

ISSN 1819-3161

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

**5/2020**

CONTROL  SCIENCES

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,  
И. А. Каляев, академик РАН,  
В. А. Левин, академик РАН,  
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,  
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,  
Е. А. Федосов, академик РАН

## РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,  
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,  
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,

**Л. П. Боровских**, канд. техн. наук  
(зам. гл. редактора),

В. Н. Бурков, д-р техн. наук,  
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,  
М. И. Гераськин, д-р экон. наук,  
В. В. Клочков, д-р экон. наук,  
С. А. Краснова, д-р техн. наук,  
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,  
В. В. Кульба, д-р техн. наук,  
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,  
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,  
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,  
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,  
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук  
(ответственный секретарь),  
А. С. Мандель, д-р техн. наук,  
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,  
А. И. Михальский, д-р биол. наук,  
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН  
(гл. редактор),  
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,  
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук  
(зам. гл. редактора),  
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,  
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,  
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,  
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,  
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,  
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,  
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,  
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

## РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,  
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,  
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,  
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,  
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,  
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,  
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольниковский,  
д-р техн. наук,  
Самара – В. Г. Засканов, д-р техн. наук,  
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,  
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

## ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS<sup>1</sup>,  
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,  
V. A. Levin, Academician of RAS,  
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,  
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,  
S. N. Vassilejev, Academician of RAS

## EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),  
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),  
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),

**L. P. Borovskikh**, Ph. D. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,

V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),  
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),  
V. V. Klochkov, D. Sc. (Econ.),  
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),  
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),  
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),  
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),  
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),  
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),  
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),  
N. E. Maximova, Ph. D. (Tech.),  
Executive Editor-in-Chief,  
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),  
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),  
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),  
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,  
Editor-in-Chief,  
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,  
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),  
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),  
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),  
E. Ya. Rubinovich, D. Sc. (Tech.),  
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),  
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),  
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),  
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

## LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),  
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),  
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),  
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –  
D. Sc. (Tech.),  
Samara – V. G. Zaskanov, D. Sc. (Tech.),  
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),  
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)  
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),  
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),  
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

<sup>1</sup> Russian Academy of Sciences.



**CONTROL SCIENCES**

**Научно-технический  
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

**УЧРЕДИТЕЛЬ**

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор

чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместители главного  
редактора

**Л.П. Боровских**, Ф.Ф. Пашенко

Ответственный секретарь

Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.  
Тел./факс (495) 334-92-00  
E-mail: pu@ipu.ru  
Интернет: http://pu.mtas.ru

Оригинал-макет и электронная версия  
подготовлены  
ИП Кишенкова Т. В.

Отпечатано в ООО «Авансд солишнз»

Заказ № РВ520

Подписано в печать  
28.09.2020 г.

Журнал зарегистрирован  
в Министерстве Российской  
Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств  
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе  
Web of Science и Перечень  
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс  
научного цитирования (РИНЦ).  
На сайте Научной электронной  
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны  
полные тексты статей.

Подписные индексы:  
**80508** и **81708** в каталоге Роспечати;  
**38006** в объединенном каталоге  
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 5.2020

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Математические проблемы управления

Подиновский В.В., Нелюбин А.П. Средние величины: много-  
критериальный подход . . . . . 3

#### Анализ и синтез систем управления

Хлебников М.В., Квинто Я.И. Условия робастной устойчивости  
для семейства линейных дискретных систем с неопределенностями . . 17

Шатов Д.В. Длительность процесса фильтрации при конечно-  
частотной идентификации . . . . . 22

#### Управление в социально-экономических системах

Коргин Н.А., Корепанов В.О. Синтез оптимального механизма  
активной экспертизы: конструктивное решение средствами  
компьютерного моделирования . . . . . 30

Ратнер С.В. Оценка эффективности управления эко-инновациями  
на основе моделей DEA с лагами и отрицательными выходами . . . . . 39

#### Информационные технологии в управлении

Вишневский В.М., Семенова О.В., Буй З.Т. Исследование системы  
поллинга с адаптивным циклическим опросом и ее применение  
для проектирования широкополосных беспроводных сетей . . . . . 50

Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Оптимальные отказоустойчивые  
многомерные торы на основе малопортовых маршрутизаторов  
и хабов . . . . . 56

#### Управление техническими системами и технологическими процессами

Огородников О.В. Решение задачи многокритериальной оптимизации  
в условиях параметрической неопределенности на этапе  
предварительного расчета параметров маневренного самолета . . . . . 65

Зак Ю.А. Расписания выполнения заданий во взаимосвязанных  
последовательно работающих производственных системах . . . . . 71

\* \* \*

**Леонид Петрович Боровских** . . . . . 81



## CONTROL SCIENCES

### Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

#### FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute  
of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences

#### Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

#### Deputy Editors-in-Chief

**L. P. Borovskikh**, F. F. Pashchenko

#### Executive Editor-in-Chief

N. E. Maximova

#### Editor

L. V. Petrakova

#### Publisher Sensidat-Plus LLC

#### Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,

Moscow 117997, Russia

☎/📠 +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version  
prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB520

Approved for print on 28.09.2020

The Journal is registered by the Ministry  
of Press, Broadcasting and Mass Media  
of the Russian Federation  
Registration certificate of  
ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI  
(Russian Science Citation Index)  
on the platform Web of Science  
and in the list of peer-reviewed  
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic  
library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) full texts of articles  
are available.

#### Subscription indexes:

**80508** and **81708** in the catalogue  
of Rospechat;

**38006** in the joint catalogue  
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control  
Sciences of Russian Academy of Sciences

# CONTROL SCIENCES

## 5.2020

### CONTENTS

#### Mathematical Problems of Control

- Podinovski, V.V., Nelyubin, A.P.** Mean Quantities: A Multicriteria  
Approach ..... 3

#### Analysis and Synthesis of Control Systems

- Khlebnikov, M.V., Kvinto Y.I.** Robust Stability Conditions for a Family  
of Linear Discrete-Time Systems Subjected to Uncertainties ..... 17

- Shatov, D.V.** Duration of Filtration Process During Finite-Frequency  
Identification ..... 22

#### Control in Social and Economic Systems

- Korgin, N.A., Korepanov, V.O.** Synthesis of the Optimal Mechanism  
of Active Expertise: Realization via Computer Modeling Systems ..... 30

- Ratner, S.V.** Evaluation of Efficiency of Eco-Innovation Management Based  
on DEA Models with Lags and Negative Outputs ..... 39

#### Information Technologies in Control

- Vishnevsky, V.M., Semenova, O.V., Bui, D.T.** Investigation of the Stochastic  
Polling System and Its Applications in Broadband Wireless Networks ..... 50

- Karavay, M.F., Podlazov, V.S.** Optimum Multidimensional Tori Based  
on Low-Port Routers and Hubs ..... 56

#### Control of Complex Technological Processes and Productions

- Ogorodnikov, O.V.** The Solution of the Problem of Multicriteria Optimization  
under Parametric Uncertainty during Pre-calculation of Jet Aircraft  
Parameters ..... 65

- Zack, Yu.A.** Schedules for Performing Tasks in Interconnected Sequential  
Production Systems ..... 71

\* \* \*

- Leonid Petrovich Borovskikh** ..... 81

## СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД<sup>1</sup>

В.В. Подиновский, А.П. Нелюбин

**Аннотация.** Предложен новый подход к определению понятия средней величины для конечного множества  $X$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ : удаленность произвольной точки  $x$  от каждой отдельной точки  $x_i$  оценивается расстоянием  $f_i(x)$  между ними, а удаленность точки  $x$  от всего множества  $X$  характеризуется векторным критерием  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ ; при помощи этого критерия задается отношение предпочтения в удаленности; средней величиной считается точка  $x^*$ , недоминируемая по такому отношению. Исследованы свойства и структура средних для нескольких отношений предпочтения, в том числе отношения Парето и отношения, порождаемого информацией о равноважности критериев. Выявлена взаимосвязь между введенными средними величинами и основными статистическими средними — медианой, средними арифметической, квадратической, геометрической и гармонической. Рассмотрены вопросы построения множеств таких средних, предложен эффективный метод построения для случая, когда одинаково важные критерии имеют шкалу первой порядковой метрики. Обсуждены направления возможных обобщений введенного понятия на многомерный случай.

**Ключевые слова:** средние величины, многокритериальные задачи выбора, отношения предпочтения, недоминируемые точки, теория важности критериев, равноважные критерии, теория мажоризации.

### ВВЕДЕНИЕ

В управлении, экономике, социологии, технике и других областях науки и практики широко применяются средние величины. В общей теории статистики это понятие определяется таким образом: «Средней величиной называется статистический показатель, который дает обобщенную характеристику варьирующего признака однородных единиц совокупности. <...> Сущность средней заключается в том, что в ней взаимопогашаются случайные отклонения значений признака и учитываются изменения, вызванные основным фактором» [1]. И еще: «Средняя величина — это обобщающая характеристика единиц совокупности по какому-либо варьирующему признаку <...> Средние величины позволяют сравнивать уровни одного и того же

признака в различных совокупностях и находить причины этих расхождений» [2].

Однако следует иметь в виду важное обстоятельство: «... не существует возможности нахождения некой универсальной формулы, исчерпывающей понятие средней величины и обладающей конструктивными достоинствами». (Из предисловия в книге [3].) Поэтому актуальной остается проблема поиска подходов к общей формулировке понятия средней величины и ее конкретизации для различных ситуаций (задач). В нашей статье предлагаются новые подходы к решению указанной проблемы, основанные на идеях и методах многокритериальной оптимизации.

### 1. СВЕДЕНИЯ О СРЕДНИХ ВЕЛИЧИНАХ

Вначале для удобства читателя приведем необходимые сведения о средних величинах. Пусть имеется совокупность  $X$ , состоящая из  $n \geq 2$  действительных чисел, называемых далее данными, или

<sup>1</sup> Исследования финансировались в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

точками и являющихся результатами измерения интенсивности некоторого выделенного признака:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (1)$$

Эти данные являются однородными в том смысле, что измерения производились по одной и той же шкале [4], характеризуемой множеством допустимых преобразований  $\Phi$  — числовых функций  $\varphi$ , так что вместо признака (1) можно рассматривать множество

$$\varphi(X) = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)\} \quad (2)$$

для любой функции  $\varphi \in \Phi$ . Для основных типов шкал [4] областью определения функций  $\varphi$  является вся числовая прямая  $\text{Re} = (-\infty, +\infty)$  или же положительный луч  $\text{Re}_+ = [0, +\infty)$ .

Упорядоченные соответственно по неубыванию и невозрастанию множества

$$\begin{aligned} X_{\uparrow} &= \langle x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)} \rangle; \\ X_{\downarrow} &= \langle x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]} \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  и  $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ , получаются из совокупности чисел (1) при помощи соответствующих перестановок. Отметим, что множество (1) в статистике называется выборкой, а первая совокупность из множества (3) — вариационным рядом.

Функция  $n$  переменных  $g(X) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *средней величиной, средней или средним (по Коши)*, если

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (4)$$

Иногда дополнительно требуется, чтобы оба неравенства в выражении (4) были строгими [3]. Поскольку все данные в признаке (1) считаются «одинаково весомыми», то функция  $g$  должна быть симметрической, так что, в частности,  $g(X) = g(X_{\uparrow}) = g(X_{\downarrow})$ . Функция  $f$  может задаваться аналитически, алгоритмически или иными способами. Она может быть как однозначной, так и многозначной, и средняя называется соответственно однозначной или многозначной. Адекватный вид средней, т. е. тот конкретный вид функции  $g$ , которую можно корректно применять, зависит от типа шкалы, по которой производились измерения для получения признака (1) [5].

Вначале рассмотрим случай качественных данных, когда шкала порядковая, а множество  $\Phi = \Phi_{\Pi}$  включает все возрастающие непрерывные на  $\text{Re}$  функции:

$$\Phi_{\Pi} = \{\varphi: x > y \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(y); \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a)\}.$$

Преобразования данных (1) с учетом  $\varphi \in \Phi_{\Pi}$  сохраняет их упорядочение:  $x_i > x_j \Rightarrow \varphi(x_i) > \varphi(x_j)$ . Поэтому адекватной средней для порядковой шкалы является, например, медиана  $\mu_X$ , которая определяется с помощью вариационного ряда так: если число  $n$  нечетное, то медиана равна центральному члену ряда:  $\mu_X = x_{(\frac{n+1}{2})}$ ; если же число  $n$  четное, то медианой является любое число, заключенное между значениями двух центральных членов  $x_{(\frac{n}{2})}$  и  $x_{(\frac{n}{2}+1)}$ , так что медиана оказывается многозначной средней.

Будем теперь полагать, что данные (1) являются количественными, т. е. измерения производились в шкале интервалов ( $\Phi = \Phi_{\Pi}$ ) или же шкале отношений ( $\Phi = \Phi_{\sigma}$ ):

$$\Phi_{\Pi} = \{\varphi: \varphi(x) = kx + l, k > 0\},$$

$$\Phi_{\sigma} = \{\varphi: \varphi(x) = kx, k > 0\}.$$

Множество  $\Phi_{\Pi}$  состоит из всех возрастающих линейных функций, а множество  $\Phi_{\sigma}$  — из всех возрастающих линейных однородных функций. Для таких данных медиана, разумеется, тоже является адекватной средней. Более того, здесь в случае четного числа  $n$  для устранения многозначности часто за медиану принимают среднюю арифметическую центральных членов  $x_{(\frac{n}{2})}$  и  $x_{(\frac{n}{2}+1)}$  или же иное число, лежащее между ними [3].

В случаях, когда все числа в данных (1) неотрицательны, а шкала измерений является шкалой отношений, на практике широко применяется средняя степенная

$$g^s(X) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^s \right)^{1/s}, \quad s \neq 0. \quad (5)$$

Отметим следующие свойства этой средней [3]:

- $g^s(X)$  непрерывна по совокупности переменных  $x_i$  на  $\text{Re}_+^n$  и непрерывна по  $s$  на  $\text{Re}$ , кроме точки  $s = 0$ ;
- $g^s(X)$  возрастает по каждой переменной  $x_i$  и возрастает по  $s$ , если не все  $x_i$  равны;
- справедливы формулы:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} g^s(X) = \min_{i \in N} x_i, \quad \lim_{s \rightarrow 0} g^s(X) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n},$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g^s(X) = \max_{i \in N} x_i, \quad (6)$$



где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Если доопределить по непрерывности функцию  $g^s(X)$  для  $s = 0$ , положив ее равной, с учетом второго равенства из (6), средней

геометрической  $g^0(X) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$ , то функция

$g^s(X)$  при изменении  $s$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  будет пробегать все значения из интервала  $(\min_{i \in N} x_i, \max_{i \in N} x_i)$ .

При  $s = 1$  средняя степенная  $g^s(X)$  оказывается равной средней арифметической  $g^1(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,

которая определена и в том более общем случае, когда числа  $x_i$  в данных (1) могут иметь любой знак. Среднюю арифметическую можно корректно применять, когда данные (1) получены измерениями по шкале интервалов.

## 2. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Теперь приведем необходимые сведения из теории многокритериальной оптимизации [6]. Далее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия решения по  $n \geq 2$  критериям:

$$\langle V, f, R \rangle. \quad (7)$$

Здесь  $V$  — множество *вариантов* (действий), или стратегий, планов, альтернатив (оно содержит не менее двух вариантов);  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  — *векторный критерий*, состоящий из  $n$  частных критериев  $f_i: V \rightarrow Z_i$ , т. е. *критерий*  $f_i$  — это функция с областью определения  $V$  и числовой областью значений  $Z_i \subseteq \text{Re}$ . Каждый вариант  $v$  из множества  $V$  характеризуется своей *векторной оценкой*  $y(v) = f(v) = (f_1(v), f_2(v), \dots, f_n(v))$ . Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их векторных оценок. Множество всех векторных оценок есть  $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$ . Через  $Y$  обозначается множество достижимых векторных оценок, т. е. множество значений векторного критерия:  $Y = f(V) = \{y \in Z \mid \exists v \in V: y = f(v)\}$ .

Предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), моделируются на множестве  $Z$  при помощи *отношения нестрогого предпочтения*  $R$ , так что  $yRz$  означает, что векторная оценка  $y$  не менее предпочтительна, чем оценка  $z$ . Отношение  $R$  является *квазипорядком*, т. е. оно рефлексивно и транзитивно: верно  $yRu$  и  $(yRz, zRu)$  влечет  $yRu$  при любых  $y, z, u \in Z$ . Если найдутся две векторные оценки  $y$  и  $z$ , несравнимые по  $R$ , т. е. для которых неверно ни  $yRz$ , ни  $zRu$ , то квазипорядок называется

частичным, или несвязным, в противном случае — полным, или связным.

Отношение  $R$  порождает *отношение безразличия*  $I$  и (строгого) *предпочтения*  $P$  следующим образом:  $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRu$ ;  $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRu$  (здесь  $\neg zRu$  означает, что  $zRu$  неверно). Отношение  $R$  определяется составом информации о предпочтениях ЛПР. Запись  $yIz$  означает, что векторные оценки  $y$  и  $z$  одинаковы по предпочтительности, или безразличны, а запись  $yPz$  означает, что векторная оценка  $y$  предпочтительнее, чем оценка  $z$ . Отношение  $R$ , заданное на множестве  $Z$  подходящим решающим правилом на основе имеющейся информации  $\Gamma$  о предпочтениях ЛПР, обозначается  $R^\Gamma$ . Отношения  $R^\Gamma$ ,  $I^\Gamma$  и  $P^\Gamma$  порождают имеющие аналогичный смысл отношения  $R_\Gamma$ ,  $I_\Gamma$  и  $P_\Gamma$  на множестве  $V$ :

$$\begin{aligned} vR_\Gamma w &\Leftrightarrow f(v)R^\Gamma f(w), & vI_\Gamma w &\Leftrightarrow f(v)I^\Gamma f(w), \\ vP_\Gamma v &\Leftrightarrow f(v)P^\Gamma f(w). \end{aligned} \quad (8)$$

(Достижимая) векторная оценка  $y^* \in Y$  называется *недоминируемой* (по  $P^\Gamma$ ), если не существует (достижимой) векторной оценки  $y \in Y$  такой, что верно  $yP^\Gamma y^*$ ; в противном случае она — *доминируемая* (по отношению  $P^\Gamma$  векторной оценкой  $y$ ). Недоминируемым векторным оценкам соответствуют недоминируемые варианты: вариант  $v^*$  недоминируем (по  $P_\Gamma$ ), если не существует варианта  $v$  такого, что верно  $vP_\Gamma v^*$ . Пусть  $Y^\Gamma$  и  $V^\Gamma$  — множества недоминируемых векторных оценок и вариантов соответственно. Любые две недоминируемые векторные оценки (недоминируемые варианты) либо безразличны, либо несравнимы. Множество  $Y^\Gamma$  (множество  $V^\Gamma$ ) называется *внешне устойчивым*, если для всякой доминируемой векторной оценки  $y$  (доминируемого варианта  $v$ ) найдется недоминируемая векторная оценка  $y^*$  (недоминируемый вариант  $v^*$ ) такая (такой), что верно  $y^*P^\Gamma y$  (соответственно  $v^*P_\Gamma v$ ). Оптимальный (наилучший) вариант надлежит выбрать среди множества недоминируемых вариантов, если оно внешне устойчиво.

Множества  $R_+^\Gamma(y) = \{z \in A \mid zR^\Gamma y\}$  и  $R_-^\Gamma(y) = \{z \in A \mid yR^\Gamma z\}$  называются соответственно верхним и нижним срезами множества  $A \subseteq Z$  отношением  $R^\Gamma$  через точку  $y \in A$ . Если верхний срез через каждую точку  $y \in Y$  является множеством замкнутым и ограниченным, то множество недоминируемых векторных оценок  $Y^\Gamma$  не пусто и, более того, внешне устойчиво [7]. Полезно иметь в виду, что если множество стратегий  $V \subset \text{Re}^m$  является замк-



нутым и ограниченным, а все критерии  $f_i$  — непрерывные на  $V$  функции, то и множество  $V^\Gamma$  замкнуто и ограничено.

Будем далее полагать, что предпочтения ЛПР с увеличением значений критериев  $f_i$  убывают, или, иными словами, что критерии желательно минимизировать<sup>2</sup>. При отсутствии иной информации о предпочтениях на множестве  $Z$  предпочтения описывает отношение Парето  $P^\varnothing$ , определяемое так:

$$yP^\varnothing z \Leftrightarrow (y_i \leq z_i, i = 1, 2, \dots, n; y \neq z). \quad (9)$$

Отношение  $R_\varnothing$  определяется  $n$  нестрогими неравенствами из (9). Отношение  $P^\varnothing$  порождает на  $V$  отношение Парето  $P_\varnothing$ :  $vP_\varnothing w \Leftrightarrow f(v)P^\varnothing f(w)$ .

Недоминируемые по  $P^\varnothing$  векторные оценки (и недоминируемые по соответствующему отношению  $P_\varnothing$  варианты) называются оптимальными по Парето и составляют множество  $Y^\varnothing$  (соответственно  $V_\varnothing$ ). Определение отношения  $P_\varnothing$  и множества  $V_\varnothing$  корректно, даже если каждый критерий имеет свою всего лишь порядковую шкалу: после применения к критериям  $f_i$  соответствующих допустимых преобразований  $\varphi_i$  (возрастающих на  $\mathbb{R}$  непрерывных функций) указанные отношение и множество не изменяются.

Теперь предположим, что все критерии имеют общую порядковую шкалу, так что  $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z_0$ , и  $Z = Z_0^n$ . Рассмотрим случай, когда все критерии равноважны [8]. Пусть  $\Pi$  — множество перестановок  $\pi = \langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Критерии  $f_1, f_2, \dots, f_n$  называются *равноважными* (имеющими одинаковую важность), если одинаковы по предпочтительности всякая векторная оценка  $y$  и полученная из нее при помощи любой перестановки  $\pi \in \Pi$  векторная оценка  $\pi(y) = (y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, \dots, y_{\pi(n)})$ . Информацию о том, что все критерии равноважны, будем обозначать через  $E$ . Отношение нестрогого предпочтения  $R^E$  (квазипорядок), порождаемое на  $Z$  такой информацией, задается следующим образом:

$yR^E z \Leftrightarrow$  найдутся такие перестановки  $\pi, \rho \in \Pi$ , что

$$y_{\pi(1)} \leq z_{\rho(1)}, y_{\pi(2)} \leq z_{\rho(2)}, \dots, y_{\pi(n)} \leq z_{\rho(n)}; \quad (10)$$

при этом  $yI^E z$ , когда все  $n$  нестрогих неравенств выполняются как равенства, и  $yP^E z$ , когда хотя бы одно из неравенств является строгим. Эти отно-

шения порождают, согласно выражению (8), соответствующие отношения  $R_E, I_E$  и  $P_E$  на множестве вариантов  $V$ .

Следующие равносильные утверждения задают простые правила проверки справедливости выполнения соответствующих соотношений (см. выражение (3)):

$$yR^E z \Leftrightarrow y_{(1)} \leq z_{(1)}, y_{(2)} \leq z_{(2)}, \dots, y_{(n)} \leq z_{(n)};$$

$$yR^E z \Leftrightarrow y_{[1]} \leq z_{[1]}, y_{[2]} \leq z_{[2]}, \dots, y_{[n]} \leq z_{[n]}. \quad (11)$$

И здесь также справедливы замечания, аналогичные приведенным сразу после выражения (10).

Отношения  $P^E$  и  $P_E$  порождают соответствующие множества  $Y^E$  и  $V_E$  недоминируемых соответственно по  $P^E$  и  $P_E$  векторных оценок и вариантов. Определения отношений  $R_E, P_E, I_E$  и множества  $V_E$  корректны, даже если общая шкала критериев всего лишь порядковая.

Заданная на  $Z$  симметрическая функция  $\psi(y)$  называется возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей) по  $P^E$ , если из  $yP^E z$  следует  $\psi(y) > \psi(z)$  (соответственно  $\psi(y) \geq \psi(z)$ ,  $\psi(y) < \psi(z)$ ,  $\psi(y) \leq \psi(z)$ ). Примером такой убывающей по  $P^E$

функции является  $\psi_\Sigma(y) = \sum_{i=1}^n y_i$ , а невозрастающей — функция  $\psi^\star(y|a) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{i \in N} \{y_{\pi(i)} - a_i\}$ ,

где  $a$  — произвольный вектор из  $Z$ .

Пусть  $y^*$  — точка минимума функции  $\psi(y)$ , неубывающей по  $P^E$  на  $Z$ . Для того, чтобы точка  $y^*$  была недоминируемой по  $P^E$ , достаточно, чтобы функция  $\psi$  была убывающей по  $P^E$  или чтобы эта точка была единственной (с точностью до эквивалентности  $I^E$ ) точкой минимума указанной функции. Если  $y^*$  — недоминируемая по  $P^E$  точка, то она является единственной (с точностью до эквивалентности  $I^E$ ) точкой минимума функции  $\psi^\star(y|y^*)$  на  $Y$ , причем этот минимум равен нулю. Следовательно, все недоминируемые по  $P^E$  векторные оценки будут найдены в результате решения параметрической задачи минимизации функции  $\psi^\star(y|a)$  для  $a \in Y$  (но при этом могут быть выделены и доминируемые).

Выделить оптимальные варианты среди недоминируемых по  $P_E$  позволяет дополнительная информация о предпочтениях, касающаяся, в частности, возможности взаимной компенсации значений критериев. Если увеличение больших значений одних критериев не компенсируется уменьшени-

<sup>2</sup> Это следует помнить при обращении к указанной в статье литературе, так как в ней предполагается, что критерии желательно максимизировать.



ем меньших значений других, то предпочтения на множестве  $Z$  описываются лексикографическим отношением  $R^{EL}$ :

$$yR^{EL}z \Leftrightarrow (y_{[1]} < z_{[1]}) \vee (y_{[1]} = z_{[1]}, y_{[2]} < z_{[2]}) \vee \dots \vee (y_{[i]} = z_{[i]}, i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

причем  $yP^{EL}z$  верно, если последние  $n$  равенств в (12) не выполнены. Отношение  $R^{EL}$  — полный квазипорядок. Векторная оценка  $y^* \in Y$  оптимальна по  $R^{EL}$ , если  $y^*R^E u$  для любой  $u \in Y$ . Отношение  $R^{EL}$  порождает на  $V$  отношение  $R_{EL}$ . Все оптимальные векторные оценки (варианты) эквивалентны по  $I^E$  (соответственно по  $I_E$ ) и недоминируемы по  $P^E$  (по  $P_E$ ).

Пусть, наконец, стало известно, что общая шкала равноважных критериев является шкалой первой порядковой метрики [9]. Это означает, что если в произвольной векторной оценке  $y$ , в которой  $y_i > y_j$ , заменить  $y_i$  на  $y_i - \delta$ , а  $y_j$  — на  $y_j + \delta$ , где  $\delta$  — положительное число такое, что  $y_i - \delta \geq y_j + \delta$ , то полученная таким образом векторная оценка  $z$  будет предпочтительнее, чем исходная  $y$ . Отношение нестрогого предпочтения  $R^{EA}$ , порождаемое такой информацией на  $Z$ , задается так [10, 11]:

$$yR^{EA}z \Leftrightarrow (y_{[1]} \leq z_{[1]}, y_{[1]} + y_{[2]} \leq z_{[1]} + z_{[2]}, \dots, y_{[1]} + y_{[2]} + \dots + y_{[n]} \leq z_{[1]} + z_{[2]} + \dots + z_{[n]}). \quad (13)$$

И здесь справедливы замечания, аналогичные приведенным сразу после выражения (10).

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН КАК НЕДОМИНИРУЕМЫХ ТОЧЕК

Рассмотрим множество данных  $X$  (см. (1)). Пусть  $x$  — произвольное фиксированное число — точка на числовой прямой  $\text{Re}$ . Удаленность ее от отдельной точки  $x_i$  из  $X$  можно оценить расстоянием  $y_i = |x - x_i|$ . Тогда удаленность  $x$  от совокупности всех точек из  $X$  характеризуется вектором  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , составленным из таких расстояний. Его можно считать значением векторного критерия  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ , где  $f_i(x) = |x - x_i|$ . Областью значений  $Z$  этого векторного критерия является положительный квадрант  $\text{Re}_+^n = [0, +\infty)^n$  — множество векторов с неотрицательными компонентами, а множество значений  $Y = f(X) \subset Z$  может иметь довольно сложную конфигурацию уже при  $n = 3$ . Для случаев  $n = 2$  и  $n = 3$  оно изображено на рис. 1 и 2.

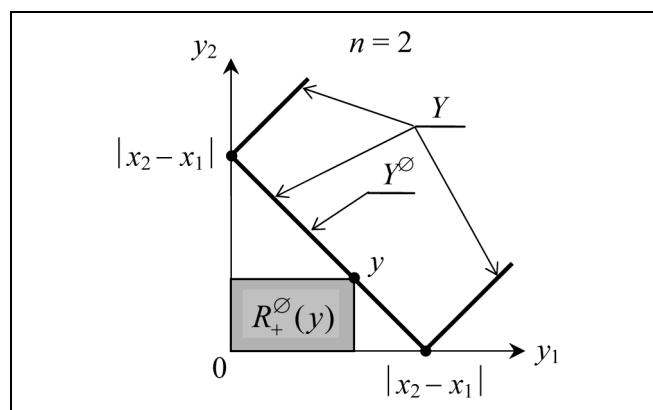


Рис. 1. График множества векторных оценок  $Y$

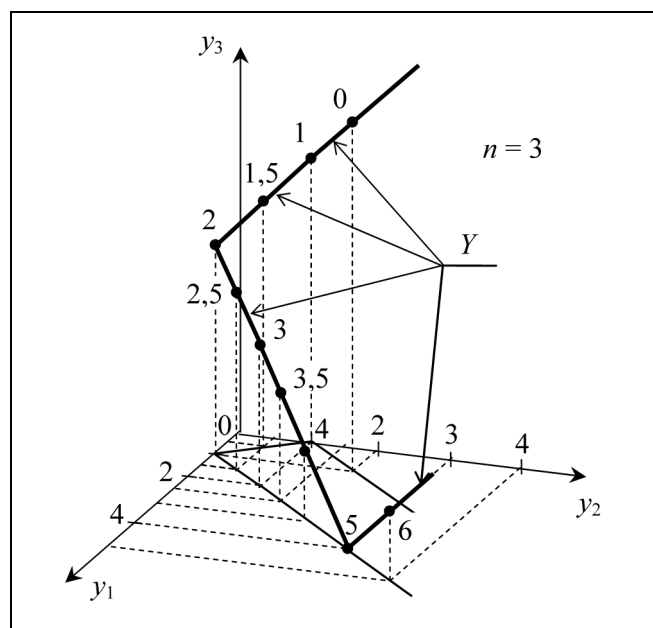


Рис. 2. График множества векторных оценок  $Y(X = \{1, 2, 5\})$ ; числа у точек ломаной  $Y$  — значения  $x$ ; на плоскости  $y_1Oy_2$  — проекция  $Y$

По терминологии дифференциальной геометрии [12] непрерывное отображение  $f: \text{Re} \rightarrow \text{Re}_+^n$  — это параметрическая кривая (параметр  $x$ ), и притом простая (так как отображение взаимно-однозначное). Проще говоря,  $Y = f(X)$  — (непрерывная) кривая в многомерном пространстве (без самопересечений).

Пусть на множестве  $Z$  задано отношение нестрогого предпочтения — частичный квазипорядок  $R^\Gamma$ , где  $\Gamma$  — информация о предпочтениях ЛПР, касающаяся удаленности: если верно  $xP_\Gamma x'$ , то точка  $x$  ближе к совокупности точек  $X$ , чем  $x'$ . Следо-

вательно, на роль наиболее близких к  $X$  и представляющих все множество  $X$  могут претендовать лишь те точки, которые недоминируемы по  $P_\Gamma$ . Если множество таких точек  $G^\Gamma(X)$  внешне устойчиво, то все они будут именоваться ПН-средними (средними по Подиновскому — Нелюбину), а более конкретно (для рассматриваемой информации  $\Gamma$ ) и кратко — средними по  $P_\Gamma$ .

**Утверждение 1.** Средними по  $P_\varnothing$  являются все точки отрезка от  $x_{(1)} = \min_{i \in N} x_i$  до  $x_{(n)} = \max_{i \in N} x_i$ , т. е.  $G^\varnothing(X) = \bar{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ . Это множество внешне устойчиво. ♦

Доказательство этого и следующих утверждений вынесено в Приложение.

Таким образом, понятие средних по  $P_\varnothing$  оказывается эквивалентным понятию средних по Коши.

На рис. 1 множество  $Y^\varnothing$  векторных оценок средних по  $P_\varnothing$  — это один отрезок. На рис. 2 множество  $Y^\varnothing$  состоит из двух звеньев ломаной — от  $(0, 1, 4)$  до  $(1, 0, 3)$  и от  $(1, 0, 3)$  до  $(4, 3, 0)$ .

Множество  $G^\varnothing(X)$  имеет очень простую структуру и задается явно. Однако для других отношений  $P_\Gamma$  сложность конфигурации множества  $Y^\Gamma$  приводит к сложности конфигурации и структуры множества ПН-средних  $G^\Gamma(X)$ , что существенно затрудняет его построение (см. далее).

Отметим, что если  $\varphi$  — возрастающая на  $\text{Re}_+$  функция, то замена исходных критериев  $f_i(x) = |x - x_i|$  на критерии  $\varphi(f_i(x))$  не изменяет множество  $G^\varnothing(X)$ . Например, можно перейти к «гладким» критериям  $f_i(x) = (x - x_i)^2$ .

#### 4. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ

Далее будем полагать, что все критерии имеют равную важность (информация  $E$ ). В этом случае удаленность точки  $x$  от множества  $X$  оценивается отношением  $R_E$  на  $\text{Re}^n$ , которое определяется согласно соотношениям (11) каждым из двух равносильных правил:

$$\begin{aligned} xR_E x' &\Leftrightarrow f_{(1)}(x) \leq f_{(1)}(x'), \\ f_{(2)}(x) &\leq f_{(2)}(x'), \dots, f_{(n)}(x) \leq f_{(n)}(x'); \\ xR_E x' &\Leftrightarrow f_{[1]}(x) \leq f_{[1]}(x'), \\ f_{[2]}(x) &\leq f_{[2]}(x'), \dots, f_{[n]}(x) \leq f_{[n]}(x'), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $f_i(x) = |x - x_i|$ . ПН-средними (по  $R_E$ ), составляющими  $G^E(X)$ , здесь являются недоминируемые по  $P_E$  точки числовой прямой.

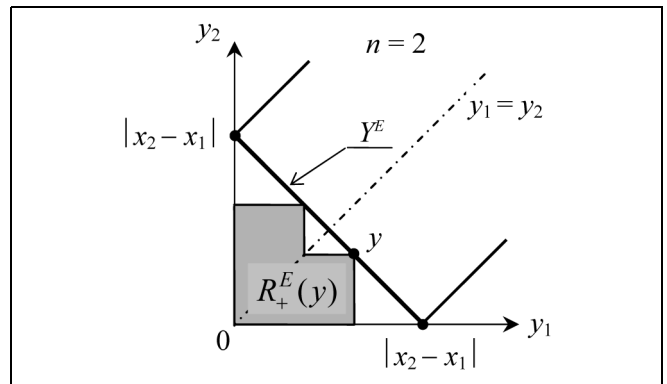


Рис. 3. График множества векторных оценок  $Y^E$

**Утверждение 2.** Множество  $G^E(X) \subseteq G^\varnothing(X) = \bar{X}$  и внешне устойчиво. ♦

Отметим, что если  $\varphi$  — возрастающая на  $\text{Re}_+$  функция, то замена исходных критериев  $f_i(x)$  на критерии  $\varphi(f_i(x))$  не изменяет отношение  $R_E$  и множество  $G^E(X)$ .

**Пример 1.** Нетрудно понять, что при  $n = 2$  любые две различные точки из  $\bar{X}$  несравнимы по отношению  $P_E$  и поэтому имеет место равенство  $G^E(X) = \bar{X}$ . Заметим, что верхние срезы  $\text{Re}_+^n$  отношением  $P^E$  не выпуклы (рис. 3).

**Пример 2.** Пусть  $n = 3$  и  $X = \{1, 2, 5\}$ . Здесь  $G^E(X) = [1, 5; 3]$ . На рис. 2 множество  $Y^E$  состоит из двух звеньев ломаной — от  $(1/2, 1/2, 3)$  до  $(1, 0, 3)$  и от  $(1, 0, 3)$  до  $(2, 1, 2)$ . ♦

В этих двух примерах структура множества  $G^E(X)$  проста — это один отрезок. Однако при больших значениях  $n$  это множество может представлять собой объединение нескольких промежутков, границы которых могут им не принадлежать! Это — следствие невыпуклости и замкнутости верхних срезов  $\text{Re}_+^n$  отношением  $P^E$ .

