределенных вычислений в сетевых средствах системы. Быстрая и точная коррекция позволила бы ускорить выполнение многих видов распределенных вычислений, примеры которых приведены в § 4 статьи. Такую коррекцию обеспечивает второй процесс  $SP$ , а запуск процесса  $SP$  и требуемые для его работы данные представляет процесс  $SP_0$ . Это его вторая задача.

Процесс  $SP$  корректирует перемещения объектов с точностью, соответствующей требованиям наиболее быстрых применяемых в настоящее время технических средств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tennenhouse, D., Smith, J.M., Sincoskie, W.D., et al. A Survey of Active Network Research // IEEE Communications Magazine. — 1997. — Vol. 35, no. 1. — P. 80–86. — <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2288938>.
2. Kreutz, D., Ramos, F.M.V., Verissimo, P., et al. Software-Defined Networking: A Comprehensive Survey. — 2014. — P. 61. — <https://arxiv.org/pdf/1406.0440.pdf>.
3. Tokusashi, Y., Huynh, T.D., Pedone, F., et al. The Case For In-Network Computing On Demand // Proceedings of Fourteenth EuroSys Conference 2019 (EuroSys'19). — Dresden, Germany, 2019. — P. 25–28. — <https://doi.org/10.1145/3302424.3303979>.
4. Sapiro, A., Abdelaziz, I., Aldilajan, A., et al. In-Network Computation is a Dumb Idea Whose Time Has Come // Proceedings of the 16th ACM Workshop on Hot Topics in Networks. — Palo Alto, California, USA, 2017. — <http://dx.doi.org/10.1145/3152434.3152461>.
5. Ports, D.R.K., Nelson, J. When Should The Network Be The Computer? // Workshop on Hot Topics in Operating Systems (HotOS'19). — Bertinoro, Italy, 2019. — <https://doi.org/10.1145/3317550.3321439>.
6. In-Network Computing and Next Generation HDR 200G Infini-Band Whitepaper // Mellanox Technologies. — 2018. — [https://www.mellanox.com/pdf/whitepapers/WP\\_In-Network\\_Computing\\_Next\\_Generation\\_HDR\\_200G\\_IB.pdf](https://www.mellanox.com/pdf/whitepapers/WP_In-Network_Computing_Next_Generation_HDR_200G_IB.pdf).
7. Стецюра Г.Г. Компьютерная сеть с быстрой распределенной перестройкой своей структуры и обработкой данных в процессе их передачи // Проблемы управления. — 2017. — № 1. — С. 47–56. [Stetsyura, G.G. Computer network with the fast distributed reorganization of its structure and data processing during their transmission // Control Sciences. — 2017. — No. 1. — P. 47–56. (In Russian)] — [http://pu.mtas.ru/archive/Stetsyura\\_117.pdf](http://pu.mtas.ru/archive/Stetsyura_117.pdf).
8. Stetsyura, G. Means for Fast Performance of the Distributed Associative Operations in Supercomputers // Communications in Computer and Information Science. — Springer International Publishing AG. — 2017. — Vol. 793. — P. 27–39. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-71255-0>.
9. Стецюра Г.Г. Сетевая информационно-вычислительная поддержка взаимодействия подвижных роботов // Проблемы управления. — 2018. — № 5. — С. 47–56. — <http://www.mathnet.ru/links/cf5ac6a698894420bbcd8ed07eb513ab/pu1102.pdf> [Stetsyura, G.G. Network Information-Computing Support of Automatic Mobile Objects Interaction // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, iss. 6. — P. 1134–1147. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117919060110>].
10. Стецюра Г.Г. Компьютерные кластеры с быстрым аппаратным выполнением синхронизации сообщений и распределенных вычислений сетевыми средствами // Проблемы управления. — 2020. — № 4. — P. 72–80. [Stetsyura, G.G. The computer clusters with fast synchronization of messages and with fast distributed computing by the network hardware // Control Sciences. — 2020. — No. 4. — P. 72–80. (In Russian)] — DOI: <http://doi.org/10.25728/pu.2020.4.7>. URL: <https://white-rabbit.web.cern.ch/>.
11. Tso, D., Kapai, S., Feldman, M.R. D-DMTD: Digital Dual Mixer Time Difference // Sandia Report. — 2017. — DOI: 10.2172/1494164 <https://www.osti.gov/servlets/purl/1494164>.
12. Yu, Q., Liangfu, P., Yongqing, H. An Ultrahigh Precision Network Time Synchronization Technology // Frontiers in Signal Processing. — 2019. — Vol. 3, no. 4. — P. 82–92. — <https://dx.doi.org/10.22606/fsp.2019.34004>.
13. Tancock, S., Arabul, E., Dahnoun, N. A Review of New Time-to-Digital Conversion Techniques // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. — 2019. — Vol. 68, no. 10. — P. 3406–3417. — <https://doi.org/10.1109/TIM.2019.2936717>.
14. Gomez, A., Shi, K., Quintana, C., et al. Design and Demonstration of a 400 Gb/s Indoor Optical Wireless Communications Link // Journal of Lightwave Technology. — 2016. — Vol. 34, iss. 22. — P. 5332–5339.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 29.05.2020, после доработки 28.07.2020.  
Принята к публикации 04.09.2020.

Стецюра Геннадий Георгиевич — д-р техн. наук,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва, ✉ [gstetsura@mail.ru](mailto:gstetsura@mail.ru).

# DECENTRALIZED AUTONOMIC SYNCHRONIZATION OF INTERACTION PROCESSES OF MOBILE OBJECTS

G.G. Stetsyura

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ gstetsura@mail.ru

**Abstract.** A fully decentralized autonomous method of synchronization of objects interaction in distributed systems of mobile objects (for example, robots) is proposed. It synchronizes the simultaneous transmission of signals from a group of signal-source objects to a group of signal receivers, accelerates group data transmission and execution of distributed computations directly in the network facilities of the system. Decentralization eliminates the presence of a center that manages the synchronization processes within the group of objects. Autonomy allows performing synchronization without interaction with external controlling technical means. The objects of the group exchange non-directional signals via wireless optical or radio communication channels. Two interacting synchronization processes are used. The main purpose of the first process of the group sync process is to sequence the actions of a group of asynchronous objects and provide input data for the second sync correction process. The second process accelerates the group data transmission and the execution of distributed computations directly in the network facilities of the system due to faster and more accurate account for changes in the location of moving objects than in the first process. The first process can be used independently of the second process to determine the location, speed, and acceleration of moving objects relative to each other and to external active or passive objects. On the whole, the proposed synchronization without the influence of a dedicated control center translates a group of mobile objects from a random state into a synchronized mobile system.

**Keywords:** mobile objects group, synchronization, autonomy, decentralization, system self-organization, synchronous distributed network computing.



## Новые издания ИПУ РАН

**Селезнева И.Е.** Модели управления конкуренцией в высокотехнологичных отраслях промышленности: монография / И.Е. Селезнева; науч. ред. В.В. Клочков — М.: ИПУ РАН, 2020. — 184 с. — ISBN 978-5-91450-245-1.

**Антипов В.И.** Модель воспроизводства ВВП России P1-4-0(2020-1) / В.И. Антипов, Н.А. Митин, Ф.Ф. Пашенко. — М.: ИПУ РАН, 2020. — 114 с. — ISBN 978-5-91450-247-5.

**Устойчивость** и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) [Электронный ресурс]: Материалы XV Междунар. научн. конфер. (3—5 июня. 2020 г., Москва) / под общ. ред. В.Н. Тхай; Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 8,3 Мб). — М.: ИПУ РАН, 2020. — 1 электрон. опт. диск (CD-R). — Систем. требования: Pentium 4; 1,3 ГГц и выше; Internet Explorer; Acrobat Reader 4.0 или выше. — Загл. с экрана. — ISBN 978-5-91450-246-8. — No госрегистрации: 0322002427.

# ЦИФРОВАЯ ПЛАТФОРМА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЭНЕРГОРЕСУРСАМИ

С.П. Ковалёв, А.А. Небера, М.В. Губко

**Аннотация.** Рассматриваются проблемы интеллектуального управления современными электроэнергетическими системами с распределенными энергоресурсами. Указанные системы включают в себя разнообразные энергоприемники (в том числе с управляемой нагрузкой), локальные генерирующие установки и накопители электроэнергии. Показана целесообразность формирования и исполнения прикладных систем управления такими объектами на базе единой цифровой платформы. Описан типовой процесс управления на базе платформы, направленный на повышение эффективности совместного функционирования физических либо виртуальных групп распределенных энергоресурсов с помощью оптимизационного планирования и виртуальной отработки на цифровых двойниках. Перечислены актуальные сценарии использования платформы в оперативном управлении распределенными энергоресурсами. Представлены задачи математического обеспечения платформы: автоматическое моделирование и анализ электрических режимов на цифровых двойниках, оптимизационное планирование и управление, прогнозирование профилей потребления/генерации и технико-экономических факторов.

**Ключевые слова:** распределенные энергоресурсы, цифровая платформа, цифровой двойник, смарт-контракт, оптимизационное планирование.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время во всем мире идет так называемый энергетический переход — формирование цифровой децентрализованной малоуглеродной энергетической инфраструктуры (перспектива 3D: digitalization, decentralization, decarbonization) [1]. В процессе перехода возникает новый тип электроэнергетических систем с распределенными энергоресурсами (ЭЭС РЭР) — сложные гетерогенные объекты управления, включающие в себя разнообразные энергоприемники (в том числе с управляемой нагрузкой), локальные генерирующие установки (в том числе на дизельном топливе, на природном газе, а также на возобновляемых источниках энергии — ВИЭ) и накопители электроэнергии. Такие объекты насыщаются и будут насыщаться различными инновациями, как техническими (новые виды оборудования и автоматики),

так и организационными (новые виды услуг и модели рынка).

Рост установленной мощности ЭЭС РЭР, стимулируемый в мире как экономически, так и законодательно, в перспективе может стать угрозой для устойчивости и надежности работы энергосистем, если ЭЭС РЭР и их операторы не будут вовлечены в общий контур оперативно-технологического и экономического управления. Однако традиционные методы и средства управления не рассчитаны на увеличение на порядки количества субъектов и объектов управления, объема потоков данных, состава функциональных задач. Разработка и внедрение автоматизированных систем управления (АСУ) для отдельных объектов наталкивается на проблемы, связанные с высокими затратами и с интеграцией таких АСУ друг с другом (интероперабельностью).

В этих условиях, исходя из принципов цифровой экономики, актуальна разработка цифровой

платформы [2]. Чтобы поддерживать создание и функционирование АСУ ЭЭС РЭР, в платформу включается большой набор базовых функций и алгоритмов управления РЭР с широкими возможностями по настройке, а также готовые сервисы для субъектов распределенной энергетики в мощной облачной вычислительной среде с удаленным доступом. В рамках платформы унифицируются и автоматизируются такие процедуры, как информационный обмен между участниками циклов управления, верификация взаимных обязательств и финансовые взаиморасчеты, взаимодействие с датчиками и исполнительными механизмами, моделирование и оптимизационное планирование режимов работы оборудования, защита от несанкционированного доступа к информации и др. Архитектура платформы проектируется с прицелом на возможность быстро компоновать из готовых модулей, развертывать и эффективно эксплуатировать разнообразные АСУ силами как разработчика платформы, так и экосистемы партнеров, заинтересованных в использовании сервисов и инструментов платформы для разработки и продвижения собственных решений.

На рынке АСУ для распределенной энергетики имеется предложение платформенных решений, в том числе крупных от грандов в сфере автоматизации. Однако крупные решения в основном нацелены на крупных заказчиков (генерирующие компании, нефтегазовый сектор, промышленные предприятия), вследствие чего им присущи определенный функциональный дисбаланс, высокая стоимость владения и жесткие требования к уровню квалификации разработчиков и эксплуатирующего персонала АСУ. Эти особенности больших платформ остро ощущаются в децентрализованной инфраструктуре типа микрогрида, состоящей из множества небольших активных потребителей низкого уровня напряжения (0,4 кВ), не располагающих ни единым центром управления, ни значительным ИТ-бюджетом, ни высококвалифицированным персоналом. В свою очередь, существующие «малогабаритные» платформенные решения для такой инфраструктуры во многом направлены на предоставление красивых потребительских сервисов и недостаточно оснащены мощными высокотехнологичными инструментами энергетиков, позволяющими формировать и применять цифровые двойники ЭЭС РЭР, оценивать техническую исполнимость и верифицировать фактическое исполнение смарт-контрактов различных видов и т. п.

Для решения этих проблем в настоящее время в рамках Национальной технологической инициативы по направлению «Энерджинет» ведется разработка «Платформы» [3] — цифровой платформы нового поколения, способной предоставить

массовым рядовым субъектам распределенной энергетики отвечающий их потребностям и возможностям интегрированный пакет высоких энергетических, информационных и экономических технологий.

В настоящей статье описывается современный подход к разработке платформенных решений, принятый, в частности, при создании «Платформы», а также кратко рассматриваются особенности организационного и алгоритмического обеспечения управления на базе «Платформы», отличающие это решение от аналогов. Для разработчиков и поставщиков АСУ представлены функциональные возможности и архитектурная организация компонентов платформы, типовые процессы и сценарии использования, алгоритмы и модели. Исследователи в сфере ЭЭС РЭР увидят новые области и способы приложения и внедрения своих результатов путем интеграции с платформой. Субъектам распределенной энергетики могут быть интересны описанные в статье способы повышения отдачи от вложений в новые технологии посредством внедрения платформенного решения.

---

## 1. ТИПОВОЙ ПРОЦЕСС УПРАВЛЕНИЯ НА БАЗЕ ПЛАТФОРМЫ

---

Так же, как и сама ЭЭС РЭР, АСУ ЭЭС РЭР представляет собой распределенную многоуровневую систему. На разных ее уровнях объектами управления являются как отдельные организации и частные лица — субъекты распределенной энергетики, так и их объединения (операторы или агрегаторы), сервисные компании и другие участники ЭЭС РЭР, а также принадлежащее им электрооборудование, объекты инженерной и информационно-коммуникационной инфраструктуры.

Целесообразность применения платформы наиболее ярко проявляется на группах РЭР, которые функционируют более эффективно (по тем или иным критериям) при согласованном (в той или иной степени) для всех объектов группы принятии управляющих решений, нежели чем при индивидуальном управлении каждым объектом группы без учета остальных. Управление такими группами может происходить как децентрализованно, так и из выделенного логического центра. При децентрализованном управлении владельцы отдельных РЭР самостоятельно находят друг друга для взаимовыгодного обмена энергией и оказания/получения услуг, в том числе посредством рыночных механизмов аукционного типа, фиксируют обязательства по согласованному управлению своими объектами в смарт-контрактах и исполняют их путем прямых энергетических трансакций (англ.

*peer-to-peer, P2P*). Такой принцип управления может применяться в инфраструктуре типа Интернета энергии [4, 5], которая станет реализуемой по мере развития технологий, способных обеспечить устойчивость децентрализованных ЭЭС РЭР.

В настоящее время проще реализовать централизованное управление, причем как на основе транзакций, финансовый поток в которых направлен от владельца РЭР к оператору центра управления (англ. *peer-to-operator, P2O*), так и на основе транзакций от оператора к владельцу РЭР (англ. *operator-to-peer, O2P*). В первом из этих двух случаев (P2O) оператор принимает от владельцев группы РЭР в заранее заданном составе, выполняет групповое управление в целях максимизации эффективности их совместного функционирования и за это получает свое вознаграждение; этот принцип управления называется «энергия как сервис» (англ. *energy-as-a-service*). Во втором случае (O2P) логический центр по собственной инициативе формирует группу РЭР, в том числе путем конкурентного отбора, в целях объединения их возможностей и/или потребностей в цельные экономические агрегаты, стоимость которых он оптимизирует за счет масштабных эффектов и из дохода от которых вознаграждает владельцев РЭР; центры управления такого типа называются агрегаторами (англ. *aggregators*). Известны агрегаторы спроса (ценозависимого снижения потребления), предложения (виртуальные электростанции), хранения (распределенные системы накопления электроэнергии).

Возможна и частичная децентрализация управления, когда агрегатор/оператор не получает прямого доступа к оборудованию участника ЭЭС РЭР, но заключает с ним обязывающие соглашения, ограничивающие использование оборудования или гарантирующие выполнение операторских команд. При этом на владельца ложится управление своим энергетическим оборудованием в целях наиболее эффективного его использования при условии выполнения соглашений.

Типовой процесс управления группами объектов на базе платформы состоит из пяти стадий, как показано на рис. 1.

На первой стадии заинтересованные стороны — субъекты распределенной энергетики, инициирующие процесс, — выбирают целевые критерии оптимальности группового управления сообразно своим бизнес-целям: минимизации платежей закупаемую на розничном рынке электроэнергию и мощность, максимизации дохода от продажи электроэнергии и оказания системных услуг, максимизации надежности электроснабжения и др. Согласно критериям и своим возможностям субъекты далее определяют методы и средства управ-

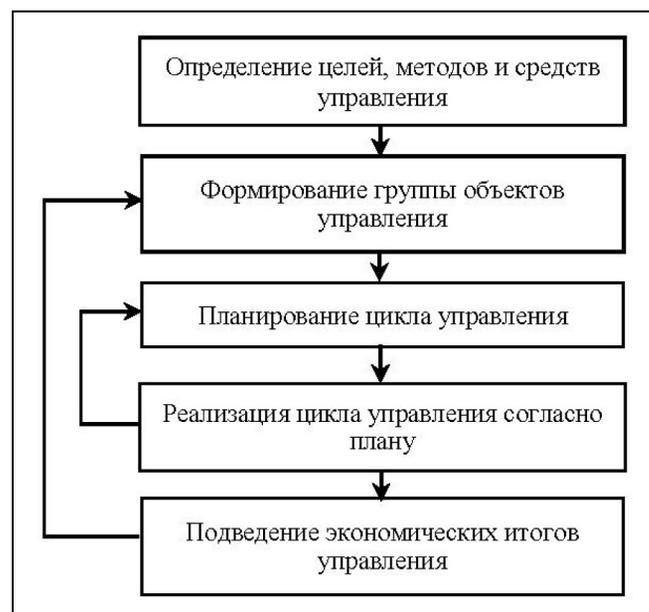


Рис. 1. Типовой процесс управления на базе платформы

ления, регламенты и форматы взаимодействия и взаиморасчетов, а также АСУ. Эффект от применения платформы на этой стадии заключается в возможности быстрой компоновки программного, информационного и математического обеспечения АСУ из компонентов платформы и готовых сервисов на ее базе. Для этого компоненты платформы оформляются как микросервисы — небольшие, слабо связанные и легко изменяемые компоненты с открытым прикладным программным интерфейсом, взаимодействующие в единой информационной среде с использованием экономических коммуникационных протоколов в стиле REST [6]. Алгоритмы АСУ в основном состояются из обращений к (микро)сервисам платформы в порядке, обусловленном особенностями конкретного процесса и объекта управления. Дополнительно в прикладной части программного обеспечения АСУ реализуются средства поддержки процесса, специализированные до такой степени, что включать их в платформу нерационально: это могут быть драйверы взаимодействия с редко встречающимися устройствами, адаптеры интеграции со смежными автоматизированными системами, модули сбора и обработки специфических данных, видеоклады пользовательского интерфейса и шаблоны электронных документов.

На второй стадии формируется конкретная группа РЭР для автоматизированного управления по выбранным критериям и оцениваются ожидаемые значения интегральных показателей ее эффективности. Данная стадия может выполняться,

в частности, на этапах проектирования и строительства РЭР. Благодаря применению платформы устанавливается единая защищенная информационная среда для слаженного взаимодействия всех элементов системы группового управления в рамках достижения целей независимо от территориального расположения, технологических особенностей, владельцев. Проводится процедура включения каждого объекта управления группы в эту среду. При ограниченных возможностях управления объект может быть представлен в среде как «черный ящик» с известным фиксированным интерфейсом взаимодействия. Однако для достижения максимальной эффективности управления целесообразно сформировать его цифровой двойник — модель высокой степени адекватности, способную детально отображать состояние объекта, предсказывать его поведение в различных условиях и определять целесообразные управляющие воздействия на него. Формирование, применение и пример цифрового двойника ЭЭС РЭР рассматриваются подробно далее в § 3.

На третьей стадии типового процесса происходит планирование цикла управления — определяются конкретные ожидаемые значения показателей функционирования объектов и эффективности сформированной из них группы в целом, которые должны быть достигнуты в будущем цикле. Значения могут вырабатываться путем последовательного уточнения и верификации достижимости в ходе планирования на сужающихся горизонтах: среднесрочного (от 1 месяца до 1 года), краткосрочного (на сутки вперед), оперативного (в течение операционных суток), а также по мере уточнения информации (заявок) от участников ЭЭС РЭР. Согласно выработанным планам формируются задания на функционирование каждого РЭР в ходе цикла, которые могут быть зафиксированы договорными обязательствами между субъектами, намеревающимися принять участие в цикле, в том числе в форме смарт-контрактов. Платформа предоставляет для поддержки планирования программные модули, которые реализуют типовые алгоритмы широкого спектра применения, позволяющие автоматически моделировать и анализировать электрические режимы, прогнозировать профили потребления/генерации и внешние технико-экономические факторы, решать оптимизационные задачи управления группой РЭР. Моделирование режимов проводится на базе цифровой расчетной модели, которая автоматически формируется на основе цифровых двойников объектов группы согласно топологии соединяющих их сегментов электрических сетей. Алгоритмы прогнозирования строятся в том числе на базе плоских и глубоких моделей машинного обучения на боль-

ших массивах исторических данных. Оптимизационные задачи решаются на основе базового алгоритма, предоставляющего широкие возможности по настройке путем выбора конкретных переменных, технико-экономических критериев и ограничений. Ряд указанных алгоритмов рассматривается подробно в § 4 и 5.

По итогам планирования цикла управления выполняется стадия его реализации. Реализация цикла включает в себя непрерывный сбор телеизмерений и телесигналов (от существующих автоматизированных информационно-измерительных и управляющих систем или непосредственно от КИПиА), оперативный расчет фактических значений показателей функционирования РЭР и эффективности группы в целом, выявление отклонений фактических значений от плановых, определение необходимых корректирующих воздействий на объекты управления, отправку команд на выполнение воздействий исполнительным механизмам РЭР и/или эксплуатирующему их персоналу, реагирование на всевозможные изменения внешних условий и отказы, оперативную визуализацию текущего состояния РЭР. Инструменты платформы, в том числе входящая в нее среда интернета вещей, при реализации цикла способны автоматически поддерживать поток сбора и комплексной обработки оперативной информации в темпе мягкого реального времени, включающий все перечисленные функции. В платформе содержатся адаптеры стандартных коммуникационных протоколов, таких как протокол организации очередей доставки телеметрических сообщений MQTT (ГОСТ Р 58603—2019), Modbus, протоколы из ГОСТ Р МЭК 60870-5-104—2004 и др. Поток оперативной информации выступает объектом широкого спектра включенных в платформу мер защиты, направленных на нивелирование угроз и рисков утраты конфиденциальности, целостности и доступности. По окончании очередного цикла происходит возврат на стадию планирования для следующего цикла.

Завершающая стадия типового процесса — подведение экономических итогов циклов управления, выполненных в течение некоторого расчетного периода. Фактический вклад каждого объекта в (не)достижение целей циклов автоматически вычисляется в натуральном выражении и переводится в стоимостное значение. Удовлетворяются зафиксированные в ходе планирования договорные обязательства между субъектами, принявшими участие в циклах, путем автоматической оплаты рассчитанных вкладов в форме вознаграждения или штрафа посредством перевода цифровых финансовых активов между цифровыми кошельками участников. По итогам взаиморасчетов возможна



корректировка состава группы путем возврата на вторую стадию типового процесса. Эффект от применения платформы при подведении итогов заключается в обеспечении «справедливости» — исключении субъективного человеческого фактора из процедур расчета и оплаты, обеспечение их полной прозрачности, защищенности и верифицируемости, в том числе благодаря хранению истории энергетических трансакций с хеш-суммами данных о фактических физических объемах услуг в распределенном реестре.

## 2. СЦЕНАРИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЛАТФОРМЫ В ОПЕРАТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ

Путем конкретизации вышеописанного типового процесса для различных принципов управления, видов субъектов и объектов распределенной электроэнергетики, нормативно-правовых и технико-экономических условий выделено восемь сценариев использования платформы в оперативном управлении. Поскольку у платформы в целом отсутствует заранее фиксированный заказчик (в узком смысле этого термина), построение и последующее имитационное моделирование сценариев служит основным способом выявления потребностей заинтересованных сторон в ней, подтверждения ее уникальности и востребованности. Перечень сценариев был первоначально сформирован в рамках проекта по разработке архитектуры Интернета энергии [7] и уточнен в ходе проектирования платформы.

Первые три сценария эксплуатируют возможность предоставления энергосистеме услуг на основе агрегирования и согласованного управления различного рода ресурсами.

*Сценарий 1. Управление спросом (ценозависимое снижение потребления).* Управление спросом основано на возможности удовлетворять повышенную потребность в электроэнергии в пиковые периоды не только путем увеличения выработки (генерацией или отбором из накопителей), но и путем уменьшения фактического потребления по отношению к запланированному заранее [8]. Для массовых розничных потребителей кратковременное отключение или снижение нагрузки может быть необременительным и при объединении в крупную группу с координированным оптимальным управлением нагрузкой, в том числе по принципу «скользящего окна», может представлять значимый ресурс для компенсации пиков с минимальными издержками. Операторы такого группового управления нагрузкой называются агрегаторами спроса: они продают услугу по существенному снижению потребления операторам большой энерге-

тики, а с владельцами отключаемого оборудования проводят трансакции типа O2P на базе смарт-контрактов.

*Сценарий 2. Управление виртуальной электростанцией.* Функция агрегатора РЭР востребована не только для снижения потребления, но и для группового участия владельцев генерирующего оборудования небольшой мощности в рынках электроэнергии, мощности, системных услуг [9]. Особенно актуальна агрегация генерации на ВИЭ, поскольку их выработка зависит от неуправляемых природных условий. Координированное оптимальное управление группой генераторов (ВИЭ и топливных), расположенных в регионах с разной погодой, позволяет компенсировать провалы выработки одних генераторов за счет других, минимизируя расход ископаемого топлива традиционными электростанциями. В идеале агрегатор такой виртуальной электростанции способен надежно поставлять стопроцентно экологически чистую энергию, что позволяет ему и владельцам оборудования получить дополнительные экономические преференции, в том числе через механизм «зеленых» сертификатов [10].

*Сценарий 3. Управление распределенной системой накопителей.* Объектами агрегации могут выступать не только единицы энергопринимающего и генерирующего оборудования, но и накопители электроэнергии. Способность накопителей практически мгновенно переходить из режима потребления энергии к выработке и обратно делает их средством управления не только спросом/предложением электроэнергии и мощности, но и гибкостью энергосистемы — скорости наращивания/уменьшения мощности. Агрегатор, которому в согласованное оптимальное управление предоставила свои накопители группа владельцев, охватывающая некоторый сегмент большой энергосистемы с достаточно высокой плотностью, способен продавать оператору сегмента высококачественные системные услуги — автоматическое регулирование частоты и мощности, в том числе нормированное первичное регулирование частоты (НПРЧ) [11]. Такой агрегатор рассчитывается с владельцами конкретных устройств, обеспечивших оказание услуги, согласно их фактически измеренному вкладу на базе смарт-контрактов.

Ряд сценариев использования платформы ориентирован на операторов классического формата и трансакции типа P2O.

*Сценарий 4. Коммерческая диспетчеризация потребителей.* Типичным оператором является коммерческий диспетчер, оказывающий клиентам — активным потребителям услуги по оптимальному управлению их энергопринимающим оборудованием, собственной генерацией и накопителями

электроэнергии в целях минимизации платежей закупаемую на розничном рынке электроэнергию и мощность при соблюдении ограничений по удовлетворению потребностей клиентов в электроэнергии. Вознаграждение оператору определяется в зависимости от достигнутой величины экономии платежей в расчетном периоде согласно правилам, заданным в смарт-контракте с клиентом.

*Сценарий 5. Управление активными энергетическими комплексами (АЭК).* Функции, схожие с теми, которые осуществляет коммерческий диспетчер, выполняет оператор АЭК — локального комплекса объектов по производству и потреблению электроэнергии, связанных собственными электросетями, который присоединен к внешней сети в одной точке посредством специализированного программно-аппаратного узла, называемого управляемым интеллектуальным соединением (УИС) [12]. Оператор осуществляет оптимальное управление АЭК при помощи УИС и иных средств автоматизации в целях минимизации отбора мощности из внешней сети в стоимостном выражении и получает за это вознаграждение от владельцев объектов, входящих в АЭК. В общем случае АЭК должен обеспечивать электроснабжение критичных нагрузок и в случае прерывания внешнего электроснабжения, переходя в островной режим с локальным балансированием мощности и управлением частотой. Тем самым АЭК — это фактически специальный случай *микросети* (см. сценарий 8), имеющего ограниченный переток с внешней энергосистемой. Отметим постепенный рост числа таких микросетей в энергосистемах разных стран, например, как меру повышения надежности электроснабжения критических объектов инфраструктуры или функционирующих в неблагоприятных условиях внешней среды (лесные пожары и др.) [13].

*Сценарий 6. Диспетчеризация парка станций зарядки электротранспорта.* Среди ЭЭС РЭР особое место занимают станции зарядки электротранспорта. Профиль их потребления отличается нерегулярностью и всплесками отбора мощности. Оптимизационное планирование в управлении станциями часто проводится в целях установления привлекательной цены на зарядку для владельцев электромобилей, дифференцированной по времени и по месту нахождения станции, с учетом как загрузки зарядных постов, так и рыночной стоимости электроэнергии. Может быть предложена даже отрицательная цена, когда оператор станции отбирает энергию у электромобилей для пополнения собственных накопителей, участия в цикле управления спросом или оказания системных услуг. Расчеты между операторами станций и вла-

дельцами транспорта целесообразно осуществлять на основе смарт-контрактов [14].

*Сценарий 7. Диспетчеризация участков и районов активной распределительной электрической сети.* Распределительные сети традиционно рассматриваются в фокусе энергетического перехода. Инновационные энергетические и информационные технологии позволяют поднять на новый уровень оказания традиционных сетевых услуг, качество которых измеряется показателями надежности (SAIDI/SAIFI), объемами потерь и перегрузок на участках сети. Становится возможным предоставлять такие услуги подключенным потребителям на основе смарт-контрактов. В то же время, наличие на стороне потребителей локального генерирующего оборудования и накопителей, управляемых инверторами, предъявляет новые требования к алгоритмам планирования режимов в части обеспечения устойчивости в условиях двунаправленного перетока мощности.

Завершает перечень сценариев оперативного управления наиболее многогранный и комплексный из них.

*Сценарий 8. Управление микросетями и микросетевыми рынками.* К микросетям относятся локальные ЭЭС РЭР, для которых подключение к внешней электросети отсутствует или ограничено по мощности, либо требуются особые меры обеспечения надежности электроснабжения. Строительство микросетей может быть обусловлено как отсутствием или ограниченностью централизованного энергоснабжения (в труднодоступных районах), так и соображениями экологичности и престижности. В рамках микросети можно отрабатывать в соответствующем масштабе все вышеперечисленные сценарии, получая максимальный синергетический эффект от платформенного подхода. Более того, как указывалось выше, при наличии средств обеспечения устойчивости возможна организация локального микросетевых рынков для прямой торговли электроэнергией между владельцами РЭР, подключенных к микросети, путем проведения транзакций типа P2P на базе смарт-контрактов. В этом случае режим энергосистемы определяется не централизованным оптимизационным планированием, а технико-экономическим консенсусом между множеством игроков с различными интересами [4].

В перспективе типовой процесс оперативного управления в рамках платформы может быть расширен для реализации других процессов и задач, в том числе возникающих на различных стадиях жизненного цикла ЭЭС РЭР. В качестве примеров областей такого применения платформы можно привести:

— инвестиционное планирование и оценку,



- проектирование ЭЭС РЭР,
- закупки и строительство,
- техническое обслуживание и ремонт,
- обучение персонала субъектов распределенной энергетики,
- информационно-аналитическую поддержку.

### 3. ЦИФРОВЫЕ ДВОЙНИКИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПЛАТФОРМЫ

Особенность предлагаемой цифровой платформы заключается в широком использовании цифровых двойников. Цифровые двойники объектов предназначены для моделирования всевозможных воздействий на эти объекты в ходе их полного жизненного цикла (в том числе не осуществлявшихся физически), прогнозирования результатов таких воздействий, выработки и реализации мер по предотвращению их негативных последствий [15]. Как указывалось в § 1, цифровые двойники формируются вместе с группами объектов управления в целях повышения достоверности представления и анализа их состояния и поведения. Как и платформы в целом, цифровые двойники ориентированы на применение при решении неограниченно широкого круга задач анализа и управления, в том числе не известных во время проектирования. Поэтому главным компонентом цифрового двойника является комплекс разнородных информационных, расчетных, имитационных, нейросетевых и других моделей, способных описать максимально широкий круг аспектов поведения оригинала с приемлемым уровнем достоверности [16].

В настоящее время выделяются два основных принципа построения таких моделей: путем численного описания физических явлений и путем машинного обучения по прецедентам [17]. Модели физических явлений, основанные на численных методах решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений математической физики, уже несколько десятилетий развиваются в составе САПР (компьютерных инструментов инженерных расчетов, англ. *Computer Aided Engineering, CAE*). В последние годы появились высокопроизводительные вычислительные средства, способные выполнять инженерные расчеты не при проектировании изделия в конструкторском бюро, а в ходе эксплуатации в мягком реальном времени на данных, поступающих с датчиков объекта. Это позволяет использовать САЕ в цифровых двойниках, в том числе энергетического оборудования: например, известны термоэлектрические модели силовых трансформаторов, позволяющие оперативно предсказывать отказы [18]. В свою очередь, модели

на основе машинного обучения актуальны для процессов, отличающихся высокой динамикой и наличием изменчивых скрытых закономерностей. Такие процессы присущи оборудованию ЭЭС РЭР: например, глубокие (многослойные) искусственные нейронные сети применяются для прогнозирования выработки генераторов на ВИЭ [19]. Главным фактором адекватности машинного обучения является наличие хорошей обучающей выборки — статистические репрезентативного набора достоверно наблюдаемых сценариев поведения оригинала при различных значениях всех влияющих факторов.