**Пример 3.** При  $n = 6$  имеем:

$$\begin{aligned} G^E(\{10, 11, 15, 61, 107, 110\}) &= \\ &= [10, 5; 83] \cup (83, 5; 84, 5) \cup (106, 5; 109); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^E(\{10, 11, 40, 55, 70, 110\}) &= \\ &= [10, 5; 18] \cup (18; 67, 5) \cup (68; 75); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^E(\{10, 57, 61, 64, 109, 110\}) &= \\ &= (56, 5; 57, 5) \cup (58, 5; 88, 5) \cup (108; 109, 5]. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Примеры 2 и 3 иллюстрируют и следующее

**Утверждение 3.** Если  $x_{(i)}$  и  $x_{(i+1)}$  — два неравных смежных члена вариационного ряда с минимальным расстоянием  $x_{(i)} - x_{(i+1)}$  между ними и такой интервал единствен, то их середина — точка  $x^c = 1/2(x_{(i)} + x_{(i+1)})$  входит в состав  $G^E(X)$ ; при этом если  $x_{(i)}$  есть  $x_{(1)}$  (соответственно  $x_{(i+1)}$  есть  $x_{(n)}$ ),

то  $x^c$  — это левая (соответственная правая) точка множества  $G^E(X)$ . ♦

Не при всяком значении параметра  $s$  средняя степенная  $g^s(X)$  (см. формулу (5)) является и средней по  $P_E$ , если  $x_{(1)} \neq x_{(n)}$  и  $(x_{(1)}, x_{(n)}) \not\subset G^E(X)$ , ибо продолженная по непрерывности функция  $g^s(X)$  при возрастании  $s$  на  $\text{Re}$  пробегает все значения из интервала  $(x_{(1)}, x_{(n)})$  (см. § 2). Однако справедливо

**Утверждение 4.** Средняя арифметическая является и средней по  $P_E$ , т. е.  $g^1(X) \in G^E(X)$ . ♦

**Пример 4.** Согласно примеру 3 для  $X = \{10, 57, 61, 64, 109, 110\}$  имеем:  $G^E(X) = (56,5; 57,5) \cup (58,5; 88,5) \cup (108; 109,5]$ ; здесь средняя геометрическая  $g^0(X) = 54,66 \notin G^E(X)$  и средняя гармоническая  $g^{-1}(X) = 35,75 \notin G^E(X)$ , но, конечно,  $g^1(X) = 68,5 \in G^E(X)$ . В примере 2 для  $X = \{1, 2, 5\}$  имеем  $G^E(X) = [1,5; 3]$ ; здесь средняя квадратическая  $g^2(X) = 3,162 \notin G^E(X)$ , но  $g^1(X) = 2,67 \in G^E(X)$ .

**Утверждение 5.** Медиана является и средней по  $P_E$ , т. е. при нечетном  $n$ , когда медиана однозначна, верно  $\mu(X) = x_{(\frac{n+1}{2})} \in G^E(X)$ , а при нечетном  $n$ , когда медиана многозначна, верно  $\mu(X) = [x_{(\frac{n}{2})}, x_{(\frac{n}{2}+1)}] \subseteq G^E(X)$ . ♦

Это утверждение иллюстрируют примеры 2 и 3.

## 5. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ И ОТСУТСТВИИ КОМПЕНСАЦИИ УДАЛЕННОСТЕЙ

Пусть увеличение удаленности точки  $x$  от одних точек  $x_i$  не компенсируется уменьшением ее удаленности от других. В этом случае для определения ПН-средних можно воспользоваться отношением  $R_{EL}$ , задаваемым на  $X$  правилом согласно отношению (12):

$$xR_{EL}x' \Leftrightarrow [f_{[1]}(x) < f_{[1]}(x')] \vee [f_{[1]}(x) = f_{[1]}(x'), \\ f_{[2]}(x) < f_{[2]}(x')] \vee \dots \vee [f_{[i]}(x) = f_{[i]}(x'), \\ i = 1, 2, \dots, n]. \quad (15)$$

Поскольку расстояние от середины отрезка  $\bar{X}$  — точки  $x^c = 1/2(x_{[1]} + x_{[n]})$  — до каждой из двух крайних точек множества  $X$  равно  $d = 1/2(x_{[1]} - x_{[n]})$ , а для любой другой точки  $x$  расстояние до одной из крайних точек больше, чем  $d$ , то точка  $x^c$  является оптимальной по  $R_E$ , т. е. верно  $x^c R_{EL} x$ . Следовательно,  $x^c$  является однозначной средней по  $R_{EL}$  и  $G^{EL}(X) = \{x^c\}$ . Так как  $P_{EL} \supset P_E$ , то  $x^c \in G^E(X)$ , т. е. в число средних по  $R_E$  всегда входит середина отрезка  $\bar{X}$ .

## 6. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РАВНОВАЖНЫХ КРИТЕРИЯХ СО ШКАЛОЙ ПЕРВОЙ ПОРЯДКОВОЙ МЕТРИКИ

Будем рассматривать случай, когда векторная оценка  $z$ , полученная из произвольной векторной оценки  $y$ , в которой  $y_i > y_j$ , заменой  $y_i$  на  $y_i - \delta$  и  $y_j$  на  $y_j + \delta$ , где  $\delta$  — положительное число такое, что  $y_i - \delta \geq y_j + \delta$ , будет предпочтительнее, чем исходная  $y$  в том смысле, что она, как более «сконцентрированная», считается более подходящей для роли средней (такая информация будет обозначаться буквой  $\Delta$ ). Это означает (см. § 2), что общая шкала равноважных критериев является шкалой первой порядковой метрики. Отношение нестрогого предпочтения  $R_{E\Delta}$ , порождаемое совокупной информацией  $E$  и  $\Delta$  на  $\text{Re}^n$ , задается, согласно отношению (13), таким решающим правилом:

$$xR_{E\Delta}x' \Leftrightarrow [f_{[1]}(x) \leq f_{[1]}(x'), f_{[1]}(x) + f_{[2]}(x) \leq f_{[1]}(x') + \\ + f_{[2]}(x'), \dots, f_{[1]}(x) + f_{[2]}(x) + \dots + f_{[n]}(x) \leq f_{[1]}(x') + \\ + f_{[2]}(x') + \dots + f_{[n]}(x')]. \quad (16)$$

ПН-средними здесь являются точки, недоминируемые по  $P_{E\Delta}$ . Так как  $P_{E\Delta} \supset P_E$ , то  $G^E(X) \supseteq G^{E\Delta}(X)$ . Отметим, что верхние срезы  $\text{Re}_+^n$  отношением  $P^{E\Delta}$  — выпуклые множества (рис. 4).

Так как  $P_{EL} \supset P_{E\Delta}$ , то  $G^E(X) \supseteq G^{EL}(X) = \{x^c\}$ .

**Утверждение 6.** Средняя арифметическая является и средней по  $P_{E\Delta}$ , т. е.  $g^1(X) \in G^{E\Delta}(X)$ .

**Утверждение 7.** При нечетном  $n$ , когда медиана однозначна, она является и средней по  $P_{E\Delta}$ , т. е. верно  $\mu(X) \in G^{E\Delta}(X)$ ; при четном  $n$ , когда медиана многозначна, верно лишь  $\mu(X) \cap G^{E\Delta}(X) \neq \emptyset$ .

**Пример 5.** При  $n = 5$  для  $X = \{1, 2, 3, 5, 11\}$  имеем  $G^{E\Delta}(X) = [3; 6]$ ,  $\mu(X) = 3$ ,  $g^1(X) = 4,4$ . При  $n = 4$  для

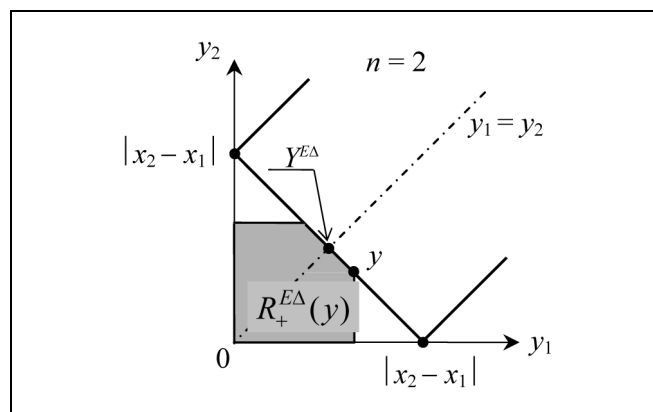


Рис. 4. График множества векторных оценок  $Y^{E\Delta}$

$X = \{10, 11, 12, 110\}$  имеем  $G^{EA}(X) = [11, 5; 60]$ ,  $\mu(X) = [11; 12]$ ,  $g^1(X) = 35,75$ , а для  $X = \{10, 11, 20, 110\}$  имеем  $G^{EA}(X) = [15, 5; 60]$ ,  $\mu(X) = [11; 20]$ ,  $g^1(X) = 35,75$ . ♦

Введем в рассмотрение функции

$$\sigma_k(x) = \sum_{i=1}^k f_{[i]}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

**Утверждение 8.** Функции (17) являются выпуклыми кусочно-линейными, их графики — ломаные линии. ♦

С помощью функций (17) решающее правило (16) можно переписать в таком виде:

$$xR_{EA}x' \Leftrightarrow \sigma_k(x) \leq \sigma_k(x'), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Заметим, что, согласно решающему правилу (18), отношение  $R_{EA}$  можно считать отношением Парето (отношением покомпонентного нестрогого доминирования) по векторному критерию  $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_n(x))$ , и множество  $G^{EA}(X)$  считать множеством Парето для векторного критерия  $\sigma(x)$ .

Обозначим области минимальных значений выпуклых кусочно-линейных функций  $\sigma_k(x)$  через  $M_k = \{x: \sigma_k(x) = \min \sigma_k(x)\}$ . Эти области являются отрезками  $M_k = [a_k, b_k]$  (но некоторые отрезки стягиваются в одну точку). Пусть  $\alpha = \min_k b_k$ ,  $\beta = \max_k a_k$ . Так как минимум функции  $\sigma_1(x) = f_{[1]}(x)$  всегда достигается только в середине отрезка  $\bar{X}$  — точке  $x^c = 1/2(x_{(1)} + x_{(n)})$ , то  $M_1 = \{x^c\}$ . Поэтому верны соотношения:  $\alpha = \min_k b_k \leq b_1 = x^c = a_1 \leq \max_k a_k = \beta$ , так что  $\alpha \leq \beta$ .

Следующее утверждение показывает, что структура множества  $G^{EA}(X)$  совсем простая.

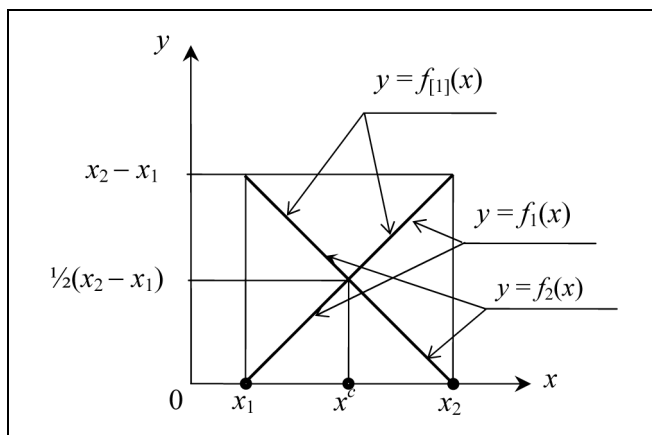


Рис. 5. Графики функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  на  $\bar{X}$

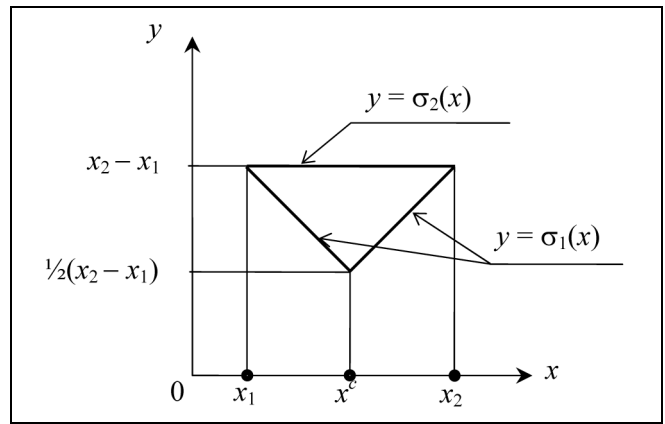


Рис. 6. Графики функций  $y = \sigma_1(x)$  и  $y = \sigma_2(x)$  на  $\bar{X}$

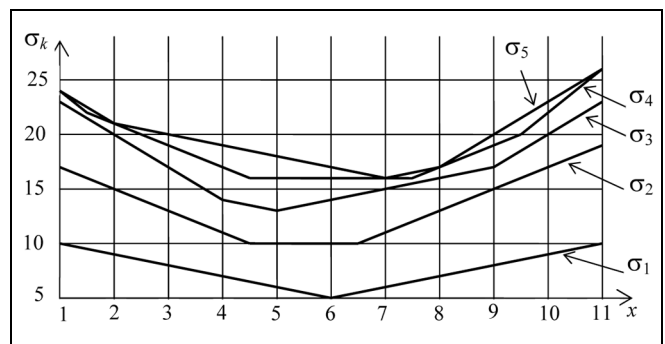


Рис. 7. Графики функций  $\sigma_k(x)$

**Утверждение 9.** Множество  $G^{EA}(X)$  внешне устойчиво и является отрезком  $[\alpha, \beta]$ .

**Пример 6.** При  $n = 2$  множество  $G^{EA}(X)$  состоит из одной точки  $x^c$  (см. рис. 4—6).

**Пример 7.** При  $n = 5$  для  $X = \{1, 2, 7, 8, 11\}$  графики функций  $y = \sigma_k(x)$  представлены на рис. 7. Он показывает, что здесь  $M_1 = \{6\}$ ,  $M_2 = [4, 5; 6, 5]$ ,  $M_3 = \{5\}$ ,  $M_4 = [4, 5; 7, 5]$ ,  $M_5 = \{7\}$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 7$ . Поэтому  $G^{EA}(X) = [5; 7]$ .

**Пример 8.** При  $n = 3$  для  $X = \{1, 2, 5\}$  имеем:  $G^{EA}(X) = [2; 3] \subset G^E(X) = [1, 5; 3]$ .

При  $n = 5$  для  $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$  имеем:  $G^{EA}(X) = [5; 6] \subset G^E(X) = [1, 5; 7, 5] \cup (8, 5; 9, 5)$ .

При  $n = 6$  для  $X = \{10, 11, 15, 61, 107, 110\}$  имеем:

$$G^{EA}(X) = [38; 60] \subset G^E(X) = [10, 5; 83] \cup (83, 5; 84, 5) \cup (106, 5; 109).$$

## 7. О ПОСТРОЕНИИ МНОЖЕСТВ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Для построения множества  $G^E(X)$  можно воспользоваться известными в теории многокритериальной оптимизации подходящими методами



построения множеств недоминируемых вариантов [6, 8], основанных на применении семейств функций, возрастающих (убывающих) или хотя бы не убывающих (не возрастающих) по  $P_E$ . Например, можно решать параметрическую задачу минимизации на  $X$  функции одной переменной  $\psi^*(f(x)|c) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{i \in N} \{f_{\pi(i)}(x) - c_i\}$ , варьируя векторный параметр  $c \in f(\bar{X})$ . Однако уже при «не очень большом» количестве точек  $n$  число  $n!$  членов в этой функции, среди которых ищется максимум, становится слишком большим.

Учитывая одномерность множества  $X$ , можно пойти другим путем: построить равномерную сетку с «небольшим» шагом  $h$ , покрывающую множество  $\bar{X}$ , и искать недоминируемые по  $P_E$  точки среди узлов этой сетки прямым перебором (с помощью известных приемов сокращения объема перебора [13]). Шаг сетки зависит от требуемой точности расчетов и может уменьшаться в процессе их проведения при решении задачи построения  $G^E(X)$ . Именно при помощи такого способа находились множества  $G^E(X)$  в примерах 2 и 3.

**Пример 9.** Покажем вкратце, как можно решить задачу построения  $G^E(X)$  для  $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$ . Расчеты на компьютере с постепенным уменьшением шага сетки дали следующие результаты построения множества недоминируемых точек:

Шаг  $h = 1$ :  $[2; 7] \cup [9; 9]$ .

Шаг  $h = 0,1$ :  $[1,5; 7,4] \cup [8,6; 9,4]$ .

Шаг  $h = 0,01$ :  $[1,50; 7,49] \cup [8,51; 9,49]$ .

Шаг  $0,001$ :  $[1,500; 7,499] \cup [8,501; 9,499]$ .

Шаг  $0,0001$ :  $[1,5000; 7,4999] \cup [8,5001; 9,4999]$ .

При переборе с шагом  $0,01$  было выяснено, что точка  $4,5$  доминирует над точками  $7,5$  и  $8,5$ , а точка  $2,5$  доминирует над точкой  $9,5$ . Поэтому, с учетом утверждения 2, принято  $G^E(X) = [1,5; 7,5) \cup (8,5; 9,5)$ . ♦

Отметим еще следующее утверждение, которое может оказаться полезным при построении  $G^E(X)$ .

**Утверждение 10.** Если все исходные точки множества расположены в узлах равномерной сетки, то для проверки принадлежности к средним по  $R_E$  любого узла этой сетки достаточно сравнить его векторную оценку с векторными оценками остальных узлов этой сетки. ♦

Заметим, что такую равномерную сетку всегда можно построить, если координаты всех точек множества — рациональные числа (а на практике — целые числа или десятичные дроби).

Для нахождения множества  $G^{E\Delta}(X)$  можно воспользоваться аналогом описанного выше метода, основанного на применении равномерной сетки: построить при ее помощи графики функций  $y = \sigma_k(x)$ , а затем выделить отрезок  $[\alpha, \beta]$  (см. утверждение 9).

## 8. О СРАВНЕНИИ МНОЖЕСТВЕННЫХ СРЕДНИХ ПО ВЕЛИЧИНЕ

Практически важно умение сравнивать средние, полученные при измерениях по одной и той же шкале, по величине. Для однозначных средних такой вопрос не стоит, так как сравнение двух средних сводится просто к сопоставлению двух чисел. Многозначные средние в статистике обычно «уточняют», заменяя одним числом (пример — медиана для нечетного числа  $n$ ).

При сложной структуре множеств средних  $G^\Gamma(X)$  и  $G^\Gamma(X'')$  для решения вопроса их сравнения можно воспользоваться идеями вероятностного, или стохастического доминирования [14]. Будем полагать, что все точки множества ПН-средних одинаково значимы. Длиной  $D^\Gamma(X)$  множества  $G^\Gamma(X)$ , состоящего из  $l$  непересекающихся непустых интервалов с концами  $x^1, x^2, x^3, x^4, \dots, x^{2l-1}, x^{2l}$  будем называть сумму длин всех этих интервалов:

$$D^\Gamma(X) = \sum_{k=1}^l |x^{2k} - x^{2k-1}|. \text{ Длиной } D_x^\Gamma(X) \text{ части этого}$$

множества, лежащей правее точки  $x$ , будем называть сумму составляющих его (части) одного интервала и всех других интервалов, лежащих правее нее. Относительная длина  $d_x^\Gamma(X)$  получается нормировкой:  $d_x^\Gamma(X) = D_x^\Gamma(X) : D^\Gamma(X)$ .

Будем считать, что средняя  $G^\Gamma(X')$  не меньше средней  $G^\Gamma(X'')$  и писать  $G^\Gamma(X') \succeq G^\Gamma(X'')$ , если  $d_x^\Gamma(X') \geq d_x^\Gamma(X'')$  при каждом  $x \in \text{Re}$ . Если при этом неравенство будет строгим хотя бы при одном  $x \in \text{Re}$ , то первая средняя больше второй. Введенное указанным образом отношение «быть не меньше» является частичным квазипорядком, а отношение «быть больше» обозначается  $>$  и является строгим частичным порядком (оно иррефлексивно и транзитивно). Последнее отношение является, по существу, отношением вероятностного доминирования, или стохастического доминирования первого порядка<sup>3</sup> [13].

**Пример 10.** Пусть  $G^E(X) = [1; 2) \cup (5; 8)$ ,  $G^E(X'') = [1,5; 4,5] \cup (8; 9]$ . Графики функций  $d_x^E(X)$  и  $d_x^E(X'')$  представлены на рис. 8. Поскольку ни один из этих графиков не лежит под другим, то рассматриваемые средние не сравнимы по  $\succeq$ , т. е. это отношение не позволяет

<sup>3</sup> Справедливо равенство  $d_x^\Gamma(X) = 1 - F(x)$ , где  $F(x)$  — функция распределения вероятностей случайной величины с постоянной плотностью вероятности  $1/D^\Gamma(X)$  на  $G^\Gamma(X)$ .



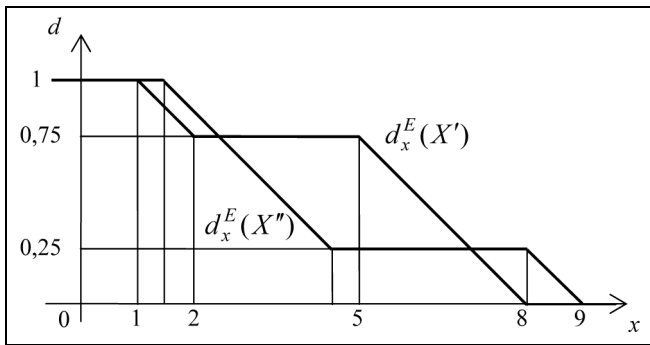


Рис. 8. Графики функций  $d_x^E(X')$  и  $d_x^E(X'')$

утверждать, что одна из средних больше другой или же что они равны. ♦

Отношение  $\succeq$  является слабым в том смысле, что редко позволяет сравнить по величине множественные средние. Воспользовавшись идеями стохастического доминирования второго порядка, отношение  $\succeq$  можно расширить, но практически это не очень эффективно.

Можно, разумеется, «сжать» множественные средние до однозначных. Но при этом будет потеряно много информации, т. е. результаты сравнения будут весьма грубыми. Например, среднюю  $G^\Gamma(X)$ , состоящую из  $l$  непересекающихся непустых интервалов с концами  $x^1, x^2, x^3, x^4, \dots, x^{2l-1}, x^{2l}$ , можно представить одной точкой — центром тяжести этих интервалов  $x^\Gamma(X)$ .

**Пример 11.** Для средних из примера 8 имеем:

$$x^E(X') = (1,5 \cdot 1 + 6,5 \cdot 3)/4 = 4,875;$$

$$x^E(X'') = (3 \cdot 3 + 8,5 \cdot 1)/4 = 4,375.$$

Поскольку  $4,875 > 4,375$ , то, согласно рассматриваемому подходу, следует принять, что средняя  $G^E(X')$  больше, чем средняя  $G^E(X'')$ . ♦

Полезно иметь в виду, что если  $G^\Gamma(X') > G^\Gamma(X'')$ , то  $x^\Gamma(X') > x^\Gamma(X'')$  (см. [13]).

Сравнивать средние  $G^{E\Delta}(X')$  и  $G^{E\Delta}(X'')$  проще, чем средние  $G^E(X')$  и  $G^E(X'')$ , так как первые всегда являются отрезками  $[\alpha', \beta']$  и  $[\alpha'', \beta'']$  соответственно. Поскольку график функции  $d_x^{E\Delta}(X)$  — ломаная с одним участком  $[\alpha, \beta]$  убывания от 1 до 0, то  $G^{E\Delta}(X') \subseteq G^{E\Delta}(X'')$  верно тогда и только тогда, когда  $\alpha' \geq \alpha''$  и  $\beta' \geq \beta''$ .

## 9. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Выше рассматривалась проблема определения средних для точек на прямой. Однако предложенный подход к определению ПН-средних очевид-

ным образом распространяется и на более общие случаи.

Пусть, например,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — точки в  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $E^m$ . Тогда близость точки  $x$  к совокупности указанных  $n$  точек можно характеризовать значением векторного критерия  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ , где  $f_i(x) = d(x, x_i)$  — расстояние между точками  $x$  и  $x_i$ . А далее можно формулировать определения ПН-средних вполне аналогично предложенным выше для одномерного случая. Однако свойства средних и методы построения множеств средних здесь оказываются более сложными. Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь, что средние по  $P_\varnothing$  образуют выпуклую оболочку заданных  $n$  точек.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные новые понятия средних основаны на единообразном подходе, опирающемся на идеи многокритериальной оптимизации, и не предполагают наличие у искомым средних некоторых априорных свойств (что типично при классическом подходе к выбору средних в статистике и иногда может затруднять выбор средней в конкретной задаче [3]), но используют сведения о предпочтительности тех или иных мер удаленности между векторами — значениями векторного критерия, состоящего из расстояний от текущей точки до каждой из заданных.

Оказалось, что такие средние являются множественными, причем множества некоторых средних могут иметь достаточно сложную структуру. Это затрудняет построение множеств средних для выборок большого размера (при большом числе  $n$ ), но при современном уровне развития вычислительной техники и информационных технологий является эффективно преодолимым затруднением.

Предложенные средние представляются полезным дополнением (но, разумеется, не альтернативой) к арсеналу известных в статистике средних величин, но могут использоваться и самостоятельно.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство утверждения 1.** Рассмотрим две точки  $x'$  и  $x''$  из отрезка  $\bar{X}$ . Понятно, что найдутся точки  $x_{[l]}$  и  $x_{[l]}$  такие, что одна из них будет ближе к точке  $x'$ , а другая — к точке  $x''$ . Следовательно, неверно ни  $x'P^\varnothing x''$ , ни  $x''P^\varnothing x'$ . Пусть теперь  $x < x_{[1]}$ . Тогда расстояние от точки  $x$  до любой точки  $x_i$  будет больше, чем от  $x_{[1]}$  до  $x_i$ , и



поэтому  $x_{[1]} P^\varnothing x$ . Аналогичное рассуждение показывает, что если  $x > x_{[n]}$ , то  $x_{[n]} P^\varnothing x$ . Таким образом, выяснено, что множество  $G^\Gamma(X) = \bar{X}$  и внешне устойчиво.

Доказательство утверждения 2. Поскольку  $P_\varnothing \subset P_E$ , то  $G^E(X) \subseteq G^\varnothing(X) = \bar{X}$ . Критерии  $f(x)$  — непрерывные функции, а множество  $\bar{X}$  замкнуто и ограничено. Поэтому множество  $G^E(X)$  непусто и внешне устойчиво [8].

Доказательство утверждения 3. Для точки  $x^c$  значения первых двух критериев  $f_{(1)}(x^c)$  и  $f_{(2)}(x^c)$  являются минимально возможными среди  $f_{(1)}(x)$  и  $f_{(2)}(x)$  для всех  $x \in \bar{X}$ : если для некоторого  $x'$  окажется, что  $f_{(1)}(x) < f_{(1)}(x')$  или же  $f_{(2)}(x) < f_{(2)}(x')$ , то тогда будет соответственно  $f_{(2)}(x) > f_{(2)}(x')$  или же  $f_{(1)}(x) > f_{(1)}(x')$ . Поэтому если рассматриваемый интервал минимальной длины единствен, то  $x^c \in G^E(X)$ . Предположим, что  $x_{(i)} = x_{(1)}$ , так что  $x_{(i+1)} = x_{(2)}$ . Тогда точка  $x_{(2)} + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon < \delta/2$  будет доминировать по  $P_E$  над точкой  $x_{(2)} - \varepsilon$ , так как все остальные точки из  $X$  лежат правее, а потому и дальше от  $x_{(2)}$ . Поэтому точка  $x^c$  будет левой границей множества  $G^E(X)$ . Аналогичные рассуждения показывают, что если  $x_{(i)} = x_{(n-1)}$  и  $x_{(i+1)} = x_{(n)}$ , то точка  $x^c$  будет правой границей множества  $G^E(X)$ .

Доказательство утверждения 4. Функция  $\psi(y) = \sum_{i=1}^n y_i$  является симметрической и возрастает по каждой переменной  $y_i$  на  $\text{Re}_+^n$ , а потому убывает по  $P^E$ .

Поэтому точка минимума на  $\bar{X}$  непрерывной функции  $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ , где  $f_i(x) = |x - x_i|^2 = (x - x_i)^2$ , является недоминируемой по  $P_E$ . Но эта функция, согласно известному в математической статистике свойству дисперсии [3], имеет единственную точку минимума  $x = g^1(X)$ .

Доказательство утверждения 5. Функция  $\psi(y) = \sum_{i=1}^n y_i$  является симметрической и возрастает по каждой переменной  $y_i$  на  $\text{Re}_+^n$ , а потому убывает по  $P^E$ .

Поэтому точка минимума на  $\bar{X}$  непрерывной функции  $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ , где  $f_i(x) = |x - x_i|$ , является недоминируемой по  $P_E$ . Но для этой функции, как известно из математической статистики [3], точки минимума составляют медиану  $\mu(X)$ .

Доказательство утверждения 6. Функция  $\psi(y) = \sum_{i=1}^n y_i$  является суммой одинаковых возрастающих (не строго) выпуклых функций и потому оказывается невозрастающей по  $P^{E\Delta}$ . Поэтому единственная

точка минимума  $x = g^1(X)$  на  $\bar{X}$  непрерывной функции  $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ , где  $f_i(x) = (x - x_i)^2$ , является недоминируемой по  $P_{E\Delta}$ .

Доказательство утверждения 7. При доказательстве предыдущего утверждения было выяснено, что функция  $\psi(y) = \sum_{i=1}^n y_i$  является невозрастающей по  $P^{E\Delta}$ .

Поэтому, по крайней мере одна точка минимума на  $\bar{X}$  непрерывной функции  $\psi(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ , где  $f_i(x) = |x - x_i|$ ,

среди всех ее точек минимума, которые образуют замкнутое и ограниченное множество — отрезок  $\mu(X)$ , является недоминируемой по  $P_{E\Delta}$ . Например, недоминируемой по  $P_{E\Delta}$  будет точка минимума на  $\mu(X)$  функции  $\psi^2(f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x)$ .

Доказательство утверждения 8. Заметим сначала, что для произвольных значений  $x \in \text{Re}$  и  $k \in \{1, \dots, n\}$  сумма  $\sigma_k(x)$  включает в себя расстояния от точки  $x$  до  $l(x)$  крайних слева (на числовой оси) и до  $r(x)$  крайних справа точек множества  $X$ . При этом числа  $l(x)$  и  $r(x)$  — целые, неотрицательные, в сумме равные  $k$ . Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_k(x) &= \sum_{i=1}^{l(x)} (x - x_{(i)}) + \sum_{i=1}^{r(x)} (x_{[i]} - x) = \\ &= x(l(x) - r(x)) - \sum_{i=1}^{l(x)} x_{(i)} + \sum_{i=1}^{r(x)} x_{[i]}. \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Для доказательства выпуклости функций  $\sigma_k(x)$  достаточно показать, что для любого числа  $a > 0$  выполняется неравенство  $F(x, a, k) = 2\sigma_k(x) - \sigma_k(x - a) - \sigma_k(x + a) \leq 0$ .

Обозначим для краткости  $l = l(x)$ ,  $r = r(x)$ ,  $\Gamma = l(x - a)$ ,  $r^- = r(x - a)$ ,  $\Gamma^+ = l(x + a)$ ,  $r^+ = r(x + a)$ . Между этими числами должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} l + r &= \Gamma + r^- = \Gamma^+ + r^+ = k, \\ \Gamma &\leq l \leq \Gamma^+, \quad r^+ \leq r \leq r^-. \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

Подставим выражения сумм (П1) для  $x$ ,  $x - a$  и  $x + a$  в  $F(x, a, k)$  и преобразуем с учетом соотношений (П2):

$$\begin{aligned} F(x, a, k) &= 2x(l - r) - 2 \sum_{i=1}^l x_{(i)} + 2 \sum_{i=1}^r x_{[i]} - \\ &- (x - a)(\Gamma - r^-) + \sum_{i=1}^{\Gamma} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{r^-} x_{[i]} - (x + a)(\Gamma^+ - r^+) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\Gamma^+} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{r^+} x_{[i]} = x(2l - 2r - \Gamma + r^- - \Gamma^+ + r^+) + \\ &+ a(\Gamma - r^- - \Gamma^+ + r^+) - \sum_{i=\Gamma+1}^l x_{(i)} + \sum_{i=l+1}^{\Gamma^+} x_{(i)} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=r^++1}^r x_{[i]} - \sum_{i=r+1}^{r^-} x_{[i]} = \sum_{i=l^-+1}^l (x - a - x_{(i)}) - \\
& - \sum_{i=l+1}^{l^+} (x + a - x_{(i)}) + \sum_{i=r^++1}^r (x_{[i]} - x - a) - \\
& - \sum_{i=r+1}^{r^-} (x_{[i]} - x - a). \quad (ПЗ)
\end{aligned}$$

Сопоставим первую и четвертую сумму в полученном выражении (ПЗ). Из соотношений (П2) следует, что число слагаемых в этих суммах одинаково:  $l - l^- = r^- - r$ . Каждое слагаемое в четвертой сумме есть расстояние от точки  $x - a$  до точек  $x_{[i]}$ ,  $i = r + 1, \dots, r^-$ . Эти расстояния входят в сумму  $\sigma_k(x - a)$  и поэтому должны быть не меньше значения  $f_{[k]}(x - a) \geq 0$ . Каждое слагаемое в первой сумме либо является расстоянием точки  $x - a$  до точек  $x_{(i)}$ ,  $i = l^- + 1, \dots, l$ , либо вообще отрицательное. Эти расстояния, наоборот, не входят в сумму  $\sigma_k(x - a)$  и поэтому должны быть не больше значения  $f_{[k]}(x - a)$ . Из всего этого делаем вывод, что

$$\sum_{i=l^-+1}^l (x - a + x_{(i)}) - \sum_{i=r+1}^{r^-} (x_{[i]} - x + a) \leq 0. \quad (П4)$$

Аналогично сопоставим вторую и третью сумму в выражении П(3). Из соотношений (П2) следует, что число слагаемых в этих суммах одинаково:  $l^+ - l = r - r^+$ . Каждое слагаемое во второй сумме есть расстояние от точки  $x + a$  до точек  $x_{(i)}$ ,  $i = l + 1, \dots, l^+$ . Эти расстояния входят в сумму  $\sigma_k(x + a)$  и поэтому должны быть не меньше значения  $f_{[k]}(x + a) \geq 0$ . Каждое слагаемое в третьей сумме либо является расстоянием точки  $x + a$  до точек  $x_{[i]}$ ,  $i = r^+ + 1, \dots, r$ , либо вообще отрицательное. Эти расстояния, наоборот, не входят в сумму  $\sigma_k(x + a)$  и поэтому должны быть не больше значения  $f_{[k]}(x + a)$ . Из всего этого делаем вывод, что

$$- \sum_{i=l+1}^{l^+} (x + a - x_{(i)}) + \sum_{i=r^++1}^r (x_{[i]} - x - a) \leq 0. \quad (П5)$$

Подставляя формулы (П4) и (П5) в выражение (ПЗ), получаем, что  $F(x, a, k) \leq 0$ . Выпуклость функций  $\sigma_k(x)$  доказана.

Графики выпуклых функций  $f_i(x) = |x - x_i|$  являются ломаными. Кривая  $y = f_{[1]}(x)$  — верхняя огибающая семейства  $n$  ломаных  $y = f_i(x)$  и потому сама ломаная. Кривая  $y = f_{[2]}(x)$  — верхняя огибающая семейства ломаных, оставшихся после удаления ломаной  $y = f_{[2]}(x)$ , и сама оказывается ломаной. Аналогичные рассуждения для последующих функций  $y = f_{[i]}(x)$  показывают, что и их графики — ломаные линии. Но функции  $\sigma_k(x)$  — это суммы  $k$  первых функций  $y = f_{[i]}(x)$ , и поэтому их гра-

фики тоже являются ломаными. Это означает, что функции  $\sigma_k(x)$  являются кусочно-линейными (и выпуклыми). Доказательство утверждения 8 завершено.

Доказательство утверждения 9. Верхний срез множества  $f(\bar{X})$  отношением  $R^{E\Delta}$  через любую точку

$y \in f(\bar{X})$ , т. е. множество  $R_+^{E\Delta}(y) = \{z \in f(\bar{X}) \mid \sum_{k=1}^l (y_{[k]} - z_{[k]}) \leq 0, l = 1, 2, \dots, n\}$  — замкнутое и ограниченное, так как функции  $y_{[i]}$  непрерывные [15]. Поэтому множество  $G^{E\Delta}(X)$  внешне устойчиво [7].

Обозначим через  $k^\alpha$  и  $k^\beta$  те значения  $k$ , при которых достигаются  $\alpha = \min_k b_k$  и  $\beta = \max_k a_k$  соответственно. Отрезок  $[x_{(1)}; \alpha]$  принадлежит областям убывания или не-возрастания каждой из функций  $\sigma_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . При этом он принадлежит области убывания функции  $\sigma_1(x)$ . Следовательно, для любой точки  $x$  из промежутка  $[x_{(1)}; \alpha]$  верно  $\alpha P_{E\Delta}x$ .

Аналогично, отрезок  $[\beta; x_{(n)}]$  принадлежит областям возрастания или неубывания каждой из функций  $\sigma_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . При этом он принадлежит области возрастания функции  $\sigma_1(x)$ . Следовательно, для любой точки  $x$  из промежутка  $[\beta; x_{(n)}]$  верно  $\beta P_{E\Delta}x$ .

Таким образом, недоминируемые по  $P_{E\Delta}$  претендуют быть только точки из отрезка  $[\alpha; \beta]$ . Поскольку множество недоминируемых по  $P_{E\Delta}$  точек внешне устойчиво, то достаточно проверить недоминируемость точек отрезка  $[\alpha; \beta]$  другими точками этого отрезка. В вырожденном случае  $\alpha = x^c = \beta$  только точка  $x^c$  является недоминируемой. Если же  $\alpha < \beta$ , то возьмем произвольные две точки  $x'$  и  $x''$ , принадлежащие отрезку  $[\alpha; \beta]$  (включая его границы). Пусть  $x' < x''$ . Поскольку функция  $\sigma_{k^\alpha}(x)$  строго возрастает при  $x \geq \alpha$ , то  $\sigma_{k^\alpha}(x') < \sigma_{k^\alpha}(x'')$ . Поскольку функция  $\sigma_{k^\beta}(x)$  строго убывает при  $x \leq \beta$ , то  $\sigma_{k^\beta}(x') > \sigma_{k^\beta}(x'')$ . Следовательно, согласно решающему правилу (18), точки  $x'$  и  $x''$  несравнимы по отношению  $R_{E\Delta}$  и поэтому являются недоминируемыми. Утверждение 9 доказано полностью.

Доказательство утверждения 10. Пусть шаг равномерной сетки, покрывающей множество  $\bar{X}$ , равен  $h$ . Пронумеруем узлы сетки числами  $k = 1, \dots, K$ . Расстояние между любыми точками будем измерять в числе шагов  $h$ . Тогда координата любого узла сетки будет соответствующим целым числом  $k$ , а координатой точки  $x_i$  станет целое число  $k_i$  (в частности,  $k_{(1)} = 1$  и  $k_{(n)} = L$ ), и значения критериев  $f_i(k) = |k - k_i|$  будут целочисленными.

Рассмотрим произвольный узел сетки  $t$ . Если для некоторого  $k = 1, \dots, K$  выполняется  $k P_E t$ , то  $t$  не является средней по  $R_E$ . Пусть такого доминирующего узла  $k$  не нашлось. Докажем, что в этом случае точка  $t$  является средней по  $R_E$ .



Предположим, что это не так и имеется точка  $k + \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < h$ , такая, что  $(k + \varepsilon)P_E t$ . Тогда, согласно решающему правилу (14), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} f_{(1)}(k + \varepsilon) &\leq f_{(1)}(t), f_{(2)}(k + \varepsilon) \leq f_{(2)}(t), \dots, \\ f_{(n)}(k + \varepsilon) &\leq f_{(n)}(t), \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

среди которых хотя бы одно должно быть строгим. Фактически же все эти неравенства строгие, так как левые их части — не целые числа, а правые — целые.

Обозначим перестановки номеров компонент  $i = 1, \dots, n$  в векторе  $f_{\uparrow}(k + \varepsilon)$  через  $\pi(\varepsilon) = \{1_{\varepsilon}, 2_{\varepsilon}, \dots, n_{\varepsilon}\}$ , а в векторе  $f_{\uparrow}(t)$  через  $\pi(t) = \{1_p, 2_p, \dots, n_p\}$ . Тогда неравенства (П6) можно записать так:

$$f_{i_{\varepsilon}}(k + \varepsilon) < f_{i_t}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П7})$$

Векторная оценка  $f(k + \varepsilon)$  отличается от векторной оценки  $f(k)$  тем, что каждая компонента  $f_i(k + \varepsilon)$  равна либо  $f_i(k) + \varepsilon$ , либо  $f_i(k) - \varepsilon$ , в зависимости от того, слева или справа от узла  $k$  находится точка  $x_t$ . Причем, должна быть хотя бы одна увеличенная компонента и хотя бы одна уменьшенная компонента, поскольку узел  $k$  находится между крайними точками множества  $\bar{X}$ .

Если  $f_{i_{\varepsilon}}(k + \varepsilon) = f_{i_{\varepsilon}}(k) + \varepsilon$ , то, согласно (П7),  $f_{i_{\varepsilon}}(k) < f_{i_{\varepsilon}}(k) + \varepsilon < f_{i_t}(t)$ .

Если  $f_{i_{\varepsilon}}(k + \varepsilon) = f_{i_{\varepsilon}}(k) - \varepsilon$ , то должно выполняться  $f_{i_{\varepsilon}}(k) \leq f_{i_t}(t)$ , поскольку  $f_{i_{\varepsilon}}(k)$  — ближайшее целое число, превышающее  $f_{i_{\varepsilon}}(k + \varepsilon)$ , а  $f_{i_t}(t)$  — некоторое целое число, превышающее  $f_{i_{\varepsilon}}(k + \varepsilon)$  согласно (П7).

В результате делаем вывод, что неравенство  $f_{i_{\varepsilon}}(k) \leq f_{i_t}(t)$  выполняется для каждого  $i = 1, \dots, n$ , причем хотя бы для одного  $i$  является строгим. Следовательно, для вектора  $f^{\pi(\varepsilon)}(k)$ , полученного из  $f(k)$  перестановкой компонент  $\pi(\varepsilon)$ , выполняются неравенства:

$$f_{i_{\pi(\varepsilon)}}^{\pi(\varepsilon)}(k) \leq f_{i_t}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

среди которых хотя бы одно строгое. Но тогда верно  $kP_E t$ . А это противоречит сделанному предположению, что точка  $t$  не доминируема ни одним из узлов сетки. Полученное противоречие завершает доказательство.

## ЛИТЕРАТУРА

1. URL <http://www.grandars.ru/student/statistika/srednie-velichiny.html>
2. Бурханова И.И. Теория статистики. <https://econ.wikireading.ru/33154> [Burkhanova, I.I. Theory of Statistics (In Russian)]
3. Джини К. Средние величины. — М.: Статистика, 1970. [Gini, C. Le Medie. — Torino: Ulet, 1957.]
4. Пфанцagl И. Теория измерений. — М.: Мир, 1976. [Pfan-zagl, J. Theory of Measurement. — Berlin: Springer, 1971.]
5. Орлов А.И. Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы // Математические заметки. — 1981. — Т. 30. — С. 561–568. [Orlov, A.I. The Connection Between Mean Quantities and Admissible Transformations of Scale // Mathematical Notes. — 1981. — Vol. 30. — P. 774–778. (In Russian)]
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Физматлит, 1982. — Изд. второе, испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. [Podinovskii, V.V., Nogin, V.D. Pareto-Optimal Solutions of Multi-Criteria Problems. — Moscow: Fizmatlit, 1982. — Second edition, Moscow: Fizmatlit, 2007. (In Russian)]
7. Hazen, G.B., Morin, L.T. Optimality Conditions in Non-Convex Multiple-Objective Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1983. — Vol. 40. — P. 25–60.
8. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15. — С. 330–344. [Podinovskii, V.V. Multicriterial Problems with Uniform Equivalent Criteria // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 15. — P. 47–60. (In Russian)]
9. Fishburn, P.C. Decision and Value Theory. — New York: Wiley, 1964. — 437 p.
10. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. [Marshall, A.W., Olkin, I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — New York: Academic Press, 1979.]
11. Подиновский В.В. Количественная важность критериев с непрерывной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 9. — С. 129–137. [Podinovskii, V.V. The Quantitative Importance of Criteria with a Continuous First-Order Metric Scale // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66, no. 9. — P. 1478–1485.]
12. Топоногов, В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. — М.: Физматкнига, 2012. [Toponogov, V.A. Differential Geometry of Curves and Surfaces. — Moscow: Fizmatkniga, 2012. (In Russian)]
13. Кнут Д.Э. Искусство программирования, т. 3. Сортировка и поиск, 2-е изд. — М.: Вильямс, 2007. [Knuth, D.E. The Art of Computer Programming: Vol. 3: Sorting and Searching, Second edition. — New York: Addison-Wesley, 1998.]
14. Шоломицкий А.Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005. [Sholomitskii, A.G. The Theory of Risk. Choice Under Uncertainty and Risk Modeling. — Moscow: Publishing house of HSE, 2005. (In Russian)]
15. Behringer, F.A. von. Konvexe  $n$ -Stufen Max-Min-Optimierung. — Zeitschrift für Operations Research, 1970. — B. 14. — S. 276–296.

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 14.05.2020, после доработки 16.06.2020.  
Принята к публикации 26.06.2020.

**Подиновский Владислав Владимирович** — д-р техн. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, ✉ podinovski@mail.ru,

**Нелюбин Андрей Павлович** — канд. физ.-матем. наук, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, ✉ nelubin@gmail.com.

## MEAN QUANTITIES: A MULTICRITERIA APPROACH

V.V. Podinovski<sup>1</sup>, A.P. Nelyubin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

✉ podinovski@mail.ru

<sup>2</sup> Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ nelubin@gmail.com

**Abstract.** A new approach to defining the concept of the mean quantity for a fixed finite set  $X$  of numbers  $x_1, x_2, \dots, x_n$  is proposed: the distance of an arbitrary point  $x$  from each individual point  $x_i$  is estimated by the distance  $f_i(x)$  between them, and the distance of a point  $x$  from the entire set  $X$  is characterized by a vector criterion  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ ; using this criterion, the preference relation in distance is introduced; the mean value is the point  $x^*$ , non-dominated with regard to this relation. Properties and structure of such averages for several preference relations, including the Pareto relation and the relation generated by information about the equal importance of criteria, are investigated. The relationship between the introduced mean quantities and the main statistical averages (arithmetic mean and median) is clarified. The issues of constructing sets of such averages are considered and an effective method of construction is proposed for the case when equally important criteria have the first ordinal metric scale. The directions of possible generalizations of the introduced concept for the multidimensional case are discussed.

**Keywords:** mean quantities, multi-criterial choice problems, preference relations, non-dominated points, criteria importance theory, criteria of equal importance, theory of majorization.

**Funding.** The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project «5-100».



*Новая книга*

**Belov M.V., Novikov D.A. *Models of Technologies*.** — Heidelberg: Springer, 2020. — 113 p.

The methodology of complex activity is further elaborated with a set of interconnected mathematical models that describe the processes of technology design, adoption and use.

The technology of complex activity and its general models are considered in Chapter 1. The models of the processes of technology design and adoption are introduced in Chapter 2. The models of technology management are presented in Chapter 3. Finally, the analytical complexity and errors of solving technology design/optimization problems are estimated in Chapter 4.

This book is addressed to experts and researchers interested in the general principles of activity organization and control of complex organizational and technical systems.

Download full text: <http://www.mtas.ru/biblio/MoTe.pdf>

# УСЛОВИЯ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ<sup>1</sup>

М.В. Хлебников, Я.И. Квинто

**Аннотация.** Установлены условия робастной устойчивости для семейства линейных дискретных систем с неопределенностями. Отмечено, что традиционный подход, предполагающий построение общей квадратичной функции Ляпунова для всего семейства систем с неопределенностью, зачастую приводит к возникновению проблемы консерватизма. В связи с этим поставлена задача конструирования параметрической квадратичной функции Ляпунова, для решения которой в качестве основного инструмента выбран аппарат линейных матричных неравенств, а в качестве технического средства — модификация хорошо известной леммы Питерсена. Предложен простой подход к нахождению радиуса робастной квадратичной устойчивости рассматриваемого семейства. Показано, что соответствующие оптимизационные задачи представляют собой задачи полуопределенного программирования и одномерной минимизации, легко решаемые численным образом. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на численном примере. Полученные результаты предложено обобщить на задачу синтеза для семейства дискретных систем управления с неопределенностями, на иные робастные постановки задач, а также на случай воздействия на систему ограниченных внешних возмущений.

**Ключевые слова:** линейная дискретная система, параметрическая функция Ляпунова, структурированная матричная неопределенность, робастность, линейные матричные неравенства.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследованию систем с различного рода неопределенностями посвящено множество работ. Так, вопросы робастной устойчивости и стабилизации систем со структурированной матричной неопределенностью рассматриваются в монографиях [1, 2], см. также обзоры [3, 4] и ссылки в них. Проблемам устойчивости и синтеза управления в системах с параметрической неопределенностью посвящены, в частности, публикации [5–8], а также монография [9]. В качестве основного средства во многих из них применяется построение квадратичных функций Ляпунова. Однако в рамках этого давно известного и хорошо зарекомендовавшего себя подхода зачастую приходится сталкиваться с проблемой консерватизма, обусловленной построением *общей* квадратичной функции Ляпунова для всего семейства систем с неопределенностью.

В этом отношении весьма перспективным представляется конструирование *параметрической* квадратичной функции Ляпунова.

В настоящей статье на основе построения параметрической квадратичной функции Ляпунова устанавливаются простые условия робастной устойчивости для семейства дискретных систем с неопределенностями. Основным инструментом при этом служит аппарат линейных матричных неравенств [10] и известная лемма Питерсена [11], эффективно применяемая в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. В исходной статье [11] лемма Питерсена применялась для решения робастной версии задачи о линейно-квадратичном регуляторе, в статьях [12, 13] она применялась в синтезе робастного  $H_\infty$ -управления; в работах [14, 15] этот результат привлекался для построения общей квадратичной функции Ляпунова для интервального матричного

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00140).

семейства; схожая модель неопределенности рассматривалась в работе [16] при выводе нового вершинного результата о квадратичной устойчивости интервальной системы.

Статья организована таким образом: § 1 посвящен постановке задачи и подходам к ее решению; § 2 посвящен модификации важного технического результата, известного под названием леммы Питерсена; основной результат статьи содержится в § 3; в § 4 рассматриваются результаты численного моделирования.

Всюду далее  $\|\cdot\|$  — спектральная норма матрицы,  $^T$  — символ транспонирования,  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x_{k+1} = A(\alpha)x_k \quad (1)$$

с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$  и начальным состоянием  $x_0$ , где матрицы  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  принадлежат выпуклому семейству

$$\mathbb{A} = \left\{ A(\alpha): A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (2)$$

Систему (1) будем называть устойчивой, если все матрицы  $A(\alpha) \in \mathbb{A}$  шуровские (их собственные значения лежат внутри единичного круга).

Введем в рассмотрение квадратичную форму  $V(x) = x^T Q x$  с положительно определенной матрицей  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Как известно, устойчивость линейной дискретной системы  $x_{k+1} = A x_k$  эквивалентна разрешимости дискретного неравенства Ляпунова  $A^T Q A - Q < 0$ .

Умножив неравенство Ляпунова слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1} > 0$ , получим  $PA^T P^{-1} A P - P < 0$  или по лемме о дополнении по Шуру [17]

$$\begin{pmatrix} P & AP \\ PA^T & P \end{pmatrix} > 0.$$

Еще раз применяя лемму о дополнении по Шуру, приходим к дискретному неравенству Ляпунова вида  $APA^T - P < 0$ .

Такая форма записи дискретного неравенства Ляпунова, ассоциированная с квадратичной функцией Ляпунова  $V(x) = x^T P^{-1} x$ , удобна для последующих матричных преобразований.

Вернемся к семейству (1)–(2); достаточное условие его робастной квадратичной устойчивости состоит в наличии общей квадратичной функции

Ляпунова  $V(x) = x^T P^{-1} x$ , т. е. в выполнении матричного неравенства  $A(\alpha) P A^T(\alpha) - P < 0$  для всех  $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ . Далее нас будет интересовать более тонкий результат, а именно, условие существования *параметрической* квадратичной функции Ляпунова с матрицей вида

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad 0 < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (3)$$

которая должна удовлетворять условию

$$A(\alpha) P(\alpha) A^T(\alpha) - P(\alpha) < 0 \text{ для всех } A(\alpha) \in \mathbb{A}. \quad (4)$$

Согласно работе [4], в качестве матриц  $P_i$  могут быть взяты решения линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G \\ G^T A_i^T & G + G^T - P_i \end{pmatrix} > 0, \quad P_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

при некоторой (не обязательно симметричной!) матрице  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Цель настоящей работы состоит в *робастизации* этого результата — его распространении на случай наличия в матрицах системы (1) структурированной матричной неопределенности:  $A_i = A_i(\Delta) = A_i^0 + F_i \Delta H_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где возмущение  $\Delta$  ограничено по норме. Соответственно, будем искать параметрическую функцию Ляпунова вида (3) такую, чтобы условие (4) выполнялось при всех допустимых  $\Delta$ .

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ: ЛЕММА ПИТЕРСЕНА

Для дальнейшего нам потребуется технический результат, известный под названием *лемма Питерсена* [11]. Приведем его в следующей формулировке.

**Лемма 1** (Питерсен). Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — заданные матрицы. Неравенство  $G + M \Delta N + N^T \Delta^T M^T < 0$  справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $G + \varepsilon M M^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N < 0$ . ♦

Таким образом, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства  $G + M \Delta N + N^T \Delta^T M^T$  с матричной неопределенностью  $\Delta$  к гораздо более простой задаче разрешимости матричного неравенства относительно одной скалярной переменной  $\varepsilon$ . Некоторые обобщения леммы Питерсена рассмотрены в работе [18], см. также статью [2].





Следующая ее модификация охватывает случай матричного неравенства противоположного знака, а также случай, когда матричная неопределенность ограничена по норме некоторым числом  $\gamma$ .

**Следствие 1.** Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — заданные матрицы. Неравенство  $G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T > 0$  справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G & N^T & \gamma M \\ N & \varepsilon I & 0 \\ \gamma M^T & 0 & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} > 0.$$

**Доказательство.** Действительно, запишем исходное матричное неравенство в виде  $G + (\gamma M)\Delta N + N^T \Delta^T (\gamma M)^T > 0$  или  $(-G) + (-\gamma M)\Delta N + N^T \Delta^T (-\gamma M)^T < 0$ , которое должно выполняться для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$ . Применяя к полученному соотношению лемму Питерсена, приходим к эквивалентному матричному неравенству  $-G + \gamma^2 \varepsilon M M^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N < 0$  или по лемме о дополнении по Шуру

$$\begin{pmatrix} G - \gamma^2 \varepsilon M M^T & N^T \\ N & \varepsilon I \end{pmatrix} > 0.$$

Окончательно, применяя еще раз лемму о дополнении по Шуру, получаем искомое утверждение. ♦

В дальнейшем изложении этот результат будет использоваться самым существенным образом.

### 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В дальнейшем — для упрощения выкладок — будем предполагать, что структурированная матричная неопределенность присутствует лишь в одной из матриц  $A_1, \dots, A_N$ , например, в матрице  $A_1$ :

$$A_1 = A_1(\Delta) = A_1^0 + F\Delta H, \quad (6)$$

где  $A_1^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — заданные матрицы, а  $\Delta$  — матричная неопределенность, ограниченная в спектральной норме:  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$ .

Заметим, что никакие иные требования на матричную неопределенность  $\Delta$  не накладываются; в частности, она может быть нестационарной:  $\Delta = \Delta(t)$ .

Первое из условий (5) для рассматриваемой системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} P_1 & (A_1^0 + F\Delta H)G \\ G^T(A_1^0 + F\Delta H)^T & G + G^T - P_1 \end{pmatrix} > 0, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G \\ G^T A_i^T & G + G^T - P_i \end{pmatrix} > 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (8)$$

Матричное неравенство (7) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1^0 G \\ G^T(A_1^0)^T & G + G^T - P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F\Delta H G \\ G^T H^T \Delta^T F^T & 0 \end{pmatrix} > 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1^0 G \\ G^T(A_1^0)^T & G + G^T - P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (0 \quad H G) + \begin{pmatrix} 0 \\ G^T H^T \end{pmatrix} \Delta^T (F^T \quad 0) > 0.$$

Воспользовавшись следствием 1 и, тем самым, исключив  $\Delta$  из полученного соотношения, приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1^0 G & 0 & \gamma F \\ G^T(A_1^0)^T & G + G^T - P_1 & G^T H^T & 0 \\ 0 & H G & \varepsilon I & 0 \\ \gamma F^T & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} > 0, \quad (9)$$

не содержащему матричную неопределенность и линейному относительно переменных  $P_1$  и  $\gamma$ .

Таким образом, разрешимость системы линейных матричных неравенств (9) и (8) будет служить достаточным условием робастной квадратичной устойчивости семейства (6) в смысле (3).

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** Система (1)–(2) с неопределенностью (6) робастно квадратично устойчива при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$ , если существуют матрицы  $0 < P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , матрица  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и число  $\varepsilon > 0$  такие, что выполняются условия

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1^0 G & 0 & \gamma F \\ G^T(A_1^0)^T & G + G^T - P_1 & G^T H^T & 0 \\ 0 & H G & \varepsilon I & 0 \\ \gamma F^T & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G \\ G^T A_i^T & G + G^T - P_i \end{pmatrix} > 0, \quad i = 2, \dots, N.$$



При этом  $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$  является матрицей параметрической квадратичной функции Ляпунова для рассматриваемой системы с неопределенностью. ♦

Для семейства (1) с неопределенностью (6) можно вычислить радиус квадратичной устойчивости, т. е. максимальный размах  $\gamma_{\max}$  неопределенности  $\Delta$  такой, что при всех  $\gamma < \gamma_{\max}$  у семейства (1) имеется общая квадратичная функция Ляпунова.

**Следствие 2.** Радиус  $\hat{\gamma}$  робастной квадратичной устойчивости системы (1), (2), (6) доставляет решение задачи  $\max \gamma$  при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1^0 G & 0 & \gamma F \\ G^T (A_1^0)^T G + G^T - P_1 & G^T H^T & 0 & \\ 0 & HG & \varepsilon I & 0 \\ \gamma F^T & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i G \\ G^T A_i^T G + G^T - P_i \end{pmatrix} > 0, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$P_i > 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярной переменной  $\gamma$  и скалярному параметру  $\varepsilon > 0$ . ♦

Сформулированная в следствии 2 оптимизационная задача представляют собой задачу полуопределенного программирования и одномерной минимизации по параметру  $\varepsilon$ , легко решаемую численным образом.

#### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим семейство  $x_{k+1} = A(\alpha)x_k$ ,  $A(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , линейных дискретных систем, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,80 & -0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,20 & 0,03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0,80 & -0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0720 & -0,0450 & 0,20 & 0,12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего заметим, что задача разрешимости матричных неравенств (5) доставляет матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2,3909 & 0,8612 & 0,2110 & -0,7086 \\ 0,8612 & 2,5895 & -0,3940 & 0,5463 \\ 0,2110 & -0,3940 & 1,3231 & -0,6165 \\ -0,7086 & 0,5463 & -0,6165 & 2,2926 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2,4981 & 1,0171 & 0,2620 & -0,6375 \\ 1,0171 & 2,7738 & -0,2743 & 0,5584 \\ 0,2620 & -0,2743 & 1,3013 & -0,5731 \\ -0,6375 & 0,5584 & -0,5731 & 2,2126 \end{pmatrix},$$

параметрической квадратичной функции Ляпунова  $P(\alpha) = \alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , для рассматриваемой системы.

Введем в матрицу  $A_1$  структурированную матричную неопределенность:  $\tilde{A}_1 = A_1 + F\Delta H$ , где

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 0 \ 0 \ 0),$$

и вычислим радиус робастной квадратичной устойчивости полученного семейства согласно следствию 2: система робастно квадратично устойчива для всех  $\|\Delta\| \leq \gamma_{\max} = 0,4331$ .

Для найденного  $\gamma_{\max}$  матрицы параметрической робастной функции Ляпунова

$$P^{\text{rob}}(\alpha) = \alpha P_1^{\text{rob}} + (1 - \alpha)P_2^{\text{rob}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

имеют вид:

$$P_1^{\text{rob}} = \begin{pmatrix} 22,0444 & 29,6684 & 1,4483 & -3,4552 \\ 29,6684 & 94,5749 & 1,8409 & 4,2076 \\ 1,4483 & 1,8409 & 1,7815 & -2,9393 \\ -3,4552 & 4,2076 & -2,9393 & 13,5992 \end{pmatrix}$$

$$P_2^{\text{rob}} = \begin{pmatrix} 8,4931 & 4,8048 & 0,4804 & -1,2778 \\ 4,8048 & 13,6552 & 0,2208 & 0,9252 \\ 0,4804 & 0,2208 & 1,3937 & -0,6679 \\ -1,2778 & 0,9252 & -0,6679 & 2,4633 \end{pmatrix}.$$

Вычисления производились в среде MATLAB с помощью программного пакета cvx [19].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы предполагают распространить полученные результаты на задачу синтеза для семейства дискретных систем управления с неопределенностями, на иные робастные постановки задач, а также на случай воздействия на систему ограниченных внешних возмущений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. — М.: ЛЕНАНД, 2019. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Rapoport, L.B. Mathematical Automatic Control Theory. — Moscow: LENAND, 2019. (in Russian)]
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014.



- [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: An LMI Approach. — Moscow: LENAND, 2014. (in Russian)]
3. Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9–59. [Khlebnikov, M.V., Polyak, B.T., Kuntsevich, V.M. Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, no. 11. — P. 2227–2275.]
  4. Petersen, I.R., Tempo, R. Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. — 2014. — Vol. 50. — P. 1315–1335.
  5. De Oliveira, M.C., Bernussou, J., Geromel, J.C. A New Discrete-Time Robust Stability Condition // Systems & Control Letters. — 1999. — Vol. 37. — P. 261–265.
  6. Oliveira, R.C.L.F., Peres, P.L.D. LMI Conditions for Robust Stability Analysis Based on Polynomially Parameter-Dependent Lyapunov Functions // Systems & Control Letters. — 2006. — Vol. 55. — P. 52–61.
  7. Pessim, P.S.P., Lacerda, M.J., Agulhari, C.M. Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Robust Performance of Uncertain Systems // IFAC PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, no. 25. — P. 293–298.
  8. Liu, Z., Theilliol, D., Gu, F., et al. State Feedback Controller Design for Affine Parameter-Dependent LPV Systems // IFAC PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50, no. 1. — P. 9760–9765.
  9. Ebihara, Y., Peaucelle, D., Arzelier, D. S-variable Approach to LMI-Based Robust Control. — London: Springer-Verlag, 2015.
  10. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
  11. Petersen, I.R. A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems and Control Letters. — 1987. — Vol. 8. — P. 351–357.
  12. Xie, L. Output Feedback  $H_\infty$  Control of Systems with Parameter Uncertainty // International Journal of Control. — 1996. — Vol. 63. — P. 741–750.
  13. Khargonekar, P.P., Petersen, I.R., Zhou, K. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and  $H_\infty$  Control Theory // IEEE Transaction on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, no. 3. — P. 356–361.
  14. Mao, W.-J., Chu, J. Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems // IEEE Transaction on Automatic Control. — 2003. — Vol. 48, no. 6. — P. 1007–1012.
  15. Mao, W.-J., Chu, J. Correction to «Quadratic Stability and Stabilization of Dynamic Interval Systems» // IEEE Transaction on Automatic Control. — 2006. — Vol. 51, no. 8. — P. 1404–1405.
  16. Alamo, T., Tempo, R., Ramirez, D.R., Camacho, E.F. A New Vertex Result for Robustness Problems with Interval Matrix Uncertainty // Proceedings of the 2007 European Control Conference. — Kos, Greece, July 2–5, 2007. — P. 5101–5107.
  17. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. [Horn, R.A., Johnson, C.R. Matrix Analysis. — Cambridge: Cambridge University Press, 2012.]
  18. Хлебников М.В., Щербаков П.С. Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 125–139. [Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. Petersen's Lemma on Matrix Uncertainty and Its Generalization // Automation and Remote Control. — 2008. — Vol. 69, no. 11. — P. 1932–1945.]
  19. Grant, M., Boyd, S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. — URL: <http://cvxr.com/cvx/>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 22.03.2020, после доработки 14.05.2020.  
Принята к публикации 3.06.2020.

Хлебников Михаил Владимирович — д-р. физ.-мат. наук,  
✉ khlebnik@ipu.ru,

Квинто Яна Игоревна — канд. техн. наук, ✉ yanakvinto@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## ROBUST STABILITY CONDITIONS FOR A FAMILY OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS SUBJECTED TO UNCERTAINTIES

M.V. Khlebnikov<sup>1</sup>, Y.I. Kvinto<sup>2</sup>

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup>✉ khlebnik@ipu.ru, <sup>2</sup>✉ yanakvinto@mail.ru

**Abstract.** Robust stability conditions are established for a family of linear discrete-time systems subjected to uncertainties. The traditional approach, which involves the construction of a common quadratic Lyapunov function for the entire family of systems with uncertainty, often leads to the problem of conservatism. In this connection, constructing the parametric quadratic Lyapunov functions seems promising. The main tools of the proposed approach are the apparatus of linear matrix inequalities and presented modification of the well-known Petersen's lemma. A simple approach to finding the radius of robust quadratic stability of the considered family is proposed in the paper as well. The corresponding optimization problems have the form of semi-definite programming and one-dimensional minimization, which could be easily solved numerically. The effectiveness of the proposed approach is demonstrated via numerical example. The results obtained can be generalized to the design problems for linear discrete-time systems subjected to uncertainties, to other robust statements, and to the case of exogenous disturbances.

**Keywords:** linear discrete-time system, parametric Lyapunov function, structured matrix uncertainty, robustness, linear matrix inequalities.

**Funding.** The study was performed with partial financial support of Russian Foundation of Basic Research (project no. 18-08-00140).

# ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ КОНЕЧНО-ЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Д.В. Шатов

**Аннотация.** Рассматриваются линейные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Конечно-частотная идентификация позволяет найти оценки параметров таких объектов управления. Для этого используются специальные интегральные фильтры (фильтры Фурье), с помощью которых ищутся оценки значений частотной характеристики объекта на заданном наборе частот. По данному набору значений частотной характеристики составляется система линейных уравнений, решение которой дает искомые оценки параметров объекта. В рамках развития метода конечно-частотной идентификации в статье исследовано поведение ошибок процесса фильтрации. Исследование основано на известных результатах, описывающих асимптотическое поведение ошибок фильтров Фурье. Предложен метод определения длительности фильтрации, приводится оценка точности результатов фильтрации. Предлагаемый подход основан на специальной задаче линейного программирования, решение которой дает оценку значения фильтра Фурье и значения параметра, характеризующего скорость сходимости ошибок фильтрации. Последнее используется для определения длительности. Разработан соответствующий алгоритм фильтрации и приведены результаты численного эксперимента, подтвердившие работоспособность и эффективность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** конечно-частотная идентификация, фильтры Фурье, линейное программирование, длительность идентификации, точность оценивания.

## ВВЕДЕНИЕ

Идентификация в теории управления применяется для решения задач по определению моделей объектов управления (технологических процессов) по экспериментальным данным (входным и выходным сигналам). В рамках теории идентификации развиты и применяются различные подходы и методы, решающие сходные задачи, но имеющие определенные отличия. Среди них можно выделить: параметрические и непараметрические методы, идентификацию в частотной и временной области, методы на основе оптимизации, с использованием нейронных сетей и др. В теории идентификации подходы разделяются по различным признакам. В зависимости от предполагаемого типа внешнего возмущения, два основных класса составляют стохастические методы, в которых внешнее возмущение — случайный процесс, и детерминированные методы, когда внешнее возмущение — неизвестная детерминированная функция (в этом случае обычно пользуются предположениями о ее ограниченности). Подробнее теория идентификации и ее методы описаны, например, в работах [1–3].

Частотные методы идентификации широко применяются в теории управления, в них используется частотная характеристика объекта управления для определения его модели и нахождения ее параметров [4–6]. В качестве одного из частотных методов отметим разработанный А.Г. Александровым метод конечно-частотной идентификации [7], который относится к активным (используется гармонический испытательный сигнал). Модели объекта при этом полагаются линейными, а внешнее возмущение — неизвестной ограниченной функцией. Процесс идентификации состоит из двух этапов: на первом проводится эксперимент, в течение которого определяются частотные параметры объекта (значения его частотной характеристики на наборе частот), а на втором этапе решается система линейных уравнений, в результате чего получаются искомые оценки параметров объекта управления. Этот метод развивается в различных направлениях: существует дискретный вариант [8], вариант для многомерных систем [9], для исследования настраиваемых параметров алгоритма [10].

В настоящей работе исследуется первый этап идентификации: экспериментальное определение оценок частотных параметров с помощью фильтров Фурье (далее будем называть его фильтраци-

ей). Этот процесс очень важен, так как от качества определения частотных параметров во многом зависит итоговая точность идентификации. Ошибки фильтрации возникают в эксперименте из-за ненулевых начальных условий, переходных процессов от испытательного сигнала и внешнего возмущения, а также действия самого возмущения. В работе [11] доказана сходимость оценок фильтров Фурье к истинным значениям частотных параметров при времени фильтрации, стремящемся к бесконечности, и определенных предположениях о внешнем возмущении; там же получены оценки динамики ошибок фильтрации. Однако конструктивного алгоритма или способа использовать эти оценки для определения длительности фильтрации в статье не приводится. Настоящая статья продолжает и развивает результаты работы [11]: предлагается метод определения длительности фильтрации с помощью аналогичных оценок ошибок фильтрации и приводятся некоторые соображения об оценке текущей точности фильтрации.

### 1. КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ. ДИНАМИКА ФИЛЬТРОВ ФУРЬЕ

Рассматривается объект управления вида

$$d(s)y = b(s)u + c(s)f, \quad (1)$$

где  $y$  — измеряемый скалярный выход объекта;  $u$  — управляющее воздействие;  $f$  — внешнее возмущение, которое представляет собой ограниченную по модулю ( $|f| < \infty$ ) разложимую в ряд Фурье функцию; полиномы объекта имеют вид:

$$d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^i, \quad b(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i, \quad c(s) = \sum_{i=0}^{m_f} c_i s^i, \\ n > m, \quad n > m_f,$$

полином  $d(s)$  предполагается гурвицевым,  $s$  — переменная преобразования Лапласа.

Внешнее возмущение выглядит так:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_{fk} \sin(\omega_{fk} t + \varphi_k), \quad (2)$$

где  $\rho_{fk}$ ,  $\omega_{fk}$ ,  $\varphi_k$  — неизвестные амплитуды, частоты и фазы внешнего возмущения.

Конечно-частотная идентификация решает задачу определения оценок коэффициентов  $d_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и  $b_j$ ,  $j = \overline{0, m}$ , объекта управления. Для произвольной частоты  $\omega$  частотными параметрами объекта (1) будем называть величины:

$$\alpha(\omega) = \operatorname{Re}\{w_{yu}(j\omega)\}, \quad \beta(\omega) = \operatorname{Im}\{w_{yu}(j\omega)\}, \quad (3)$$

где  $w_{yu}(s) = b(s)/d(s)$  — передаточная функция объекта, связывающая вход  $u$  с выходом  $y$ . Аналогично параметрам (3), введем обозначения для частотных параметров по внешнему возмущению для частоты  $\omega_f$ :

ных параметров по внешнему возмущению для частоты  $\omega_f$ :

$$\alpha_f(\omega_f) = \operatorname{Re}\{w_{yf}(j\omega_f)\}, \quad \beta_f(\omega_f) = \operatorname{Im}\{w_{yf}(j\omega_f)\},$$

где  $w_{yf}(s) = c(s)/d(s)$  — передаточная функция объекта, связывающая внешнее возмущение  $f$  с выходом  $y$ .

Метод конечно-частотной идентификации основан на экспериментальном определении оценок частотных параметров  $\hat{\alpha}(\omega_i)$  и  $\hat{\beta}(\omega_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для набора из  $n$  частот, которые выбираются известным образом [12]. Далее решается система линейных уравнений, которая составляется в силу связи

$$b(j\omega) = [\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]d(j\omega),$$

в результате получаются искомые оценки коэффициентов полиномов объекта  $\hat{d}_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и  $\hat{b}_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ .

Оценки частотных параметров  $\hat{\alpha}(\omega)$  и  $\hat{\beta}(\omega)$  для выбранной частоты  $\omega$  ищутся с помощью фильтров Фурье, при этом к объекту прикладывается гармонический испытательный сигнал этой частоты:

$$u(t) = \rho \sin(\omega t), \quad (4)$$

где  $\rho$  — амплитуда испытательного сигнала, выбираемая из известных соображений [12].

Сами фильтры Фурье имеют вид:

$$\hat{\alpha}(\omega) = \frac{2}{\rho\tau} \int_{t_f}^{t_f+\tau} y(t) \sin(\omega t) dt, \\ \hat{\beta}(\omega) = \frac{2}{\rho\tau} \int_{t_f}^{t_f+\tau} y(t) \cos(\omega t) dt, \quad (5)$$

где  $t_f$  — момент начала фильтрации, а  $\tau$  — длительность процесса фильтрации.