Для ЭЭС РЭР актуальны два типа цифровых двойников, образующие иерархию:

- цифровые модели электрооборудования, позволяющие описывать механические, тепловые, электромагнитные, химические и иные процессы в трансформаторе, накопителе электроэнергии и пр.;
- цифровые модели электроэнергетических систем в целом, позволяющие моделировать установившиеся и переходные процессы, оценивать риски взаимодействия с окружающей средой (грозы, пожары, условия безопасности людей и др.).

Цифровые модели второго типа уже несколько десятилетий применяются в составе средств класса SCADA/EMS, SCADA/DMS/OMS и др., позволяя диспетчерам оценивать риски при возможных отказах важных элементов энергосистем, выполнять оперативную оптимизацию электрических режимов и др. Новое качество таким моделям может дать учет экономических аспектов развития и функционирования энергосистем, интеграция с геоинформационными системами и данными социальных сетей. В идеале, особенно для групповых объектов управления, цифровая модель энергосистемы должна включать в себя полнофункциональные модели всего используемого электрооборудования. Однако сборка целостного корректного цифрового двойника ЭЭС РЭР из двойников ее составляющих может потребовать высоких затрат труда и привести к вычислительно емкой модели. Фактически требуется виртуально воспроизвести процесс строительства сегмента ЭЭС РЭР на информационных и математических моделях. Для этого необходимы модели, имеющие явно выделенные интерфейсы для взаимодействия друг с другом с проверкой корректности и поддерживающие иерархическую композицию. Ведутся исследования, направленные на построение таких моделей путем сборки на уровне симуляций [20], нейросетей [21] и др.

Для формального описания и верификации сборки моделей ранее был предложен перспективный подход на базе математического аппарата теории категорий [22]. Его основная идея заключа-

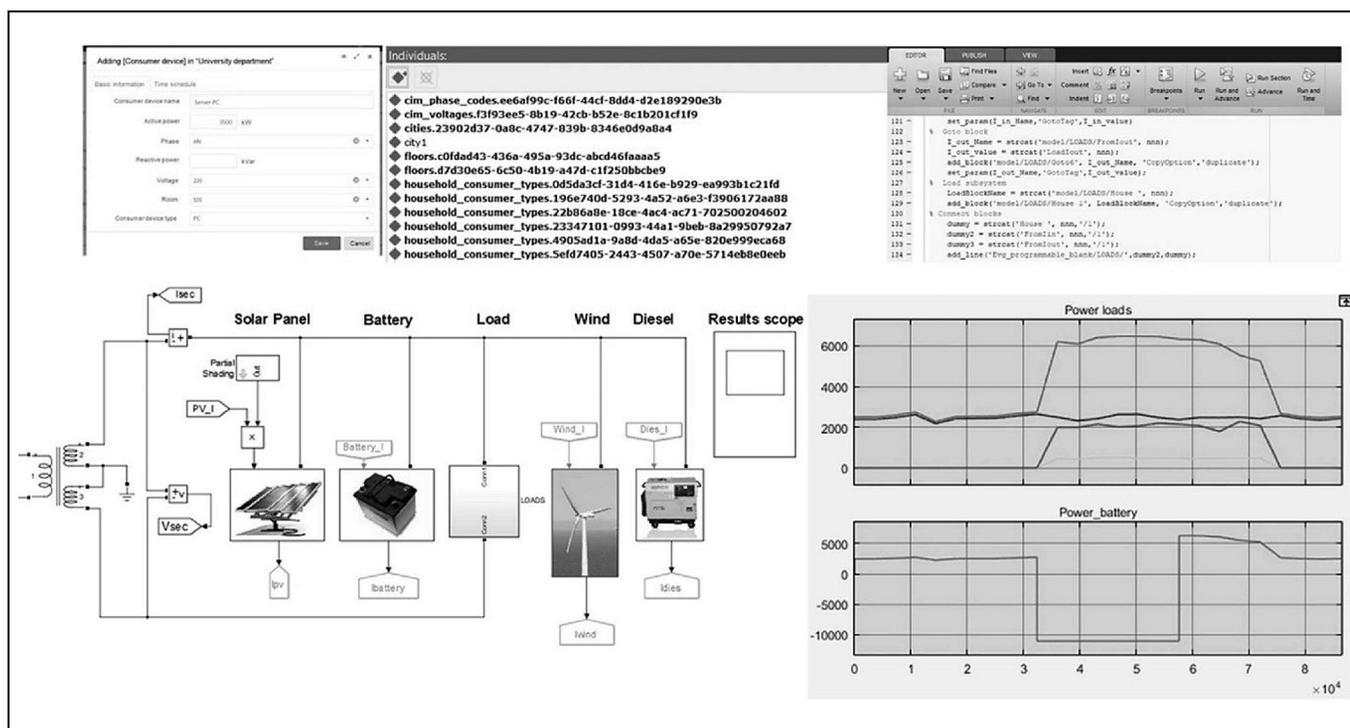


Рис. 2. Макет цифрового двойника энергосистемы [23]

ется в том, что схема ЭЭС РЭР представляется диаграммой в категории, объектами которой служат алгебраические представления моделей, а морфизмы описывают действия по сборке моделей систем из моделей составляющих. Для такой диаграммы вычисляется универсальная конструкция копредела (colimit) — алгебраический аналог сборки. В целях приложения к разработке платформы были детально изучены такие конструкции, описывающие сборку информационных и имитационных моделей, и на их основе выработаны типовые проектные решения для компоновки цифровых двойников ЭЭС РЭР.

Цифровой двойник ЭЭС РЭР реализуется в платформе как комплекс математических моделей, настроенных (skonфигурированных) на обработку в темпе мягкого реального времени разнообразной информации: массивов данных телеизмерений и телесигнализации по объектам управления от среды интернета вещей, мастер-данных из информационной модели объектов управления, электронной документации и цифровых интерактивных схем (планов, карт) [23]. Макет такой модели локальной энергосистемы активного потребителя, разработанный в среде Matlab Simulink, показан на рис. 2. Макет способен рассчитывать и показывать графики состояния для всех единиц оборудования, профили генерации и потребления по единицам и

по энергосистеме в целом. Моделируются и отображаются как установившиеся режимы, так и переходные процессы, такие как переключение на питание от накопителя и обработка цикла ценозависимого снижения потребления. Имеется возможность рассчитать и задать уставки для инвертора накопителя.

Чтобы обеспечить сквозную совместимость моделей по входным/выходным данным и исключить разночтения в именовании и интерпретации понятий, которыми оперирует цифровой двойник, информационное обеспечение разрабатывается на основе общей для всей платформы онтологии распределенной энергетики. Эта онтология формируется из релевантных нормативно-технических документов, таких как стандарты IEC 61968, 61970, 62325 (Common Information Model, CIM), ГОСТ Р 58651.2—2019 «Единая энергетическая система и изолированно работающие энергосистемы. Информационная модель электроэнергетики. Базисный профиль информационной модели» (российский профиль CIM), предварительный национальный стандарт «Информационные технологии. Умная энергетика. Термины и определения», онтология умных энергопринимающих устройств Smart Appliances REference (SAREF), стандарт на smart-контракты ERC20 и др.

#### 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Различные задачи оптимизации возникают во всех сценариях использования системы управления распределенной энергетикой. Помимо классических для электроэнергетики задач оптимизации режимов электроэнергетических систем, выбора оптимального состава рабочего оборудования или конфигурации сети [24], современные ЭЭС РЭР требуют решения задач оптимального планирования работы сетевых накопителей электроэнергии (СНЭ), оценки рисков при управлении спросом, оптимизации используемых агрегаторами ресурсов при оказании системных услуг.

Все эти оптимизационные задачи имеют свою специфику:

- они решаются на разных временных промежутках: от нескольких минут в задачах управления мощностью при вторичном регулировании частоты [25] до десятилетий в задачах планирования развития сети [26];

- они имеют различные критерии минимизации реактивной мощности, потерь в сети, отклонений напряжения от номинала, совокупных затрат на генерацию, а также максимизации совокупной прибыли участников электроэнергетической системы [24] или прибыли отдельных участников в предположении рациональных (равновесных) действий остальных участников [27];

- они включают в себя различные наборы и типы переменных (двоичные, целочисленные, непрерывные);

- они различным образом учитывают неопределенность будущего, и т. д.

Наконец, к решению этих задач предъявляются различные требования по точности и оперативности — от нескольких секунд в задачах деления сети [28] до дней и месяцев в задачах планирования состава клиентов агрегаторов (см. ниже).

В то же время, платформенный подход к реализации систем управления распределенной энергетикой предполагает включение в платформу максимально универсальных алгоритмов решения оптимизационных задач, которые бы покрывали большую часть задач сценариев использования платформы. Это требует разработки общей математической модели и унифицированного подхода к формулировке и решению задач оптимизации электроэнергетических систем. Помимо максимальной универсальности математической модели, АСУ ЭЭС РЭР диктуют высокие требования к масштабируемости алгоритмов для решения задач для десятков тысяч приборов и сетей сложной конфигурации.

Универсальная модель объединяет специфику задач различных, в том числе инновационных, сценариев — в постановке оптимизационной задачи учитываются:

- управление составом и режимами работы источников электроэнергии — традиционных генераторов и ВИЭ;

- управление нагрузкой (прямое управление нагрузкой, перенос нагрузки, агрегирование спроса);

- управление накопителями электроэнергии, в том числе у общественного и персонального электротранспорта;

- технические средства управления реактивной мощностью и напряжением, конфигурацией ЭЭС РЭР;

- системы и объекты, внешние по отношению к объекту управления (к части ЭЭС РЭР, контролируемой платформой), включая многочисленные взаимные обязательства между участниками — сложные многоставочные и мультizonные тарифы на электроэнергию и мощность, штрафы за отклонение от заявленного потребления, обязательства по участию в оказании системных услуг и т. п.;

- большое число (до нескольких сотен) взаимосвязанных периодов планирования;

- неопределенность будущего — различные сценарии изменения объемов генерации, потребления, рыночных цен и других значимых параметров.

С точки зрения разработки методов решения оптимизационной задачи ключевую роль играет ее класс. Вообще, задача оптимизации режима электрической сети — это невыпуклая задача нелинейного программирования, обычно решаемая методом Ньютона — Рафсона. К сожалению, этот метод не работает при наличии дискретных переменных, описывающих состав включенного оборудования, режимы нагрузки и конфигурацию сети. К тому же, наличие в системе СНЭ значительно увеличивает размерность задачи управления режимом, поскольку периоды планирования в пределах суток становятся существенно взаимозависимыми [29], что сильно усложняет решение нелинейной задачи. Таким образом, универсальность и масштабируемость цифровой платформы управления ЭЭС РЭР требует иного подхода.

Нелинейные равенства, описывающие передачу энергии между узлами электрической сети, для нормальных режимов работы распределительных сетей преимущественно радиальной топологии эффективно приближаются в рамках линейной модели «постоянного тока» (англ. *direct current power flow* [24]). Прочие источники нелинейности в задаче управления режимом — нелинейные функции себестоимости генерации и потери энергии в линии, также нелинейным образом зависящие от

объема протекающей через нее активной и реактивной энергии — могут быть заменены кусочно-линейной аппроксимацией [30]. В рамках сценарного подхода к моделированию неопределенности [31] при переходе к задаче стохастического программирования класс оптимизационной задачи не меняется.

В результате решается смешанная (дискретно-непрерывная) задача линейного программирования (СЗЛП). Для решения задач такого типа в последние десятилетия разработаны эффективные методы на базе алгоритма ветвей и границ с нижними оценками на основе непрерывной релаксации. Современные универсальные коммерческие оптимизационные пакеты, такие как Gurobi, Mosek, IBM CPLEX, FICO Xpress, позволяют эффективно решать СЗЛП большой размерности с тысячами дискретных и миллионами непрерывных переменных. В рамках платформы планируется, учитывая их опыт, разработать собственные алгоритмы решения СЗЛП большой размерности на основе декомпозиционных методов [25]. Декомпозиционные алгоритмы оптимизации легко распараллеливаются, что позволяет масштабировать платформенное решение за счет повышения числа используемых вычислительных ядер.

Решение задачи в линейном приближении позволяет ответить на важные вопросы выбора состава включенного оборудования, использования СНЭ, выбора конфигурации сети. Однако гарантированно допустимый режим электрической сети можно получить, только решив исходную нелинейную задачу с учетом потоков активной и реактивной мощности в сети. Она решается последовательно для каждого планового периода времени и при зафиксированных значениях дискретных переменных, полученных из решения линеаризованной задачи. В результате решения этой непрерывной задачи относительно небольшой размерности находится допустимый режим, наиболее близкий к рассчитанному с учетом экономических соображений в линейном приближении.

С ростом размерности систем точное решение оптимизационных задач и даже приближенное решение с заданной точностью становится невозможным. Дальнейшее повышение масштабируемости платформенного решения возможно с помощью методов приближенного динамического программирования (англ. *approximate dynamic programming*) [32], иначе называемого обучением с подкреплением (англ. *reinforcement learning*) [33]. Этот подход представляет собой комбинацию классических оптимизационных подходов, оптимального управления и подходов, основанных на данных (машинном обучении), и позволяет при решении многопериодной оптимизационной задачи максимально

использовать информацию об исторических условиях функционирования системы.

На  $i$ -м шаге алгоритма для каждого из рассматриваемых в соответствии с работой [31] сценариев минимизация суммарных затрат объекта управления на диапазоне периодов планирования

$$C(\cdot) = \sum_{t=1}^T c_t(s(t), u(t)) \rightarrow \min_{u(1), \dots, u(T)},$$

где  $s(t)$  — состояние системы на начало периода  $t$ , декомпозируется на множество однопериодных задач минимизации скорректированных затрат

$$C_t(\cdot) = c_t(s(t), u(t)) + W^{(t)}(s(t+1), t) \rightarrow \min_{u(t)},$$

где  $W(s, t) = W_B(s_B, t) + W_S(s_S, t) + W_D(s_D, t) + W_A(s_A, t) + W_M(s_M, t)$  — эвристическая кусочно-линейная функция Беллмана, описывающая влияние локальных решений  $u(t)$ , принимаемых в период  $t$ , на затраты будущих периодов в предположении рационального поведения в будущем;  $s(t+1) = \langle s_B(\cdot), s_S(\cdot), s_D(\cdot), s_A(\cdot), s_M(\cdot) \rangle$  — определяемое начальным состоянием  $\underline{s}(t)$  и управлением  $u(t)$  состояние системы на конец периода  $t$ , включающее в себя состояния всех СНЭ  $s_B(\cdot)$ , статусы  $s_S(\cdot)$ ,  $s_D(\cdot)$  и  $s_A(\cdot)$  обязательств по кумулятивным (например, суточным) объемам приобретения, поставки и потребления электроэнергии (ЭЭ) соответственно, а также максимальное накопленное часовое потребление  $s_M(\cdot)$  (для учета влияния двухставочного тарифа на передачу ЭЭ);  $W_B(\cdot, t)$ ,  $W_S(\cdot, t)$ ,  $W_D(\cdot, t)$ ,  $W_A(\cdot, t)$ ,  $W_M(\cdot, t)$  — слагаемые функции Беллмана, описывающие будущие затраты, связанные соответственно с СНЭ, кумулятивными обязательствами по приобретению, передаче и потреблению ЭЭ, двухставочным тарифом на передачу ЭЭ.

В ходе решения задачи периода  $t$  для каждого узла сети  $v \in V$  также вычисляются двойственные переменные ограничений баланса мощности, так называемые *узловые цены*  $LMP_v(t)$ . В предположении фиксированных узловых цен можно уточнить слагаемые функции Беллмана. Действительно, скажем, ценность закачки дополнительной единицы энергии в конкретный СНЭ в периоде  $t$  определяется максимальной разницей текущей и будущей узловой цены с учетом потерь в накопителе, т. е. совокупные затраты  $W_B(s_B, t)$  всех СНЭ системы представляют собой линейную функцию заряда. Аналогичным образом уточняются и остальные слагаемые функции Беллмана. Для следующей итерации уточненные функции усредняются по сценариям.



Таким образом, решение задачи методом приближенного динамического программирования основано на алгоритме последовательного уточнения эвристической функции Беллмана, причем скорость сходимости алгоритма зависит от того, насколько точным является нулевое приближение функции Беллмана, которое обычно берется из аналогичного периода в прошлом.