В статье [11] исследовано асимптотическое поведение фильтров Фурье. В частности, доказана сходимость  $\hat{\alpha}(\omega) \rightarrow \alpha(\omega)$ ,  $\hat{\beta}(\omega) \rightarrow \beta(\omega)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  при условии, что внешнее возмущение обладает свойством ФФ-фильтруемости (фильтруемости с помощью фильтра Фурье), которое заключается в том, что спектр частот внешнего возмущения не содержит исследуемой испытательной частоты  $\omega_{fk} \neq \omega$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , и проверяется экспериментально. В этой же работе получена динамика ошибок оценок  $\hat{\alpha}(\omega)$  и  $\hat{\beta}(\omega)$ :

$$|\hat{\alpha}(\omega) - \alpha(\omega)| < \frac{2}{\tau} (v_a e^{-\sigma\tau} + v_a + \xi_a + c_{fa}), \\ |\hat{\beta}(\omega) - \beta(\omega)| < \frac{2}{\tau} (v_b e^{-\sigma\tau} + v_b + \xi_b + c_{fb}), \quad (6)$$



где  $v_a, v_b, v_a, v_b$  — константы, зависящие от начальных условий;  $\xi_a = \xi_b$  — компоненты, порожденные действием испытательного сигнала и обращающиеся в ноль в моменты времени, когда длительность фильтрации  $\tau$  кратна периоду испытательной частоты  $(2\pi/\omega)$ ;  $\sigma = -\max\{\text{Re}(\lambda_i)\}$  — степень устойчивости полинома  $d(s)$ , где  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ , — его корни;  $c_{fa}, c_{fb}$  — константы, зависящие от внешнего возмущения (2). Эти неравенства получены путем анализа фильтров Фурье (5). Выходной сигнал объекта  $y(t)$  при этом рассматривался как сумма компонент, вызванных влиянием ненулевых начальных условий и действием испытательного сигнала  $u(t)$  и внешнего возмущения  $f(t)$ . Из-за большого числа неизвестных параметров, входящих в правую часть неравенств (6), их конструктивное применение для определения длительности или точности получаемых оценок частотных параметров затруднительно.

В работе [13] применяется метод оценки длительности фильтрации, основанный на относительной скорости сходимости фильтров Фурье, когда проверяются целевые неравенства

$$1 - \left| \frac{\hat{\alpha}(i, \omega)}{\hat{\alpha}(i-1, \omega)} \right| < \varepsilon, \quad 1 - \left| \frac{\hat{\beta}(i, \omega)}{\hat{\beta}(i-1, \omega)} \right| < \varepsilon, \\ i = 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где  $\hat{\alpha}(i, \omega), \hat{\beta}(i, \omega), i = 2, 3, \dots$ , — значения оценок частотных параметров, полученные в дискретные моменты времени  $\tau_i = Ti, i = 1, 2, 3, \dots$ , кратные периоду исследуемой частоты

$$T = 2\pi/\omega, \quad (8)$$

а  $\varepsilon$  — выбираемое небольшое число. Выполнение условий (7) после окончания периода  $i_{\text{fin}}$  означает завершение процесса фильтрации, а полученные при этом оценки  $\hat{\alpha}(i_{\text{fin}}, \omega), \hat{\beta}(i_{\text{fin}}, \omega)$  принимаются в качестве значений частотных параметров объекта (1). Оценка точности получаемых частотных параметров при этом не приводится.

## 2. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ

Будем, как в работе [13], рассматривать результаты фильтрации в дискретные моменты времени  $Ti, i = 1, 2, 3, \dots$ , где  $T$  считается согласно формуле (8). Далее предполагается, что момент начала фильтрации  $t_f$  сдвинут от момента подачи на объект испытательного сигнала (4) на время  $qT$ , где  $q \in N$  — число, выбранное так, что за время  $qT$  переходные процессы в объекте закончились. Пусть

также внешнее возмущение (2) для простоты содержит одну гармонику частоты  $\omega_f$  с амплитудой  $\rho_f$  и фазой  $\varphi$ , далее частоту  $\omega_f$  представим как  $\omega_f = \eta\omega$ , которой соответствуют частотные параметры  $\alpha_f(\eta\omega)$  и  $\beta_f(\eta\omega)$ , тогда выходной сигнал объекта, обозначенный  $\bar{y}(t)$ , с высокой точностью описывается суммой синусов и косинусов с частотами  $\omega$  и  $\omega_f$  и амплитудами, равными частотным параметрам объекта:

$$\bar{y}(t) = \rho(\alpha(\omega)\sin(\omega t) + \beta(\omega)\cos(\omega t)) + \rho_f(\alpha_f(\eta\omega)\sin(\eta\omega t + \varphi) + \beta_f(\eta\omega)\cos(\eta\omega t + \varphi)). \quad (9)$$

Подставив сумму (9) в выражение для фильтров Фурье (5), приняв момент начала фильтрации  $t_f = 0$ , а длительность фильтрации  $\tau_i = Ti, i = 1, 2, 3, \dots$ , после вычисления интегралов получим аналитические выражения для ошибок фильтрации по компоненте внешнего возмущения с частотой  $\omega_f$ :

$$\Delta\alpha(i, \eta\omega) = \frac{2\rho_f \sin(\eta\pi i)}{\rho\pi i(\eta^2 - 1)} \times \\ \times (\alpha_f(\eta\omega)\cos(\eta\pi i + \varphi) - \beta_f(\eta\omega)\sin(\eta\pi i + \varphi)), \\ \Delta\beta(i, \eta\omega) = \frac{2\rho_f \sin(\eta\pi i)}{\rho\pi i(\eta^2 - 1)} \times \\ \times (\alpha_f(\eta\omega)\sin(\eta\pi i + \varphi) + \beta_f(\eta\omega)\cos(\eta\pi i + \varphi)), \\ i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Применение выражений (10) для практической корректировки результатов фильтрации невозможно, однако можно сделать ряд качественных заключений о процессе фильтрации:

- с помощью фильтрации можно влиять на скорость сходимости оценок к истинным значениям через соотношение  $\rho_f/\rho$ , увеличивая по возможности амплитуду испытательного сигнала.
- ошибки, вызванные высокочастотными компонентами внешнего возмущения, будут исчезать очень быстро, в частности, можно не учитывать высокочастотные помехи (это справедливо, так как испытательная частота выбирается специальным образом [12] из диапазона собственных частот объекта, для которых помехи измерения имеют  $\eta \gg 1$ ). И наоборот, если  $\eta \approx 1$ , то с помощью величины  $(\eta^2 - 1)$  в знаменателе выражения (10) получим большой коэффициент, усиливающий ошибку фильтрации по данной компоненте, что значительно увеличит длительность фильтрации. Поэтому желательно выбирать испытательные частоты так, чтобы в некоторой их окрестности не содержалось компонент внешнего возмущения.
- если исследуемая частота выбрана так, что нарушается свойство ФФ-фильтруемости внеш-





него возмущения, т. е. если  $\eta = 1$ , то процесс фильтрации сойдется к частотным параметрам с ошибкой, которая не отфильтровывается с течением времени и согласно выражениям (10) представляет собой:

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \Delta \alpha(i, \omega) = \rho_f / \rho (\alpha_f(\omega) \cos(\varphi) - \beta_f(\omega) \sin(\varphi)),$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \Delta \beta(i, \omega) = \rho_f / \rho (\alpha_f(\omega) \sin(\varphi) + \beta_f(\omega) \cos(\varphi)).$$

Для выражений (10) можно записать верхние и нижние оценки ошибок:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\alpha}(i, \eta \omega) &= \frac{2\rho_f |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi i |\eta^2 - 1|}, \\ \Delta \underline{\alpha}(i, \eta \omega) &= -\frac{2\rho_f |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi i |\eta^2 - 1|}, \\ \Delta \bar{\beta}(i, \eta \omega) &= \frac{2\rho_f \eta |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi i |\eta^2 - 1|}, \\ \Delta \underline{\beta}(i, \eta \omega) &= -\frac{2\rho_f \eta |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi i |\eta^2 - 1|}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $|w_{yf}(\eta \omega)| = \sqrt{\alpha_f^2(\eta \omega) + \beta_f^2(\eta \omega)}$  — модуль передаточной функции от внешнего возмущения на частоте  $\omega_f = \eta \omega$ .

Перепишем верхние оценки в выражениях (11), свернув постоянные величины в одну константу:

$$\Delta \bar{\alpha}(i, \eta \omega) = \frac{c_a(\eta \omega)}{i}, \quad \Delta \bar{\beta}(i, \eta \omega) = \frac{c_b(\eta \omega)}{i},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{где } c_a(\eta \omega) = \frac{2\rho_f \eta |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi |\eta^2 - 1|}, \quad c_b(\eta \omega) = \frac{2\rho_f \eta |w_{yf}(\eta \omega)|}{\rho \pi |\eta^2 - 1|},$$

для нижних оценок можно сделать аналогичные операции.

Переходя к общему виду внешнего возмущения (2) и учитывая его ограниченность, можно записать неравенства, схожие с выражениями (6), но с предположением, что переходные процессы закончились и соответствующими слагаемыми в правой части неравенств можно пренебречь ( $v_a e^{-\sigma t} = 0$ ,  $v_b e^{-\sigma t} = 0$ ), а остальные постоянные слагаемые (2,  $v_a$ ,  $v_b$  и  $c_{fa}$ ,  $c_{fb}$ ) объединены в константы  $c_{af}$  и  $c_{bf}$ :

$$|\hat{\alpha}(i, \omega) - \alpha(\omega)| \leq \frac{c_{af}}{i}, \quad (12)$$

$$|\hat{\beta}(i, \omega) - \beta(\omega)| \leq \frac{c_{bf}}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

В следующем разделе эти неравенства применяются для оценивания длительности и точности процесса фильтрации; описывается способ анализа результатов процесса фильтрации, который поз-

воляет по текущим экспериментальным данным найти оценки частотных параметров и оценить сходимость процесса фильтрации, скорость которой определяет длительность фильтрации. Далее рассуждения проводятся для оценки длительности и даны оценки точности фильтрации по параметру  $\alpha(\omega)$ ; для параметра  $\beta(\omega)$  рассуждения будут аналогичными.

### 3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ДЛИТЕЛЬНОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

#### 3.1. Идея подхода

Пусть в процессе фильтрации последовательно получено  $l$  оценок частотных параметров  $\hat{\alpha}(i, \omega)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тогда значения параметров  $\alpha(\omega)$  и  $c_{af}$  из неравенств (12) можно получить с помощью решения задачи линейного программирования:

найти

$$\min_{\alpha(\omega), c_{af}} c_{af} \quad (13)$$

Ограничения в задаче (13) формируются из условия  $c_{af} > 0$  и неравенств (12), которые после раскрытия модуля имеют форму, удобную для наглядной геометрической интерпретации решения задачи:

$$\hat{\alpha}(i, \omega) \leq \frac{c_{af}}{i} + \alpha(\omega), \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}(i, \omega) \geq -\frac{c_{af}}{i} + \alpha(\omega), \quad i = \overline{1, l}.$$

Пусть в результате решения задачи (13) получены оценки параметров  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$ . Их геометрический смысл состоит в том, что они определяют две кривые, заданные выражениями в правой части неравенств (14), а все значения оценок  $\hat{\alpha}(i, \omega)$ ,  $i = \overline{1, l}$ , лежат между ними.

Решение задачи (13) обладает свойствами:

1) если внешнее возмущение ФФ-фильтруемо, то при  $l \rightarrow \infty$  имеет место сходимость  $\tilde{\alpha}(\omega, l) \rightarrow \alpha(\omega)$ ;

2) параметр  $\tilde{c}_{af}(l)$ ,  $l = 2, 3, \dots$ , представляет собой неубывающую монотонную последовательность, предел которой сверху ограничен константой  $c_{af}$ .

Пусть при некотором  $l$  имеем решение задачи (13)  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$ , для которого справедливы неравенства (14). Когда в процессе фильтрации получено следующее значение оценки частотного параметра  $\hat{\alpha}(l+1, \omega)$ , возможны два варианта его расположения относительно кривых, задаваемых

решением  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$  согласно неравенствам (14). Если выполняется условие

$$\hat{\alpha}(l+1, \omega) \in \left[ -\frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l+1} + \tilde{\alpha}(\omega, l); \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l+1} + \tilde{\alpha}(\omega, l) \right], \quad (15)$$

т. е. оценка  $\hat{\alpha}(l+1, \omega)$  лежит между двумя кривыми из неравенств (14), тогда решение  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$  является оптимальным для  $l+1$  периодов фильтрации.

Если условие (15) не выполняется, то параметры  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$  не являются решением задачи (13) для набора  $\hat{\alpha}(i, \omega)$ ,  $i = \overline{1, l+1}$ , и ее необходимо решать снова, причем для нового решения  $\tilde{\alpha}(\omega, l+1)$  и  $\tilde{c}_{af}(l+1)$  гарантировано будет выполняться неравенство  $\tilde{c}_{af}(l+1) > \tilde{c}_{af}(l)$ .

Для определения длительности фильтрации будем пользоваться свойством 2, согласно которому параметр  $\tilde{c}_{af}(l)$  меняется монотонным образом. Учитывая этот факт, можно построить разные алгоритмы определения момента окончания фильтрации. В настоящей статье предлагается провести простую проверку относительного изменения значения  $\tilde{c}_{af}(l)$  на некотором временном интервале. В процессе фильтрации будем пользоваться скользящим окном шириной  $D \in N$ , определяющим некоторое число периодов исследуемой частоты  $\omega$ , на которых будем вычислять изменение величины  $\tilde{c}_{af}(l)$  (и соответственно  $\tilde{c}_{bf}(l)$ ). Целевыми условиями для определения длительности фильтрации являются неравенства, похожие на (7), но для соответствующих параметров  $\tilde{c}_{af}(l)$  и  $\tilde{c}_{bf}(l)$ :

$$1 - \left| \frac{\tilde{c}_{af}(i)}{\tilde{c}_{af}(i-D)} \right| < \varepsilon, \quad 1 - \left| \frac{\tilde{c}_{bf}(i)}{\tilde{c}_{bf}(i-D)} \right| < \varepsilon, \\ i = D+1, D+2, D+3, \dots$$

При одновременном выполнении этих целевых условий процесс фильтрации считаем завершенным.

Параметр  $D$  выбирается пропорционально исследуемой частоте:  $D \sim \omega$ . Большой частоте  $\omega$  соответствует небольшой период (8), а так как ошибка фильтрации фактически сходится линейно по времени, то необходимо выбирать  $D$  достаточно большим, чтобы адекватно анализировать поведение  $\tilde{c}_{af}(l)$  и  $\tilde{c}_{bf}(l)$ . При малом  $\omega$  ситуация противоположная, и следует выбирать  $D$  небольшим. Вообще при выборе  $D$  следует учитывать специфику конкретной решаемой задачи, например, возможные ограничения на длительность фильтрации.

Анализ точности получаемых оценок  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{\beta}(\omega, l)$  ввиду отсутствия информации о внешнем возмущении и объекте в общем случае невозможен (в выражениях (10) участвуют неизвестные амплитуды, фазы и частоты внешнего возмущения, а также соответствующие им значения частотной характеристики объекта по внешнему возмущению).

Однако при выполнении неравенств

$$-\frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l} + \tilde{\alpha}(\omega, l) \leq \alpha(\omega) \leq \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l} + \tilde{\alpha}(\omega, l), \quad (16)$$

можно выписать верхнюю оценку ошибок фильтрации для соответствующего  $l$ :

$$|\tilde{\alpha}(\omega, l) - \alpha(\omega)| \leq \frac{\tilde{c}_{af}(l)}{l}. \quad (17)$$

Проверить условие (16) на практике невозможно, поэтому пользоваться неравенством (17) нужно с известной осторожностью. Для выполнения условий (16) необходимо, чтобы последовательность ошибок оценивания  $\hat{\alpha}(i, \omega) - \alpha(\omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , имела хотя бы два элемента разных знаков (есть хотя бы две такие экспериментальные оценки частотного параметра, одна из которых больше истинного значения  $\alpha(\omega)$ , а другая меньше), но это условие может не выполняться для многих практических сигналов. Так, при постоянном внешнем возмущении экспериментальные оценки  $\hat{\alpha}(i, \omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , ведут себя монотонным образом  $\hat{\alpha}(i, \omega) = \alpha(\omega) + c/i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $c$  — некоторая константа, зависящая от величины  $f(t) = \text{const}$ . В этом случае решение задачи (13) имеет вид:

$$\tilde{\alpha}(\omega, l) = \alpha(\omega) + \frac{2c}{l+1}, \\ \tilde{c}_{af}(l) = c \frac{l-1}{l+1},$$

откуда следует, что условие (16) не выполняется для всех  $l > 2$ . При этом асимптотическая сходимость  $\tilde{\alpha}(\omega, l) \rightarrow \alpha(\omega)$ , естественно, сохраняется, и предложенный способ определения длительности фильтрации применим и в этом случае.

Далее коротко обсуждаются численные аспекты решения задачи (13).

### 3.2. Решение задачи линейного программирования

Найти точное решение задачи (13) можно, учитывая тот факт, что кривые, задаваемые решением задачи  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$ , касаются экспериментально полученных оценок  $\hat{\alpha}_i(\omega)$ ,  $i = 1, l$ , только в двух точках (зажимают их «сверху» и «снизу»). Для этих двух оценок частотных параметров неравенства (14) будут равенствами, из которых можно найти решение задачи  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$ .

Алгоритм поиска решения задачи линейного программирования формулируется следующим образом.

1. Для всех различных попарных сочетаний оценок частотных параметров вычисляются кандидаты на решение задачи:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{af}^{[v]}(l) &= (\hat{\alpha}(i, \omega) - \hat{\alpha}(j, \omega)) \frac{ij}{i+j}, \\ \tilde{\alpha}^{[v]}(\omega, l) &= \frac{1}{2} \left( \hat{\alpha}(i, \omega) + \hat{\alpha}(j, \omega) - \tilde{c}_{af}^{[v]}(l) \frac{j-i}{ij} \right), \\ v &= \overline{1, l(l+1)/2}, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad j = \overline{i+1, l}.\end{aligned}$$

Формулы соответствуют случаю, когда  $\hat{\alpha}(i, \omega) \geq \hat{\alpha}(j, \omega)$ , иначе получим  $\tilde{c}_{af}^{[ij]}(l) < 0$ . Чтобы этого избежать, в подобных ситуациях будем менять местами  $i$  и  $j$  и  $\hat{\alpha}(i, \omega)$  и  $\hat{\alpha}(j, \omega)$ .

2. Среди рассчитанных пар параметров  $\tilde{c}_{af}^{[v]}(l)$  и  $\tilde{\alpha}^{[v]}(\omega, l)$ ,  $v = \overline{1, l(l+1)/2}$ , ищется пара, для которой выполняются условия (14) и у которой параметр  $\tilde{c}_{af}^{[v]}(l)$  имеет минимальное значение. Это и будет искоемое решение задачи  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{af}(l)$ .

Алгоритм решения носит комбинаторный характер, что в условиях ограниченных вычислительных мощностей технологического процесса может затруднить его применение для больших размерностей  $l$ , особенно учитывая, что сам метод конечно-частотной идентификации подразумевает одновременную фильтрацию сразу на нескольких кратных частотах [11], для каждой из которых необходимо решать задачу линейного программирования.

Альтернативой изложенному выше аналитическому методу решения задачи линейного программирования может служить численный метод одномерной минимизации выпуклой функции, например, метод золотого сечения [14]. Покажем, как задача (13) сводится к одномерному поиску. Пусть есть фиксированное значение  $\tilde{\alpha}(\omega)$ . Соответствующее ему значение  $\tilde{c}_{af}$  можно найти как  $\tilde{c}_{af}(\tilde{\alpha}(\omega)) = \max[i|\tilde{\alpha}(\omega) - \hat{\alpha}(i, \omega)|]$ ,  $i = \overline{1, l}$ , тогда задача сводится к  $\min \tilde{c}_{af}(\tilde{\alpha}(\omega))$  при  $\tilde{\alpha}(\omega) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ , где  $\alpha_{\min} = \min(\hat{\alpha}(\omega))$ ,  $\alpha_{\max} = \max(\hat{\alpha}(i, \omega))$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Число итераций  $N$  метода золотого сечения, необходимое для получения решения (по  $\tilde{\alpha}$ ) с точностью  $\varepsilon_{3c}$ , определяется формулой:

$$N = \log \left( \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\varepsilon_{3c}} \right) / \log \varphi_{3c} - 1,$$

где  $\varphi_{3c} = 1,618\dots$  — золотое сечение.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим объект управления (1) с заданными параметрами:

$$(18s^2 + 8,6s + 1)y = (1,5s + 1)u + f.$$

Для экспериментов выберем тестовую частоту равной  $\omega = 1/8,6 = 0,116$  с единичной амплитудой. Ей соответствуют значения частотных параметров (3) и испытательный сигнал (4) вида  $\alpha(\omega) = 0,592$ ,  $\beta(\omega) = -0,552$  и  $u(t) = \sin(0,116t)$ . Этому сигналу соответствует период испытательной частоты (8)  $T = 54,04$ , начало фильтрации сдвинуто на один период ( $q = 1$ ).

Положим, что внешнее возмущение

$f(t) = \text{sign}[\sin(0,1221t - 18^\circ)] + \text{sign}[\sin(0,1105t - 342^\circ)]$  представляет собой сумму двух меандров, имеющих соответственно  $\eta = [1,05 \ 0,95]$  и  $\rho_f = [1 \ 1]$ . Фазы выбраны таким образом, что в момент начала фильтрации  $t_f = 54,04$  внешнее возмущение  $f(t_f) = 0$ . В § 2 показано, что при таких  $\eta$  будут наблюдаться значительные ошибки в течение процесса фильтрации. Например, определение длительности фильтрации согласно формулам (7) дает следующие результаты.

Длительность идентификации составила  $L = 15$  периодов испытательной частоты (общая длительность  $\tau = (q + L)T = 864,64$  с), а сами значения оценок параметров составили:  $\hat{\alpha}(L, \omega) = 0,327$  (ошибка 44,8 %),  $\hat{\beta}(L, \omega) = -0,222$  (ошибка 59,7 %).

Такой результат фильтрации можно объяснить, если взглянуть на графики изменения  $\hat{\alpha}(i, \omega)$  и  $\hat{\beta}(i, \omega)$ , изображенные на рис. 1, где они выделены точками, для наглядности соединенными между собой. По ним видно, что при  $L = 15$  оценки  $\hat{\alpha}(L, \omega)$  и  $\hat{\beta}(L, \omega)$  мало меняют свои значения по сравнению с предыдущим периодом фильтрации, хотя сами значения оценок при этом лежат довольно далеко от истинных значений.

Теперь будем применять предложенный в статье способ определения длительности фильтрации. Ширину окна, на котором будем анализировать изменение  $\tilde{c}_{af}$  и  $\tilde{c}_{bf}$ , выберем как  $D = 5$ . Длительность эксперимента при этом составила  $L = 18$  периодов частоты  $\omega$  (соответственно  $\tau = 1026,76$  с) и были получены значения оценок частотных параметров:  $\tilde{\alpha}(\omega, L) = 0,586$  (ошибка 1,12 %),  $\tilde{\beta}(\omega, L) = -0,572$  (ошибка 3,66 %), при этом  $\tilde{c}_{af}(L) = 3,88$  и  $\tilde{c}_{bf}(L) = 5,25$ . На рис. 1 сплошными линиями изображены соответствующие кривые  $\pm \tilde{c}_{af}(L)/i + \tilde{\alpha}(\omega, L)$  и  $\pm \tilde{c}_{bf}(L)/i + \tilde{\beta}(\omega, L)$ , также прерывистыми прямыми отдельно показаны  $\tilde{\alpha}(\omega, L)$ ,  $\alpha(\omega)$  и  $\tilde{\beta}(\omega, L)$ ,  $\beta(\omega)$  (на обоих рисунках они практически совпадают).

На рис. 2 изображены графики изменения решений задачи (13):  $\tilde{c}_{af}(l)$ ,  $\tilde{\alpha}(\omega, l)$  и  $\tilde{c}_{bf}(l)$ ,  $\tilde{\beta}(\omega, l)$  по мере увеличения числа периодов фильтрации. Сплошными линиями изображены точные аналитические решения задачи

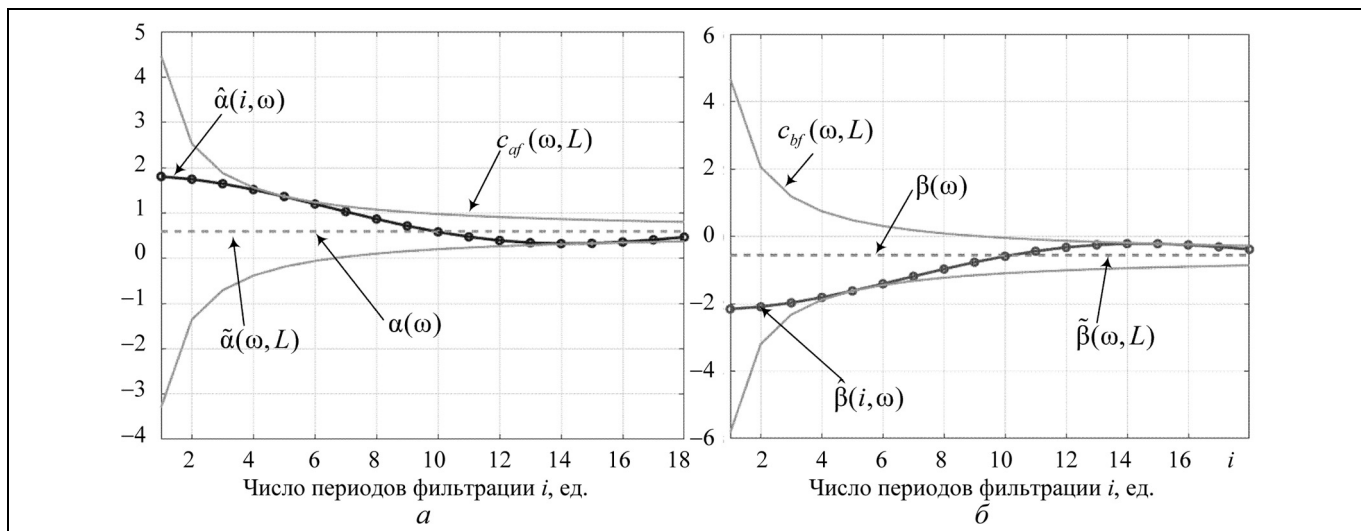


Рис. 1. Результаты фильтрации:  $a$  — параметр  $\alpha(\omega)$ ,  $b$  — параметр  $\beta(\omega)$

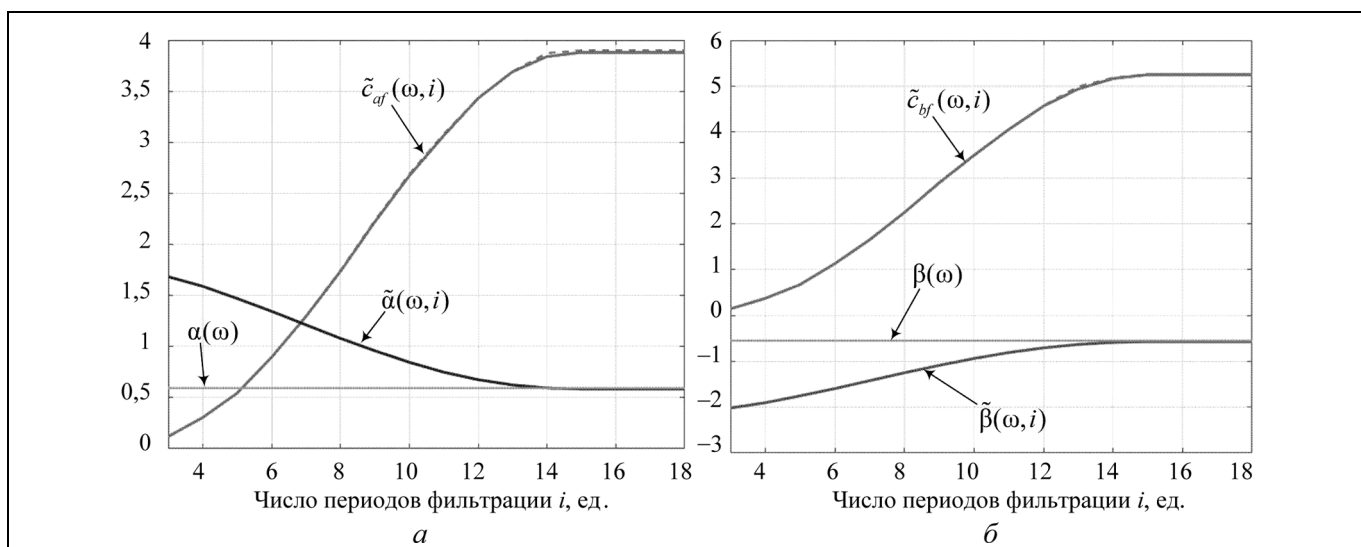


Рис. 2. Динамика изменения решений задачи (13):  $a$  — параметр  $\alpha(\omega)$ ,  $b$  — параметр  $\beta(\omega)$

(13), а прерывистыми — приближенные, полученные описанным методом золотого сечения. Также сплошными линиями показаны истинные значения частотных параметров. По графикам заметно, что  $\tilde{c}_{af}$  и  $\tilde{c}_{bf}$  ведут себя монотонно, а при приближении  $l$  к  $L = 18$  они практически перестают меняться, что соответствует завершению процесса фильтрации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется процесс фильтрации, применяемый при конечно-частотной идентификации, для определения оценок частотных параметров идентифицируемого объекта управления. С помощью решения специальной задачи линейного програм-

мирования находятся значения двух параметров: оценки частотного параметра и коэффициента, характеризующего динамику ошибки фильтрации. Сформулирован алгоритм фильтрации с определением ее длительности на основе изменения второго параметра. Даны некоторые соображения по оценке точности найденных частотных параметров. Приводится численный пример, который демонстрирует эффективность предложенного алгоритма по сравнению с использовавшимся ранее способом определения длительности фильтрации.

Основная идея предложенного подхода проста и естественна, поэтому, хотя статья и посвящена его применению в конечно-частотной идентификации, описанный алгоритм может применяться



в любой схожей задаче, когда необходимо оценить динамику сходимости некоторого немонотонно сходящегося процесса.

Дальнейшие перспективы развития данного подхода заключаются в получении гарантированных оценок точности частотных параметров для фиксированных классов возмущений и анализе связи ошибок фильтрации с итоговыми результатами идентификации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ljung, L.* Perspectives on System Identification // Annual Reviews in Control. — 2010. — Vol. 34. — P. 1–12.
2. *Keesman, K.J.* System Identification. An Introduction. — London: Springer-Verlag. — 2011. — 334 p.
3. *Isermann, R., Münchhof, M.* Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Application. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. — 2011. — 705 p.
4. *Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., et al.* Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency Domain — Survey // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — Vol. AC-39. — No. 11. — P. 2245–2260.
5. *Vakilzadeh, M.K., Yaghoubi, V., McKelvey, T., et al.* Experiment Design for Improved Frequency Domain Subspace System Identification of Continuous-Time Systems // Proc. of the 17-th IFAC Symposium on System Identification. — Beijing, 2015. — P. 886–891.
6. *Li, X.-F., Chen, G., Wang, Y.-G.* IMC-PID Controller Design for Power Control Loop Based on Closed-loop Identification in the Frequency Domain // Proc. of the 14-th IFAC Symposium on Large Scale Complex Systems: Theory and Applications. — Riverside, 2016. — P. 79–84.
7. *Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Method of Identification // Preprints of the 10-th IFAC Symposium on System Identification. — Copenhagen, 1994. — Vol. 2. — P. 523–527.
8. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация: динамический алгоритм // Проблемы управления. — 2009. — № 4. — С. 2–8. [*Alexandrov, A.G., Orlov, Yu.F.* Finite-Frequency Identification: Dynamic Algorithm // Control Sciences. — 2009. — No. 4. — P. 2–8. (In Russian)]
9. *Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация многомерных объектов при почти произвольных ограниченных возмущениях // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 2. — С. 280–281. [*Orlov, Yu.F.* Finite-Frequency Identification of Multidimensional Objects under Almost Arbitrary Bounded Variations // Differential Equations. — 2006. — Vol. 42, no. 2. — P. 300–302.]
10. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: определение границ испытательных частот // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 11. — С. 3–14. [*Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Identification: Test Frequency Bounds // Automation and Remote Control. — 2001. — Vol. 62, iss. 11. — P. 1759–1769.]
11. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 10. — С. 128–147. [*Alexandrov, A.G., Orlov, Yu.F.* Comparison of the Two Methods of Identification under Unknown-but-Bounded Disturbances // Automation and Remote Control. — Vol. 66, iss. 10. — P. 1647–1665.]
12. *Alexandrov, A.G.* Finite-Frequency Identification: Selftuning of Test Signal // Preprints of the 16th IFAC World Congress. — Prague, 2005. — P. 295–301.
13. *Alexandrov, A.G., Palenov, M.V.* Self-Tuning PID-I Controller // Proceedings of the 18th IFAC World Congress. — Milano, 2011. — P. 3635–3640.
14. *Kiefer, J.* Sequential Minimax Search for a Maximum // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1953. — Vol. 4, no. 3. — P. 502–506.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 23.07.2018, после доработки 10.02.2020.

Принята к публикации 31.07.2020.

**Шатов Дмитрий Владимирович** — канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ dvshatov@gmail.com.

## DURATION OF FILTRATION PROCESS DURING FINITE-FREQUENCY IDENTIFICATION

D.V. Shatov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ dvshatov@gmail.com

**Abstract.** A linear control plant subjected to an external disturbance is considered. The disturbance is assumed to be an unknown bounded function. The finite-frequency identification allows us to find estimates of this control plant's parameters. It uses special integral filters (Fourier filters), that find estimates of the plant frequency response at a specific set of frequencies. A system of linear equations is formed from the set of the plant frequency response points. The solution of this system provides desired estimates of the plant parameters. Error dynamics of filtration process is studied. The research is based on known results that describe asymptotic characteristic of the Fourier filters errors in presence of unknown-but-bounded external disturbances. A new approach to determine the filtration duration is proposed, estimation of the filtration accuracy is described. The proposed approach is based on a special linear programming problem, the solution of which gives us an estimate of the filter value and a value of parameter that describes the rate of the filter error convergence. The last one is used for duration determination. The appropriate filtration algorithm is developed. Numerical experiments that prove efficiency of the proposed approach were carried out.

**Keywords:** finite-frequency identification, Fourier filter, linear programming, identification duration, estimation accuracy.



# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО МЕХАНИЗМА АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ: КОНСТРУКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ СРЕДСТВАМИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Н.А. Коргин, В.О. Корепанов

**Аннотация.** В работе рассматривается модель активной экспертизы как экспертизы с учетом возможной заинтересованности экспертов в ее результатах. Исследуется ее одномерная постановка — задача однокритериального коллективного выбора или, в другой терминологии, активного планирования. Дана постановка задачи синтеза оптимального механизма активной экспертизы для целевой процедуры экспертизы без учета активности экспертов. Представлено доказательство существования решения у задачи синтеза оптимального механизма одномерной активной экспертизы, для которой ранее был предложен лишь алгоритм его получения путем решения системы уравнений. Показано, что в рамках общепринятых допущений на класс целевых процедур, решение задачи активного планирования существует всегда и является так называемой обобщенной медианной схемой, описанной Herve Moulin в 1980 г. как класс неманипулируемых правил коллективного выбора (или механизмов в терминологии теории активных систем), эффективных по Парето. В среде имитационного моделирования разработана модель анализа механизма активной экспертизы на основе обобщенной медианной схемы и модель синтеза оптимального неманипулируемого механизма. Реализован также поиск параметров эквивалентного прямого механизма.

**Ключевые слова:** теория управления, организационно-техническая система, системный анализ, неманипулируемость.

## ВВЕДЕНИЕ

Под активной экспертизой понимается экспертиза с учетом возможной заинтересованности экспертов в ее результатах. Наиболее исследованной может считаться ее одномерная постановка — задача однокритериального коллективного выбора [1] или активного планирования в терминологии, предложенной в работе [2].

В 1980 г. Н. Moulin для однопиковых предпочтений агентов полностью описал [1] класс неманипулируемых правил коллективного выбора (или механизмов в терминологии теории активных систем [3]), эффективных по Парето, показав, что все эти механизмы коалиционно неманипулируемые.

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10609).

Причем описание можно считать конструктивным — была предложена аналитическая запись для любой из неманипулируемых процедур планирования — так называемые обобщенные медианные схемы (ОМС). В дальнейшем были предложены альтернативные описания данного класса [4], позволившие проводить дальнейшие исследования свойств ОМС и расширить их применение на многокритериальные задачи коллективного выбора [5] и активного планирования [6].

Так как в работе [7] было показано, что однопиковые предпочтения агентов являются богатым классом, то можно утверждать, что задачу активного планирования для данных предпочтений достаточно решать на классе неманипулируемых механизмов. В работе [8] этот же результат был получен следующим образом. Для широкого класса механизмов, индуцирующих игры, в которых решением игры является равновесие Нэша, было

показано, что для любого механизма из этого класса существует эквивалентный прямой механизм (и был предъявлен алгоритм его построения). Описание неманипулируемых механизмов однокритериального коллективного планирования, полученное в работе [8], было согласовано с аналитическим описанием, полученным в работе [1].

В то же время вопросы, связанные с выбором конкретной ОМС для применения на практике, оставались вне фокуса внимания специалистов по теории коллективного выбора. Отчасти это было обосновано тем, что в случае одномерного выбора все ОМС являлись оптимальными по Парето, а оптимальность по Парето — ключевой критерий эффективности в задачах коллективного выбора. В настоящее время активно ведутся исследования, как меняются свойства неманипулируемости ОМС при отказе от однопиковости предпочтений агентов [9, 10]. Вопрос о том, какую из ОМС выбирать при выполнении условий, в рамках которых ОМС являются неманипулируемыми, рассматривался в рамках теории активных систем. Были предложены несколько критериев оптимальности решения задач одномерной активной экспертизы [8], в частности, аналог критерия  $H_\infty$  — критерия погрешности манипулирования, определяющего, насколько результат активной экспертизы может максимально отличаться от результата, получаемого при условии, что все эксперты не являются активными и сообщают достоверную информацию, и относительная версия данного критерия, получившая в современной литературе название «цена анархии» [11]. На основе критерия была сформулирована задача активного планирования: для заданной (целевой) процедуры, которая является оптимальной без учета активности агентов, нужно подобрать процедуру, обладающую минимальной погрешностью манипулирования относительно целевой [6]. Задача активного планирования была решена для отдельного класса целевых процедур [8], было сформулировано ее общее решение [6]. Это позволяет не только внедрять неманипулируемые механизмы в современные системы поддержки принятия решений, см., например, работу [12], но и ставить задачу минимизации погрешности для действующих процедур принятия коллективных решений.

В рамках настоящей статьи описывается, как решение задачи активного планирования может быть реализовано в рамках системы имитационного моделирования РДС [13]. Необходимо отметить, что в статье [6] не изучался вопрос существования решения задачи активного планирования — был предложен лишь алгоритм его получения путем решения системы уравнений. Поэтому в настоя-

щей статье мы также уделим внимание этому теоретическому вопросу — показав, что в рамках общепринятых допущений на класс целевых процедур решение задачи активного планирования, предложенное в статье [6], существует всегда и является ОМС.

Структура дальнейшего изложения материала такова. В § 2 даются формальные определения и приводятся основные предварительные формальные результаты, § 3 посвящен доказательству существования решения задачи активного планирования. В § 4 описывается имитационный алгоритм решения задачи активного планирования на основе системы моделирования РДС [13].

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее принята система обозначений, предложенная в работе [6]. Приведем основные необходимые понятия и определения.

Обозначим через  $X$  множество допустимых значений *результата экспертизы*  $x$  для организационной системы (ОС),  $\Omega$  — множество возможных значений *исходной информации*  $\omega$ , передаваемой экспертами (агентами) организатору экспертизы (Центру), на основании которых определяется результат экспертизы. Пусть в соответствии с некоторым критерием эффективности планирования в ОС определена *целевая процедура планирования*  $f: \Omega \rightarrow X$  — оптимальная процедура без учета активности агентов.

Заинтересованность экспертов в определенных результатах экспертизы формализуется *функциями полезности*  $u^i: X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , где  $i \in N$  — индекс агента,  $N$  — множество агентов. Класс возможных функций полезности обозначим  $U^i$ . Набор функций полезности агентов (*профиль предпочтений*) обозначим  $u$ , а множество его возможных значений —  $U = \times_{i \in N} U^i$ . С точки зрения теории механизмов (точнее, теории *эффективных* механизмов) особую роль играют процедуры планирования, которые являются *эффективными по Парето* —  $\forall u \in U \forall \omega \in \Omega \neg \exists x \in X: \exists i \in N u^i(x, \omega) > u^i(f(u, \omega), \omega)$  и  $\neg \exists j \in N u^j(x, \omega) < u^j(f(u, \omega), \omega)$ .

При этом может оказаться, что целевая процедура не *устойчива к активности агентов*. Проблема проявления активности формализуется следующим образом. При заданных  $\omega$  и  $u$  может оказаться, что для некоторых агентов выгодным оказывается сообщение недостоверной информации, поэтому Центр получает от агентов *искаженную информацию*  $\tilde{\omega} \neq \omega$ , что может привести к падению эффективности планирования.

Преобразование  $\omega_f: \Omega \times U \rightarrow \Omega$  описывает искажение передаваемой информации агентами с учетом их активности при заданной  $f$ . В рамках теоретико-игрового подхода под  $\omega_f(\omega, u)$  подразумеваются равновесные стратегии экспертов в игре, возникающей из-за применения процедуры планирования. Если  $\omega_f = \omega$ , то процедура планирования является неманипулируемой, т. е. *устойчивой к активности* агентов.

Если  $\omega_f \neq \omega$ , то актуален вопрос — можно ли уменьшить потери, возникающие при планировании как следствие активности агентов? Для ответа на этот вопрос необходимо введение критерия, определяющего потери в ОС при  $\omega_f \neq \omega$ . В настоящей работе в качестве такого критерия принята *близость* результатов планирования, формализуемая следующим образом. Обозначим  $\Delta_f = \max_{\omega \in \Omega, u \in U} \|f(\omega) - f(\omega_f(\omega, u))\|_L$  — *погрешность манипулирования* — максимальное рассогласование результатов экспертизы без и с учетом активности экспертов по некоторой метрике  $L$ . По умолчанию в работах [6, 8] используется метрика  $L_1$ . Очевидно, что это не единственный критерий, по которому можно оценивать потери манипулирования, см., например, работу [9].

В случае, если процедура не устойчива к активности, оценивается, насколько сильно результат планирования может быть искажен активными подчиненными.

Обозначим *механизм*  $\rho = \langle M, \pi \rangle$ , где  $M = \times_{i \in N} M^i$ ,  $M^i$  — множество допустимых сообщений эксперта  $i \in N$ ,  $\pi: M \rightarrow X$  — процедура *активного планирования*, учитывающая активность экспертов. Множества  $M$  и  $\Omega$  могут не иметь между собой ничего общего. Введем преобразование  $m_\pi: \Omega \times U \rightarrow M$ , определяющее зависимость сообщений активных экспертов в процедуре  $\pi$ , при заданных исходных значениях  $\omega$  и профиле предпочтений  $u$ . В рамках теоретико-игрового подхода подразумеваются равновесные стратегии экспертов в игре, порожденной рассматриваемым механизмом. При этом конструкция  $\langle \Omega, f \rangle$  также может рассматриваться как некоторый механизм, в случае возможности представления  $\Omega = \times_{i \in N} \Omega^i$ , для которого  $m_\pi \equiv \omega_f$ . Множество допустимых процедур активного планирования обозначим  $\Pi$ , множество допустимых механизмов —  $P$ .

По аналогии с погрешностью манипулирования определим максимальное рассогласование результатов планирования целевой процедуры и механизма  $\rho$ :

$$\Delta_f(\rho) = \max_{\omega \in \Omega, u \in U} \|f(\omega) - \pi(m_\pi(\omega, u))\|_L.$$

**Определение 1.** Механизм  $\rho_f^* \in P$  является решением задачи активного планирования, если он аппроксимирует целевую процедуру  $f$ :

$$\rho_f^* \in \text{Arg} \min_{\rho \in P} \Delta_f(\rho). \quad \blacklozenge \quad (1)$$

В определении 1 подразумевается, что множество механизмов  $P$  должно быть «замкнуто» в том смысле, что любой из механизмов может быть реализован и  $\min_{\rho \in P} \Delta_f(\rho)$  существует.

Очевидно, что «идеальным» решением задачи активного планирования служит механизм экспертизы, для которого  $\Delta_f(\rho) \equiv 0$ .

**Определение 2.** Механизм  $\rho_f^* \in P$  полностью реализует целевую процедуру  $f$ , если  $\Delta_f(\rho) \equiv 0$ . При этом соответствующая целевая процедура называется полностью реализуемой.  $\blacklozenge$

Для определения достаточности и целесообразности применения некоторых классов механизмов для решения задачи активного планирования вводятся следующие определения.

**Определение 3.** Механизмы  $\rho = \langle M, \pi \rangle$  и  $\tilde{\rho} = \langle \tilde{M}, \tilde{\pi} \rangle$  эквивалентны для заданных  $\Omega$  и  $U$ , если  $\forall \omega \in \Omega, \forall u \in U \pi(m_\pi(\omega, u)) \equiv \tilde{\pi}(\tilde{m}_{\tilde{\pi}}(\omega, u))$ .  $\blacklozenge$

В определении 1 может казаться, что механизмы дают улучшение по сравнению с обычной целевой процедурой:  $\min_{\rho \in P} \Delta_f(\rho) < \Delta_f$ , но такое не всегда верно. С другой стороны, поскольку целевая процедура может считаться механизмом  $\langle \Omega, f \rangle$ , то верно неравенство  $\min_{\rho \in P} \Delta_f(\rho) \leq \Delta_f$ , поэтому мы можем и не улучшить погрешность манипулирования, но ухудшить ее не сможем.

**Определение 4.** Процедура планирования  $f$  обладает нередуцируемой погрешностью манипулирования, если механизм  $\langle \Omega, f \rangle$  является решением задачи активного планирования.  $\blacklozenge$

Будем обозначать  $f_\rho$  целевую процедуру планирования, которая реализуется некоторым механизмом планирования  $\rho$ . Если обозначить  $F_P$  — множество всех целевых процедур планирования, реализуемых классом механизмов  $P$ , то определение (1) решения задачи активного планирования может быть сформулировано в терминах подобных процедур:

$$\rho: f_\rho \in \text{Arg} \min_{f \in F_P} \max_{\omega \in \Omega} \|f(\omega) - \tilde{f}(\omega)\|. \quad (2)$$

Активная экспертиза в данной статье рассматривается как частный случай *однокритериального планирования*, т. е. рассматриваем случай  $X \equiv [\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathbb{R}^1$ ,  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^1$ ,  $\underline{x} < \bar{x}$ .

В задачах однокритериального планирования предпочтения  $u^i: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$  агента  $i \in N$  называются *однопиковыми*, если  $\forall \omega \in \Omega$ :

- существует единственная точка пика  $\tau^i = \arg \max_{x \in X} u^i(\omega, x)$ ;
- $\forall z, z' \in X$ , если  $\tau^i > z > z'$ , то  $u^i(z) \geq u^i(z')$ , если  $z > z' > \tau^i$ , то  $u^i(z) \leq u^i(z')$ .

Класс однопиковых предпочтений будем обозначать  $U_T^1$ .

В 1980 г. Н. Moulin показал, что если предпочтения агентов — из  $U_T^1$ , а  $X \subseteq \mathbb{R}^1$ , то любая неманипулируемая процедура коллективного выбора — *обобщенная медианная схема* [1]:

$$x = \min_{S \subseteq N} (\max_{i \in S} (a(S), \tau^i)), \quad (3)$$

где  $a(S) \in X$  — параметры настройки механизма, определяемые для каждой из возможных групп агентов  $S \subseteq N \setminus \emptyset$ , причем  $a(S) \geq a(\tilde{S})$  при  $S \subset \tilde{S}$ . Если  $a(S)$  не зависит от того, кто именно из агентов входит в группу  $S$ , а зависит лишь от числа агентов в группе  $\#S$ , то правило является *анонимным*.

Значимость неманипулируемых механизмов при активном коллективном однокритериальном планировании в ОС обусловлена следующими фактами. Все ОМС являются эффективными по Парето [14]. Более того, в модели, сформулированной в работе [15], все ОМС коалиционно неманипулируемы — см., например, работу [14].

В 1979 г. Р. Dasgupta, Р. Hammond и Е. Maskin доказали [7], что на классе однопиковых предпочтений агентов множество реализуемых процедур совпадает с множеством процедур, которые реализуемы в доминантных стратегиях; т. е. только ОМС могут быть реализуемыми процедурами планирования.

В 1989 г. В.Н. Бурковым исследовался класс механизмов планирования  $P1 = \{ \langle X^n, \pi(m) \rangle \}$ , удовлетворяющих требованиям [8]:

- процедура  $\pi(m)$  монотонна по всем переменным при  $m \in X^n$ ;
- функция  $\pi(m)$  непрерывна по всем переменным при  $m \in X^n$ ;
- если обозначить  $m^a = (a, \dots, a)$ ,  $a \in X$ , то  $\pi(m^a) = a$  (условие единогласия).

Было доказано, что  $\forall r \in P1$  существует эквивалентный прямой неманипулируемый механизм. Поэтому на классе механизмов планирования  $P1$  решение любой задачи планирования достаточно искать среди неманипулируемых механизмов.

В работе [8] было показано, что линейные свертки как целевые процедуры обладают нереду-

цируемой погрешностью манипулирования. Данный результат был расширен на весь класс механизмов  $P1$  [6].

**Утверждение 1** [6]. Пусть целевая процедура планирования  $f(m)$  такова, что механизм  $\langle X^n, f(m) \rangle \in P1$ . Тогда минимум погрешности манипулирования обеспечивает ОМС, в которой для произвольной группы  $S \in 2^N \setminus \emptyset$ ,  $a(S)$  является решением уравнения

$$2a(S) = f(\underline{m}(S)) + f(\bar{m}(S)), \quad (4)$$

где

$$\underline{m}(S) = \{ \forall i \in S, m^i = \underline{x} \wedge \forall i \in N \setminus S, m^i = a(S) \},$$

$$\bar{m}(S) = \{ \forall i \in S, m^i = a(S) \wedge \forall i \in N \setminus S, m^i = \bar{x} \}. \quad \blacklozenge$$

Именно алгоритм синтеза оптимального решения на основе (4) был реализован в описываемой далее имитационной модели. Однако в статье [6] не исследовалось, разрешима ли система уравнений (4) для любой целевой процедуры, механизм на основе которой принадлежит классу  $P1$ . Данный вопрос исследуется в следующем параграфе.

## 2. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Обозначим  $\underline{m}^i(S)$  и  $\bar{m}^i(S)$  — компоненты сообщений эксперта  $i \in N$  в векторах  $\underline{m}(S)$  и  $\bar{m}(S)$  соответственно и  $x^S$  — компоненты вектора сообщений экспертов из подмножества  $S \in 2^N \setminus \emptyset$ , в котором все эксперты сообщают величину  $x$ . Тогда  $\underline{m}(S) = (x^S, a(S)^{N \setminus S})$  и  $\bar{m}(S) = (a(S)^S, \bar{x}^{N \setminus S})$ . В соответствии с данным выше определением ОМС  $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset$   $a(S) \in [\underline{x}, \bar{x}]$ , поэтому  $\forall i \in N$   $\underline{m}^i(S) \leq \bar{m}^i(S)$ .

Было показано [8], что для механизмов из класса  $P1$  процедура не просто монотонная, но и неубывающая. Откуда следует, что  $f(\underline{m}(S)) \leq f(\bar{m}(S))$ , так как  $\forall i \in N$   $\underline{m}^i(S) \leq \bar{m}^i(S)$ .

**Утверждение 2.** Пусть целевая процедура планирования  $f(m)$  такова, что механизм  $\langle X^n, f(m) \rangle \in P1$ . Тогда  $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset$  уравнение  $2y = f(\underline{x}^S, y^{N \setminus S}) + f(y^S, \bar{x}^{N \setminus S})$  при  $y \in [\underline{x}, \bar{x}]$  всегда имеет хотя бы одно решение.

**Доказательство.** Поскольку  $f(m)$  непрерывная и неубывающая функция, из условия единогласия следует, что функция  $\varphi(y) = \frac{1}{2} (f(\underline{x}^S, y^{N \setminus S}) + f(y^S, \bar{x}^{N \setminus S}))$  непрерывная, не убывает, и:

$\underline{x} \leq \varphi(\underline{x})$ , так как при  $y = \underline{x}$ :  $2\underline{x} \leq f(\underline{x}^N) + f(\underline{x}^S, \bar{x}^{N \setminus S})$ , что эквивалентно  $\underline{x} \leq f(\underline{x}^S, \bar{x}^{N \setminus S})$ ;



$\bar{x} \geq \varphi(\bar{x})$ , так как при  $y = \bar{x}$ :  $2\bar{x} \geq f(\underline{x}^S, \bar{x}^{N \setminus S}) + f(\bar{x}^N)$ , что эквивалентно  $\bar{x} \geq f(\underline{x}^S, \bar{x}^{N \setminus S})$ .

Отсюда следует, что существует, как минимум, одна неподвижная точка  $y \leq \varphi(y)$  при  $y \in [\underline{x}, \bar{x}]$ . ♦

Таким образом доказано, что система из уравнений на основе (4) всегда имеет как минимум одно решение. Однако она может иметь несколько решений, поэтому необходимо доказать, что среди этого множества решений найдется такое, которое удовлетворяет требованиям к ОМС.

**Утверждение 3.** Пусть целевая процедура планирования  $f(s)$  такова, что механизм  $\langle X^n, f(m) \rangle \in P1$ . Тогда для произвольных групп агентов  $S, \tilde{S} \subseteq 2^N \setminus \emptyset$  таких, что  $S \subset \tilde{S}$ , найдутся такие решения (4), что  $a(S) \geq a(\tilde{S})$ .

Доказательство. Обозначим  $\varphi(y) = \frac{1}{2}(f(\underline{x}^S, y^{N \setminus S}) + f(y^S, \bar{x}^{N \setminus S}))$ ,  $\tilde{\varphi}(y) = \frac{1}{2}(f(\underline{x}^{\tilde{S}}, y^{N \setminus \tilde{S}}) + f(y^{\tilde{S}}, \bar{x}^{N \setminus \tilde{S}}))$ .

Пусть  $\tilde{S} \setminus S = \{i\}$ , тогда:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(f(\underline{x}^S, y^i, y^{N \setminus \tilde{S}}) + f(y^S, \bar{x}^i, \bar{x}^{N \setminus \tilde{S}}));$$

$$\tilde{\varphi}(y) = \frac{1}{2}(f(\underline{x}^S, \underline{x}^i, y^{N \setminus \tilde{S}}) + f(y^S, y^i, \bar{x}^{N \setminus \tilde{S}})).$$

Отсюда легко видеть, что  $\forall y \in [\underline{x}, \bar{x}] \varphi(y) \geq \tilde{\varphi}(y)$ . Следовательно, если  $y = \varphi(y)$ , то  $y \geq \tilde{\varphi}(y)$ . Так как при этом  $\tilde{\varphi}(\underline{x}) \geq \underline{x}$ , то найдется такой  $\tilde{y} \in [\underline{x}, y]$ , что  $\tilde{y} = \varphi(\tilde{y})$ . Откуда следует, что  $a(S) = \varphi(a(S)) \geq a(\tilde{S}) = \tilde{\varphi}(a(\tilde{S}))$ . ♦

Выбирая соответствующие решения для каждого  $S \in 2^N \setminus \emptyset$ , которые существуют всегда, мы действи-

тельно получаем ОМС, являющуюся решением задачи активного планирования для соответствующей целевой процедуры на основании утверждения 1. Это позволяет реализовать соответствующий алгоритм на практике.

### 3. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО МЕХАНИЗМА АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Рассмотрим построение имитационной модели активной экспертизы в системе РДС [13] для трех экспертов (агентов). Окно главной подсистемы мы разбили на области с блоками: название модели (вверху), внешние данные (слева), Мета-центр (верхняя полоса), Центр (средняя полоса), Агенты (нижняя полоса). Каждый блок в РДС может быть вычислительным блоком, который получает входные данные через входящие стрелки и отдает выходные данные через выходящие стрелки, а его внутренняя логика обработки данных задается пользователем с помощью выбора готовых блоков или программированием своего блока. Есть также отдельный вид блоков «подсистема», которые содержат внутри другие блоки, связанные с входами и выходами подсистемы и между собой для выполнения логически выделенной группы вычислений.

В системе РДС можно создавать несколько слоев в окнах подсистем для отображения/скрытия всех размещаемых на данном слое блоков. В главной подсистеме задано несколько конфигураций слоев (наборов отображаемых слоев), предназначенных для различного представления моделируемой системы, например, логика работы (конфигурация «Процессы») и пользовательский интерфейс режимов работы («Анализ» и «Синтез»), конфигурации можно легко переключать мышкой (рис. 1).

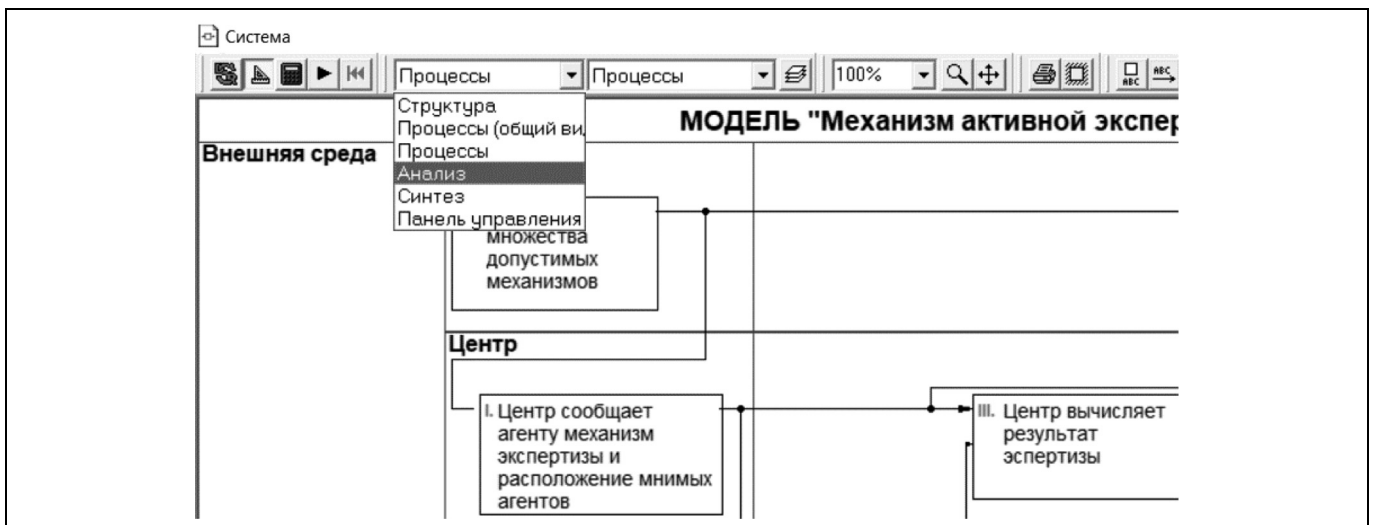


Рис. 1. Выбор конфигурации окна главной подсистемы



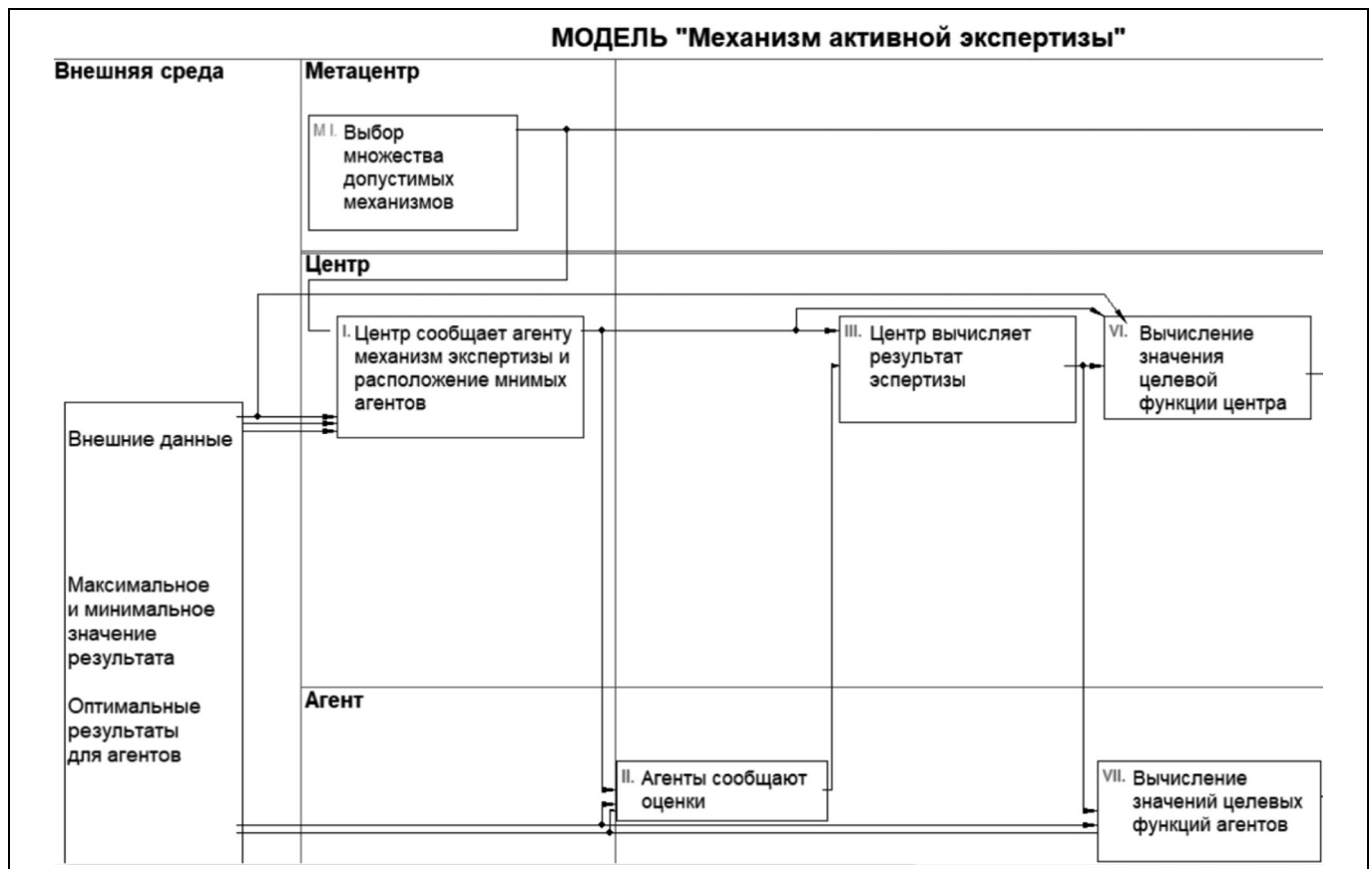


Рис. 2. Конфигурация «Процессы»

В качестве целевой процедуры планирования ОС была выбрана функция  $f(s) = \left( \sum_i \sqrt{s_i}/3 \right)^2$ .

Из-за анонимности целевой процедуры ОМС для случая трех экспертов имеет только два параметра:  $x(s, a) = \text{median}(s_1, s_2, s_3, a_1, a_2)$ , где  $a = (a_1, a_2)$  — вектор параметров механизма (заявки фантомных экспертов),  $s$  — вектор заявок экспертов. При параметрах  $a_1^* = f(\underline{x}, \underline{x}, \bar{x})$ ,  $a_2^* = f(\underline{x}, \bar{x}, \bar{x})$  ОМС является эквивалентным неманипулируемым механизмом. Эти параметры вычисляются в подсистеме «I. Центр сообщает...» и отображаются в блоке «Параметры эквивалентного механизма» на конфигурации «Синтез» (см. далее описание).

В качестве функций полезности экспертов возьмем функции  $u_i(x, r_i) = -|x - r_i|$ , где  $x$  — результат экспертизы, а  $r_i$  — точка пика эксперта  $i$  — наилучший, с точки зрения эксперта, результат экспертизы.

Подсистема «Внешние данные» содержит в качестве выходных данных все параметры модели, целевую процедуру Центра и функции полезности экспертов.

#### А. Порядок функционирования и информированность

Порядок функционирования задается на конфигурации «Процессы» (рис. 2). По хронологической последовательности блоки (шаги самой процедуры экспертизы) расположены слева направо. Перечислим основные шаги моделируемого процесса.

I. Центр сообщает экспертам механизм экспертизы и его параметры.

II. Эксперты сообщают свои оценки.

III. Центр в соответствии с объявленным механизмом определяет результат экспертизы.

Блоки «Процесса» (кроме блоков Метацентра) несут функциональную нагрузку — в них происходят необходимые для данного шага вычисления/ввод данных на основе полученных от предыдущих шагов данных и передача полученных результатов следующим блокам. Стрелки в РДС отображают и несут функцию передачи данных между блоками, по каждой стрелке передаются данные одного типа.

#### Б. Анализ — прогноз поведения агентов

Конфигурация «Анализ» (рис. 3) служит для оценки выигрышей центра и экспертов при раз-

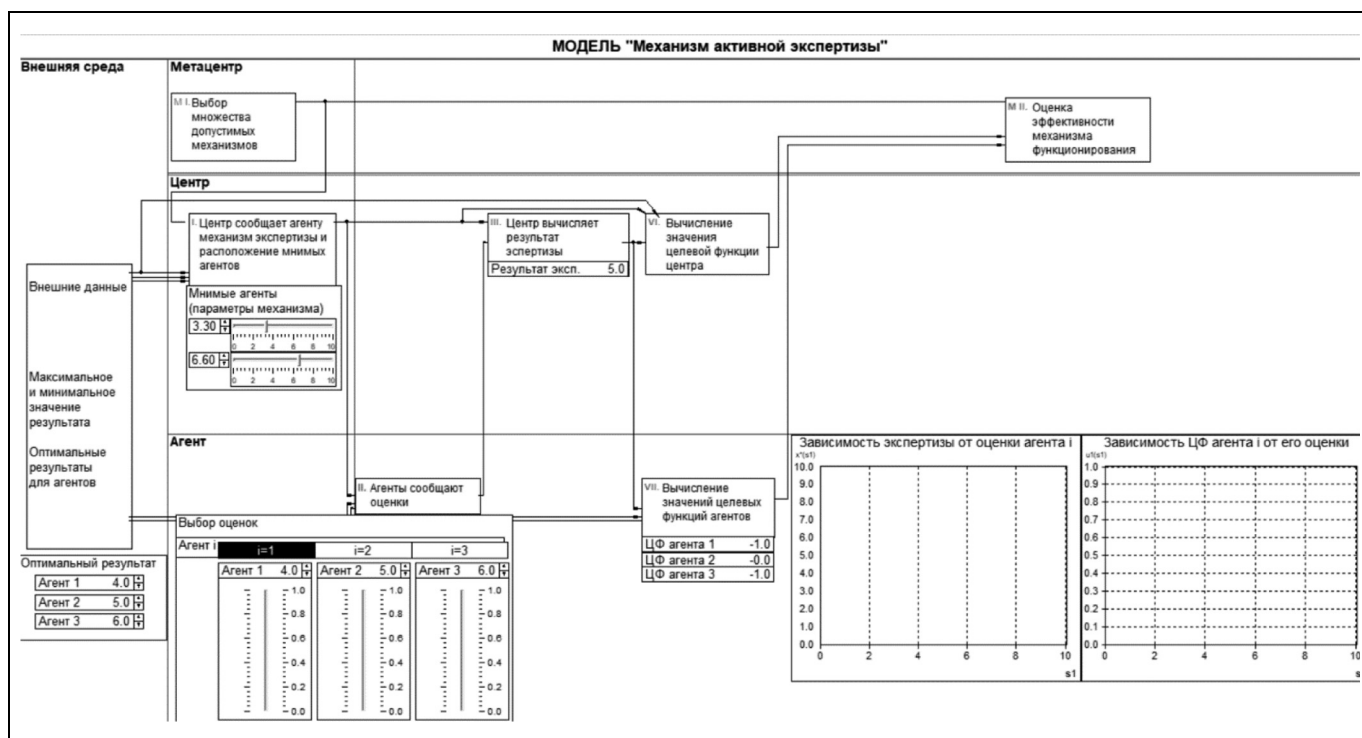


Рис. 3. Конфигурация «Анализ»

личных действиях экспертов, в том числе для поиска равновесных действий экспертов или оптимальных действий с точки зрения экспертов или центра.

На рис. 3 приведен внешний вид конфигурации «Анализ». Здесь отображаются блоки с конфигурации «Процессы» и к ним добавлен интерфейс для ввода и вывода данных. Внешними данными для анализа считаются действия экспертов (оценки). Оценки можно варьировать вручную плюс можно выбирать текущего агента, для которого в правой части интерфейса строятся графики зависимости результата экспертизы и целевой функции эксперта от заявки эксперта.

**В. Синтез — поиск оптимальных параметров механизма**

Конфигурация «Синтез» (рис. 4) служит для оценки выигрыша центра при различных действиях центра — выборе параметров механизма экспертизы ОМС.

На рис. 4 приведен внешний вид конфигурации «Синтез». Здесь к блокам конфигурации «Процессы» добавлен интерфейс управления и ввода данных для этапов механизма, связанных с Центром. Внешними данными считается действие Центра — параметры ОМС. Пользователь может вручную подбирать параметры механизма. При этом справа от поля даны значения параметров для построения эквивалентного неманипулируемого механиз-

ма. Пользователь может также запустить расчет параметров оптимального неманипулируемого механизма — нажатием кнопки «Старт».

Блоком «VI. Вычисление значения целевой функции Центра» рассчитывается значение критерия (\*) для эквивалентного неманипулируемого механизма и для медианного механизма с текущими параметрами, выбранными Центром.

Таким образом, пользователь данной модели РДС может исследовать модель активной экспертизы в качестве как агента, так и Центра.

#### 4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ

Комплекс РДС содержит встроенный по умолчанию переборный блок максимизации, так что приближенное (с заданной точностью аргумента) решение уравнения (4) ищется методом полного перебора для задачи максимизации:

$$-(f(\underline{m}(S)) + f(\bar{m}(S)))/2 - a(S) \rightarrow \max_{a(S)}. \quad (5)$$

Эта задача имеет решение вследствие утверждения 2.

Число параметров механизма равно двум из-за анонимности целевой процедуры. Сам алгоритм для каждого параметра реализован в подсистеме «Синтез» на скрытом слое «Синтез tech». В блоке «Операция над функциями» (рис. 5) формируется

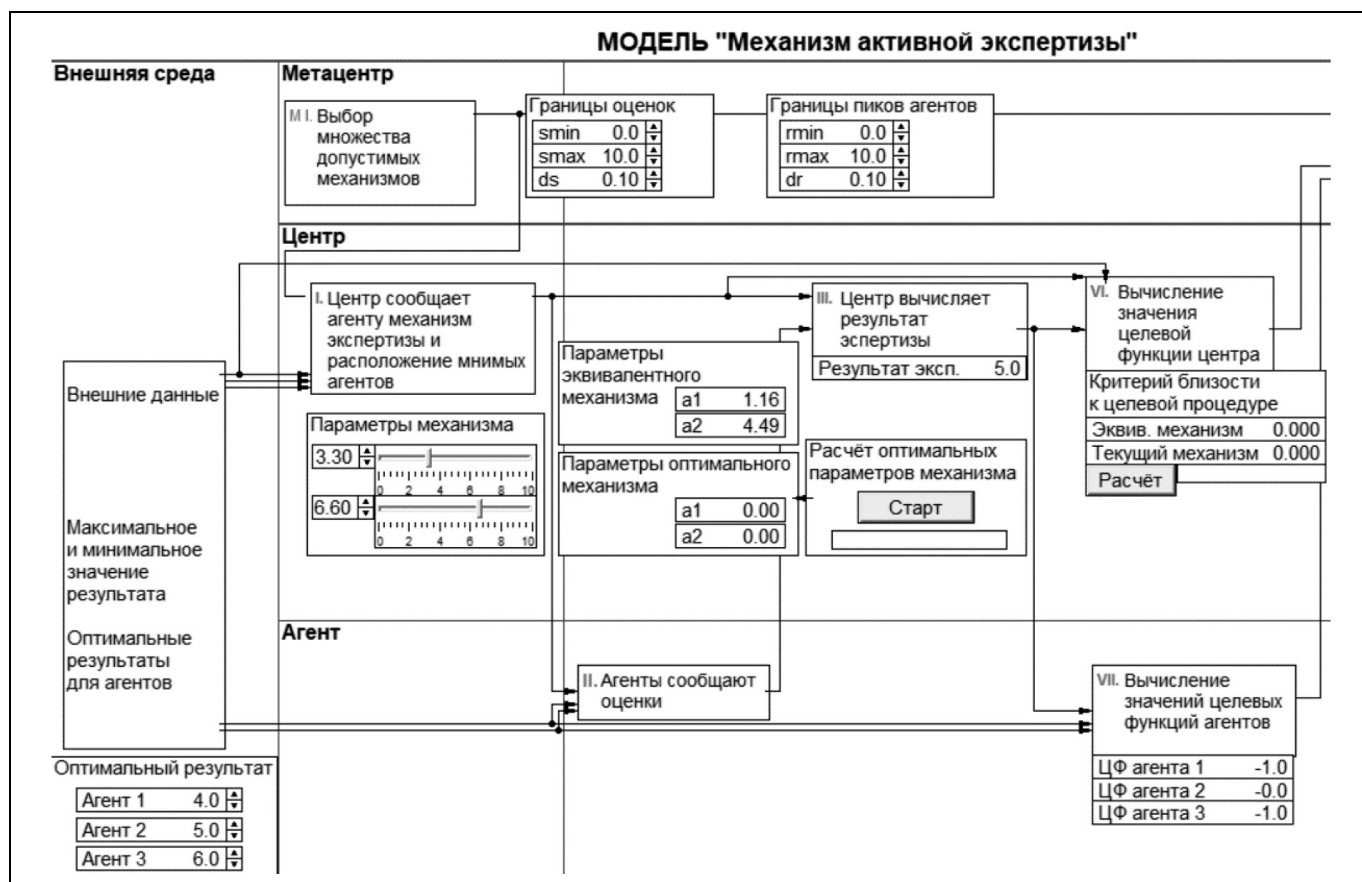


Рис. 4. Конфигурация «Синтез»

максимизируемая функция (5) из целевой процедуры. Затем эта функция поступает на вход блока «Внутренний максимизатор», который и реализует максимизацию полным перебором, получая границы перебора из блока «Границы».