Большинство возникающих в бизнес-сценариях задач среднесрочного планирования также в целом описываются приведенной выше универсальной моделью. Однако их специфика позволяет существенно снизить размерность и предложить более эффективные алгоритмы решения. Рассмотрим это на примере задачи выбора состава клиентов агрегатора системных услуг. Как указано в сценарии 3, с массовым распространением СНЭ и распределенной генерации у сетевых компаний и агрегаторов появляются возможности предоставления услуг НПРЧ на основе групповых договоров путем использования спонтанно возникающих несогласованных резервов СНЭ и газотурбинных генерирующих установок. Агрегатор может, с одной стороны, предлагать Системному оператору услуги гарантированного НПРЧ, а с другой стороны, обещать небольшую фиксированную плату владельцам оборудования за возможность удаленного управления настройками их средств ПРЧ и за доступ к их системам мониторинга ПРЧ, не требуя при этом от них поддерживать резервы мощности.

Агрегатор, выбирая состав РЭР для заключения с их владельцами договоров участия в групповом НПРЧ, максимизирует математическое ожидание своей прибыли, равное разнице между ожидаемым доходом и затратами:

$$F(\Pi, R, x) = \Pi \cdot R \cdot \pi(\Pi) \cdot T - \sum_{t=1}^T \Pi \cdot ES(r(t) \cdot x' - R) - c \cdot x',$$

где  $\Pi$  — ценовая заявка агрегатора на рынке услуги НПРЧ;  $R$  — заявленный агрегатором резерв активной мощности;  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор-строка отбора клиентов на плановый период (где  $x_i = 1$ , если  $i$ -й клиент отбирается для участия в групповом НПРЧ, и 0 в противном случае);  $\pi(\Pi)$  — прогноз вероятности отбора заявки агрегатора с ценой  $\Pi$  на рынке системной услуги НПРЧ (неотрицательная убывающая функция);  $T$  — число контрольных периодов на горизонте планирования;  $\Pi$  — ставка штрафа за непредоставление каждого МВт резерва мощности;  $ES(y)$ , где  $y$  — действительная случайная величина с плотностью распределения

$p(y)$ , — функция ожидаемых потерь (англ. *Expected Shortfall*):

$$ES(y) = - \int_{-\infty}^0 yp(y)dy,$$

которую также можно записать через среднее абсолютное отклонение и математическое ожидание аргумента как  $ES(y) = \frac{1}{2} |\bar{y}| - \frac{1}{2} \bar{y}$ ;  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$  — вектор-строка случайных величин прогнозов объема резерва оборудования клиентов  $i = 1, \dots, n$  в контрольный момент  $t$ ;  $c = (c_1, \dots, c_n)$  — вектор-строка стоимостей участия клиентов  $i = 1, \dots, n$  в групповом НПРЧ (цены доступа к системам мониторинга клиентов).

Предположение нормальности распределения случайных величин  $r_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в каждый момент времени  $t = 1, \dots, T$  позволяет отказаться от общего сценарного подхода к учету неопределенности [31] и кардинально уменьшить размерность задачи. В этом предположении суммарный резерв  $R(t) = r(t) \cdot x'$  — это нормально распределенная случайная величина со средним  $\bar{R}(t) = \bar{r}(t)x'$  и дисперсией  $\Sigma^2(t) = xK_t x'$ , где  $\bar{r}(t)$  — вектор математических ожиданий случайных величин  $r_1(t), \dots, r_n(t)$ , а  $K_t$  — их матрица ковариации, и задача сводится к задаче смешанного нелинейного программирования:

$$F(\Pi, R, x) = \Pi \cdot R \cdot \pi(\Pi) \cdot T - \sum_{t=1}^T \Pi \cdot ES(r(t) \cdot x' - R) - c \cdot x',$$

где  $\phi(\cdot)$  и  $\Phi(\cdot)$  — функция плотности и функция интегрального распределения стандартного нормального распределения соответственно.

Согласно работе [34], решение этой задачи эквивалентно решению семейства задач квадратичной минимизации средней по времени дисперсии

резервов  $\Sigma^2 := x \left( \sum_{t=1}^T K_t / T \right) x'$  при параметрически

заданном ограничении на средний резерв  $x \sum_{t=1}^T \bar{r}(t)'$ .

Квадратичные задачи двоичного программирования сводятся к линейным задачам стандартными техниками. Функция  $\pi(\Pi)$  при этом также заменяется своей вогнутой кусочно-линейной аппроксимацией.

Аналогичные задачи возникают и при агрегировании системных услуг вторичного регулирования частоты, ценозависимом снижении потре-

ния, управлении группой зарядных станций электротранспорта; они решаются с помощью схожих подходов.

## 5. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ

Как отмечено выше, эффективность алгоритма приближенного динамического программирования во многом обусловлена использованием накопленной (в функции Беллмана) исторической информации о функционировании системы. Это пример алгоритма, основанного на данных. Остальные алгоритмы, описанные в предыдущем разделе, также требуют большого объема исходных данных. Часть исходных данных представляет собой результат нормативного планирования (производственные планы), а остальные данные можно только прогнозировать.

Этим обусловлена необходимость реализации в платформе широкого спектра методов прогнозирования значимых параметров. В основном это прогнозы потребления в регионе, в частности, час пиковой нагрузки на сеть, цены на оптовом и розничном рынке, прогнозы солнечной и ветровой генерации. А при групповом управлении, например, исходные данные для среднесрочного алгоритма отбора клиентов включают в себя целую прогнозную матрицу ковариации на довольно продолжительный период времени.

Платформенный подход предполагает максимальную универсальность, адаптивность и самонастраиваемость применяемых алгоритмов прогнозирования на основе плоских и/или глубоких моделей машинного обучения. С точки зрения архитектуры, модели прогнозирования состоят из трех последовательно включенных блоков: блок генерации информативных признаков из исходных данных, блок построения прогнозов, блок очистки от шумов и формирования финальных оценок.

Генерация информативных признаков строится на основе комбинации таких методов, как [35]:

- монотонные преобразования (типа Бокса — Кокса и т. п.),
- интегральные преобразования (Фурье, вейвлет и т. п.),
- линейные обобщенные преобразования (метод главных компонент и т. п.),
- нелинейные обобщенные преобразования (Vector Embedding, метод T-SNE и т. п.).

Блок построения прогнозов строится на основе комбинации таких подходов, как:

- плоские модели машинного обучения (Log-Reg, SVM, RF и т. п.) [36],
- глубокие модели машинного обучения (CNN, RNN, Attention и т. п.) [37],

— обобщенные алгебраические адаптируемые модели (линейная регрессия, нелинейная регрессия, класс авторегрессий и т. п.) [38].

Блок очистки прогнозов от шумов и формирования финальных оценок строится на основе комбинации таких подходов, как:

- фильтры Винера, Колмогорова и т. п.,
- байесова фильтрация,
- процедуры последовательного статистического анализа,
- процедуры многовариантного статистического анализа,
- логико-вероятностные модели,
- организация моделей в стек,
- каскадное включение моделей и др.

Конкретный метод прогнозирования и его реализация определяются при синтезе модели для конкретного объекта/приложения по ограниченной выборке реальных данных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Платформенный подход открывает широкий спектр новых возможностей для повышения качества управления инфраструктурой распределенной энергетики, ее устойчивости и надежности. Будучи реализованными на базе единой платформы, разнообразные средства и системы управления ЭЭС РЭР демонстрируют полную интероперабельность, унифицированный доступ и интерфейс для пользователя, а также синергию в различных аспектах, от разрешения конфликтов при одновременном использовании одного и того же оборудования в нескольких процессах, до консолидированного сбора больших данных для тренировки алгоритмов машинного обучения.

В настоящее время разработка представленной платформы находится на стадии проектирования. Головным исполнителем работ этой стадии является АО «РТСофт», а в число соисполнителей входит Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. По результатам проектирования в 2020—2022 гг. планируется создать и внедрить программные компоненты платформы, облачные прикладные сервисы и широкий набор АСУ ЭЭС РЭР на ее базе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Global Energy Transformation: A Roadmap to 2050*. — IRENA, 2019. — 52 p.
2. *Kloppenborg, S., Boekelo, M.* Digital platforms and the future of energy provisioning: Promises and perils for the next phase of



- the energy transition // *Energy Research & Social Science*. — 2019. — Vol. 49. — P. 68–73.
3. *Небера А.А., Веруго А.Р., Ненша Ф.С.* Цифровая платформа как основа для разработки систем интеллектуального управления децентрализованной распределенной энергетикой // Электрооборудование: эксплуатация и ремонт. — 2020. — № 8. — С. 34–40. [*Nebera, A.A., Verigo, A.R., Nensha, F.S.* Digital platform as a basis of the development of intellectual control systems for decentralized distributed energy // *Electrical equipment: operation and repair*. — 2020. — No. 8. — P. 34–40. (In Russian)]
  4. *Архитектура* Интернета энергии. — М.: Инфраструктурный центр EnergyNet, 2018. — 56 с. — <https://idea-go.tech/IDEA-whitepaper-ru.pdf>. [*Internet of Distributed Energy Architecture*. — М.: EnergyNet Infrastructure Center, 2018. — 56 p. — <https://idea-go.tech/IDEA-whitepaper-ru.pdf>. (In Russian)]
  5. *Wang, K., Yu, J., Yu, Y., Qian, Y.* A survey on energy internet: architecture, approach, and emerging technologies // *IEEE Systems Journal*. — 2018. — Vol. 12, no. 3. — P. 2403–2416.
  6. *Ньюмен С.* Создание микросервисов. — СПб: Питер, 2016. — 304 с. [*Newman, S.* *Building Microservices*. — Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc., 2015. — 262 p. (In Russian)]
  7. *Ковалев С.П.* Заинтересованные стороны цифровой децентрализованной малоуглеродной энергетики // Энергобезопасность и энергосбережение. — 2019. — № 2. — С. 49–55. [*Kovalev, S.P.* *Zainteresovannyye storony tsifrovoi detsentralizovannoi malouglerodnoi energetiki // Energobezopasnost' i energosberezhenie*. — 2019. — No. 2. — С. 49–55. (In Russian)]
  8. *Zhang, Q., Li, J.* Demand response in electricity markets: a review // *Proc. 9th Intl. Conf. European Energy Market*. — IEEE, 2012. — P. 1–8. — DOI: 10.1109/EEM.2012.6254817.
  9. *Аристова Н.И., Чадеев В.М.* Виртуальные электростанции — идеи и решения // Автоматизация в промышленности. — 2019. — № 11. — С. 9–13. [*Aristova, N.I., Chadeev, V.M.* *Virtual power plants — ideas and solutions // Automation in industry*. — 2019. — No. 11. — P. 9–13. (In Russian)]
  10. *Hulshof, D., Jepma, C., Muldera, M.* Performance of markets for European renewable energy certificates // *Energy Policy*. — 2019. — Vol. 128. — P. 697–710.
  11. *Cheng, M., Sami, S., Wu, J.* Performance of markets for European renewable energy certificates // *Energy Policy*. — 2016. — Vol. 194. — P. 376–385.
  12. *Постановление* Правительства РФ от 21 марта 2020 г. № 320 «О внесении изменений в некоторые акты Правительства Российской Федерации по вопросам функционирования активных энергетических комплексов». [*Postanovlenie Pravitel'stva RF ot 21 marta 2020 g. No. 320 «O vnesenii izmenenii v nekotorye акты Pravitel'stva Rossiiskoi Federatsii po voprosam funktsionirovaniya aktivnykh energeticheskikh kompleksov»*. (In Russian)]
  13. URL: <https://microgridknowledge.com/pge-20-microgrids-wildfire/>.
  14. *Knirsch, F., Unterweger, A., Engel, D.* Privacy-preserving blockchain-based electric vehicle charging with dynamic tariff decisions // *Computer Science Research and Development*. — 2018. — Vol. 33. — P. 71–79.
  15. *Madni, A.M., Madni, C.C., Lucero, S.D.* Leveraging digital twin technology in model-based systems engineering // *Systems*. — 2019. — Vol. 7 (1). — P. 7. — DOI: 10.3390/systems7010007.
  16. *Ковалев С.П.* Проектирование информационного обеспечения цифровых двойников энергетических систем // Системы и средства информатики. — 2020. — Т. 30, № 1. — С. 66–81. [*Kovalev, S.P.* *Information Architecture of the Power System Digital Twin // Systems and means of informatics*. — 2020. — Vol. 30, no. 1. — P. 66–81. (In Russian)]
  17. *Erikstad, S.* Design patterns for digital twin solutions in marine systems design and operations // In: *Proc. 17<sup>th</sup> International Conference on Computer and IT Applications in the Maritime Industries COMPIT'18*. — Hamburg, Technische Universität Hamburg, 2018. — P. 354–363.
  18. *Тихонов А.И., Стулов А.В., Еремин И.В.* и др. Разработка технологии создания цифровых двойников силовых трансформаторов на основе цепных моделей и 2D-моделей магнитного поля // Южно-Сибирский научный вестник. — 2020. — № 1 (29). — С. 76–82. [*Tikhonov, A.I., Stulov, A.V., Eremin, I.V.*, et al. *Development of technology for creating digital twins of power transformers based on chain models and 2D magnetic field models // South-Siberian Scientific Bulletin*. — 2020. — No. 1 (29). — S. 76–82. (In Russian)]
  19. *Rodríguez, F., Fleetwood, A., Galarza, A., Fontán, L.* Predicting solar energy generation through artificial neural networks using weather forecasts for microgrid control // *Renewable Energy*. — 2018. — Vol. 126. — P. 855–864.
  20. *He, X., Ai, Q., Qiu, R.C., Zhang, D.* Preliminary exploration on digital twin for power systems: challenges, framework, and applications. — arXiv, 2019. — URL: <https://arxiv.org/abs/1909.06977>.
  21. *Zeng, P., Li, H., He, H., Li, S.* Dynamic energy management of a microgrid using approximate dynamic programming and deep recurrent neural network learning // *IEEE Transactions on Smart Grid*. — 2019. — Vol. 10, iss. 4. — P. 4435–4445.
  22. *Ковалев С.П.* Методы теории категорий в модельно-ориентированной системной инженерии // Информатика и ее применения. — 2017. — Т. 11. — Вып. 3. — С. 42–50. [*Kovalev, S.P.* *Methods of category theory in model-based systems engineering // Informatics and Applications*. — 2017. — Vol. 11, iss. 3. — P. 42–50. (In Russian)]
  23. *Андрюшкевич С.К., Ковалев С.П., Неведов Е.И.* Разработка цифрового двойника энергетической системы на основе онтологической модели // Автоматизация в промышленности. — 2020. — № 1. — С. 51–56. [*Andryushkevich, S.K., Kovalev, S.P., Nefedov, E.I.* *Development of a digital twin of the energy system based on an ontological model // Automation in industry*. — 2020. — No. 1. — P. 51–56. (In Russian)]
  24. *Zhu, J.* *Optimization of Power System Operation*. — N-Y.: John Wiley & Sons, 2015. — 638 p.
  25. *Conejo, A.J., Castillo, E., Minguez, R., Garcia-Bertrand, R.* *Decomposition Techniques in Mathematical Programming: Engineering and Science Applications*. — Springer Science & Business Media, 2006. — 542 p.
  26. *López, J., Pozo, D., Contreras, J.* Static and dynamic convex distribution network expansion planning. In: *Electric Distribution Network Planning*. — Singapore: Springer, 2018. — P. 41–63.
  27. *Pozo, D., Sauma, E., Contreras, J.* Basic theoretical foundations and insights on bilevel models and their applications to power systems // *Annals of Operations Research*. — 2017. — Vol. 254, no. 1–2. — P. 303–334.
  28. *Goubko, M., Ginz, V.* Improved spectral clustering for multi-objective controlled islanding of power grid // *Energy Systems*. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 59–94.
  29. *Gonzalez-Castellanos, A., Pozo, D., Bisch, A.* Stochastic unit commitment of a distribution network with non-ideal energy storage // *Proc. 2019 Intl. Conf. Smart Energy Systems and Technologies (SEST)*. — IEEE, 2019. — P. 1–6. DOI: 10.1109/SEST.2019.8849057.
  30. *Eldridge, B., O'Neill, R., Castillo, A.* An improved method for the DCOPT with losses // *IEEE Transactions on Power Systems*. — 2017. — Vol. 33, no. 4. — P. 3779–3788.
  31. *Rockafellar, R.T., Uryasev, S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // *Journal of banking & finance*. — 2002. — Vol. 26, no. 7. — P. 1443–1471.
  32. *Handbook of Learning and Approximate Dynamic Programming* / Ed. Si, J., Barto, A., Powell, W., Wunsch, D. — N-Y.: John Wiley & Sons, 2004. — 672 p.

33. Lewis, F.L., Vrabie, D. Reinforcement learning and adaptive dynamic programming for feedback control // IEEE circuits and systems magazine. — 2009. — Vol. 9, no. 3. — P. 32–50.
34. Rockafellar, R.T., Uryasev, S. Optimization of conditional value at risk // Journal of Risk. — 2000. — Vol. 2. — P. 493–517.
35. Vlachos, M. Dimensionality reduction // Encyclopedia of Machine Learning and Data Mining / Ed. C. Sammut, G.I. Webb. — Boston, MA: Springer. — 2010. — P. 354–361.
36. Boehmke, B., Greenwell, B.M. Hands-on Machine Learning with R. — Boca Raton, FL: CRC Press, 2019. — 488 p.
37. Bianchi, F.M., Maiorino, E., Kampffmeyer, M.C., et al. Recurrent Neural Networks for Short-Term Load Forecasting: an Overview and Comparative Analysis. — Cham: Springer International Publishing, 2017. — 72 p.
38. Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. The Elements of Statistical Learning. — N-Y.: Springer-Verlag, 2016. — 767 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии И.Б. Ядыкиным.

Поступила в редакцию 2.09.2020, после доработки 20.10.2020.  
Принята к публикации 27.10.2020.

**Ковалев Сергей Протасович** — д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ kovalyov@energy2020.ru,

**Небера Алексей Анатольевич** — АО «РТСофт», г. Москва, ✉ nebera\_aa@rtsoft.ru,

**Губко Михаил Владимирович** — д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ mgoubko@mail.ru.

## A DIGITAL PLATFORM FOR IMPLEMENTING DISTRIBUTED ENERGY RESOURCES MANAGEMENT SYSTEMS

S.P. Kovalyov<sup>1</sup>, A.A. Nebera<sup>2</sup>, M.V. Goubko<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,

<sup>2</sup> JSC RTSoft

<sup>1</sup> ✉ kovalyov@energy2020.ru, <sup>2</sup> ✉ nebera\_aa@rtsoft.ru, <sup>3</sup> ✉ mgoubko@mail.ru

**Abstract.** The problems of intelligent control of modern electric power systems with distributed energy resources (DER) are considered. Such systems contain various energy consuming equipment (including those with demand-side management capabilities), on-site generation equipment, and energy storage devices. An approach to develop and execute DER management systems on the basis of a digital platform is advocated. A typical control process based on the platform is described, aimed at improving the operation efficiency of physical or virtual DER groups by means of optimal planning and simulation on digital twins. Scenarios of employing the platform in DER operational management are listed. The mathematical basis of the platform is presented, including automatic modeling and analysis of electrical modes on digital twins, optimization planning and control algorithms, forecasting consumption/generation profiles and technical and economic factors.

**Keywords:** distributed energy resources, digital platform, digital twin, smart contract, optimal equipment operation planning.

### Не забудьте подписаться!

Подписку на журнал «Проблемы управления» можно оформить в любом почтовом отделении (подписной индекс 81708 в каталоге Роспечати или 38006 в объединенном каталоге «Пресса России»), а также через редакцию с любого месяца, при этом почтовые расходы редакция берет на себя. Отдельные номера редакция высылает по первому требованию.

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ПРОЦЕССАХ ПАРОФАЗНОГО ОСАЖДЕНИЯ

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, Д.Н. Дектярев

**Аннотация.** Рассмотрена математическая модель, описывающая процесс нагрева кварцевой трубы подвижным источником тепла, представленная в виде одномерного уравнения теплопроводности. На основе этой модели сформулирована и решена задача оптимального стабилизирующего управления с распределенным управлением и распределенным наблюдением для линеаризованной задачи. В качестве управляющего воздействия выбрана величина расхода газовой смеси, определяющая мощность теплового источника. Цель управления заключается в минимизации возможных температурных отклонений от программных режимов процесса легирования кварцевых труб. Получены необходимые условия оптимальности в форме оптимизационной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных, а также закон нахождения функции оптимального управления, явно зависящий от решения этой системы уравнений. Проведено численное решение оптимизационной системы, получены новые количественные результаты для функции управляющего воздействия, рассчитаны и проанализированы распределения температуры при различных режимах управления.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, процесс MCVD, распределенная система, оптимизационная система.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория оптимального управления распределенными системами интенсивно развивается на протяжении нескольких последних десятилетий. Основу исследований в большинстве случаев составляют функциональные уравнения, в том числе дифференциальные уравнения с частными производными. Большой вклад в развитие этой проблемы принадлежит А.Г. Бутковскому и Ж.-Л. Лионсу [1, 2].

Основной целью теории оптимального управления является исследование вопроса о существовании оптимального управления, доставляющего минимум целевому функционалу, а также получение необходимых и, если это возможно, достаточных условий оптимальности управления.

В общем виде задачу оптимального управления можно сформулировать так:

$$I(y, u) \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$F(y, u) = 0, \quad u \in U_d, \quad (2)$$

где  $I: Y \times U \rightarrow \bar{R}$  — целевой функционал;  $F: Y \times U \rightarrow V$  — оператор с частными производными или интегро-дифференциальный оператор;  $y$  — параметр состояния системы;  $u$  — функция управ-

ления;  $U_d$  — выпуклое подмножество пространства  $U$ , содержащее более одной точки;  $Y, U, V$  — банаховы пространства;  $\bar{R}$  — расширенная числовая прямая, т. е. множество вещественных чисел, дополненное двумя бесконечно удаленными точками  $\{+\infty\}$  и  $\{-\infty\}$ . Таким образом, уравнение (2) представляет собой уравнение состояния, к которому необходимо добавить граничные условия, а также условия в начальный момент времени для случая, когда  $F$  — эволюционный оператор. Определив множество допустимых пар (процессов) управление — состояние как множество  $\Delta = \{(y, u) \in Y \times U_d: F(y, u) = 0, I(y, u) < \infty\}$ , назовем  $(\hat{y}, \hat{u}) \in \Delta$  оптимальной парой (процессом), если  $I(\hat{y}, \hat{u}) = \inf_{(y, u) \in \Delta} I(y, u)$ .

Среди достаточных условий существования оптимального управления основными являются условия нетривиальности [3], коэрцитивности, компактности. Условие нетривиальности состоит в предположении, что множество  $\Delta$  не пусто. Условие коэрцитивности требует ограниченности множества  $\{(y, u) \in \Delta: I(y, u) \leq M\}$  в пространстве  $Y \times U$  для некоторого числа  $M$ . Условие компактности предполагает компактность любого ограниченного подмножества в множестве  $\Delta$ . Кроме этого,

функционал  $I(y, u)$  предполагают ограниченным снизу и полунепрерывным снизу на  $Y \times U_d$ .

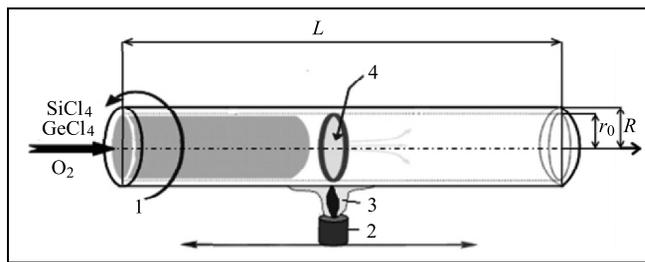
В некоторых случаях проверка указанных условий сложна и оказывается проще применить метод доказательства теоретического существования решения абстрактной задачи [3]. Впервые этот метод был предложен А.В. Фурсиковым [4, 5] для задач оптимального управления системой Навье — Стокса. Ж.-Л. Лионс [6] аналогичным методом исследовал широкий класс задач оптимального управления с сингулярностями.

Набор соотношений, описывающих необходимые условия для задачи (1) вместе с ограничениями (2) исходной задачи, называют системой оптимальности [7]. В случае линейных задач оптимального управления с выпуклым целевым функционалом система оптимальности обычно является не только необходимым, но и достаточным условием отыскания минимума экстремальной задачи. К настоящему времени в теории оптимального управления распределенными системами разработано множество методов получения систем оптимальности, к ним можно отнести принцип максимума Понтрягина, принцип Беллмана, принцип Лагранжа. В работе [3] для вывода систем оптимальности применяются различные варианты известного принципа Лагранжа, сформулированного впервые самим Ж.Л. Лагранжем [8]. Обоснованию и развитию этого принципа посвящены работы В.М. Алексеева, В.М. Тихомирова, С.В. Фомина [9], а также А.И. Егорова [10]. Современный вариант принципа Лагранжа, удобный для применения в широком классе задач оптимального управления, доказан А.Д. Иоффе и В.М. Тихомировым [11]. Весьма существенный шаг в обосновании этого принципа сделал Люстерник и Варга [12]. Этот же принцип в новом изложении описан А.В. Фурсиковым [3].

В настоящей работе будет предложен подход к получению и численной реализации системы оптимальности для задачи оптимального управления технологическим процессом получения кварцевых труб. Задача управления будет представлять собой задачу с компромиссным распределенным управлением и распределенным наблюдением. Система оптимальности будет получена в сильной форме [3], т. е. в форме системы дифференциальных уравнений в частных производных, функция оптимального управления будет определяться явной зависимостью из решения полученной системы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В процессе изготовления специальных оптических световодов одним из ключевых звеньев в технологической цепи производства является процесс легирования кварцевого стекла. Один из наиболее современных способов легирования — мо-



**Рис. 1.** Схематическое изображение процесса MCVD: 1 — вращающаяся кварцевая труба; 2 — движущаяся горелка (стрелки показывают направление движения); 3 — пламя горелки; 4 — зона реакции

дифицированный метод химического парофазного осаждения (Modified Chemical Vapor Deposition, далее процесс MCVD) [13]. Его суть заключается в следующем (рис. 1). Во вращающуюся на станке кварцевую трубку подают очищенный кислород и парообразные хлориды (Si, Ge, P и др. элементов). Температура движущегося газового потока увеличивается, достигая своего максимального значения в зоне нагрева кислородно-водородной горелки, где и происходит реакция окисления легирующих компонентов. Далее оксиды осаждаются на холодной поверхности опорной трубки перед горелкой под действием сил термофореза. Подбирая параметры этого технологического процесса, можно получить требуемую концентрацию легирующих элементов, а значит, и соответствующий коэффициент преломления света.

Для обеспечения однородности оптических и геометрических параметров изготавливаемой заготовки по длине требуется точная настройка системы управления параметрами процесса, в первую очередь, скоростью движения горелки и распределением температуры в зоне протекания химических реакций, образования оксидов и осаждения оксидов на стенки опорной трубы.

Основная проблема заключается в сложности контроля температуры в зоне реакции, где протекают физико-химические процессы. В то же время, распределение температурного поля в зоне образования оксидов определяет не только размеры и концентрацию коагулированных частиц, но и направление их движения под действием сил термофореза, так как термофоретическая сила, действующая на каждую частицу, пропорциональна градиенту температурного поля в данной точке [7]. На практике в процессе MCVD температуру на поверхности кварцевой трубы контролируют с помощью бесконтактных инфракрасных пирометров.

Построим математическую модель нагрева кварцевой трубы подвижным тепловым источником, которая с достаточной точностью опишет температурное поле в кварцевой трубе, формируемое в ходе реального технологического процесса.



Предположения, при которых получена математическая модель, таковы: температурное поле кварцевой трубки осесимметричное (это обеспечивается вращением трубы); теплообмен с внешней окружающей средой и газом, текущим внутри трубы, описывается законом Ньютона; излучение с внешней поверхности трубы подчиняется закону Стефана — Больцмана.

Модель включает в себя уравнение энергии, в нашем случае уравнение теплопроводности, и модель подвижного источника, т. е. описание формы и мощности подводимого теплового потока, а также закон движения источника [14]. Тепловой поток от факела изменяется вдоль оси  $z$  (рис. 1) и описывается функцией Гаусса

$$q(t, z) = q_{\max} e^{-\left(\frac{z - \int_0^t v(\zeta) d\zeta}{H}\right)^2}, \quad (3)$$

где  $v(\zeta)$  — скорость движения горелки;  $H$  — параметр формы (ширина теплового потока);  $q_{\max}$  — интенсивность (мощность) горелки;  $t$  — время;  $z$  — пространственная переменная;  $\zeta$  — переменная интегрирования, имеющая смысл времени.

Тогда уравнение теплопроводности для кварцевой трубы в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial z} \right), \quad (4)$$

где  $\Theta(t, r, z)$  — температура;  $\rho$ ,  $C_p$ ,  $\lambda$  — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность кварца соответственно, причем в общем случае эти характеристики являются функцией температуры  $\Theta(t, r, z)$ ;  $r, z$  — пространственные переменные, причем  $r \in [r_0, R]$ ,  $z \in [0, L]$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $r_0$  — внутренний радиус трубы,  $R$  — внешний радиус трубы,  $L$  — длина трубы,  $T$  — продолжительность процесса осаждения.

Начальное и краевые условия на поверхностях трубы имеют вид:

$$\Theta(t, r, z)|_{t=0} = \Theta_0(r, z), \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \alpha_{\text{газа}} (\Theta(t, z) - \Theta_{\text{газа}}), \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=R} = q(t, z) - \alpha_{\text{среды}} (\Theta(t, z) - \Theta_{\text{среды}}) - \varepsilon \sigma_0 (\Theta(t, z)^4 - \Theta_{\text{среды}}^4), \quad (7)$$

$$\Theta(t, r, z)|_{z=0} = \Theta_1(t, r), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta(t, r, z)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \quad (9)$$

где  $\alpha_{\text{газа}}$ ,  $\alpha_{\text{среды}}$  — коэффициенты теплообмена газа и внешней среды (воздуха);  $\Theta_{\text{газа}}$ ,  $\Theta_{\text{среды}}$  — температуры газа и внешней среды;  $\varepsilon$  — коэффициент черноты;  $\sigma_0$  — постоянная Стефана — Больцмана.

В дальнейшем для краткости изложения будем при записи функций опускать аргументы, если эта запись не является принципиально важной.

В силу осевой симметрии температурного поля и малой толщины стенки трубы изменения температуры по поперечному сечению трубы малы по сравнению с изменениями температуры вдоль оси  $z$ , поэтому значения температуры в поперечном сечении заменим на ее среднее значение по области  $D = \{(r, \varphi) | r_0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Проинтегрируем обе части уравнения (4) по указанной области:

$$\iint_D \rho C_p \frac{\partial \Theta}{\partial t} r d\varphi dr = \iint_D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) r d\varphi dr + \iint_D \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) r d\varphi dr.$$

Тогда с учетом условий (6) и (7) первый интеграл в правой части последнего уравнения примет вид:

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) d\varphi dr = 2\pi \left( r \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \Big|_{r_0}^R = 2\pi R \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=R} - 2\pi r_0 \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 2\pi R (q(z, t) - \varepsilon \sigma_0 (\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - \alpha_{\text{среды}} (\Theta - \Theta_{\text{среды}})) - 2\pi r_0 \alpha_{\text{газа}} (\Theta - \Theta_{\text{газа}}).$$

После усреднения оставшихся слагаемых по области  $D$  и деления обеих частей уравнения на  $\pi(R^2 - r_0^2)$ , получим уравнение со свойствами, зависящими от температуры, вида

$$\rho(\Theta) C_p(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \beta_1 (\alpha_{\text{среды}} (\Theta - \Theta_{\text{среды}}) + \varepsilon \sigma_0 (\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - q) - \beta_2 \alpha_{\text{газа}} (\Theta - \Theta_{\text{газа}}), \quad (10)$$

где  $\beta_1 = \frac{2R}{(R^2 - r_0^2)}$ ,  $\beta_2 = \frac{2r_0}{(R^2 - r_0^2)}$ .

Уравнение (10) дополняется начальными и граничными условиями, аналогичными условиям (5), (8), (9):

$$\Theta(t, z)|_{t=0} = \Theta_0(z), \quad \Theta(t, z)|_{z=0} = \Theta_1(t), \quad \frac{\partial \Theta(t, z)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0.$$

Будем предполагать, что физический процесс, модель которого описывается уравнением (10), управляем. В качестве типичных управляющих воздействий в процессе парофазного осаждения выступают либо параметры теплового источника воздействия, такие, как его мощность  $q_{\max}$ , скорость его движения  $v(\xi)$  и параметр формы (ширина теплового потока)  $H$ , либо величина теплового потока. Цель управления при этом заключается в удержании температуры кварцевой трубы в окрестности заданного состояния. Предположим в рамках данного исследования, что управлением  $u(t, z)$  процесса MCVD является тепловой поток от источника воздействия  $q(t, z)$ . Как было указано выше, процессом будем называть пару: распределение температуры  $\Theta(t, z)$ , являющееся решением уравнения (10), и соответствующее управление  $u(t, z)$ , обеспечивающее такое распределение. Процесс, реализуемый на практике, назовем программным процессом и обозначим  $(\Theta^*(t, z), u^*(t, z))$ . Отметим, что  $\Theta^*(t, z)$  при этом также является решением краевой задачи с уравнением состояния (10).

В реальных условиях распределение температуры  $\Theta(t, z)$  будет отличаться от программного распределения температуры  $\Theta^*(t, z)$  на некоторую величину отклонения (возмущения)  $\Delta\Theta(t, z)$ , о которой известно, что это достаточно малая величина по отношению к программному значению. Тогда можно записать, что  $\Theta(t, z) = \Theta^*(t, z) + \Delta\Theta(t, z)$ . По аналогии запишем, что управление  $u(t, z)$  также может быть представлено в виде  $u(t, z) = u^*(t, z) + \Delta u(t, z)$ , где  $u^*(t, z)$  — программное управление, а  $u(t, z)$  — фактическое управление.