Критерий (\*) вычисляется в подсистеме «VI. Вычисление значения целевой функции Центра» для эквивалентного неманипулируемого механизма и для механизма ОМС с параметрами, выбранными пользователем. Задача максимизации решается также приближенно с помощью встроенного блока полного перебора.

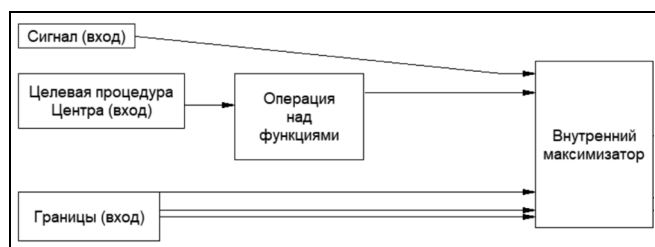


Рис. 5. Технология поиска параметров оптимального механизма ОМС

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты доказывают конструктивность ранее полученного решения задачи поиска оптимального механизма активной экспертизы и иллюстрируют возможности их реализации в системах имитационного моделирования на примере системы РДС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Moulin, H. On Strategy-proofness and Single-peakedness // Public Choice. — 1980. — Vol. 35, no. 4. — P. 437–455.
2. Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы принятия решений в управлении организационными системами: дисс. ... д-ра техн. наук. — М.: ИПУ РАН. — 2013. [Korgin, N.A. Strategy-proof decision mechanisms in organization systems control: Ph. D. theses. — Moscow: ICS RAS. — 2013. (in Russian)]
3. Бурков В.Н., Буркова И.В., Губко М.В. и др. Механизмы управления / под ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. — М.: Ленанд, 2010. — 192 с. [Burkov, V.N., Burkova, I.V., Goubko, M.V., et al. Control mechanisms / edited by corr. member of RAS D.A. Novikov. — Moscow: Lenand, 2010. — 192 p. (In Russian)]
4. Barberà, S., Gul, F., and Stacchetti, E. Generalized median voter schemes and committees // J. Econ. Theory. — 1993. — Vol. 61. — P. 262–289.

5. Barberá, S., Masso, J., Serizawa, S. Strategy-proof voting on compact ranges // *Games and Economic Behavior*. — 1998. — Vol. 25. — P. 272–291.
6. Коргин Н.А. Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы // *Управление большими системами*. — 2012. — Вып. 36. — С. 186–208. [Korgin, N.A. Representation of uniform mechanism of resource allocation as a strategy-proof mechanism of multi-criteria active expertise // *Control of big systems*. — 2012. — Vol. 36. — P. 186–208. (In Russian)]
7. Dasgupta, P., Hammond, P., Maskin, E. The implementation of social choice rules: Some general results on incentive compatibility // *The Review of Economic Studies*. — 1979. — Vol. 46, no. 2. — P. 185–216.
8. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. — М.: Наука, 1989. — 246 с. [Burkov, V.N., Danev, B., Enaleev, A.K., et al. Big systems: modeling organizational mechanisms. — Moscow: Science, 1989. — 246 p. (In Russian)]
9. Алескеров Ф.Т., Карабекян Д.С., Санвер Р.М., Якуба В.И. Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора // *Журнал Новой экономической ассоциации*. — 2009. — Т. 1, № 1. — С. 37–61. [Aleskerov, F.T., Karabekyan, D.S., Sunver, R.M., et al. Otsenka stepeni manipuliруемости izvestnykh skhem agregirovaniya v usloviyakh mnozhestvennogo vybora // *Journal of the New Economic Association*. — 2009. — Vol. 1, no. 1. — P. 37–61. (In Russian)]
10. Núñez, M., Pimienta, C., Xeferis, D. Implementing the Median. — 2018. Núñez, Matias and Pimienta, Carlos and Xeferis, Dimitrios, Implementing the Median (June 24, 2018). UNSW Business School Research Paper No. 2018-11. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3211193> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3211193>
11. Koutsoupas, E., Papadimitriou, C. Worst-case equilibria // *Computer science review*. — 2009. — Vol. 3, no. 2. — C. 65–69.
12. Korgin, N.A. Rozdestvenskaya, S.M. Concordant Approach for R&D Projects' Evaluation and Ranking // 2017 IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). — IEEE, 2017. — Vol. 2. — P. 358–362.
13. Дорри М.Х., Рошин А.А. Инструментальный программный комплекс РДС (Расчет Динамических Систем) — средство моделирования и разработки алгоритмов управления // *Проблемы управления*. — 2009. — № 4. — С. 52–57. [Dorri, M.H., Roshchin, A.A. Instrumental software complex RDS (Research of Dynamic Systems) — a tool for modeling and developing control algorithms // *Control Sciences*. — 2009. — No. 4. — P. 52–57. (In Russian)]
14. Le Breton, M., Zaporozhets, V. On the Equivalence of Coalitional and Individual Strategy-proofness Properties // *Social Choice and Welfare*. — 2009. — Vol. 33, no. 2. — P. 287–309.
15. Arribillaga, R.P., Massó, J. Comparing Generalized Median Voter Schemes According to Their Manipulability // *Theoretical Economics*. — 2016. — Vol. 11, no. 2. — P. 547–586.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 3.09.2019, после доработки 18.02.2020.  
Принята к публикации 3.03.2020.

**Коргин Николай Андреевич** — д-р техн. наук,  
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова,  
г. Москва, Московский физико-технический институт,  
✉ [nkorgin@ipu.ru](mailto:nkorgin@ipu.ru),

**Корепанов Всеволод Олегович** — канд. техн. наук,  
Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова,  
г. Москва, ✉ [moskvo@yandex.ru](mailto:moskvo@yandex.ru).

## SYNTHESIS OF THE OPTIMAL MECHANISM OF ACTIVE EXPERTISE: REALIZATION VIA COMPUTER MODELING SYSTEMS

N.A. Korgin<sup>1,2</sup>, V.O. Korepanov<sup>1</sup>

<sup>1,2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

<sup>1</sup>✉ [nkorgin@ipu.ru](mailto:nkorgin@ipu.ru), <sup>2</sup>✉ [moskvo@yandex.ru](mailto:moskvo@yandex.ru)

**Abstract.** The paper considers a model of active expertise as expertise that takes into account the experts' possible interest in its results. We study its one-dimensional formulation — the problem of one-criterion collective choice or, in other terminology, active planning. There is a goal procedure for expertise that is optimal when experts are not active. The problem of synthesis of the optimal mechanism of active expertise is given. The article presents proof of solution existence to the problem of synthesis of the optimal mechanism of one-dimensional active expertise. Earlier, only an algorithm for its obtaining by solving a system of equations was proposed. We show that, within the framework of generally accepted assumptions on the class of goal procedures, a solution to the problem of active planning always exists and is so-called generalized median voter schemes, described by Herve Moulin in 1980 as a class of strategy-proof collective choice rules (or mechanisms in the terminology of the theory of active systems), which are Pareto efficient. A model for analyzing mechanisms of active expertise based on a GMVS and a model for synthesizing an optimal strategy-proof mechanism have been developed in the simulation environment. A search for the parameters of the equivalent direct mechanism is also implemented.

**Keywords:** control science, organizational-technical system, systems analysis, strategy-proofness.

**Funding.** The work was performed with partial financial support of Russian Science Foundation (project no. 16-19-10609).



# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ЭКО-ИННОВАЦИЯМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ DEA С ЛАГАМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЫХОДАМИ

С.В. Ратнер

**Аннотация.** Разработан подход к оценке эффективности систем экологического менеджмента регионов России на основе применения моделей анализа среды функционирования (в англоязычном варианте — Data Envelopment Analysis, DEA). В качестве входов модели рассмотрены текущие и капитальные затраты на природоохранные мероприятия, в качестве выходов — изменения в нагрузке экономики региона на окружающую среду по широкому спектру экологических показателей. Отличительная особенность предложенного подхода состоит в учете отложенных эффектов от капитальных затрат на природоохранные мероприятия. Показана возможность применения процедуры сдвига шкал для устранения проблемы наличия отрицательных выходов. На основе комбинации эконометрических методов моделирования и методологии DEA построены динамические модели и проведена оценка уровня развития эко-инноваций в регионах России. Выявлено, что предложенная комбинация моделей и подходов позволяет в большей степени учесть экономическую логику процессов регионального экологического менеджмента, чем при традиционном способе выбора входов и выходов модели экологического DEA и, как следствие, точнее настроить систему стимулов государственной экологической политики.

**Ключевые слова:** анализ среды функционирования, отрицательные входы, отложенные эффекты, оптимизация, эко-инновации, региональная система экологического менеджмента.

## ВВЕДЕНИЕ

Местные органы власти представляют собой важные элементы институциональной структуры управления экологическими аспектами хозяйственной деятельности экономических агентов [1]. Это объясняется двумя основными причинами: с одной стороны, любые негативные последствия хозяйственной активности (как производственных процессов, так и процессов по обеспечению жизнедеятельности населения) быстрее всего ощущаются именно на локальном уровне и непосредственно влияют на качество жизни людей. С другой стороны, местные власти имеют возможность оказывать влияние на население посредством создания условий для развития технологических, продуктовых и организационных эко-инноваций, формирования экологически дружелюбных паттернов потребительского поведения, планирования застройки, образовательных и просветительских мероприятий и др. [2—5].

В Российской Федерации основные нормы и правила, регулирующие воздействие экономики на окружающую среду, устанавливаются на феде-

ральном уровне; тем не менее, региональным властям отводится большая роль в осуществлении ряда функций экологического менеджмента на местах. Так, функция государственного экологического мониторинга и надзора в области охраны атмосферного воздуха и в области обращения с отходами распределена между Росприроднадзором (федеральный уровень) и региональными властями. Функции государственного мониторинга радиационной обстановки, объектов животного мира, состояния лесов также распределены между федеральными и региональными органами власти. Вся статистическая информация по состоянию окружающей среды и по финансированию мероприятий по охране окружающей среды предоставляется населению в региональном разрезе. Все средства, собираемые с экономических агентов в качестве платы за негативное воздействие на окружающую среду и в качестве экологических штрафов за нарушение норм воздействия на окружающую среду, распределяются таким образом: 5 % от собираемых средств поступает в федеральный бюджет, 40 % в бюджеты субъектов РФ и 55 % в бюджеты муниципальных районов и городских округов. Функция распределения бюджетных средств на охрану ок-



ружающей среды и планирования мероприятий по улучшению экологического состояния региона полностью закреплена за министерствами экологии и охраны окружающей среды субъектов Российской Федерации [6].

В то же время какого-либо стандартизированного подхода к организации системы экологического менеджмента на региональном уровне в России не существует. Из наиболее распространенных в мире стандартов экологического менеджмента в России действует только стандарт ISO 14001, который определяет структуру и функции системы экологического менеджмента (СЭМ) предприятия, но не региона [7, 8]. Попытки применить принципы ISO 14001, в том числе принципа постоянного улучшения СЭМ, на региональном уровне в России пока не предпринимались, поэтому какая-либо системная оценка эффективности проводимой деятельности в области экологического менеджмента на территориальном уровне в настоящее время отсутствует.

Цель настоящей работы состоит в разработке подхода к оценке эффективности систем экологического менеджмента регионов РФ на основе статистических данных о состоянии окружающей среды и объемах средств, поступающих на финансирование мероприятий по охране окружающей среды, имеющих доступ. Эффективность СЭМ в данном исследовании предлагается понимать в чисто экономическом смысле: как отношение величины, характеризующей улучшение экологических аспектов экономики региона, к затратам, произведенным для достижения этого улучшения за период времени. Так как затраты, осуществляемые в регионах РФ на природоохранные мероприятия, бывают двух видов (текущие и капитальные), а улучшение экологических аспектов экономики региона может быть описано достаточно большим набором статистических показателей (снижение выбросов в атмосферу, снижение загрязнения природных водоемов, уменьшение отходов и др.), то для расчета единого количественного показателя эффективности СЭМ нами был применен подход, основанный на анализе среды функционирования (*англ.* Data Envelopment Analysis, DEA).

Практические приложения DEA-методологии в настоящее время активно развиваются как в зарубежной научной литературе, так и в российской, охватывая все новые области менеджмента и новые классы управленческих задач, включая задачи экологического менеджмента [9–12]. В качестве основных характерных особенностей анализа среды функционирования, обуславливающих его привлекательность в качестве инструмента поддержки принятия управленческих решений, можно указать такие возможности:

— проводить оценку эффективности деятельности экономических агентов, имея минимальные знания об используемых ими производственных функциях и технологиях только по статистическим данным об объемах потребляемых ими ресурсов и объемах выпуска полезной продукции,

— изучать различные аспекты функционирования сложных систем, варьируя выбор выходов и выходов модели DEA,

— выбирать для каждого неэффективного экономического агента (или системы) бенчмарки и оптимизировать свою стратегию достижения эффективности,

— пользоваться хорошо разработанными пакетами прикладных программ (в том числе, и программами открытого доступа) для расчета эффективности изучаемых объектов и принятия решений относительно неэффективных объектов.

В то же время базовые модели DEA, реализованные в пакетах прикладных программ, как правило, имеют некоторые ограничения на вид и тип входных и выходных значений [13]. В частности, в базовых моделях CCR (от первых букв имен авторов — Charnes, Cooper и Rhodes) с постоянным эффектом масштаба и BCC (от первых букв имен авторов — Banker, Charnes and Cooper) с переменным эффектом масштаба входы и выходы не могут принимать отрицательные значения. В реальности отрицательные значения выходов возможны в той ситуации, когда полезный результат производственной деятельности изучаемого экономического агента, несмотря на затраченные ресурсы, не достигнут на рассматриваемом временном промежутке.

Такого рода проблемы часто встречаются в задачах корпоративного и регионального экологического менеджмента: расходуемые на природоохранные мероприятия или экологический контроль и сертификацию средства экономических агентов или субъектов федерации не всегда достигают желаемой цели — сокращения объемов выбросов различных типов загрязняющих веществ. В таких случаях разница в объемах выбросов загрязняющих веществ в конечный и начальный моменты действия системы экологического менеджмента может быть отрицательной, что не позволяет применить базовые модели анализа среды функционирования к изучению сложившейся ситуации. Однако потенциал применения этих моделей значительный. Как показано в работах [9, 12, 13], варьирование различных входов и выходов, которыми может быть описана система экологического менеджмента, позволяет не только детально изучить отдельные аспекты ее работы, но и сделать вывод о типе развития экономического объекта в целом (линейный, циркулярный, устойчивый), а также уровне его эко-инновационной деятельно-

сти [14, 15]. Под эко-инновациями здесь понимаются не просто «все меры экономических агентов, которые разрабатывают и применяют на практике новые идеи, паттерны поведения, продукты и процессы, которые способствуют снижению нагрузки на окружающую среду» [16], но, в первую очередь, технологические инновации, т. е. внедрение наилучших доступных технологий [17]. При таком определении экономические агенты, внедряющие эко-инновации, гораздо быстрее сокращают свои удельные негативные экологические эффекты, чем агенты, применяющие старые производственные технологии.

В настоящей работе предложен подход к преодолению ограничений на значения выходов при работе с ориентированной по входам моделью ВСС в пакете MaxDEA, основанный на процедурах нормирования и сдвига шкалы, в которой измерены показатели результативности региональной системы экологического менеджмента (РСЭМ). Для рассмотрения изменений результативности РСЭМ в динамике в работе применяется «метод окна» [18–21], а для учета возможных эффектов запаздывания отдачи от инвестиций в технологические эко-инновации проводится предварительный непараметрический корреляционный анализ входных и выходных наборов данных.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОЦЕНКЕ УРОВНЯ РАЗВИТИЯ ЭКО-ИННОВАЦИЙ В РЕГИОНЕ

Рассмотрим в качестве производственных объектов (*англ.* Decision Making Units, DMU) региональные системы экологического менеджмента. Будем рассматривать в качестве входов данных объектов два статистических показателя — объем инвестиций в основной капитал, направленных на снижение загрязнений, и текущие затраты на природоохранные мероприятия. Согласно методологии статистического учета Федеральной службы государственной статистики, к инвестициям в основной капитал, направленным на охрану окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов, относятся затраты на строительство, реконструкцию (включая расширение и модернизацию) объектов, которые приводят к увеличению их первоначальной стоимости, приобретение машин, оборудования, транспортных средств, производственного и хозяйственного инвентаря, бухгалтерский учет которых осуществляется в порядке, установленном для учета вложений во внеоборотные активы. Очевидно, что проекты по строительству и реконструкции объектов природоохранного характера (очистных сооружений), а также введению в эксплуатацию сложного оборудования, могут иметь сроки реализации более одного года и, как следствие, оказывать положи-

тельное влияние на экологическую ситуацию только через определенный промежуток времени (лаг). К текущим затратам относятся затраты по содержанию и эксплуатации основных фондов природоохранного назначения, затраты на мероприятия по сохранению и восстановлению качества природной среды, нарушенной в результате производственной деятельности, на мероприятия по снижению вредного воздействия производственной деятельности на окружающую среду, по обращению с отходами производства и потребления, затраты на организацию контроля за выбросами (сбросами), отходами производства и потребления и за качественным состоянием компонентов природной среды, а также затраты на научно-исследовательские работы и работы по экологическому образованию кадров. Проекты такого рода, как правило, краткосрочны, и их положительные эффекты должны проявляться достаточно быстро. Однако и среди них вполне могут быть исключения, особенно в случае реализации проектов инновационного характера, требующих кардинальных изменений в системе экологического мониторинга, образования или исследований и разработок. В качестве выходов рассмотрим показатели снижения уровня загрязнений атмосферы и воды, т. е. разницу в объеме выбросов до инвестиций в основной капитал и текущих затрат на природоохранные мероприятия и после (моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ,  $t_1 < t_2$ ). В случае эффективного расходования средств эта разница будет положительной, в случае неэффективного — отрицательной или нулевой. Как показатели развития уровня циркулярной экономики рассмотрим снижение уровня образования отходов производства и потребления, снижение уровня потребления свежей воды и повышение уровня развития переработки отходов.

Для того чтобы иметь возможность сопоставить разные по размеру и структуре экономики регионы, а также исключить воздействие на объемы выбросов такого фактора, как расширение производства, будем рассматривать разницу удельных показателей негативных экологических эффектов, т. е. показатели *интенсивности* воздействия на окружающую среду — выбросы и отходообразование на единицу произведенной продукции и долю переработки отходов:

$$y_{1,k} = \Delta_k^{EP} = \frac{EP_{t1,k}}{GDP_{t1,k}} - \frac{EP_{t2,k}}{GDP_{t2,k}};$$

$$y_{2,k} = \Delta_k^{ET} = \frac{ET_{t1,k}}{GDP_{t1,k}} - \frac{ET_{t2,k}}{GDP_{t2,k}};$$

$$y_{3,k} = \Delta_k^{SW} = \frac{SW_{t1,k}}{GDP_{t1,k}} - \frac{SW_{t2,k}}{GDP_{t2,k}};$$

$$y_{4,k} = \Delta_k^W = \frac{W_{t1,k}}{GDP_{t1,k}} - \frac{W_{t2,k}}{GDP_{t2,k}};$$

$$y_{5,k} = \Delta_k^{WT} = \frac{WT_{t1,k}}{GDP_{t1,k}} - \frac{WT_{t2,k}}{GDP_{t2,k}};$$

$$y_{6,k} = \Delta_k^R = R_{t2,k} - R_{t1,k}, \quad (1)$$

где  $EP$  — объем выбросов от стационарных источников;  $GDP$  — дефлированный (приведенный в цены базового года) валовый региональный продукт (ВРП);  $ET$  — объем выбросов от автомобильного транспорта;  $SW$  — объем сброса неочищенных сточных вод;  $W$  — объем потребления воды;  $WT$  — объем образования отходов;  $R$  — доля переработки отходов;  $k$  — номер региона.

При таком наборе входов и выходов в базовой модели анализа среды функционирования CCR решение оптимизационной задачи вида:

найти

$$\max_{u,v} \sum_{m=1}^M u_m y_{m0} \quad (2)$$

при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M u_m y_{mk} - \sum_{n=1}^M v_n x_{nk} \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$\sum_{m=1}^M v_n x_{n0} = 1,$$

$$u_m, v_n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

где 0 — индекс DMU;  $X$  — вектор входов размерности  $N$  ( $N = 2$ );  $Y$  — вектор выходов размерности  $M$  ( $M = 6$ );  $K$  — количество DMU (РСЭМ), позволит определить регионы, которые при минимальном объеме инвестиций в основной капитал, направленных на охрану окружающей среды, и минимальном объеме текущих затрат на природоохранные мероприятия добиваются максимальных значений показателей  $\Delta_k^j$ , полученных согласно выражениям (1). Очевидно, что достичь этого возможно лишь в случае внедрения эко-инноваций, т. е. наилучших доступных производственных технологий, а также перестройки дизайна производственных систем по моделям экономики замкнутых циклов (максимальное повторное использование продукции, переработка отходов) [14, 15].

Однако оценивать уровень развития эко-инновационной деятельности в регионе по результатам решения оптимизационной задачи DEA по данным одного года было бы неправильно. Для того чтобы сделать какие-либо содержательные выводы, необходимо рассмотреть изменения в эффективности РСЭМ на достаточно длительном проме-

жутке времени, как минимум 3—5 лет, т. е. решить динамическую задачу DEA. Как известно из литературных источников, одним из наиболее простых и дающих легко интерпретируемые результаты методов решения динамически задач DEA является так называемый метод окна [18—21]. Данный метод позволяет сравнить исследуемый объект по эффективности не только с другими аналогичными объектами, но и с самим собой в другие периоды времени. Для этого каждый из  $K$  рассматриваемых производственных объектов (в нашем случае РСЭМ) представляется в виде набора  $T$  однородных объектов  $PCЭM_i^{t1}, PCЭM_i^{t2}, \dots, PCЭM_i^T$  задаваемых входами  $X_i^{t1}, X_i^{t2}, \dots, X_i^T$  и выходами  $Y_i^{t1}, Y_i^{t2}, \dots, Y_i^T$ .

Базовая задача DEA вида (2) решается  $T - w + 1$  раз для  $K \times w$  ( $w \leq T$ ) производственных объектов  $PCЭM_i^{tj}, PCЭM_i^{tj+1}, \dots, PCЭM_i^{tj+w}, \dots, PCЭM_K^{tj}, PCЭM_K^{tj+1}, \dots, PCЭM_K^{tj+w}$ . Параметр  $w$  в данном методе называется шириной окна, а выбор его значения диктуется экономической или технологической логикой исследуемого процесса. Для решения задач, связанных с проблемами экологического менеджмента, как было доказано в работе [17], целесообразно установить максимальную ширину окна, равную всему периоду наблюдений, т. е. полагать  $w = T$ .

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТЛОЖЕННЫХ ЭФФЕКТОВ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВЫХОДОВ

Для определения величины временных лагов между входами и выходами модели DEA вида (2) воспользуемся методом непараметрического корреляционного анализа. Применение непараметрической корреляции объясняется отсутствием нормального распределения исходных данных. Для каждого года  $t_i$  из исследуемого периода (2011—2017 гг.) рассчитаем коэффициенты непараметрической корреляции  $\tau$ -Кендалла (как наиболее устойчивой непараметрической статистики) между вектором объемов инвестиций в основной капитал, направленных на снижение загрязнения окружающей среды (технологические эко-инновации)  $X_i^1$  и векторами  $\Delta_{t_i}^{EP}, \Delta_{t_i+1}^{EP}, \dots, \Delta_T^{EP}, \Delta_{t_i}^{ET}, \Delta_{t_i+1}^{ET}, \dots, \Delta_T^{ET}, \Delta_{t_i}^{SW}, \Delta_{t_i+1}^{SW}, \dots, \Delta_T^{SW}, \Delta_{t_i}^W, \Delta_{t_i+1}^W, \dots, \Delta_T^W, \Delta_{t_i}^{WT}, \Delta_{t_i+1}^{WT}, \dots, \Delta_T^{WT}$  и  $\Delta_{t_i}^R, \Delta_{t_i+1}^R, \dots, \Delta_T^R$ . Далее аналогичным образом рассчитаем коэффициенты корреляции  $\tau$ -Кен-

Таблица 1

## Кoeffициенты корреляции между входами и выходами модели DEA с лагами различной длины

| Вход         | Выход         |               |               |             |               |             |
|--------------|---------------|---------------|---------------|-------------|---------------|-------------|
|              | $\Delta^{EP}$ | $\Delta^{ET}$ | $\Delta^{SW}$ | $\Delta^W$  | $\Delta^{WT}$ | $\Delta^R$  |
| $X_{2011}^1$ | Лag 0: 0,23   | —             | —             | —           | Лag 3: 0,16   | —           |
| $X_{2011}^2$ | Лag 0: 0,23   | Лag 3: 0,15   | Лag 4: 0,15   | —           | —             | Лag 5: 0,2  |
| $X_{2013}^1$ | Лag 4: 0,26   | —             | Лag 2: 0,16   | Лag 3: 0,15 | Лag 1: 0,17   | —           |
| $X_{2013}^2$ | Лag 4: 0,24   | Лag 2: 0,16   | —             | Лag 4: 0,18 | —             | Лag 3: 0,2  |
| $X_{2015}^1$ | Лag 2: 0,2    | —             | —             | —           | —             | Лag 1: 0,19 |
| $X_{2015}^2$ | Лag 2: 0,26   | Лag 2: 0,19   | Лag 2: 0,19   | Лag 2: 0,17 | —             | Лag 0: 0,21 |
| $X_{2017}^1$ | Лag 0: 0,19   | —             | —             | —           | —             | —           |
| $X_{2017}^2$ | Лag 0: 0,26   | Лag 0: 0,16   | Лag 0: 0,17   | Лag 0: 0,16 | —             | —           |

далла между вектором текущих затрат на природоохранные мероприятия  $X_{t_i}^2$  и всеми векторами результатов в моменты  $t_i, t_{i+1}, \dots, T$ . Для устранения влияния инфляции все значения инвестиций и текущих затрат предварительно приведем к ценам базового года<sup>1</sup>.

Результаты расчетов по выборке из 80 регионов России (за исключением Республики Крым, г. Севастополя и некоторых автономных округов, входящих в состав более крупных субъектов РФ) представлены в табл. 1. В рассмотрение включены годы, по которым имеются все статистические данные. Представлены только статистически значимые коэффициенты корреляции на уровне  $p = 0,05$ . В случае, если статистически значимыми оказывались коэффициенты корреляции на двух лагах, выбирался наибольший по значению.

Как можно заметить из анализа результатов расчетов, представленных в табл. 1, затраты на природоохранные мероприятия обоих видов, произведенные в 2011 г., принесли максимальный эффект по сокращению интенсивности выбросов от стационарных источников в тот же год, по сокращению интенсивности выбросов от транспорта — через два года, по сокращению интенсивности сброса сточных вод — через три года, по сокращению

интенсивности образования отходов — через два года, по увеличению доли переработки отходов — через четыре года. Поэтому для формирования входов и выходов модели DEA по расчету эффективности РСЭМ 2011 г., будем пользоваться значениями затрат 2011 г., а значениями экологических эффектов — с соответствующими сдвигами во времени. Несмотря на сдвиг во времени максимальных экологических эффектов, мы будем их считать эффектами работы РСЭМ 2011 г., так как все управленческие решения по выбору природоохранных мероприятий для финансирования принимались именно в этом году.

Далее рассмотрим проблему отрицательных значений выходов. Как показали выполненные нами расчеты значений экологических эффектов в соответствии с формулами (1), далеко не все регионы демонстрируют положительную динамику снижения нагрузки на окружающую среду и роста уровня развития циркулярной экономики. Для примера на рис. 1 приведено число регионов, имеющих отрицательные значения разности в интенсивности выбросов от стационарных источников до и после произведенных затрат на природоохранные мероприятия.

Для перевода отрицательных значений выходов в положительные, позволяющие применить базовые модели DEA для определения уровня развития эко-инновационной деятельности в регионах, проведем процедуры сдвига шкал, в которых выходы изменены по формуле:

$$z_{i,j} = y_{i,j} + |\min y_{i,j}| + 0,001. \quad (3)$$

Введенное преобразование позволяет избавиться от отрицательных и нулевых значений выходов, не нарушая при этом логику формирования и решения модели анализа среды функционирования [22—25].

<sup>1</sup> Данные получены из различных статистических сборников. Данные по затратам на охрану окружающей среды (текущие затраты и инвестиции в основной капитал), объемам выбросов, сбросу неочищенных сточных вод, объему потребления свежей воды, объему образования отходов и доле переработки получены из статистических сборников «Охрана окружающей среды в России» за 2018, 2016, 2014 и 2012 гг. (Приложение. Данные в разрезе субъектов РФ). Данные по объему ВРП получены из статистического сборника «Регионы России. Социально-экономические показатели» за 2018 г., дефлирование методом цепных индексов выполнено автором.



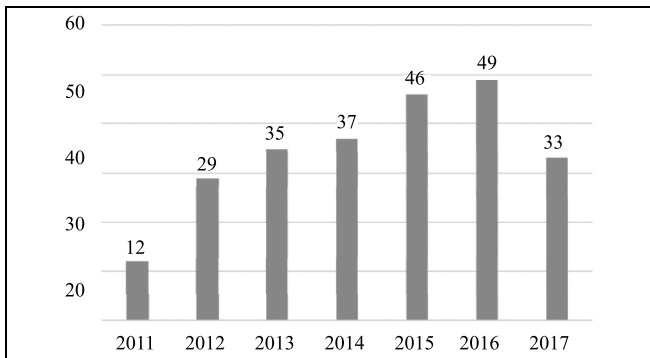


Рис. 1. Число регионов, не имеющих положительной динамики в снижении интенсивности выбросов загрязняющих веществ в атмосферу

Проведенные предварительные преобразования выходов модели DEA, направленные на учет эффектов запаздывания отдачи от инвестиций в природоохранные мероприятия и устранение технических препятствий для применения базовых программных комплексов решения задач анализа среды функционирования (например, MaxDEA), позволяют далее приступить к непосредственному расчету динамики коэффициентов эффективности РСЭМ по модели ВСС, ориентированной по входам (input-oriented). Выбор модели ВСС объясняется тем, что она позволяет, помимо расчетов коэффициентов эффективности, также определить наличие и тип эффекта масштаба, что важно для принятия обоснованных управленческих решений [26, 27]. Кроме того, в отличие от модели ССР, модель ВСС допускает преобразования входных или выходных данных путем сдвига шкалы, однако такое преобразование может быть применено либо только к входам, либо только к выходам, но не к входам и выходам одновременно [22–25].

Итак, в результате проведенных преобразований с выходами и выбора ширины окна для решения динамической задачи, равной всему исследуемому промежутку, задача (2) примет вид:

$$\max_{u, v} \sum_{m=1}^M u_m z_{m0}^{t*}$$

при ограничениях

$$\sum_{m=1}^M u_m z_{mk}^{t*} - \sum_{n=1}^N v_n x_{nk}^t \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \times w;$$

$$\sum_{n=1}^N v_n x_{n0}^t = 1;$$

$$u_m, v_n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N;$$

где  $X^t = (x_{10}^t, \dots, x_{N0}^t) \geq 0$  — вектор входов размерности  $N$  в момент времени  $t$ ;  $Z^{t*} = (z_{10}^{t*}, \dots, z_{M0}^{t*}) \geq 0$  —

вектор выходов размерности  $M$  в момент времени  $t^*$ , соответствующий временному лагу максимальной отдачи от вложенных инвестиций в эко-инновации;  $K$  — число региональных СЭМ;  $w$  — ширина окна (число дискретных моментов времени в рассматриваемом периоде);  $u_m, v_n$  — неизвестные неотрицательные веса, подлежащие определению.

### 3. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ЭКО-ИННОВАЦИОННЫМ РАЗВИТИЕМ РЕГИОНОВ

Результаты решения задачи (3) с переменной отдачей от масштаба, полученные по периоду с 2011 по 2017 г. с шагом два года, представлены в табл. 2. Расчеты проводились с помощью открытого программного обеспечения MaxDEA. Выбор временного периода для проведения анализа эффективности региональных СЭМ и шага размером в два года объясняется доступностью статистических данных.

Пропуск в табл. 2 значения коэффициента эффективности РСЭМ Республики Ингушетия в 2011 г. объясняется тем, что в этом году значения объемов инвестиций в основной капитал, направленных на предотвращение загрязняющей среды, и значения объемов текущих затрат на природоохранную деятельность равны нулю, т. е. в данный период времени РСЭМ Республики Ингушетия фактически не работала.

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что за исключением РСЭМ Кемеровской области, ни одна из региональных систем экологического менеджмента не работает со стабильно высокой эффективностью. В среднем наибольшие значения эффективности РСЭМ наблюдаются в 2011 г., в 2013 г. эффективность региональных систем экологического менеджмента в среднем довольно резко падает и далее медленно возвращается к значениям 2011 г. только в 2017 г. (рис. 2).

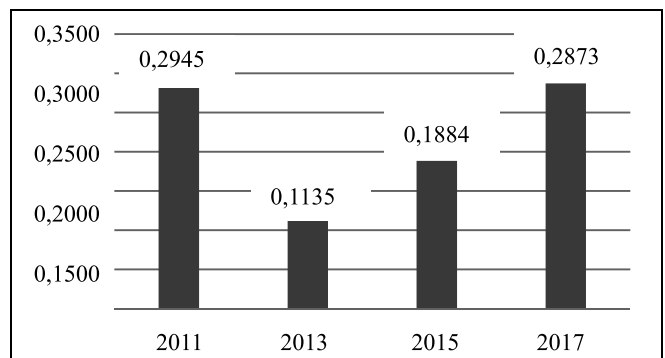


Рис. 2. Динамика эффективности РСЭМ в целом по России. Источник: расчеты автора



Таблица 2

**Результаты расчетов коэффициентов эффективности РСЗМ методом окна за период 2011—2017 гг. с шагом два года**

| Регион                              | 2011 г. | 2013 г. | 2015 г. | 2017 г. |
|-------------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| Белгородская область                | 0,0131  | 0,0006  | 0,0012  | 0,0031  |
| Брянская область                    | 1       | 0,0430  | 1       | 1       |
| Владимирская область                | 0,0341  | 0,0175  | 0,0095  | 0,0101  |
| Воронежская область                 | 0,0841  | 0,0020  | 0,0021  | 0,0016  |
| Ивановская область                  | 0,2587  | 0,3017  | 1       | 1       |
| Калужская область                   | 0,0222  | 0,0030  | 0,0187  | 0,0149  |
| Костромская область                 | 1       | 0,2285  | 0,3214  | 1       |
| Курская область                     | 0,0083  | 0,0201  | 0,0227  | 0,0127  |
| Липецкая область                    | 0,1124  | 0,0048  | 0,0038  | 0,0068  |
| Московская область                  | 0,0055  | 0,0018  | 0,0039  | 1       |
| Орловская область                   | 0,0480  | 0,0154  | 0,0152  | 0,0654  |
| Рязанская область                   | 0,4682  | 0,0344  | 0,0410  | 0,0168  |
| Смоленская область                  | 0,0537  | 0,0287  | 0,0062  | 0,1106  |
| Тамбовская область                  | 0,1035  | 0,0053  | 0,0048  | 0,0419  |
| Тверская область                    | 0,0012  | 0,0974  | 0,0135  | 0,0233  |
| Тульская область                    | 0,0109  | 0,1738  | 0,1691  | 0,1915  |
| Ярославская область                 | 0,0539  | 0,0709  | 0,0504  | 0,0336  |
| г. Москва                           | 0,0057  | 0,0051  | 0,0042  | 0,0011  |
| Республика Карелия                  | 1       | 0,0938  | 0,0771  | 0,0990  |
| Республика Коми                     | 0,0024  | 1       | 1       | 1       |
| Архангельская область               | 1       | 0,0215  | 0,0081  | 0,0063  |
| Вологодская область                 | 0,9717  | 0,0238  | 0,0573  | 0,0452  |
| Калининградская область             | 0,0337  | 0,0063  | 0,1554  | 0,0068  |
| Ленинградская область               | 0,0859  | 0,0056  | 0,0204  | 1       |
| Мурманская область                  | 0,4197  | 0,0151  | 0,0171  | 0,0016  |
| Новгородская область                | 1       | 0,1439  | 1       | 1       |
| Псковская область                   | 0,2147  | 0,0015  | 0,0065  | 0,0140  |
| г. Санкт-Петербург                  | 0,0074  | 0,0101  | 0,0058  | 0,0007  |
| Республика Адыгея                   | 1       | 0,1736  | 0,7046  | 1       |
| Республика Дагестан                 | 1       | 0,0106  | 0,0272  | 0,0528  |
| Республика Ингушетия                | -       | 1       | 0,0705  | 1       |
| Кабардино-Балкарская Республика     | 1       | 0,0208  | 0,0310  | 1       |
| Республика Калмыкия                 | 1       | 0,2985  | 0,7414  | 1       |
| Карачаево-Черкесская Республика     | 1       | 0,0150  | 1       | 0,0597  |
| Республика Северная Осетия — Алания | 0,1220  | 0,0772  | 0,0282  | 0,5887  |
| Чеченская Республика                | 1       | 1       | 1       | 1       |
| Краснодарский край                  | 0,0155  | 0,0068  | 0,0207  | 0,0097  |
| Ставропольский край                 | 0,0090  | 0,0023  | 0,0022  | 0,0033  |
| Астраханская область                | 0,0355  | 1       | 0,8120  | 1       |
| Волгоградская область               | 0,2546  | 0,0652  | 0,0188  | 0,0143  |
| Ростовская область                  | 0,9810  | 0,0011  | 0,0024  | 0,0163  |
| Республика Башкортостан             | 0,0098  | 0,0044  | 0,0052  | 0,0082  |
| Республика Марий Эл                 | 1       | 0,7532  | 1       | 0,1104  |
| Республика Мордовия                 | 0,0301  | 0,0028  | 0,0031  | 0,4800  |
| Республика Татарстан                | 0,0048  | 0,0047  | 0,0062  | 0,0073  |
| Удмуртская Республика               | 0,0461  | 0,0243  | 0,0417  | 0,0880  |
| Чувашская Республика                | 0,0311  | 0,0065  | 0,0037  | 1       |
| Пермский край                       | 0,0297  | 0,0036  | 0,0095  | 0,0103  |
| Кировская область                   | 0,0569  | 0,0124  | 0,5408  | 1       |
| Нижегородская область               | 0,0230  | 0,0009  | 0,0021  | 0,0023  |
| Оренбургская область                | 0,0394  | 0,1081  | 0,1524  | 0,2055  |
| Пензенская область                  | 0,0268  | 0,0961  | 0,0552  | 0,2096  |
| Самарская область                   | 0,0229  | 0,0012  | 0,0011  | 0,0013  |
| Саратовская область                 | 0,0031  | 0,0015  | 0,0018  | 0,0018  |
| Ульяновская область                 | 0,0446  | 0,0198  | 0,0490  | 0,0303  |
| Курганская область                  | 0,2261  | 0,0066  | 0,0074  | 0,0070  |

| Регион                       | 2011 г. | 2013 г. | 2015 г. | 2017 г. |
|------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| Свердловская область         | 0,1212  | 0,0010  | 0,0019  | 0,0017  |
| Тюменская область            | 0,0153  | 0,0077  | 0,0396  | 0,0340  |
| Челябинская область          | 0,1589  | 0,0831  | 0,0789  | 0,0492  |
| Республика Алтай             | 0,1427  | 0,0212  | 0,0641  | 0,0417  |
| Республика Бурятия           | 0,7103  | 0,0631  | 0,1058  | 0,5157  |
| Республика Тыва              | 1       | 0,3246  | 1       | 1       |
| Республика Хакасия           | 0,6857  | 0,0044  | 0,0035  | 0,0066  |
| Алтайский край               | 0,0925  | 0,0196  | 0,0221  | 1       |
| Забайкальский край           | 0,9285  | 0,0063  | 0,0079  | 0,0706  |
| Красноярский край            | 0,0111  | 0,0077  | 0,0082  | 0,0076  |
| Иркутская область            | 0,0168  | 0,0057  | 0,0083  | 0,0160  |
| Кемеровская область          | 0,5830  | 0,4470  | 1       | 1       |
| Новосибирская область        | 0,0431  | 0,0107  | 0,0085  | 1       |
| Омская область               | 0,0437  | 0,0190  | 0,0089  | 0,0040  |
| Томская область              | 0,0091  | 0,1791  | 0,1978  | 0,2862  |
| Республика Саха (Якутия)     | 0,0493  | 0,0089  | 0,0082  | 0,0030  |
| Приморский край              | 0,0612  | 0,0049  | 0,0152  | 0,0098  |
| Хабаровский край             | 0,0034  | 0,0029  | 0,0011  | 0,0040  |
| Амурская область             | 0,0245  | 0,0055  | 0,0085  | 0,2114  |
| Камчатский край              | 0,1130  | 0,0047  | 0,0143  | 0,0080  |
| Магаданская область          | 0,1008  | 0,0211  | 0,0092  | 0,0059  |
| Сахалинская область          | 0,0281  | 0,0084  | 0,0041  | 0,0089  |
| Еврейская автономная область | 0,5847  | 0,0138  | 0,0791  | 0,0283  |
| Чукотский автономный округ   | 1       | 0,7177  | 1       | 0,0577  |

Максимальные значения эффективности демонстрируют в тот или иной год, как правило, РСЭМ небольших по размеру экономики и численности населения регионов: большинство республик Северного Кавказа, республики Адыгея, Калмыкия, Коми, Тыва, Марий Эл, Брянская и Новгородская области, Чукотский АО. Из регионов с развитой промышленностью максимальную эффективность экологического менеджмента хотя бы раз за исследуемый период показывают только Ивановская, Костромская, Московская, Кировская, Кемеровская и Новосибирская области.

В разрезе федеральных округов наиболее высокие показатели эффективности РСЭМ демонстрируют Северо-Кавказский и Южный Федеральный округа, в составе которых как раз много регионов с малыми размерами экономики и регионов с аграрной ориентацией. Наименьшие показатели эффективности РСЭМ наблюдаются в Уральском Федеральном округе (рис. 3).

Рассмотрев в отдельности эффективность РСЭМ для пяти наиболее густонаселенных регионов — г. Москвы, Московской области, Краснодарского края, г. Санкт-Петербурга и Свердловской области, можно отметить, что все они демонстрируют крайне низкие значения коэффициентов эффективности на протяжении 2011—2015 гг. (рис. 4). В 2017 г. ситуация сохраняется для всех крупных регионов, кроме Московской области, РСЭМ которой демонстрирует максимальную эф-

фективность (см. табл. 2), что, судя по статистическим показателям, объясняется запуском нескольких новых проектов по переработке мусора.

Выявленная ситуация с низкой эффективностью РСЭМ крупных регионов подтверждается результатами анализа значений эффекта масштаба исследуемых объектов. Согласно выполненным расчетам, все региональные СЭМ (кроме РСЭМ Республики Ингушетия с нулевыми значениями инвестиций в основной капитал) имеют убывающую отдачу от масштаба на всем протяжении ис-

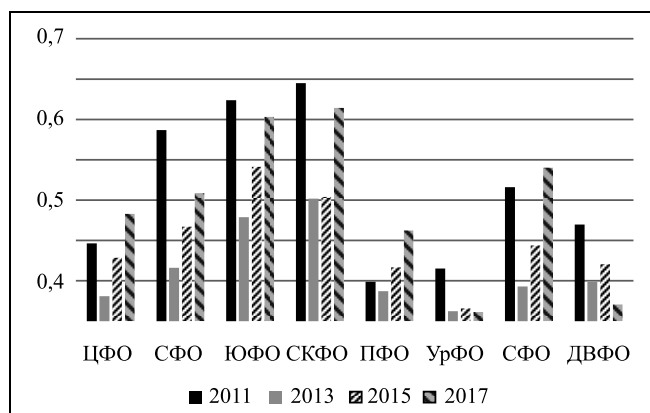


Рис. 3. Динамика средних значений эффективности РСЭМ в разрезе федеральных округов.

Источник: расчеты автора

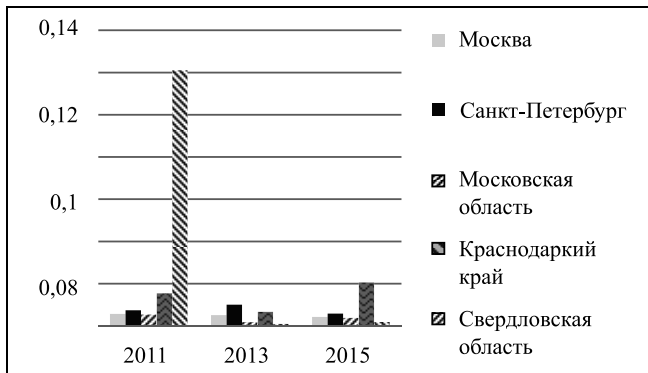


Рис. 4. Динамика эффективности СЭМ наиболее густонаселенных регионов России в 2011–2015 гг. (Источник — расчеты автора)

следуемого периода. Это означает, что увеличение входов модели (3) на некоторую величину  $\Delta_1$  приводит к увеличению выходов на величину  $\Delta_2$ , где  $\Delta_1 > \Delta_2$ , или, согласно содержательной постановке задачи, все большее увеличение финансирования природоохранных мероприятий дает все меньшее снижение негативных экологических эффектов. Поэтому регионы со скромным финансированием природоохранной деятельности добиваются лучших результатов (в относительном выражении), нежели крупные регионы с существенными объемами финансирования. С содержательной точки зрения такая ситуация говорит о низком уровне развития эко-инноваций или их полном отсутствии.

#### 4. ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ КОМБИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ DEA И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Итак, основная особенность предложенного подхода к построению модели DEA для анализа эффективности РСЭМ состоит именно в ориентации на идентификацию и оценку уровня развития эко-инноваций. Учет временных лагов между входами и выходами модели позволяет исключить такие ситуации, когда затратные и длительные по разработке и внедрению проекты развития процессных, продуктовых и организационных эко-инноваций выпадают из рассмотрения на выбранном для анализа временном промежутке. Отметим, что динамические задачи DEA меньше подвержены риску постановки и интерпретации результатов, недостаточно адекватных реальной картине управленческого процесса. При исследовании изменения эффективности РСЭМ в динамике вероятность того, что активно развивающиеся эко-инновации регионы будут признаны неэффективными на всем временном промежутке исследования, снижается, так резкое изменение динамики удельных негативных воздействий на окружающую среду

(выходов) будет так или иначе заметно и учтено при расчетах на более позднем периоде, чем тот, в котором проект был непосредственно запущен. Такого рода исследование было проведено ранее в работе [20], и в целом его результаты показали хорошее соответствие общей логике исследуемых процессов.

Однако пошаговое изменение эффективности РСЭМ на исследуемом интервале при таком подходе невозможно, более того, отделить РСЭМ, которые внедряют эко-инновации, от тех, которые просто следуют за общими тенденциями модернизации устаревших производств, также не представляется возможным. Особенно сложны для интерпретации становятся те случаи, когда затраты на природоохранную деятельность не возрастают или убывают монотонно, а совершают резкие скачки, что, как показало проведенное исследование, пока что представляет собой обычную практику для большинства регионов России. Таким образом, предложенный в данной работе подход позволяет получить более точные результаты и отделить те регионы, которые добиваются улучшения благодаря развитию эко-инновационной деятельности от тех, которые применяют традиционные практики эко-менеджмента (квотирование выбросов, плата за загрязнение, штрафы и др.).

Что касается применения метода непараметрического корреляционного анализа, то в отличие от других эконометрических методов, также позволяющих выявить наличие или отсутствие временных лагов между входами и выходами модели, его применение возможно и корректно как в случае отсутствия нормального распределения данных в выборках входных и выходных значений, так и в случае нелинейных зависимостей между входами и выходами. Оба эти случая характерны для решаемой в данной работе задачи.

Еще одним способом учета отложенных эффектов инвестиций в развитие эко-инноваций теоретически может быть применение моделей DEA с переменными типа запаса и типа потока [28], в которых осуществляется переход от рассмотрения эффективности производственного объекта (РСЭМ) в каждый определенный момент времени к изучению *пути* развития производственного объекта. Такие модификации метода анализа среды функционирования изменяют постановку оптимизационной задачи и накладывают определенные дополнительные ограничения на свойства множества производственных возможностей. Однако, как подтверждают результаты проведенного нами в данной работе корреляционного анализа, разные выходные переменные могут иметь лаги разной длины, что значительно усложняет вычислительную сложность задачи. Кроме того, определение объема инвестиций в основной капитал, направ-

ленных на снижение загрязнений и текущих затрат на природоохранные мероприятия, как переменных типа запаса не вполне соответствует экономической логике исследуемого процесса, так как в реальности данные объемы формируются за счет экологических штрафов и налогов, а не за счет положительных эффектов действия РСЭМ.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы сфера применения моделей DEA значительно расширилась, в том числе благодаря активному применению данной методологии в задачах экологического менеджмента. Решение задач DEA позволяет анализировать сравнительную эффективность деятельности однородных по набору входов и выходов объектов, в роли которых могут выступать практически любые экономические агенты — от отдельных производственных подразделений одного предприятия до регионов и даже стран. Развитие программных продуктов, реализующих различные модели DEA, позволяет перенести фокус внимания исследователя от вопросов технической реализации метода и преодоления вычислительных сложностей на вопросы корректной экономико-управленческой интерпретации полученных результатов. Корректность интерпретации, в свою очередь, в существенной степени определяется правильностью выбора входов и выходов модели DEA.

В настоящей работе предложена новая постановка модели DEA сравнительной оценки качества экологического менеджмента на региональном уровне и рассмотрены вопросы учета отложенных эффектов от затрат на эко-инновации. Ее отличительная особенность состоит в предварительном анализе зависимостей между входами и выходами модели методом непараметрической корреляции. Показана возможность применения процедуры сдвига шкал для устранения проблемы наличия отрицательных выходов. С помощью метода окна (window method) построены динамические модели и проведена оценка уровня развития эко-инноваций в регионах России. Выявлено, что предложенная комбинация моделей и подходов позволяет в большей степени учесть экономическую логику процессов регионального экологического менеджмента, чем при традиционном способе выбора входов и выходов модели экологического DEA и, как следствие, точнее настроить систему стимулов государственной экологической политики.

Заметим, что несмотря на некоторое кажущееся (при поверхностном рассмотрении) сходство с постановкой задачи, предложенной в предыдущей работе автора [18], набор входов в данной задаче совершенно иной, что не позволяет напрямую сравнивать полученные результаты. В насто-

ящей работе в качестве входов рассматриваются затраты региона на охрану окружающей среды. Наличие затрат рассматривается как первый признак наличия управления в природоохранной сфере. Затраты как управляющее воздействие может осуществлять *система* экологического менеджмента региона. Откликами в данной модели служат изменения в объемах негативных воздействий, оказываемых экономикой на окружающую среду. Предполагается, что производимые затраты должны снижать негативное воздействие экономики региона на окружающую среду, причем не столько в абсолютных показателях (например, объемы разного рода выбросов), но прежде всего — в удельных показателях, т. е. показателях интенсивности негативного воздействия экономики региона на окружающую среду.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Brugmann, J.* Planning for Sustainability at the Local Government Level // *Environmental Impact Assessment Review*. — 1996. — Vol. 16 (4–6). — P. 363–379.
2. *Petrosillo, I., De Marco, A., Botta, S., Comoglio, C.* EMAS in Local Authorities: Suitable Indicators in Adopting Environmental Management Systems // *Ecological Indicators*. — 2012. — Vol. 13. — P. 263–274.
3. *Domingues, A.R., Pires, S.M., Caeiro, S., Ramos, T.B.* Defining criteria and indicators for a sustainability label of local public services // *Ecological Indicators*. — 2015. — Vol. 57. — P. 452–464.
4. *Emilsson, S., Hjelm, O.* Development of the use of standardized environmental management systems (EMSs) in local authorities // *Corporate Social Responsibility and Environmental Management*. — 2005. — Vol. 12 (3). — P. 144–156.
5. *Lozano, M., Valles, J.* An analysis of the implementation of an environmental management system in a local public administration // *Journal of Environmental Management*. — 2007. — Vol. 82. — P. 485–511.
6. *Ковалев А.О.* Институциональная структура регионального экологического менеджмента в Российской Федерации // *Друkerovskij vestnik*. — 2019. — № 3. — С. 351–368. [*Kovalev, A.O.* Institutional structure of the regional ecological management of the Russian Federation // *Drukerovskij vestnik*. — 2019. — No. 3. — P. 351–368. (In Russian)]
7. *Рябчун Е.С., Алмастьян Н.А.* Управление изменениями качества городской среды: перспективы применения стандарта ИСО 37120 в городах России // *Друkerovskij vestnik*. — 2019. — № 3. — С. 369–380. [*Ryabchun, E.S., Almastyan, N.A.* Change management of the quality of urban environment: ISO 37120 application prospects of in the Russian Cities // *Drukerovskij vestnik*. — 2019. — No. 3. — P. 369–380. (In Russian)]
8. *Суворов А.В.* Цель, задачи и принципы регионального экологического менеджмента // *Региональная экономика: теория и практика*. — 2004. — № 2. — С. 67–70. [*Suvorov, A.V.* Tsel', zadachi i printsipy regional'nogo ekologicheskogo menedzhmenta // *Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika*. — 2004. — No. 2. — S. 67–70. (In Russian)]
9. *Zhou, H., Yang, Y., Chen, Y., Zhu, J.* Data envelopment analysis in sustainability: The origins, development and future directions // *European Journal of Operational Research*. — 2018. — Vol. 264, no. 1. — P. 1–16.
10. *Liu, J., Gong, Y., Zhu, J., Zhung, J.* A DEA-based approach for competitive environment analysis in global strategies // *International Journal of Production Economics*. — 2018. — Vol. 203. — P. 110–123.



11. *Ratner S.V.* Сетевой анализ среды функционирования в задачах регионального экологического менеджмента // Проблемы управления. — 2016. — № 6. — С. 35–46. [*Ratner, S.V.* Network data envelopment analysis in regional environmental management problems // *Control Sciences* — 2016. — No. 6. — P. 35–46. (In Russian)]
  12. *Алмастьян Н.А.* Разработка стратегий природоохранной деятельности в регионе на основе моделей непараметрической оптимизации // *Modern Economy Success*. — 2017. — № 6. — С. 107–116. [*Almastyan, N.A.* Development of strategies for environmental activities in the region based on the models of non-parametric optimization. — *Modern Economy Success*. — 2017. — No. 6. — P. 107–116. (In Russian)]
  13. *Wang, Q., Sun, Y., Yuan, X., et al.* Addressing efficiency of the core ecological industrial chains: A DEA — approach // *Journal of Cleaner Production*. — 2017. — Vol. 156. — P. 235–243.
  14. *Jesus, A., Antunes, P., Santos, R., Mendonca, S.* Eco-innovation in the transition to a circular economy: An analytical literature review // *Journal of Cleaner Production*. — 2018. — Vol. 172. — P. 2999–3018.
  15. *Korhonen, J., Honkasalo, A., Seppälä, J.* Circular Economy: The Concept and its Limitations // *Ecological Economics*. — 2018. — Vol. 143. — P. 37–46.
  16. *Rennings, K.* Towards a Theory and Policy of Eco-Innovation — Neoclassical and (Co-) Evolutionary Perspectives // *ZEW Discussion Papers*. — 1998. — No. 98–24.
  17. *Li, Y.* Environmental innovation practices and performance: moderating effect of resource commitment // *Journal of Cleaner Production*. — 2014. — Vol. 66. — P. 450–458.
  18. *Ратнер С.В.* Динамические задачи оценки эколого-экономической эффективности регионов на основе базовых моделей анализа среды функционирования // Управление большими системами. — 2017. — Вып. 67. — С. 81–106. [*Ratner, S.V.* Dynamic problems of estimation of ecological-economic efficiency of regions based on basic models of data envelopment analysis // *Large-Scale Systems in Control*. — 2017. — Iss. 67. — P. 81–106. (In Russian)]
  19. *Sueyoshi, T.* Comparison and analyses of managerial efficiency and returns to scale of telecommunication enterprises by using DEA/WINDOW // *Communications of the Operations Research Society of Japan*. — 1992. — No. 37. — P. 210–219.
  20. *Wang, K., Shiwei, Yu., Zhang, W.* China's regional energy and environmental efficiency: A DEA window analysis based dynamic evaluation // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2013. — Vol. 58, iss. 5–6. — P.1117–1127.
  21. *Ratner S., Ratner P.* DEA-based Dynamic Assessment of Regional Environmental Efficiency// *Applied Computer Science*. — 2017. — Vol.13, no. 2. — P. 48–60.
  22. *Ali, A.I., Seiford, L.M.* Translation-invariance in data envelopment analysis // *Operations Research Letters*. — 1990. — No. 9(6). — P. 403–405.
  23. *Knox Lovell, C.A., & Pastor, J.T.* Units invariant and translation invariant DEA models // *Operations Research Letters*. — 1995. — No. 18 (3). — P. 147–151.
  24. *Pastor, J.T.* Chapter 3 Translation invariance in data envelopment analysis: A generalization // *Annals of Operations Research*. — 1996. — No. 66(2). — P. 91–102.
  25. *Ratner, S., Ratner, P.* Measuring Efficiencies of Regional Eco-Management Systems with DEA // *Proceedings of 2017 IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*. IEEE Catalog Number: CFP1756H-PRT ISBN: 978-1-5386-0500-4. — Vol. 2. — P. 256–259.
  26. *Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K.* Introduction to Data Envelopment Analysis and its Uses. — Springer Science, 2006. — P. 351.
  27. *Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K.* *Production Frontiers*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994. — 312 p.
  28. *Emrouznejad, A., Thanassoulis, E.* A Mathematical Model for Dynamic Efficiency Using Data Envelopment Analysis // *Applied Mathematics and Computation*. — 2005. — No. 160. — P. 363–378.
- Статья представлена к публикации членом редколлегии М.И. Гераскиным.*
- Поступила в редакцию 17.07.2019, после доработки 3.02.2020.  
Принята к публикации 5.03.2020.*
- Ратнер Светлана Валерьевна** — д-р экон. наук,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва, ✉ lanarat@mail.ru.

## EVALUATION OF EFFICIENCY OF ECO-INNOVATION MANAGEMENT BASED ON DEA MODELS WITH LAGS AND NEGATIVE OUTPUTS

S.V. Ratner

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ lanarat@mail.ru

**Abstract.** The article develops a new approach to assessing the effectiveness of environmental management systems in Russian regions based on the use of DEA models. The current and capital expenditures on environmental protection measures are considered as inputs of the model, and the changes in the load of the regional economy on the environment in a wide range of environmental indicators are considered as outputs. A distinctive feature of the proposed approach is the accounting for delayed effects of capital expenditures on environmental protection measures. The possibility of applying the scale shift procedure to eliminate the problem of the presence of negative outputs is shown. Based on a combination of econometric modeling methods and DEA methodology, dynamic models were constructed and the level of eco-innovation development in Russian regions was assessed. It has been revealed that the proposed combination of models and approaches allows better taking into account the economic logic of regional environmental management processes in comparison to the traditional method of selecting inputs and outputs of the environmental DEA model and, as a result, setting the incentives system of the state environmental policy more precisely.

**Keywords:** analysis of the functioning environment, negative inputs, delayed effects, optimization, eco-innovations, regional environmental management system.



# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОЛЛИНГА С АДАПТИВНЫМ ЦИКЛИЧЕСКИМ ОПРОСОМ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ<sup>1</sup>

В.М. Вишнеvский, О.В. Семенова, З.Т. Буй

**Аннотация.** Рассмотрена система поллинга с адаптивным динамическим порядком опроса для моделирования широкополосной беспроводной сети с централизованным механизмом управления. Разработан новый алгоритм расчета стационарного распределения вероятностей числа пакетов в абонентских станциях, дающий возможность вычислять среднее время ожидания и другие основные характеристики производительности сети. Исследована система массового обслуживания с несколькими очередями, в которых обслуживающий прибор в определенном порядке обслуживает очереди в соответствии с динамическим порядком их опроса. Такой порядок обслуживания очередей предполагает пропуск очередей, которые в предыдущем цикле опроса были пусты. Очереди, пропущенные в данном цикле, обслуживающий прибор может опросить лишь в следующем цикле. Указанный алгоритм обслуживания очередей позволяет сократить продолжительность времени их опроса и таким образом повысить производительность системы. Приведен сравнительный численный анализ различных вариантов построения и оценки характеристик производительности широкополосных беспроводных сетей IEEE 802.11 с централизованным механизмом управления. Численные исследования проведены с помощью пакета прикладных программ расчета систем стохастического поллинга.

**Ключевые слова:** беспроводная сеть, системы поллинга, циклический адаптивный опрос, исчерпывающее обслуживание, метод производящих функций.

## ВВЕДЕНИЕ

Прикладной характер систем стохастического поллинга (циклического опроса) ставит перед исследователями новые и все более сложные задачи. Модели стохастического поллинга эффективно применяются для оценки производительности, проектирования и оптимизации структуры телекоммуникационных систем и сетей, транспортных систем и систем управления дорожным движением,

производственных систем и систем управления запасами и др.

В силу широкого практического применения исследованию моделей поллинга посвящено значительное количество статей зарубежных [1–6] и отечественных [7–13] авторов, а также обзоров [14–16] и монография [17].

Цель настоящей работы заключается в исследовании системы массового обслуживания с несколькими очередями, в которых обслуживающий прибор в определенном порядке обслуживает очереди в соответствии с динамическим порядком их опроса. Впервые такой порядок обслуживания очередей введен в статье авторов [9] и предполагает пропуск очередей, которые в предыдущем цикле

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-29-06043.

опроса были пусты. Очереди, пропущенные в данном цикле, обслуживающий прибор может опросить лишь в следующем цикле. Указанный алгоритм обслуживания очередей позволяет сократить продолжительность времени их опроса и таким образом повысить производительность системы. В отличие от предыдущих работ, в частности, работы [10], где рассмотрен случай, когда обслуживающий прибор, подключившись к очереди, обслуживает лишь те заявки, которые присутствовали в ней момент подключения, в настоящей работе исследуется динамический алгоритм обслуживания очередей, при котором обслуживание очереди производится до момента ее опустошения.

Предложен новый подход для исследования рассматриваемой системы, позволяющий найти ее основные характеристики.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В рассматриваемой модели обслуживающий прибор динамически опрашивает  $N$  очередей, в каждую из которых поступает простейший поток заявок (с параметром  $\lambda_i$  для  $i$ -й очереди). Обозначим очереди системы через  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Обслуживающий прибор, подключившись к очереди, обслуживает ее до момента, пока все заявки в этой очереди не будут полностью обслужены.

Длительность обслуживания заявок в  $i$ -й очереди распределена по произвольному закону  $B_i(t)$  с начальными моментами  $b_i$  и  $b_i^{(2)}$ . Пусть также

$$\tilde{B}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dB_i(t).$$

Обслуживание очередей осуществляется в соответствии с расписанием  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N, Q_1, Q_2, \dots$

Под циклом динамического опроса будем понимать время, которое затрачивает обслуживающий прибор на посещение очередей от  $Q_1$  до  $Q_N$ , возможно, исключая очереди, которые будут пропущены в соответствии с динамическим алгоритмом. Переход обслуживающего прибора от одной очереди к другой осуществляется за случайное время с законом распределения  $S_i(t)$  с начальными

моментами  $s_i$  и  $s_i^2$ ,  $\tilde{S}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dS_i(t)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

В отличие от большинства моделей поллинга, в данной модели предполагается, что длина  $i$ -й очереди становится известной лишь в момент подключения обслуживающего прибора к ней. Этот момент назовем моментом опроса. Если в момент подключения очередь оказывается пустой, то она

не будет обслуживаться в следующем цикле, и ее номер будет исключен из расписания следующего цикла.

В случае, когда, начиная с произвольной очереди, все  $N$  очередей опрошены по кругу подряд и оказались пусты, обслуживающий прибор останавливается у последней опрошенной очереди и возобновляет обслуживание через случайное время, имеющее функцию распределения  $H(t)$  с начальными моментами  $\beta$  и  $\beta^{(2)}$ ,  $\tilde{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH(t)$ . По

завершении отдыха обслуживающий прибор подключается к следующей очереди, и процедура обслуживания повторяется вновь.

Для данной системы условием существования стационарного режима является выполнение не-

равенства  $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i < 1$ , где  $\rho_i = \lambda_i b_i$ . Под временем

цикла понимается время, которое затрачивает обслуживающий прибор на обслуживание очередей с  $Q_1$  по  $Q_N$ , включая возможное время отдыха сервера. Ключевым параметром исследования такой системы является стационарная вероятность  $u_i$  того, что очередь  $Q_i$  обслуживается в произвольном цикле. Среднее время цикла  $C$  зависит от этой величины следующим образом:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^N s_i u_i + \beta \prod_{i=1}^N (1 - u_i)}{1 - \rho}. \quad (1)$$

В свою очередь, вероятности  $u_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , зависят от того, поступали ли заявки в  $i$ -ю очередь между моментами ее опроса или нет. Для того чтобы найти эти вероятности, будем пользоваться следующим подходом. Полагаем, что вероятность  $u_i$  того, что очередь обслуживается в цикле, равна сумме двух слагаемых, первое из которых есть вероятность того, что очередь была пропущена (с вероятностью  $1 - u_i$ ), а второе есть вероятность того, что очередь обслуживалась и до следующего ее обслуживания в нее поступали заявки.

Таким образом, вероятность  $u_i$  имеет вид:

$$u_i = 1 - u_i + u_i(1 - e^{-\lambda_i C}),$$

откуда следует

$$u_i = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_i C}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) образуют систему уравнений для вычисления неизвестных  $C$  и  $u_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Далее приводим результаты модели системы динамического опроса. Обозначим через  $X_i^j$  длину  $j$ -й очереди в произвольный момент опроса  $i$ -й очереди,  $i, j = \overline{1, N}$ . Пусть также  $A_i(T)$  — число заявок, поступивших в  $i$ -ю очередь в интервале  $(0, T)$ ;  $\Theta_{i,k}$  — период занятости обслуживающего прибора, порожденный  $k$ -й заявкой в  $i$ -й очереди;  $S_i$  — длительность переключения сервера к этой очереди,  $B$  — длительность простоя обслуживающего прибора (в случае, когда все очереди подряд оказываются пустыми при их опросе). Отметим, что преобразование Лапласа — Стильтеса  $\tilde{\Theta}_i(w)$  функции распределения случайных величин  $\Theta_{i,k}$  определяется в соответствии с работой [18] как решение функционального уравнения  $\tilde{\Theta}_i(w) = \tilde{B}_i(w + \lambda_i - \lambda_i \tilde{\Theta}_i(w))$ . Средняя продолжительность обслуживания  $i$ -й очереди составляет  $\Theta_i = -\tilde{\Theta}'_i(0) = \frac{b_i}{1 - \rho_i}$ .

Для рассматриваемого нами динамического алгоритма зависимость между величинами  $X_i^j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} X_{i+1}^j | M_{i+1}^{(0)} &= \begin{cases} X_i^j + A_j \left( \sum_{k=1}^{X_i^j} \Theta_{i,k} + S_{i+1} \right), & i \neq j, \\ A_j(S_{i+1}), & i = j, \end{cases} \\ X_{i+1}^j | M_{i+1}^{(1)} &= \begin{cases} X_{i-1}^j + A_j \left( \sum_{k=1}^{X_{i-1}^j} \Theta_{i-1,k} + S_{i+1} \right), & i-1 \neq j, \\ A_j(S_{i+1}), & i-1 = j, \end{cases} \\ X_{i+1}^j | M_{i+1}^{(2)} &= \\ &= \begin{cases} X_{i-2}^j + A_j \left( \sum_{k=1}^{X_{i-2}^j} \Theta_{i-2,k} + S_{i+1} \right), & i-2 \neq j, \\ A_j(S_{i+1}), & i-2 = j, \end{cases} \quad (3) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{i+1}^j | M_{i+1}^{(N-1)} &= \\ &= \begin{cases} X_{i-N+1}^j + A_j \left( \sum_{k=1}^{X_{i-N+1}^j} \Theta_{i-N+1,k} + S_{i+1} \right), & i-N+1 \neq j, \\ A_j(S_{i+1}), & i-N+1 = j, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{i+1}^j | M_{i+1}^{(N)} &= \\ &= \begin{cases} X_{i-N}^j + A_j \left( \sum_{k=1}^{X_{i-N}^j} \Theta_{i-N,k} + B + S_{i+1} \right), & i-N \neq j, \\ A_j(B + S_{i+1}), & i-N = j, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $M_{i+1}^{(j)}$  — событие, состоящее в том, что обслуживающий прибор пропускает ровно  $j$  очередей перед обслуживанием очереди  $Q_{i+1}$ . При  $i-k < 0$  мы предполагаем, что  $X_{i-k}^j = X_{i-k+N}^j$ .

При фиксированном  $i$  вероятности событий  $M_{i+1}^{(j)}$ ,  $j = \overline{0, N}$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} P\{M_{i+1}^{(0)}\} &= u_i, \\ P\{M_{i+1}^{(1)}\} &= (1 - u_i)u_{i-1}, \dots, P\{M_{i+1}^{(i-1)}\} = \\ &= (1 - u_i)(1 - u_{i-1}) \cdots (1 - u_2)u_1, \\ P\{M_{i+1}^{(i)}\} &= \prod_{k=1}^i (1 - u_k)u_N, \\ P\{M_{i+1}^{(i+1)}\} &= \prod_{k=1}^i (1 - u_k)(1 - u_N)u_{N-1}, \quad (4) \\ P\{M_{i+1}^{(N)}\} &= \prod_{k=1}^i (1 - u_k)(1 - u_N) \cdots (1 - u_{i-1}) = \\ &= \prod_{k=1}^i (1 - u_k). \end{aligned}$$

Пусть  $p_i(k_1, k_2, \dots, k_N)$  — стационарная вероятность того, что в момент опроса  $Q_i$  в очередях  $Q_1, \dots, Q_N$  находится  $k_1, k_2, \dots, k_N$  заявок, соответственно. Введем производящую функцию  $F_i(\mathbf{z}) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_N=0}^{\infty} p_i(k_1, k_2, \dots, k_N) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_N^{k_N} = \\ &= M \left[ \prod_{j=1}^N z_j^{X_i^j} \right], \quad i = \overline{1, N}, \text{ где } M \text{ — символ среднего} \end{aligned}$$



значения,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_p, \dots, z_N)$ . Из выражений (3) и (4) получаем:

$$F_{i+1}(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^N \mathbf{M} \left[ \prod_{j=1}^N z_j^{X_{i+1}^j} \middle| M_{i+1}^{(k)} \right] = u_i M_{i+1}^{(0)}(\mathbf{z}) + \\ + (1 - u_i) u_{i-1} M_{i+1}^{(1)}(\mathbf{z}) + (1 - u_1) \cdots (1 - u_{N-1}) \times \\ \times u_N M_{i+1}^{(N-1)}(\mathbf{z}) + (1 - u_1) \cdots (1 - u_N) M_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}), \quad (5)$$

где  $u_{i-N} = u_i$ ,  $F_{i-N}(\mathbf{z}) = F_i(\mathbf{z})$ ,

$$M_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = \mathbf{M} \left[ \prod_{j=1}^N z_j^{X_{i+1}^j} \middle| M_{i+1}^{(l)} \right], \quad l = \overline{0, N}.$$

Среднее значение случайной величины  $z_j^{A_j(T)}$ , где  $T$  — случайная величина с функцией распределения  $D(T)$ , имеет вид  $\mathbf{M}[z_j^{A_j(T)}] = \tilde{D}(\lambda_j(1 - z_j))$ ,

где  $\tilde{D}(\omega) = \int_0^\infty e^{-st} dD(t)$ . Далее имеем  $\mathbf{M} = \left[ \prod_{j=1}^N z_j^{A_j(T)} \right] = \tilde{D}(\alpha(\mathbf{z}))$ , где  $\alpha(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(1 - z_j)$ .

Из соотношений (3) и (4) получаем функции  $M_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z})$ ,  $l = \overline{0, N}$ :

$$M_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = F_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \tilde{\Theta}_i(\alpha(\mathbf{z})), z_{i+1}, \dots, \\ z_N) \tilde{S}_{i+1}(\alpha(\mathbf{z})), \quad l = \overline{0, N-1}.$$

$$M_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}) = F_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, \tilde{\Theta}_i(\alpha(\mathbf{z})), z_{i+1}, \dots, \\ z_N) \tilde{S}_{i+1}(\alpha(\mathbf{z})) \tilde{H}(\alpha(\mathbf{z})). \quad (6)$$

Следовательно, равенства (5) и (6) задают систему функциональных уравнений для  $2N(N+2)$  неизвестных функций  $F_i(\mathbf{z})$  и  $M_i^{(k)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{0, N}$ . Дальнейший анализ случайных величин  $X_i^j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$  ограничим лишь нахождением лишь их первых двух моментов  $f_i(j)$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , и  $f_i(j, k)$ ,  $i, j, k = \overline{1, N}$ , что позволяет получить значения  $W_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , средних времен ожидания в очередях.