Нетрудно получить уравнение возмущенного состояния, описывающее отклонение фактического состояния от программного [15]. При достаточно гладких зависимостях  $\rho(\Theta)$ ,  $C_p(\Theta)$ ,  $\lambda(\Theta)$  уравнение (10) можно линеаризовать в окрестности температуры  $\Theta^*(t, z)$  путем разложения нелинейных зависимостей в ряд Тейлора. Существуют различные способы линеаризации, здесь мы воспользуемся приемом, изложенным в работе [16]. Представим уравнение (10) в виде одномерного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейным оператором:

$$A\left(t, z, \Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}, u\right) = \rho(\Theta)C_p(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) + \beta_1(\alpha_{\text{среды}}(\Theta - \Theta_{\text{среды}}) + \varepsilon\sigma_0(\Theta^4 - \Theta_{\text{среды}}^4) - q) + \beta_2\alpha_{\text{газа}}(\Theta - \Theta_{\text{газа}}) = 0. \quad (11)$$

Как было отмечено выше, представим решение этого уравнения в виде  $\Theta(t, z) = \Theta^*(t, z) + \Delta\Theta(t, z)$ ,

при этом  $\Theta^*(t, z)$  и  $u^*(t, z)$  удовлетворяют уравнению (11), т. е.

$$A\left(t, z, \Theta^*, \frac{\partial\Theta^*}{\partial t}, \frac{\partial^2\Theta^*}{\partial z^2}, \frac{\partial\Theta^*}{\partial z}, u^*(t, z)\right) = 0.$$

Полагая, что функция  $A$  дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих аргументов, можно получить линейное уравнение относительно  $\Delta\Theta(t, z)$ , т. е. выполнить процедуру линеаризации:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta}\right)_* \Delta\Theta + \left(\frac{\partial A}{\partial\dot{\Theta}}\right)_* \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta''}\right)_* \frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta'}\right)_* \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_* \Delta u(t, z) = 0. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения  $\dot{\Theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}$ ,  $\Theta'' = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$ ,

$\Theta' = \frac{\partial\Theta}{\partial z}$ , символ «\*» соответствует состоянию  $\Theta^*(t, z)$  системы.

Обозначим производные, входящие в уравнение (12), так:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta}\right)_* = \frac{\partial}{\partial\Theta}(\rho(\Theta)C_p(\Theta))_* \frac{\partial\Theta^*}{\partial t} - \left(\frac{\partial\lambda(\Theta)}{\partial\Theta} \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)_* - \left(\frac{\partial^2\lambda(\Theta)}{\partial\Theta^2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right)_* + \beta_1(\alpha_{\text{среды}} + 4\varepsilon\sigma_0(\Theta^*)^3) + \beta_2\alpha_{\text{газа}} = \chi_2(t, z),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\dot{\Theta}}\right)_* = \rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*), \quad \left(\frac{\partial A}{\partial\Theta''}\right)_* = -\lambda(\Theta^*),$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\Theta'}\right)_* = -2\frac{\partial\lambda(\Theta)}{\partial\Theta} \frac{\partial\Theta}{\partial z} \Big|_* = \chi_1(t, z), \quad \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)_* = -\beta_1.$$

С учетом введенных обозначений, получим:

$$\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = \lambda(\Theta^*)\frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} - \chi_1(t, z)\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} - \chi_2(t, z)\Delta\Theta + \beta_1\Delta u.$$

Разделим обе части полученного уравнения на  $\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)$ :

$$\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = \frac{\lambda(\Theta^*)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} - \frac{\chi_1(t, z)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} - \frac{\chi_2(t, z)}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \Delta\Theta + \frac{\beta_1}{\rho(\Theta^*)C_p(\Theta^*)} \Delta u.$$



Таким образом, уравнение для возмущенного состояния имеет вид:

$$\frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} - a(t, z) \frac{\partial^2 \Delta \Theta}{\partial z^2} + \gamma_1(t, z) \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial z} + \gamma_2(t, z) \Delta \Theta = \beta(t, z) \Delta u, \quad (13)$$

где

$$a(t, z) = \frac{\lambda(\Theta^*)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\gamma_1(t, z) = \frac{\chi_1(t, z)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\gamma_2(t, z) = \frac{\chi_2(t, z)}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)},$$

$$\beta(t, z) = \frac{\beta_1}{\rho(\Theta^*) C_p(\Theta^*)}.$$

Отметим, что если температура  $\Theta^*$  зависит только от координаты  $z$ , то в выражении  $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)_*$  первое слагаемое обращается в ноль. В случае же, когда  $\Theta^* = \int \text{const}$ , то в выражении  $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)_*$  первые три слагаемых равны нулю и  $\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta}\right) = 0$ .

Аналогичным образом проведем линеаризацию граничных и начальных условий, в результате чего получим граничные и начальные условия для линеаризованной задачи:

$$\Delta \Theta|_{t=0} = \Delta \Theta_0(z), \quad \Delta \Theta|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \Delta \Theta}{\partial z}\right)\bigg|_{z=L} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, сформулирована линейная краевая задача (13), (14) для возмущенного состояния  $\Delta \Theta(t, z)$ , описываемая одномерным уравнением теплопроводности.

## 2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ СИСТЕМА

Сформулируем задачу оптимального стабилизирующего управления [17–19] с учетом линеаризации исходной модели и дальнейшего перехода к исследованию величин возмущенных состояний. Рассмотрим задачу распределенного управления и распределенного наблюдения с помощью системы (13), (14) [20]. Следуя терминологии [3], функция  $\Delta u$ , содержащаяся в правой части уравнения состояния, есть функция управления, а наблюдением является функция состояния  $\Delta \Theta(t, z)$  в каждой точ-

ке области решения задачи. В качестве функционального пространства состояний и допустимых управлений рассмотрим пространство  $U = L_2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, \tau] \times [0, L]$ , здесь  $\tau$  — время управления изучаемым процессом. Отметим, что значение  $\tau$  в общем случае не совпадает со значением  $T$ , определенным выше.

Определим целевой функционал интегрального типа, явно зависящий от функции управления и обладающий свойством коэрцитивности, что позволит в дальнейшем применять технику получения оптимизационной системы и определить функцию оптимального управления в явном виде:

$$F(\Delta u, \Delta \Theta) = \int_{\Omega} \Delta \Theta^2 dz dt + \sigma \int_{\Omega} \Delta u^2 dz dt \rightarrow \inf. \quad (15)$$

Функционал  $F$  представляет собой смешанный интегральный критерий с подынтегральной функцией, дающей отклонения по фазовым координатам в среднем (первое слагаемое) и общие энергетические затраты (второе слагаемое). Здесь  $\sigma$  — положительный числовой параметр (цена управления), который оценивается заранее либо подбирается из решений тестовых задач. Выбор смешанного функционала в данной задаче связан с тем, что в рамках реального технологического процесса все пирометрические измерения производятся приборами, а любые приборы имеют погрешности измерений. В силу этого добиваться того, чтобы первое слагаемое обратилось в ноль, представляется нецелесообразным. Однако наличие второго слагаемого позволяет получить необходимые условия оптимальности в сильной форме. Это возможно, поскольку целевой функционал (15), обладает свойством коэрцитивности благодаря своему второму слагаемому.

Поскольку управление  $\Delta u(t, z)$  входит в задачу (13), (14) линейно, то можно говорить о некотором линейном операторе  $\Lambda$ , действующем на множестве допустимых управлений, со значениями в пространстве состояний:  $\Lambda(\Delta u(t, z)) = \Delta \Theta(t, z)$ . Заметим, что в силу линейности  $\Lambda$  его дифференциал Гато (первая вариация отображения) на приращении  $\delta \Delta u$  совпадает со значением самого оператора, поскольку для любого бесконечно малого значения  $\xi$

$$d\Lambda(\Delta u, \delta \Delta u) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\Delta u + \xi \delta \Delta u) - \Lambda(\Delta u)}{\xi} = \\ = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Lambda(\Delta u) + \xi \Lambda(\delta \Delta u) - \Lambda(\Delta u)}{\xi} = \Lambda(\delta \Delta u).$$

Введем обозначение:  $\Delta \hat{\Theta}(t, z) = \Lambda(\delta \Delta u)$ . Известно, что если  $\Delta u(t, z)$  — минимизирующий элемент (оптимальное состояние), существование которого следует из свойств коэрцитивности, полунепрерывности снизу и выпуклости целевого функцио-

нала (15) [2], а  $\delta\Delta u$  — его вариация, то первая вариация функционала (15) обращается в ноль:

$$\begin{aligned} \delta F(\Delta u, \Delta\Theta) &= 2 \int_{\Omega} (\Delta\Theta \Delta\hat{\Theta} + \sigma\Delta u(\delta\Delta u)) dz dt = \\ &= 2 \int_{\Omega} (\Lambda(\Delta u)\Lambda(\delta\Delta u) + \sigma\Delta u(\delta\Delta u)) dz dt = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Delta\hat{\Theta}(t, z)$  задается как решение проварьированной задачи (13), (14). Использование данной интегральной формы представления необходимых условий оптимальности не совсем удобно в смысле практических реализаций. Для вывода необходимого условия оптимальности в иной форме — форме краевой задачи — и возможности дальнейшего получения явного выражения функции оптимального управления через состояние этой краевой задачи воспользуемся далее техникой, аналогичной той, что изложена в работе [3].

Варьируя исходную дифференциальную задачу (13), (14), получим дифференциальную задачу относительно  $\Delta\hat{\Theta}(t, z)$  вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial t} - a\frac{\partial^2\Delta\hat{\Theta}}{\partial z^2} + \gamma_1\frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial z} + \gamma_2\Delta\hat{\Theta} &= \beta\delta\Delta u, \\ \Delta\hat{\Theta}|_{t=0} = 0, \quad \Delta\hat{\Theta}|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Умножим правую и левую части уравнения задачи (17) на произвольную функцию  $p(t, z) \in U$  и проинтегрируем их по заданной области:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial t} p dz dt - \int_{\Omega} a\frac{\partial^2\Delta\hat{\Theta}}{\partial z^2} p dz dt + \int_{\Omega} \gamma_1\frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial z} p dz dt + \\ + \int_{\Omega} \gamma_2\Delta\hat{\Theta} p dz dt = \int_{\Omega} \beta\delta\Delta u p dz dt. \end{aligned}$$

После проведения равносильных преобразований получим результат:

$$\begin{aligned} \int_0^L p\Delta\hat{\Theta}\Big|_0^T dz - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \Delta\hat{\Theta} dz dt - \int_{\Omega} \frac{\partial^2(ap)}{\partial z^2} \Delta\hat{\Theta} dz dt - \\ - \int_0^{\tau} ap\frac{\partial\Delta\hat{\Theta}}{\partial z}\Big|_0^L dt + \int_0^{\tau} \Delta\hat{\Theta}\frac{\partial(ap)}{\partial z}\Big|_0^L dt - \int_{\Omega} \Delta\hat{\Theta}\frac{\partial(\gamma_1 p)}{\partial z} dz dt + \\ + \int_0^{\tau} \gamma_1 p\Delta\hat{\Theta}\Big|_0^L dt + \int_{\Omega} \gamma_2\Delta\hat{\Theta} p dz dt = \int_{\Omega} \beta\delta\Delta u p dz dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Потребуем, чтобы произвольная до сих пор функция  $p(t, z)$  удовлетворяла дифференциальной задаче с обратным временем (19). Функция  $p(t, z)$  при этом называется функцией, сопряженной состоянию системы (13), (14) [3], относительно ко-

торой будет формироваться вывод системы оптимальности в форме дифференциальной задачи, которой будет удовлетворять как  $\Delta\Theta(t, z)$ , так и функция сопряженного состояния:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2(ap)}{\partial z^2} - \frac{\partial(\gamma_1 p)}{\partial z} + \gamma_2 p = \Delta\Theta,$$

$$p|_{t=\tau} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial(ap)}{\partial z} + \gamma_1 p\right)\Bigg|_{z=L} = 0. \quad (19)$$

Объединяя все интегралы по области  $\Omega$  в левой части соотношения (18), а также пользуясь уравнением и условиями краевой задачи (19), приводим соотношение (18) к виду:

$$\int_{\Omega} \Delta\Theta \Delta\hat{\Theta} dz dt = \int_{\Omega} \beta\delta\Delta u p dz dt. \quad (20)$$

Заметим, что интеграл в левой части равенства (20) в точности совпадает с интегралом от одного из слагаемых соотношения (16). Осуществляя соответствующую подстановку выражения (20) в формулу (16), имеем:

$$\int_{\Omega} (\beta p + \sigma\Delta u)\delta\Delta u dz dt = 0.$$

Поскольку по определению вариация  $\delta\Delta u \neq 0$ , функция оптимального управления может быть представлена явной зависимостью

$$\Delta u_{\text{опт}}(t, z) = -\frac{\beta p(t, z)}{\sigma}. \quad (21)$$

Пара значений  $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$  и соответствующее ей состояние  $\Delta\Theta(t, z)$  назовем оптимальным процессом. Таким образом, учитывая формы дифференциальных задач (13), (14), (19) и соотношение для функции оптимального управления (21), можно записать систему оптимальности в своей сильной форме, т. е. в форме системы краевых задач для состояния системы  $\Delta\Theta(t, z)$  и двойственной функции  $p(t, z)$  в виде:

$$\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} - a\frac{\partial^2\Delta\Theta}{\partial z^2} + \gamma_1\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z} + \gamma_2\Delta\Theta = -\frac{\beta^2}{\sigma} p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2(ap)}{\partial z^2} + \frac{\partial(\gamma_1 p)}{\partial z} - \gamma_2 p = -\Delta\Theta,$$

$$\Delta\Theta|_{t=0} = \Delta\Theta_0, \quad \Delta\Theta|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=L} = 0,$$

$$p|_{t=\tau} = 0, \quad p|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial(ap)}{\partial z} + \gamma_1 p\right)\Bigg|_{z=L} = 0. \quad (22)$$

### 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Система оптимальности (22) представляет собой дифференциальную задачу, несогласованную по времени. В частности, состояние системы описывается краевой задачей, корректной по времени вперед, а сопряженное состояние — корректной по времени назад, что приводит к некоторым трудностям в реализации: считать в определенном направлении по времени не представляется возможным. В связи с этим решение задачи (22) проводилось итерационным методом. В частности, зная значения сопряженной функции  $p(t, z)$  на  $i$ -м шаге, а значит, и оптимальное управление на  $i$ -м шаге ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), можно решить краевую задачу, описывающую состояние системы (при этом мы находим приближение к оптимальному процессу на  $i$ -м шаге). Полученное решение позволяет решить краевую задачу для отыскания  $(i + 1)$ -го приближения сопряженного состояния, где в качестве функции  $\Delta\Theta(t, z)$  взято ее  $i$ -е приближение. Приближение к оптимальному управлению на  $(i + 1)$ -м шаге ищется по формуле (21) через значения сопряженной функции в  $(i + 1)$ -м приближении. Нулевое приближение функции  $p(t, z)$  выбиралось произвольно.

Каждая задача решалась методом конечных элементов, реализованном в системе мультифизических вычислений Comsol Multiphysics. Все физические функции и постоянные, представляющие собой теплофизические параметры задачи, были взяты из Material Library Comsol Multiphysics. Для решения краевых задач, описывающих состояние системы и сопряженное состояние, использовалась равномерная сетка по пространственной переменной  $z$ . Было проведено исследование, касающееся влияния шага сетки на полученные решения. Причем при измельчении шагов сетки по пространственной переменной, начиная с некоторого значения, наблюдалось установление решений, — значения искомых функций очень мало менялись (рис. 2).

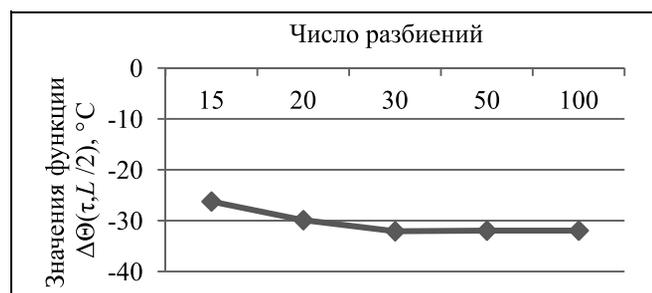


Рис. 2. Зависимость значений функции  $\Delta\Theta(\tau, L/2)$  от числа разбиений

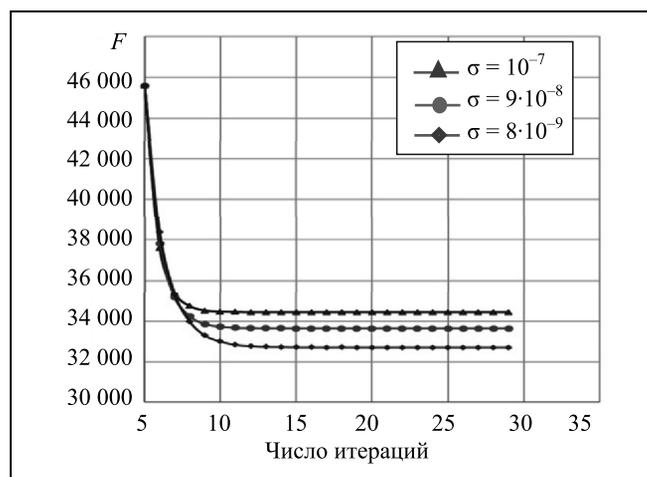


Рис. 3. Зависимость значений целевого функционала  $F$  от числа итераций

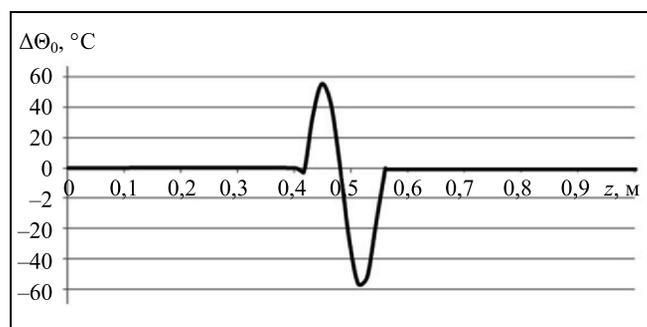


Рис. 4. Начальное распределение температуры  $\Delta\Theta_0$

Интересен также график зависимости целевого функционала  $F$  от номера итерации, изображенный на рис. 3. Видно, что начиная с седьмой итерации, функционал уменьшается незначительно и устанавливается около значения  $F = 32\,750$  (для значения  $\sigma = 8 \cdot 10^{-8}$ ).

### 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что контроль распределения температуры вдоль поверхности нагрева кварцевого цилиндра осуществляется сканирующим пирометром, который позволяет одновременно снимать распределение температуры на длине 100 мм. Измерения температуры происходят через равные промежутки времени  $\tau$ . Значения  $\tau$  подбираются с учетом особенностей технологического процесса MCVD и физических возможностей осуществлять корректировку параметров задачи. В рамках данной постановки значения времени управления системой  $\tau$  выбирались равным 1, 3, 5 с. Решение

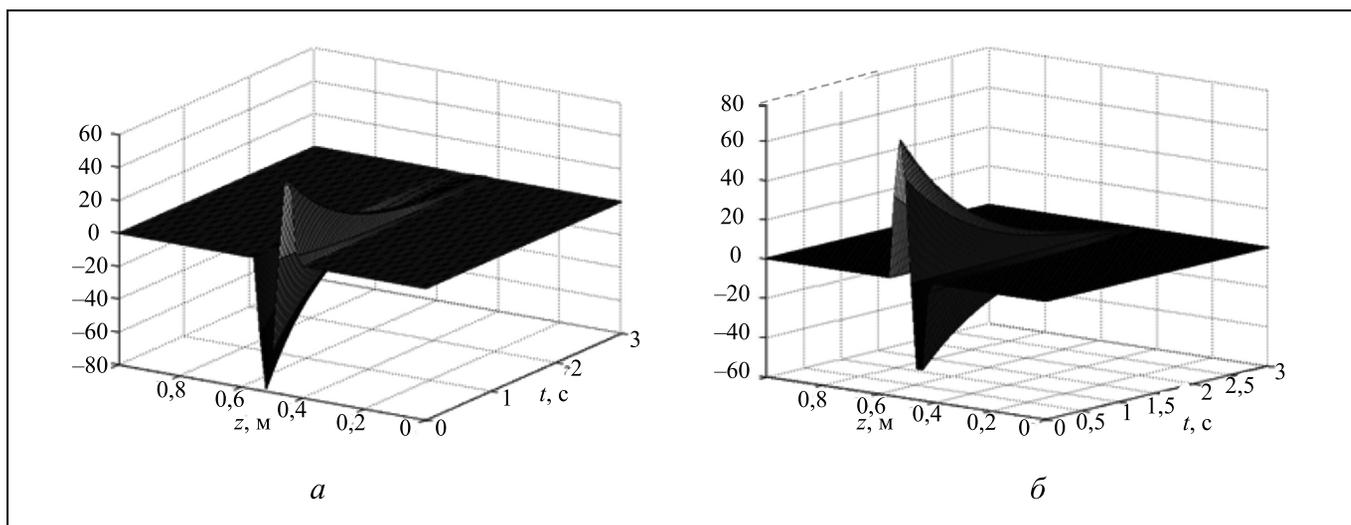


Рис. 5. Оптимальный процесс при  $\tau = 3$  с:  $a - \Delta\Theta(t, z)$ , °С;  $b - \Delta u_{\text{опт}}(t, z)$ , Вт/м<sup>2</sup>

системы (22), подставленное в выражение (21), позволяет определить функцию оптимального корректирующего управления. Далее по рассчитанным значениям корректирующего управления находится мощность теплового источника  $q_{\text{max}}$ , необходимая для стабилизации процесса в рамках расчетного времени  $[0, \tau]$ . Отметим, что найденное стабилизирующее управление будет действовать только на указанном промежутке времени, по истечении которого процесс повторяется — происходит новый замер температуры, вновь решается задача оптимального управления, снова корректируется мощность теплового источника и т. д.

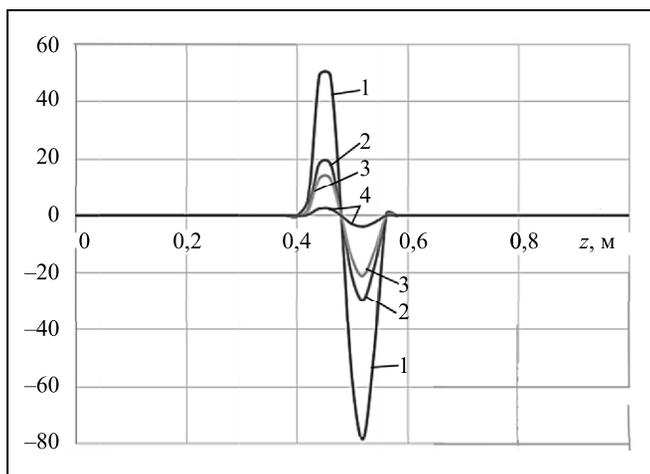


Рис. 6. Зависимость распределения температуры  $\Delta\Theta(\tau, z)$ , °С, от параметра  $\sigma$ : 1 — начальное состояние; 2 —  $\sigma = 10^{-6}$ ; 3 —  $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ ; 4 —  $\sigma = 5 \cdot 10^{-8}$

Сканирующий пирометр снимает показания только в зоне нагрева. В качестве демонстрационного примера рассмотрим разницу между действительной (определенной при помощи пирометра) и программной температурами в момент времени, соответствующий координате  $z = L/2$ . Примем значения этих разностей в качестве начальных условий уравнения теплопроводности системы оптимальности (22) (рис. 4).

На рис. 5 представлены поверхности оптимальных распределений температуры  $\Delta\Theta(t, z)$ , полученные в результате решения системы оптимальности (22), и управления  $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$  (теплового потока), вычисленного по формуле (21).

Цена управления — параметр  $\sigma$ , как отмечено выше, может изменяться, его значения подбираются из соображений практической реализации метода. В нашем случае выбор этого значения зависит от погрешности измерений пирометром. Используемые пирометры обеспечивают точность замеров температур с погрешностью не более 0,5 % от максимально измеряемой температуры, т. е. погрешность измерения составляет 8–10 °С. Исходя из этого, проведены расчеты при различных значениях параметра  $\sigma$  (рис. 6), кривая 4 показывает профиль температуры  $\Delta\Theta(\tau, z)$ , соответствующий указанному выше значению погрешности.

Проведены численные эксперименты с целью изучения влияния времени управления  $\tau$  на распределение оптимальной температуры (температуры  $\Delta\Theta(\tau, z)$ , отвечающей оптимальному управлению  $\Delta u_{\text{опт}}(t, z)$ ). Результаты расчетов для различных значений времени управления  $\tau$  представлены на рис. 7. При расчетах начальное состояние системы выбиралось неизменным.

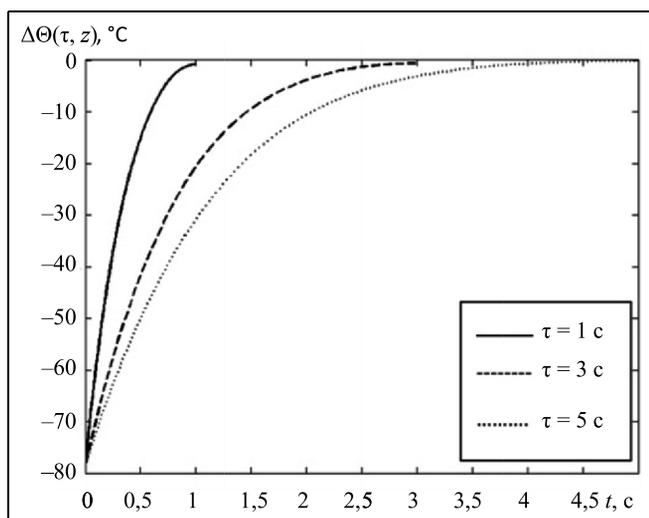


Рис. 7. Зависимость температуры  $\Delta\Theta(\tau, z)$  от времени в различных режимах времени управления  $\tau$ ; значение координаты  $z$  фиксировано:  $z = L/2$ , м

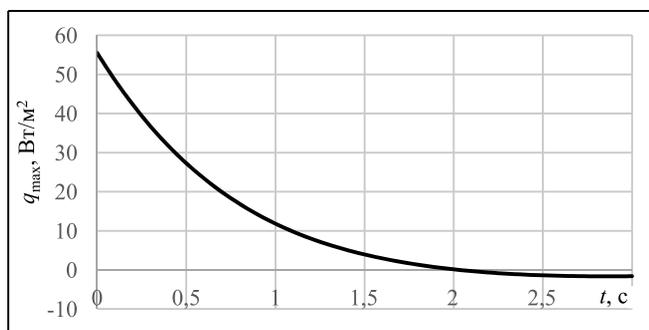


Рис. 8. Зависимость мощности теплового источника  $q_{\max}$  от времени  $t$

Тепловой поток факела горелки, как отмечено выше формулой (3), описывается функцией Гаусса. Мощность теплового источника  $q_{\max}$  при этом рассчитывалась по найденным значениям  $\Delta u_{\text{отт}}(t, z)$ . Результат аппроксимации для времени управления  $\tau = 3$  с представлен на рис. 8.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена математическая модель технологического процесса MCVD, в основе которой лежит нестационарное двумерное уравнение теплопроводности. После принятия ряда предположений, в том числе об осреднении температуры по радиусу трубы, а также в результате проведения линеаризации модели, получено линейное одномерное уравнение теплопроводности для возмущенного состояния, на основе которого поставлена и решена задача оптимизации. Сфор-

мулирована задача оптимального стабилизирующего управления с распределенным управлением и распределенным наблюдением. В качестве функции управления выбран тепловой поток от движущейся горелки, целевой функционал минимизирует отклонения фактической температуры от программной. Получена система оптимальности, закон нахождения функции оптимального управления в явном виде, предложен алгоритм решения полученной системы оптимальности. Приведены и проанализированы результаты численных исследований поставленной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с. [Butkovskij, A.G. Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. — М.: Nauka, 1965. — 474 s. (In Russian)]
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с. [Lions, Zh.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisivaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi. — М.: Mir, 1972. — 414 s. (In Russian)]
3. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 350 с. [Fursikov, A.V. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999. — 350 s. (In Russian)]
4. Фурсиков А.В. Об одной задаче управления и о результате, касающемся однозначной разрешимости трехмерной системы Навье-Стокса // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, вып. 4. — С. 148. [Fursikov, A.V. Ob odnoj zadache upravleniya i o rezul'tate, kasayushchemsya odnoznachnoj razreshimosti trekhmernoj sistemy Nav'e-Stoksa // Uspekhi matematicheskikh nauk. — 1980. — T. 35, vyp. 4. — S. 148. (In Russian)]
5. Фурсиков А.В. О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье-Стокса // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 252, № 5. — С. 1066—1070. [Fursikov, A.V. O nekotoryh zadachah upravleniya i o rezul'tatah, kasayushchihsya odnoznachnoj razreshimosti smeshannoj kraevoy zadachi dlya trekhmernih sistem Nav'e-Stoksa // Dokl. AN SSSR. — 1980. — Vol. 252, no. 5. — S. 1066—1070. (In Russian)]
6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987. — 368 с. [Lions, Zh.-L. Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami. — М.: Nauka, 1987. — 368 s. (In Russian)]
7. Badii, M. Periodic Solutions for a Class of Degenerate Evolution Problems // Nonlinear Analysis. — 2001. — Vol. 44, no. 4. — P. 499—508.
8. Лагранж Ж. Аналитическая механика. — М.-Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1950. — 440 с. [Lagranzh, Zh. Analiticheskaya mekhanika. — М.-Л.: Gos. izd. tekhn.-teor. lit., 1950. — 440 s. (In Russian)]
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с. [Aleksseev, V.M., Tihomirov, V.M., Fomin, S.V. Optimal'noe upravlenie. — М.: Fizmatlit, 2002. — 320 s. (In Russian)]
10. Егоров А.И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с. [Egorov, A.I. Osnovy teorii upravleniya. — М.: Fizmatlit, 2004. — 504 s. (In Russian)]

11. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с. [*Ioffe, A.D., Tihomirov, V.M.* Teoriya ekstremal'nyh zadach. — M.: Nauka, 1974. — 479 s. (In Russian)]
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 622 с. [*Varga, Dzh.* Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami. — M.: Nauka, 1977. — 622 s. (In Russian)]
13. *Иванов Г.А., Пervaдчук В.П.* Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пос. — Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. — 2011. — 171 с. [*Ivanov, G.A., Pervadchuk, V.P.* Tekhnologiya proizvodstva i svoystva kvarcevykh opticheskikh volokon: ucheb. pos. — Perm': Izd-vo Perm. nac. issled. politekhn. un-ta. — 2011. — 171 s. (In Russian)]
14. *Кубышкин В.А., Финягина В.И.* Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. — М.: СИНТЕГ, 2005. — 216 с. [*Kubyshekin, V.A., Finyagina, V.I.* Podvizhnoe upravlenie v sistemah s raspredelennymi parametrami. — M.: SINTEG, 2005. — 216 s. (In Russian)]
15. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. Учебн. пособие для вузов по спец. «Автоматика и управление в технических системах». — М.: Высш. шк., 1989. — 263 с. [*Aleksandrov, A.G.* Optimal'nye i adaptivnye sistemy. Uchebn. posobie dlya vuzov po spets. «Avtomatika i upravlenie v tekhnicheskikh sistemakh». — M.: Vyssh. shk., 1989. — 263 s. (In Russian)]
16. *Рапопорт Э.Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. Учебн. пос. — М.: Высшая школа, 2005. — 292 с. [*Raporport, E.Ya.* Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredelennymi parametrami. Uchebn. pos. — M.: Vysshaya shkola, 2005. — 292 s. (In Russian)]
17. *Бутковский А.Г., Даринский Ю.В., Пустыльников Л.М.* Управление распределенными системами путем перемещения источника // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 5. — С. 11–30. [*Butkovskii, A.G., Darinskii, Yu.V., Pustyl'nikov, L.M.* Upravlenie raspredelennymi sistemami putem peremeshcheniya istochnika // Automation and Remote Control. — 1974. — Vol. 35, no. 5. — P. 701–719.]
18. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980. — 385 с. [*Butkovskij, A.G., Pustyl'nikov, L.M.* Teoriya podvizhnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami. — M.: Nauka, 1980. — 385 s. (In Russian)]
19. *Кубышкин В.А., Суховеров В.С.* Система моделирования и управления подвижным воздействием на базе программных средств MATLAB // Проблемы управления. — 2008. — № 2. — С. 64–69. [*Kubyshekin, V.A., Sukhoverov, V.S.* Mobile Heating Source Simulation and Control System Using MATLAB Software Tools // Control Sciences. — 2008. — No. 2. — P. 64–69. (In Russian)]
20. *Пervaдчук В.П., Владимiroва Д.Б., Дектярев Д.Н., Пестерев А.А.* Моделирование нагрева кварцевых труб подвижным источником воздействия для решения задачи управления процессом MCVD // Международный научно-исследовательский журнал. — 2016. — № 9-2 (51). — С. 76–82. [*Pervadchuk, V.P., Vladimirova, D.B., Dektyarev, D.N., Pester-ev, A.A.* Modelirovanie nagreva kvarcevykh trub podvizhnym istochnikom vozdeystviya dlya resheniya zadachi upravleniya processom MCVD // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. — 2016. — No. 9-2 (51). — S. 76–82. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 31.08.2018, после доработки 21.09.2020.  
Принята к публикации 05.10.2020.

**Пervaдчук Владимир Павлович** — д-р техн. наук,  
✉ pervadchuk@mail.ru,

**Владимiroва Дарья Борисовна** — канд. физ.-мат. наук,  
✉ da0807@mail.ru,

**Дектярев Дмитрий Николаевич** — ✉ dmitridekt@mail.ru,

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

## OPTIMAL CONTROL OF THERMAL EXPOSURE SOURCE IN THE PROCESSES OF VAPOR PHASE DEPOSITION

V.P. Pervadchuk, D.B. Vladimirova, D.N. Dektyarev

Perm National Research Polytechnic University

✉ pervadchuk@mail.ru, ✉ da0807@mail.ru, ✉ dmitridekt@mail.ru

**Abstract.** We consider a mathematical model that describes the process of heating a silica tube by a movable heat source. The model is represented in the form of a one-dimensional heat conduction equation. Based on this model, we solve the problem of optimal stabilizing control with distributed control and distributed observation for the linearized problem. The value of the gas mixture flow rate, which determines the power of the heat source, was selected as a control influence. The aim of the control was to minimize possible temperature deviations from the programmed regimes of the silica pipes alloying. We obtained necessary optimality conditions in the form of an optimization system consisting of two partial differential equations. A law for finding the optimal control function, which explicitly depends on the solution of the mentioned system of equations, was obtained as well. Ultimately, we carried out the numerical solution of the optimization system and obtained quantitative results for the control function. We also calculated and analyzed the temperature distributions in various control modes.

**Keywords:** optimal control, MCVD process, distributed system, optimization system.

# УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ В 2020 г.

**Баженов С.Г., Козяйчев А.Н., Королев В.С.** Частотные методы анализа устойчивости самолета с многосвязной системой управления. — № 2. — С. 20—27.

**Белов М.В.** Согласованное управление многоэлементными динамическими организационными системами. Ч. 1. Динамическая организационная система в составе одного центра и множества агентов. — № 1. — С. 39—47.

**Белов М.В.** Согласованное управление многоэлементными динамическими организационными системами. Ч. 2. Многоуровневая динамическая организационная система. — № 2. — С. 36—46.

**Бреер В.В.** Теоретико-игровая пороговая модель биржевого рынка. — № 3. — С. 34—39.

**Бузиков М.Э., Галяев А.А.** Оценка вероятности выживания цели в задаче «атакующие — цель — защитники». — № 3. — С. 70—77.

**Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г.** Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей. — № 4. — С. 15—26.

**Вишневский В.М., Семенова О.В., Буй З.Т.** Исследование системы поллинга с адаптивным циклическим опросом и ее применение для проектирования широкополосных беспроводных сетей. — № 5. — С. 50—55.

**Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П.** Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости. — № 1. — С. 83—91.

**Германчук М.С., Лемтюжникова Д.В. Лукьяненко В.А.** Метаэвристические алгоритмы для многоагентных задач маршрутизации. — № 6. — С. 3—13.

**Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г.** Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации. — № 3. — С. 26—33.

**Губко М.В.** Построение комплексных механизмов управления организационным поведением. — № 3. — С. 14—25.

**XXVII международная конференция «Проблемы управления безопасностью сложных систем».** — № 2. — С. 83—87.

**Двенадцатая международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD'2019.** — № 3. — С. 78—82.

**Дозорцев В.М.** От неклассической к постнеклассической науке: пример компьютерных тренажеров для обучения операторов технологических процессов. — № 2. — С. 69—82.

**Евгений Анатольевич Микрин.** — № 3. — С. 83.

**Еналеев А.К.** Оптимальность согласованных механизмов в сетевых организационных структурах. — № 1. — С. 24—38.

**Еремин В.В., Бауэр В.П., Райков А.Н.** Управление конкурентоспособностью в системе цифровых платформ. — № 4. — С. 27—40.

**Ефанов Д.В.** Троичные коды с суммированием для контроля цифровых схем. — № 4. — С. 52—60.

**Зак Ю.А.** Расписания выполнения заданий во взаимосвязанных последовательно работающих производственных системах. — № 5. — С. 71—80.

**Index of papers published in 2020.** — № 6. — С. 83—84.

**Каравай М.Ф., Подлазов В.С.** Оптимальные отказоустойчивые многомерные торы на основе малопортовых маршрутизаторов и хабов. — № 5. — С. 56—64.

**Ковалев С.П., Небера А.А., Губко М.В.** Цифровая платформа для реализации автоматизированных систем управления распределенными энергоресурсами. — № 6. — С. 57—70.

**Ковешников В.А., Мехтиев А.Я.** Исследование накопительно-сортировочного метода решения задач параметрической оптимизации. — № 2. — С. 28—35.

**Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В.** Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата. — № 1. — С. 3—16.

**Коргин Н.А., Корепанов В.О.** Синтез оптимального механизма активной экспертизы: конструк-

тивное решение средствами компьютерного моделирования. — № 5. — С. 30—38.

**Корепанов В.О.** Константное поведение в деловых играх распределения ресурса: устойчивость к дизайну игр и модель. — № 4. — С. 41—51.

**Леонид Петрович Боровских.** — № 5. — С. 81.

**Макаренко А.В.** Глубокие нейронные сети: зарождение, становление, современное состояние. — № 2. — С. 3—19.

**Мартынова Л.А., Киселев И.В., Безрук Г.Г.** Эффективное управление гибридной системой генерации и распределения электроэнергии при движении автономного необитаемого подводного аппарата. — № 4. — С. 70—80.

**Мелехин В.Б., Хачумов В.М.** Управление эффективной реализацией технологических процессов механической обработки деталей в машиностроении. — № 1. — С. 71—82.

**Муромцев Д.Ю., Грибков А.Н., Тюрин И.В., Шамкин В.Н.** Алгоритм оптимального управления многомерными технологическими объектами при изменении их производительности на длительном интервале времени. — № 2. — С. 57—68.

**Мыльников Л.А.** Управление экономической эффективностью производственных систем в условиях непрерывного потока новых проектов. — № 6. — С. 31—45.

**Огородников О.В.** Решение задачи многокритериальной оптимизации в условиях параметрической неопределенности на этапе предварительного расчета параметров маневренного самолета. — № 5. — С. 65—70.

**Павел Павлович Пархоменко.** — № 3. — С. 84.

**Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Дектярев Д.Н.** Оптимальное управление тепловым источником воздействия в процессах парофазного осаждения. — № 6. — С. 71—80.

**Первушина Н.А., Хакимова А.Н.** Разработка математических моделей нечетких регуляторов с настройкой генетическим алгоритмом для стабилизации динамического объекта. — № 4. — С. 3—14.

**Подиновский В.В.** Анализ решений в условиях неопределенности при нечисловом оценивании предпочтений и вероятностей. — № 1. — С. 48—58.

**Подиновский В.В., Нелюбин А.П.** Средние величины: многокритериальный подход. — № 5. — С. 3—16.

**Подлазов В.С.** Отказоустойчивый неблокируемый трехмерный разреженный гиперкуб. — № 3. — С. 59—69.

**Подлазов В.С., Каравай М.Ф.** Расширение возможностей системной сети «Ангара». — № 2. — С. 47—56.

**Промыслов В.Г., Семенов К.В., Жарко Е.Ф.** Методы оценки информационной угрозы для беспилотных транспортных средств в среде «умного города». — № 3. — С. 49—58.

**Ратнер С.В.** Оценка эффективности управления эко-инновациями на основе моделей DEA с лагами и отрицательными выходами. — № 5. — С. 39—49.

**Стецюра Г.Г.** Децентрализованная автономная синхронизация процессов взаимодействия мобильных объектов. — № 6. — С. 46—56.

**Стецюра Г.Г.** Компьютерные кластеры с быстрым аппаратным выполнением синхронизации сообщений и распределенных вычислений сетевыми средствами. — № 4. — С. 61—69.

**Уткин А.В., Уткин В.А.** Синтез систем стабилизации при односторонних ограничениях на управляющие воздействия. — № 3. — С. 3—13.

**Хасянова С.Ю., Самсонов М.Е.** Модель оценки эффекта воздействия ипотечной секьюритизации на банковский бизнес. — № 3. — С. 40—48.

**Хлебников М.В., Квинто Я.И.** Условия робастной устойчивости для семейства линейных дискретных систем с неопределенностями. — № 5. — С. 17—21.

**Черешко А.А., Шундерюк М.М.** Границы применимости алгоритмов усовершенствованного управления с прогнозирующей моделью в условиях неопределенности динамики объекта. — № 1. — С. 17—23.

**Честнов В.Н.** Абсолютная устойчивость систем с регуляторами, гарантирующими заданный показатель колебательности. — № 6. — С. 14—18.

**Шатов Д.В.** Длительность процесса фильтрации при конечно-частотной идентификации. — № 5. — С. 22—29.

**Шумов В.В.** Исследование функции победы в бою (сражении, операции). — № 6. — С. 19—30.

**Шумов В.В.** Расширение модели «наступление — оборона». — № 1. — С. 59—70.

## INDEX OF PAPERS PUBLISHED IN 2020

- Bazhenov, S.G., Kozyaychev, A.N., Korolyov, V.S.** Stability Analysis of Airplane with MIMO Control System Based on Frequency Methods. — No. 2. — P. 20—27.
- Belov, M.V.** Incentive-Compatible Control in Dynamic Multi-Agent Systems. Part 1. Contracts in Dynamic System with One Principal and Multiple Agents. — No. 1. — P. 39—47.
- Belov, M.V.** Incentive-Compatible Control in Dynamic Multi-Agent Systems. Part 2. Contracts in dynamic hierarchical multi-agent system. — No. 2. — P. 36—46.
- Breer, V.V.** Game-Theoretic Threshold Model of the Stock Market. — No. 3. — P. 34—39.
- Buzikov, M.E., Galayev, A.A.** Target Survival Probability Estimation for the Attackers — Target — Defenders Problem. — No. 3. — P. 70—77.
- Byzov, L.G., Chkhartishvili, A.G., Gubanov, D.A., Kozitsin, I.V.** Perfect Politician for Social Network: An Approach to Analysis of Ideological Preferences of Users. — No. 4. — P. 15—26.
- Chereshko, A.A., Shunderyuk, M.M.** Applicability Limits of Model-Based Predictive Control Algorithms under Uncertain Control Object Dynamics. — No. 1. — P. 17—23.
- Chestnov, V.N.** Absolute Stability of Systems with Controllers That Provide Given Oscillation Index. — No. 6. — P. 14—18.
- Dozortsev, V.M.** From Non-Classical to Post-Non-Classical Science: an Example of Industrial Operators' Computer-Based Training Systems. — No. 2. — P. 69—82.
- Efanov, D.V.** Ternary Sum Codes for the Digital Circuits Testing. — No. 4. — P. 52—60.
- Enaleev, A.K.** Optimality of the Incentive Compatible Mechanisms in Network Organizational Structures. — No. 1. — P. 24—38.
- Eremin, V.V., Bauer, V.P., Raikov, A.N.** Competitiveness Management in the Digital Platform System. — No. 4. — P. 27—40.
- Galyaev, A.A., Lysenko, Yakhno, V.P.** Moving Object Evasion from Single Detector at Given Speed. — No. 1. — P. 83—91.
- Germanchuk, M.S., Lemtyuzhnikova, D.V., Luki-anenko V.A.** Metaheuristic Algorithms for Multi-Agent Routing Problems. — No. 6. — P. 3—13.
- Goubko, M.V.** Design of Integrated Mechanisms for Organizational Behavior Control. — No. 3. — P. 14—25.
- Gubanov, D.A., Petrov, I.V., Chkhartishvili, A.G.** Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices. — No. 3. — P. 26—33.
- Karavay, M.F., Podlazov, V.S.** Optimum Multidimensional Tori Based on Low-Port Routers and Hubs. — No. 5. — P. 56—64.
- Khasyanova, S.Yu., Samsonov, M.E.** The Estimation Model of the Mortgage Securitization Effect on Banking Business. — No. 3. — P. 40—48.
- Khlebnikov, M.V., Kvinto Y.I.** Robust Stability Conditions for a Family of Linear Discrete-Time Systems Subjected to Uncertainties. — No. 5. — P. 17—21.
- Kokunko, Ju.G., Krasnov, D.V., Utkin, A.V.** Two Methods of Synthesis of State and Disturbances Observers for an Unmanned Aerial Vehicle. — No. 1. — P. 3—16.
- Korepanov, V.O.** Constant Behavior in Resource Allocation Games: Resistance to the Game Design, and the Mode. — No. 4. — P. 41—51.
- Korgin, N.A., Korepanov, V.O.** Synthesis of the Optimal Mechanism of Active Expertise: Realization via Computer Modeling Systems. — No. 5. — P. 33—38.
- Kovalyov, S.P., Nebera, A.A., Goubko M.V.** A Digital Platform for Implementing Distributed Energy Resources Management Systems. — No. 6. — P. 57—70.
- Koveshnikov, V.A., Mekhtiev, A.Ya.** Data Accumulation and Sorting Method for Solving Parametric Optimization Problem. — No. 2. — P. 28—35.

**Leonid Petrovich Borovskikh.** — No. 5. — P. 81.

**Makarenko, A.V.** Deep Neural Networks: Origins, Development, Current Status. — No. 2. — P. 3–19.

**Martynova, L.A., Kiselev, N.K., Bezruk, G.G.** Effective Control of a Hybrid System of Generation and Distribution of Electricity When Moving Autonomous Uninhabited Underwater Vehicle. — No. 4. — P. 70–80.

**Melekhin, V.B., Khachumov, V.M.** Control of Effective Implementation of Technological Processes for Mechanical Processing of Parts in Mechanical Engineering. — No. 1. — P. 71–82.

**Muromtsev, D.Yu., Gribkov, A.N., Tyurin, I.V., Shamkin, V.N.** Algorithm of Optimal Control of MI-MO Technological Systems When Changing Their Performance Indicators over a Long Time Interval. — No. 2. — P. 57–68.

**Mylnikov L.A.** Managing the Economic Efficiency of Production Systems in a Fluent Flow of New Projects. — No. 6. — P. 31–45.

**Ogorodnikov, O.V.** The Solution of the Problem of Multicriteria Optimization under Parametric Uncertainty during Pre-Calculation of Jet Aircraft Parameters. — No. 5. — P. 65–70.

**Pavel Pavlovich Parkhomenko.** — No. 3. — P. 84.

**Pervadchuk, V.P., Vladimirova, D.B., Dektyarev, D.N.** Optimal Control of Thermal Exposure Source in the Processes of Vapor Phase Deposition. — No. 6. — P. 71–80.

**Pervushina, N.A., Khakimova, A.N.** Development of Mathematical Models of Fuzzy Controllers Set by Genetic Algorithm to Stabilize Dynamic Objec. — No. 4. — P. 3–14.

**Podinovski, V.V.** Analysis of Decisions under Uncertainty with Non-Numeric Assessment of Preferences and Probabilities. — No. 1. — P. 48–58.

**Podinovski, V.V., Nelyubin, A.P.** Mean Quantities: A Multicriteria Approach. — No. 5. — P. 3–16.

**Podlazov, V.S.** Fault-Tolerant Non-Blocking Three-Dimensional sparse Hypercube. — No. 3. — P. 59–69.

**Podlazov, V.S., Karavay, M.F.** Expanding the Capabilities of the Angara System Area Network. — No. 2. — P. 47–56.

**Promyslov, V.G., Semenov, K.V., Jharko, E.Ph.** Security Threat Assessment Methods for Unmanned Vehicles in a Smart City. — No. 3. — P. 49–58.

**Ratner, S.V.** Evaluation of Efficiency of Eco-Innovation Management Based on DEA Models with Lags and Negative Outputs. — No. 5. — P. 39–49.

**Shatov, D.V.** Duration of Filtration Process During Finite-Frequency Identification. — No. 5. — P. 22–29.

**Shumov, V.V.** A Study of Contest Success Function for Battles (Combats, Operations). — No. 6. — P. 19–30.

**Shumov, V.V.** Expansion of the «Attack — Defense» Model. — No. 1. — P. 59–70.

**Stetsyura, G.G.** Decentralized Autonomic Synchronization of Interaction Processes of Mobile Objects. — No. 6. — P. 46–56.

**Stetsyura, G.G.** The Computer Clusters with Fast Synchronization of Messages and with Fast Distributed Computing by the Network Hardware. — No. 4. — P. 61–69.

**Utkin, A.V., Utkin, V.A.** The Synthesis of Stabilization Systems Under One-Sided Restrictions on Control Actions. — No. 3. — P. 3–13.

**Vishnevsky, V.M., Semenova, O.V., Bui, D.T.** Investigation of the Stochastic Polling System and Its Applications in Broadband Wireless Networks. — No. 5. — P. 50–55.

**XII International** Conference «Management of Large-Scale System Development» MLSD'2019. — No. 3. — P. 78–82.

**XXVII International** Conference «The Problems of Complex Systems Security Control». — No. 2. — P. 83–87.

**Yevgeny Anatolyevich Mikrin.** — No. 3. — P. 83.

**Zack, Yu.A.** Schedules for Performing Tasks in Interconnected Sequential Production Systems. — No. 5. — P. 71–80.