Первые моменты  $f_i(j) = \mathbf{M}[X_i^j]$  случайных величин  $X_i^j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , вычисляются по формуле:

$$f_i(j) = \mathbf{M}[X_i^j] = \frac{\partial F_i(\mathbf{z})}{\partial z_j} \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}}, \quad \text{где } \mathbf{1} \text{ — вектор-строка,}$$

состоящий из единиц.

Дифференцируя равенства (5) с учетом равенства (6), получаем систему линейных алгебраических уравнений для  $f_i(j)$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ :

$$f_{i+1}(j) = u_i \left[ k_{i,j} f_i(j) + k_{i,j} \lambda_j \frac{b_i}{1 - \rho_i} f_i(i) + \lambda_j s_{i+1} \right] + \\ + (1 - u_i) u_{i-1} \left[ k_{i-1,j} f_{i-1}(j) + \right. \\ \left. + k_{i-1,j} \lambda_j \frac{b_{i-1}}{1 - \rho_{i-1}} f_{i-1}(i-1) + \lambda_j s_{i+1} \right] + \\ + (1 - u_1) \cdots (1 - u_N) \left[ k_{i-N,j} f_{i-N}(j) + \right. \\ \left. + k_{i-N,j} \lambda_j \frac{b_{i-N}}{1 - \rho_{i-N}} f_{i-N}(i-N) + \lambda_j (s_{i+1} + \beta) \right].$$

Решая эту систему, получаем средние значения первых моментов случайных величин  $X_i^j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ . Вторые моменты случайных величин  $X_i^j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , вычисляются в виде

$$f_i(j, k) = \mathbf{M}[X_i^j X_i^k] = \frac{\partial^2 F_i(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}},$$

$$f_i(i, i) = \mathbf{M}[X_i^i (X_i^i - 1)] = \frac{\partial^2 F_i(\mathbf{z})}{\partial z_i^2} \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}}.$$

В этом случае система (5) преобразуется к виду

$$f_{i+1}(j, k) = \sum_{m=0}^N \frac{\partial^2 M_{i+1}^{(m)}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k} \bigg|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}} P\{M_{i+1}^{(m)}\}, \quad (7)$$

где частные производные второго порядка для  $\frac{\partial^2 M_{i+1}^{(k)}(\mathbf{z})}{\partial z_j \partial z_k}$ ,  $k = \overline{0, N}$ , нетрудно получить из равенств (6). Преобразуя выражение (7) к виду системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $f_i(j, k)$ ,  $i, j, k = \overline{1, N}$ , далее решаем ее численными методами. Значения  $W_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , далее вычисляются по формуле:  $W_i = \frac{\lambda_i b_i^{(2)}}{2(1 - \rho_i)} + \frac{f_i(i, i)}{2\lambda_i f_i}$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

### 3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ШИРОКОПОЛОСНОЙ СЕТИ IEEE 802.11 ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ АБОНЕНТСКИХ СТАНЦИЙ

Механизм циклического опроса широко применяется в современных беспроводных сетях, включая: комплексы Wi-Fi; перспективные сети миллиметрового диапазона радиоволн (MMWave); радиочастотную идентификацию транспортных средств и сети «интернета вещей» (IoT). В комплексах Wi-Fi центральная станция (AccessPoint) осуществляет опрос очередей пакетов абонентских станций согласно таблице опроса.

Проведем сравнительный анализ характеристик производительности беспроводной сети при двух алгоритмах опроса — динамического и традиционного последовательного опроса точкой доступа абонентских станций от первой до последней. Будем полагать, что число абонентских станций  $N = 4$ .

В таблице представлены значения  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  среднего времени нахождения пакетов в очереди и на обслуживании в системах с первым и вторым типом обслуживания соответственно, при интенсивности входных потоков пакетов в абонентские станции  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/(600 \text{ мкс})$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$  принимают значения от 1 до 200 с шагом 10. Время обслуживания очередей имеет функцию распределения  $B_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$ , где  $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 1/(200 \text{ мкс})$ ,  $\mu_2 = 1/(300 \text{ мкс})$ ,  $S_i(t) = 1 - e^{-s_i t}$ , где  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1/(600 \text{ мкс})$ . Численные исследования проведены с помощью пакета прикладных программ расчета систем стохастического поллинга [19].

В данном примере выигрыш от применения алгоритма типа 1 по сравнению со вторым алгоритмом составляет 15,99 % в случае, когда очереди 3 и 4 имеют малую загрузку относительно первых двух очередей. При увеличении интенсивности входного потока выигрыш постепенно снижается до нуля, и алгоритм первого типа начинает вести себя как обычный циклический опрос.

Значения  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$

| $\lambda_3 = \lambda_4$ | $V^{(1)}$ | $V^{(2)}$ | $\lambda_3 = \lambda_4$ | $V^{(1)}$ | $V^{(2)}$ |
|-------------------------|-----------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|
| 1                       | 0,00515   | 0,00613   | 100                     | 0,00793   | 0,00816   |
| 10                      | 0,00542   | 0,00627   | 130                     | 0,00888   | 0,00911   |
| 50                      | 0,00648   | 0,00698   | 160                     | 0,0100    | 0,0101    |
| 70                      | 0,00704   | 0,00742   | 200                     | 0,0119    | 0,0119    |

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена новая математическая модель и методы исследования беспроводных сетей, в которых базовая станция обслуживает пакеты абонентских станций в соответствии с динамическим протоколом опроса. Выполнен сравнительный анализ характеристик производительности таких сетей для двух алгоритмов опроса (динамического, а также последовательного опроса точкой доступа абонентских станций от первой до последней) с помощью разработанного авторами статьи программного комплекса исследования систем поллинга.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневецкий В.М., Семенова О.В. Системы адаптивного динамического поллинга с коррелированными входными потоками: препринт. — М.: ИПУ РАН, 2017. — 88 с. [Vishnevskiy, V.M., Semenova, O.V. Adaptive dynamic polling systems with correlated arrivals: preprint. — Moscow, IPU RAN, 2017. — 88 p. (In Russian)]
2. Vishnevsky, V.M., Larionov, A.A., Ivanov, R.E. UHF RFID in Automatic Vehicle Identification: Analysis and Simulation // IEEE Journal of Radio Frequency Identification. — 2017. — Vol. 1, no. 1. — P. 3—12. DOI: 10.1109/JRFID.2017.2751592.
3. Bekker, R., Vis, P., Dorsman, J.L., et al. The Impact of Scheduling Policies on the Waiting-time distributions in Polling Systems // Queueing Systems. 2015. — Vol. 79, no. 2. — P. 145—172.
4. Saffer, Z., Telek, M., Horvath, G. Fluid Polling System with Markov Modulated Load and Gated Discipline // Lecture Notes in Computer Science. — 2018. — Vol. 10932. — P. 86—102.
5. Meyfroyt, T.M.M., Boon, M.A.A., Borst, S.C., Boxma, O.J. Performance of Large-Scale Polling Systems with Branching-Type and Limited Service // Performance Evaluation. — 2019. — Vol. 133, September 2019. — P. 1—24.
6. Kim, B., Kim, J. Analysis of the Waiting Time Distribution for Polling Systems with Retrials and Glue Periods // Annals of Operations Research. — 2019. — Vol. 277, no. 2. — P. 197—212.
7. Гайдамака Ю.В. Модель с пороговым управлением нагрузкой для анализа серверов протокола SIP в режиме перегрузок // Автоматика и вычислительная техника. — 2013. — Вып. 47, № 4. — С. 65—75. [Gaidamaka, Yu.V. Model with Threshold Control for Analyzing a Server with a SIP Protocol in the Overload Mode // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — Vol. 47, no 4. — P. 211—218.]
8. Сонькин М.А., Моисеев А.Н., Сонькин Д.М., Буртовая Д.А. Объектная модель приложения для имитационного моделирования циклических систем массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2017. — № 40. — С. 71—80. [Sonkin, M.A., Moiseev, A.N., Sonkin, D.M., Burtovaya, D.A. Object model of application for simulation of cyclic queueing systems // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. — 2017. — Vol. 40. — P. 71—80. (In Russian)]
9. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N., Klimenok, V.I., et al. Approximate Method to Study M/G/1-Type Polling System with Adaptive Polling Mechanism // Quality Technology and Quantitative Management. — 2012. — Vol. 2. — P. 211—228.
10. Semenova, O.V., Bui, D.T. Method of Generating Functions for Performance Characteristic Analysis of the Polling Systems with Adaptive Polling and Gated Service // Communications





- in Computer and Information Science. — 2018. — Vol. 912. — P. 348–359.
11. Рыков В.В. К анализу поллинг-систем // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 6. — С. 90–114. [Rykov, V.V. On Analysis of Periodic Polling Systems // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70. — P. 997–1018.]
  12. Matveev, A., Feoktistova, V., Bolshakova, K. On Global Near Optimality of Special Periodic Protocols for Fluid Polling Systems with Setups // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2016. — Vol. 171, no. 3. — P. 1055–1070.
  13. Zorine, A.V. On Ergodicity Conditions in a Polling Model with Markov Modulated Input and State-Dependent Routing // Queueing Systems. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — P. 223–241.
  14. Вишневский В.М., Семенова О.В. Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 2. — С. 3–56. [Vishnevskii, V.M., Semenova, O.V. Mathematical Methods to Study the Polling Systems // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67, no. 2. — P. 173–220.]
  15. Boon, M.A.A., van der Mei, R.D., Winands, E.M.M. Applications of Polling Systems // Surveys in Operations Research and Management Science. — 2011. — Vol. 16, no. 2. — P. 67–82.
  16. Borst, S.C., Boxma, O. Polling: Past, Present, and Perspective // TOP. — 2018. — Vol. 26, no. 3. — P. 335–369.
  17. Вишневский В.М., Семенова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. — М.: Техносфера, 2007. — 309 с. [Vishnevskii, V.M., Semenova, O.V. Polling systems: theory and applications in broadband wireless networks. — Moscow: Technosphere, 2007. — 309 p. (In Russian)]
  18. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными входными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. — М.: Техносфера, 2018. — 564 с. [Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N., Klimenok, V.I. Stochastic systems with correlated arrivals. Theory and applications in telecommunication networks. — Moscow, Technosphere, 2018. — 564 p. (In Russian)]
  19. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019614554 РФ; Зарег. 08.04.2019. Программный комплекс оценки характеристик систем стохастического поллинга / В.М. Вишневский, О.В. Семенова, З.Т. Буй. [Certificate of state registration of a computer program No. 2019614554 RF; Registered 04/08/2019. Software complex for evaluating the characteristics of stochastic polling systems / V.M. Vishnevsky, O.V. Semenova, D.T. Buy. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.*
- Поступила в редакцию 16.04.2020, после доработки 10.06.2020.  
Принята к публикации 18.06.2020.*
- Вишневский Владимир Миронович** — д-р техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ vishn@inbox.ru,
- Семенова Ольга Валерьевна** — канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ olgasmnv@gmail.com,
- Буй Зуи Тан** — аспирант, Московский физико-технический институт, г. Москва, ✉ duytan@phystech.edu.

## INVESTIGATION OF THE STOCHASTIC POLLING SYSTEM AND ITS APPLICATIONS IN BROADBAND WIRELESS NETWORKS

V.M. Vishnevsky<sup>1</sup>, O.V. Semenova<sup>2</sup>, D.T. Bui<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

<sup>1</sup>✉ vishn@inbox.ru, <sup>2</sup>✉ olgasmnv@gmail.com, <sup>3</sup>✉ duytan@phystech.edu

**Abstract.** A polling system with adaptive dynamic polling order for modeling a broadband wireless network with a centralized control mechanism is considered. A new algorithm for calculating the stationary state probability distribution of the number of packets in subscriber stations has been developed, which makes it possible to calculate the average waiting time and other characteristics of the network performance. A queueing system with several queues is investigated, in which the server serves queues in a dynamic polling order. This order of queueing involves skipping queues that were empty in the previous polling cycle. The queues that were skipped in this cycle the server can poll only in the next cycle. The specified queue servicing algorithm allows to reduce the duration of the queue polling time and thus increase the system performance. A comparative numerical analysis of various options for constructing and evaluating the performance characteristics of broadband wireless IEEE 802.11 networks with a centralized control mechanism is presented. Numerical studies were carried out using a software package for evaluating the stochastic polling systems.

**Keywords:** broadband wireless network, polling systems, adaptive polling order, exhaustive service, generating function method.

**Funding.** The work was performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research (project no. 19-29-06043).

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ТОРЫ НА ОСНОВЕ МАЛОПОРТОВЫХ МАРШРУТИЗАТОРОВ И ХАБОВ

М.Ф. Каравай, В.С. Подлазов

**Аннотация.** Рассмотрен метод построения оптимальных системных сетей с топологией многомерных торов. Оптимизация выполнена по таким важным функциональным характеристикам сети как число ее абонентов (процессоров) и задержки передачи между ними, задаваемые диаметром сети. Оптимизация осуществлена в элементной базе мало-портовых маршрутизаторов и разветвителей дуплексных каналов (хабов) путем применения сетей с топологией квазиполных графов. Оптимизация реализована благодаря инвариантному расширению многомерного тора и дуплексного канала с сохранением таких их маршрутных свойств, как способ маршрутизации и максимальные задержки передачи (диаметр сети). Показано, что оптимизация приводит к увеличению числа абонентов при неизменных задержках и к сокращению задержек при неизменном числе абонентов. Оптимизация сопровождается некоторым усложнением сети по схемным и кабельным затратам. При этом мера усложнения (в разгах) оказывается меньше меры совместного улучшения обеих характеристик. Приведены сравнительные характеристики оптимальных торов и торов отечественной системной сети «Ангара». Доказано существенное увеличение числа абонентов и сокращение диаметров оптимальных торов по сравнению с сетью «Ангара».

**Ключевые слова:** системные сети суперкомпьютеров, сети с топологией многомерных торов, сети с топологией квазиполных графов, инвариантное расширение сетей, число абонентов сети, диаметр сети, оптимизация характеристик сети, сеть «Ангара».

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время используется небольшое число базовых структур системных сетей суперкомпьютеров — сложенная сеть Клоза, толстое дерево, многомерный тор, обобщенный гиперкуб и двухуровневая склейка полных графов. Среди них нет идеальных — выбор той или иной структуры сразу задает и ряд ее ограничений-недостатков. Так, сети с топологией  $D$ -мерных торов наименее сложные по схемным и кабельным затратам, но обладают наибольшими задержками передачи данных. Поэтому разработка методов устранения недостатков выбранной структуры в рамках ее базовых возможностей представляет собой актуальную задачу совершенствования современных системных сетей — задачу проектного управления характеристиками сети в целях улучшения (даже оптимизации) функционально важных ее характеристик.

В настоящей работе решается задача построения оптимальных по числу абонентов и задержкам

передачи системных сетей с топологией многомерных торов. Она решается путем применения элементной базы, состоящей из малопортовых маршрутизаторов и дуплексных разветвителей (мультиплексоров/демультиплексоров) каналов  $1 \times m$ ,  $m = 2, 3, 4$ . Конкретно, применяются 8-портовый маршрутизатор сети «Ангара» [1, 2] и рыночные дуплексные разветвители  $1 \times 3$  или  $1 \times 4$  (хабы) интерфейса *PCI-express*. В различных вариантах их совместного применения имеется возможность увеличения масштабируемости сети (повышения числа процессоров), быстродействия сети (сокращения ее диаметра) и ее канальной отказоустойчивости.

В § 1 описывается метод инвариантного расширения системных сетей с сохранением их маршрутных свойств. Метод конкретизируется для исходных сетей, состоящих из неблокируемых коммутаторов, маршрутизаторов и дуплексных колец. В § 2 строятся распараллеленные дуплексные кольца (разреженные мультикольца) с малыми диамет-

рами. В § 3 строятся расширенные маршрутизаторы с увеличенным числом абонентов. В § 4 на базе разреженных мультиколец и расширенных маршрутизаторов строятся многомерные торы с увеличенным числом абонентов и с малыми диаметрами. Наконец, в § 5 сравниваются характеристики построенных многомерных торов и торов отечественной системной сети «Ангара». В заключении перечисляются полученные результаты.

## 1. ИНВАРИАНТНОЕ РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Пусть имеется исходная системная сеть (рис. 1), объединяющая  $K$  абонентов,  $\text{ИсхС}(K)$  с заданными маршрутными свойствами, которые задают число  $K$  абонентов сети и ее диаметр  $D$ . Для нее можно поставить задачу построения расширенной сети  $\text{РасС}(R)$  с числом абонентов  $R > K$ , которая состоит из копий сети  $\text{ИсхС}(K)$  с разными наборами абонентов и сохраняет неизменными (инвариантом) маршрутные свойства сети  $\text{ИсхС}(K)$  для абонентов. В данной работе маршрутные свойства — это параметры способов маршрутизации пакетов данных, которые описывают их задержки при передаче (диаметр) и число абонентов сети (процессоров).

Возможны два варианта поставленной задачи. В первом варианте исходной сетью служит маршрутизатор с  $K$  дуплексными портами и диаметром  $D$  или коммутатор  $K \times K$  с диаметром  $D = 1$ . Во втором варианте исходной сетью служит дуплексное кольцо с  $K$  узлами и диаметром  $D = \lfloor K/2 \rfloor$ .

Будем решать поставленную задачу последовательно, начиная с малых значений  $K = m$ ,  $m = 2, 3, 4$ . Решение основывается на использовании свойств такого математического объекта, как неполная уравновешенная симметричная блок-схема  $B(N, m, \sigma)$  [3, 4], которая содержит  $N$  блоков и  $N$  элементов, размещенных по блокам так, что каждый блок содержит точно  $m$  различных элементов, а каждый элемент входит точно в  $m$  различных блоков и каждая пара элементов входит

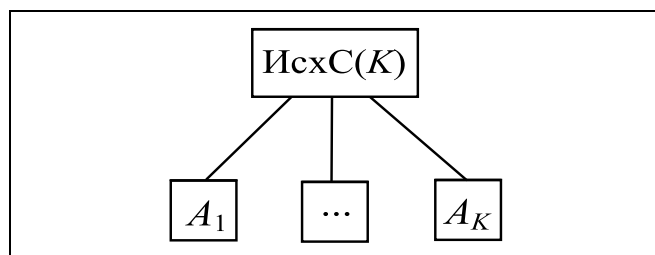


Рис. 1. Исходная произвольная сеть на  $K$  абонентов с одним портом у каждого абонента

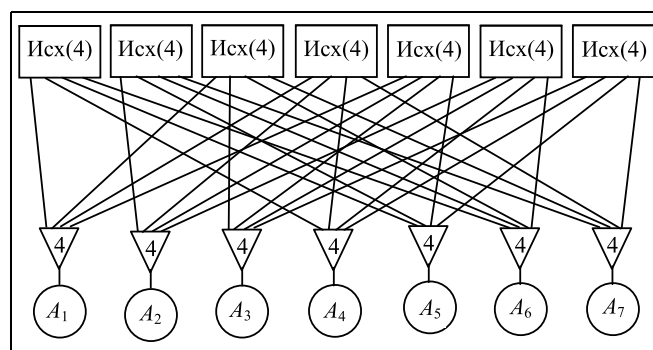


Рис. 2. Сеть  $\text{ПС}(7, 4, 2)$

Таблица 1

Межсоединения в сети  $\text{ПС}(7, 4, 2)$

| Копия сети Исх(4) | Абоненты |   |   |   |
|-------------------|----------|---|---|---|
| 1                 | 1        | 6 | 5 | 4 |
| 2                 | 2        | 7 | 6 | 5 |
| 3                 | 3        | 1 | 7 | 6 |
| 4                 | 4        | 2 | 1 | 7 |
| 5                 | 5        | 3 | 2 | 1 |
| 6                 | 6        | 4 | 3 | 2 |
| 7                 | 7        | 5 | 4 | 3 |

точно в  $\sigma$  блоков, а  $N = m(m - 1)/\sigma + 1$ . При этом блок-схема  $B(N, m, \sigma)$  задает максимальное  $N$  при заданных  $m$  и  $\sigma$ , и наоборот, минимальное  $m$  при заданных  $N$  и  $\sigma$ . В решаемой задаче блоки интерпретируются как копии сети  $\text{ИсхС}(m)$ , элементы — как узлы степени  $m$  (с  $m$  дуплексными портами), а вхождение элемента в блок — как соединение их дуплексным каналом.

В такой интерпретации простейшая расширенная сеть, изоморфная блок-схеме  $B(N, m, \sigma)$ , задается двудольным графом, одна доля которого содержит  $N$  копий сети  $\text{ИсхС}(m)$ , другая доля —  $N$  узлов (абонентов), соединенных  $m$  ребрами (дуплексными каналами) с разными копиями сети  $\text{ИсхС}(m)$ . Между любыми абонентами имеется  $\sigma$  разных путей длины в два ребра, и любой путь проходит только через одну сеть  $\text{ИсхС}(m)$ . Этот граф мы называем квазиполным графом, а изоморфную ему сеть — простейшей сетью  $\text{ПС}(N, m, \sigma)$ . В ней абонент имеет степень  $m$  благодаря подключению к сети  $\text{ИсхС}(m)$  через разветвитель дуплексных каналов  $1 \times m$  — хаб( $m$ ).

Пример такой сети при  $m = 4$  и  $\sigma = 2$  дан на рис. 2. Схема соединений между копиями сети  $\text{ИсхС}(4)$  и абонентами в сети  $\text{ПС}(7, 4, 2)$  задается в табл. 1, в которой в каждой строке задается номер сети  $\text{ИсхС}(4)$  и номера подсоединенных к ней абонентов.

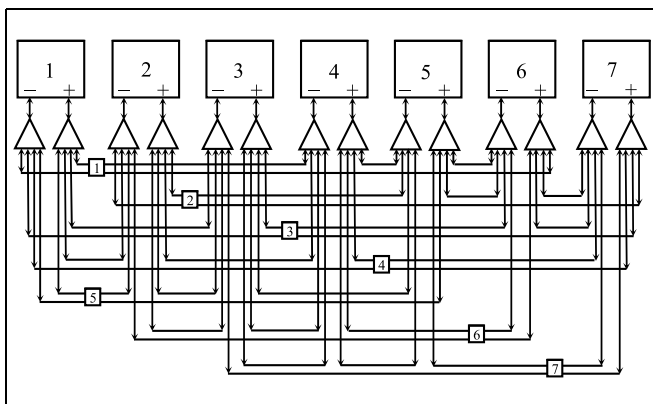


Рис. 3. Разреженное мультикольцо РазМк(7, 4, 2) с диаметром  $D = 2$

Таблица 2

Межсоединения в разреженном мультикольце РазМк(7, 4, 2)

| Кольца сети ИсхС(4) | Узлы |   |   |   |
|---------------------|------|---|---|---|
| 1                   | 1    | 6 | 5 | 4 |
| 2                   | 2    | 7 | 6 | 5 |
| 3                   | 3    | 1 | 7 | 6 |
| 4                   | 4    | 2 | 1 | 7 |
| 5                   | 5    | 3 | 2 | 1 |
| 6                   | 6    | 4 | 3 | 2 |
| 7                   | 7    | 5 | 4 | 3 |

Возможны следующие варианты организации исходной системной сети ИсхС( $m$ ).

- Если сеть ИсхС( $m$ ) является неблокируемым коммутатором  $m \times m$ , то сеть ПС( $N, m, \sigma$ ) является неблокируемым коммутатором  $N \times N$ , составленным из коммутаторов  $m \times m$  и хабов( $m$ ). При этом сеть РасС( $N, m, \sigma$ ) имеет статическую самомаршрутизацию, при которой абоненты задают бесконфликтные маршруты независимо друг от друга. Эти маршруты прокладываются между абонентами по прямым каналам (без промежуточной буферизации пакетов). Поэтому сеть ПС( $N, m, \sigma$ ) имеет диаметр  $D = 1$  и является  $(\sigma - 1)$ -отказоустойчивой по каналам и коммутаторам.
- Если сеть ИсхС( $m$ ) является дуплексным кольцом с  $m$  узлами, то сеть ПС( $N, m, \sigma$ ) является мультикольцом с  $N$  узлами, составленным из  $N$  колец с  $m$  узлами и хабов( $m$ ) [5]. Такую сеть ПС( $N, m, \sigma$ ) мы называем разреженным мультикольцом РазМк( $N, m, \sigma$ ), которое является  $(\sigma - 1)$ -отказоустойчивым по каналам.

Пример разреженного мультикольца при  $m = 4$  и  $\sigma = 2$  приведен на рис. 3. Схема соединений между кольцами сети ИсхС(4) и абонентами в разреженном мультикольце РазМк(7, 4, 2) задается

табл. 2, в которой в каждой строке находятся номер кольца сети ИсхС(4) и номера подсоединенных к нему абонентов.

Мультикольцо РазМк( $N, m, \sigma$ ) также имеет статическую самомаршрутизацию, при которой любой путь между узлами проходит по одному кольцу сети ИсхС( $m$ ). Как следствие, мультикольцо РазМк( $N, m, \sigma$ ) имеет диаметр  $D = \lfloor m/2 \rfloor$ , а не  $D = \lfloor N/2 \rfloor$ , как имеет место в дуплексном кольце из  $N$  узлов.

- Наконец, если сеть ИсхС( $m$ ) является маршрутизатором с диаметром  $D$ , то сеть ПС( $N, m, \sigma$ ) также является маршрутизатором с диаметром  $D + 1$ , который складывается из скачка по ребру и скачков с входа на выход в сети ИсхС( $m$ ).
- В общем случае, когда  $K > m$ , инвариантное расширение сети ИсхС( $K$ ) осуществляется таким образом. Берется  $N$  копий сети ИсхС( $K$ ), каждая из которых разделяется на  $t = \lfloor K/m \rfloor$

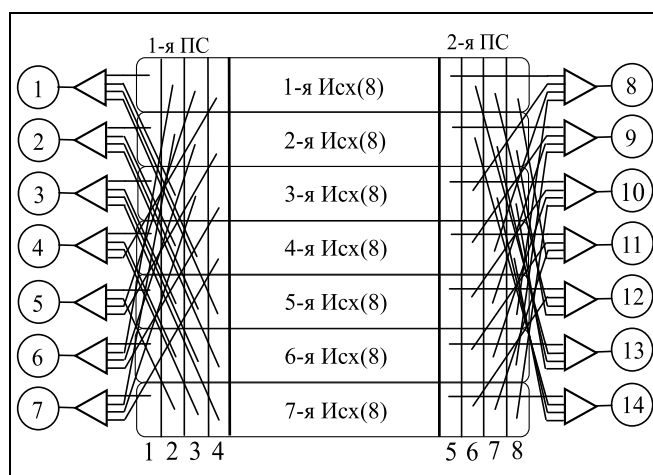


Рис. 4. Сеть РасС(14, 8, 4, 2) с диаметром  $D = 2$

Таблица 3

Межсоединения в сети РасС(14, 8, 4, 2)

| Копии<br>сети<br>Исх(8) | Порты                |   |   |   |                      |    |    |    |
|-------------------------|----------------------|---|---|---|----------------------|----|----|----|
|                         | 1                    | 2 | 3 | 4 | 5                    | 6  | 7  | 8  |
|                         | 1-я сеть ПС(7, 4, 2) |   |   |   | 2-я сеть ПС(7, 4, 2) |    |    |    |
|                         | Абоненты             |   |   |   |                      |    |    |    |
| 1                       | 1                    | 6 | 5 | 4 | 8                    | 13 | 12 | 11 |
| 2                       | 2                    | 7 | 6 | 5 | 9                    | 14 | 13 | 12 |
| 3                       | 3                    | 1 | 7 | 6 | 10                   | 8  | 14 | 13 |
| 4                       | 4                    | 2 | 1 | 7 | 11                   | 9  | 8  | 14 |
| 5                       | 5                    | 3 | 2 | 1 | 12                   | 10 | 9  | 8  |
| 6                       | 6                    | 4 | 3 | 2 | 13                   | 11 | 10 | 9  |
| 7                       | 7                    | 5 | 4 | 3 | 14                   | 12 | 11 | 10 |

равных частей по  $m$  портов. К портам  $i$ -й части ( $1 \leq i \leq t$ ) подсоединяются абоненты с номерами  $(i-1)N+j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , которые принадлежат к  $i$ -й сети  $ПС(N, m, \sigma)$ . Если  $K = tm + m - \sigma$ , то  $(t+1)$ -я часть образует остаточную сеть  $ПС^*(N-m, m-\sigma, \sigma)$  с абонентами, номера которых задаются как  $tN+j$ ,  $1 \leq j \leq N-m$ . Остаточная сеть  $ПС^*(N-m, m-\sigma, \sigma)$  изоморфна остаточной блок-схеме  $B^*(N-m, m-\sigma, \sigma)$  [3], где  $N-m = (m-1)(m-\sigma)/\sigma$ . В результате расширенная сеть содержит либо  $R = tN$ , либо  $R = tN + N - m$  абонентов и обозначается как  $РасС(R, K, m, \sigma)$ .

- Если сеть  $ИсхС(K)$  имеет диаметр  $D$ , то сеть  $РасС(R, K, m, \sigma)$  имеет диаметр  $D+1$ . Пример схемы соединений в сети  $РасС(R, K, m, \sigma)$  при  $K=8$ ,  $m=4$ ,  $\sigma=2$  и  $D=2$  дан в табл. 3, а самой сеть  $РасС(14, 8, 4, 2)$  — на рис. 4. По построению любые два абонента, номера которых не совпадают по  $\text{mod } N$ , соединены друг с другом сетью  $ИсхС(K)$  через одну копию сети  $ИсхС(K)$ , но параллельно через  $\sigma$  разных копий сети  $ИсхС(K)$ , и используют только маршрутные свойства сети  $ИсхС(K)$ . С другой стороны, любые два абонента, номера которых совпадают по  $\text{mod } N$ , также соединены друг с другом последовательно через одну копию сети  $ИсхС(K)$ , но параллельно через  $m$  разных копий сети  $ИсхС(K)$ . Эти свойства обеспечивают сохранение в сети  $РасС(R)$  маршрутных свойств сети  $ИсхС(K)$ . При этом образуются  $N$  подмножеств по  $t$  или  $t+1$  абонентов, с увеличенной в  $m$  раз пропускной способностью между ними.

## 2. РАЗРЕЖЕННЫЕ МУЛЬТИКОЛЬЦА С МАЛЫМ ДИАМЕТРОМ

Разреженное мультикольцо  $РазМк(N, m, \sigma)$  является кольцом с минимальным диаметром  $D = \lfloor m/2 \rfloor$  скачков, которое заменяет кольцо с  $N$  узлами и диаметром  $D = \lfloor N/2 \rfloor$ . Однако в общем случае требуется заменить кольцо с  $P$  узлами, где  $(p-1)N < P \leq pN$ , разреженным мультикольцом с меньшим диаметром. Такое мультикольцо обозначается как  $РазМк(P, N, m, \sigma)$  и строится таким образом.

Сначала описанным в § 1 методом строится таблица соединений для мультикольца  $РазМк(N, m, \sigma)$  с  $m$  кольцами. Для примера табл. 4 задает таблицу соединений в нем при  $m=2$  и  $\sigma=1$ . Само мультикольцо с такой минимальной таблицей соединений представлено на рис. 5.

Затем минимальная таблица расширяется в таблицу соединений для мультикольца  $РазМк(P, N, m, \sigma)$ , которая содержит  $N$  строк с номерами по  $pt$  узлов в каждой строке. Строки расширенной таб-

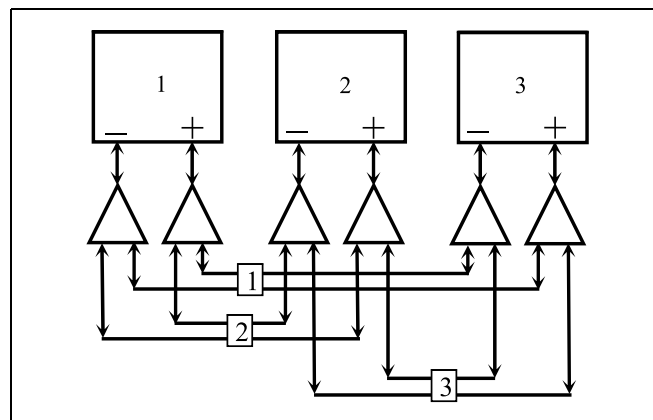


Рис. 5. Разреженное мультикольцо при  $p=1$ ,  $m=2$  и  $\sigma=1$  с диаметром  $D=1$

Таблица 4

Минимальная таблица подсоединения узлов к кольцам при  $m=2$  и  $\sigma=1$

| Кольца ИсхС(2) | Узлы |   |
|----------------|------|---|
| 1              | 1    | 3 |
| 2              | 2    | 1 |
| 3              | 3    | 2 |

лицы разделены на  $p$  зон по  $m$  столбцов в каждой. В зоне 1 находятся  $N$  узлов с номерами из минимальной таблицы и с тем же размещением по строкам. В зоне  $i$  ( $1 < i \leq p$ ) находится узел с номером  $L + (i-1)N$  той же строки и в том же месте, что и узел с номером  $L$  в зоне 1 ( $1 < L \leq N$ ). Для примера табл. 5 задает расширенную таблицу для  $p=3$ ,  $m=2$  и  $\sigma=1$ , полученную из табл. 4. Для примера мультикольцо  $РазМк(9, 3, 2, 1)$ , построенное по табл. 5, представлено на рис. 6.

Для построения мультикольца  $РазМк(P, N, m, \sigma)$ , узлы из каждой строки расширенной таблицы соединяются друг с другом в одноименном кольце в порядке возрастания их номеров. Для замыкания кольца узел с наибольшим номером подсоединяется к узлу с наименьшим номером. Если оказы-

Таблица 5

Расширенная таблица подсоединения узлов к кольцам при  $p=3$ ,  $m=2$  и  $\sigma=1$

| $i$    | 1        |   | 2        |   | 3        |   |
|--------|----------|---|----------|---|----------|---|
| Кольца | Узлы 1÷3 |   | Узлы 4÷6 |   | Узлы 7÷9 |   |
| 1      | 1        | 3 | 4        | 6 | 7        | 9 |
| 2      | 2        | 1 | 5        | 4 | 8        | 7 |
| 3      | 3        | 2 | 6        | 5 | 9        | 8 |



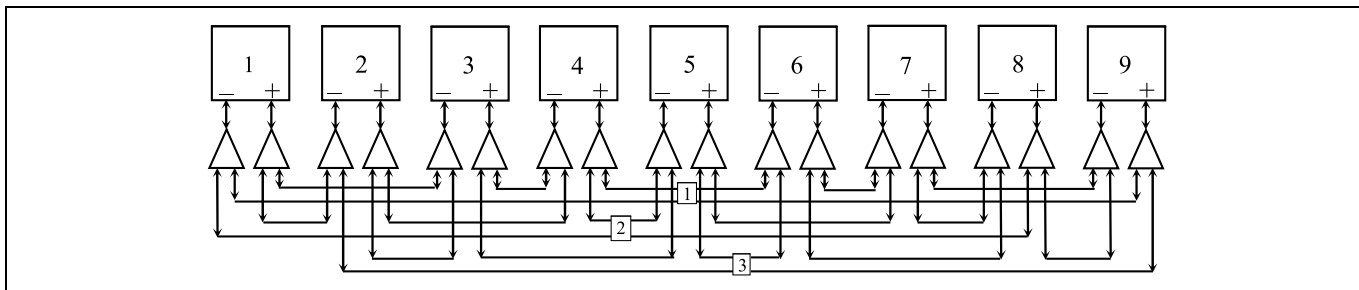


Рис. 6. Разреженное мультикольцо при  $p = 3$ ,  $m = 2$  и  $\sigma = 1$  с  $D = 3$

вається, що  $(p - 1)N < P < pN$ , то узлы с номерами больше  $P$  исключаются из расширенной таблицы и из мультикольца, а его кольца замыкаются через оставшиеся узлы с наибольшими номерами. Диаметр мультикольца  $\text{РазМк}(P, N, m, \sigma)$  задается как  $D = \lfloor pm/2 \rfloor$ , где  $p = \lceil P/N \rceil$ .

В дальнейшем нам потребуется мультикольцо  $\text{РазМк}(7, 3, 1)$  с диаметром  $D = 1$ , таблица соединений которого дана в табл. 6, а само мультикольцо — на рис. 7. На ее основе описанным методом можно построить мультикольцо  $\text{РазМк}(8, 7, 3, 1)$  с

$p = 2$  и  $D = 2$ ,  $\text{РазМк}(14, 7, 3, 1)$  с  $p = 2$  и  $D = 2$  или мультикольцо  $\text{РазМк}(16, 7, 3, 1)$  с  $p = 3$  и  $D = 3$ .

### 3. ПРОСТЕЙШИЕ РАСШИРЕННЫЕ МАРШРУТИЗАТОРЫ

Рассмотрим 8-портовый маршрутизатор Е4 сети «Ангара» [1, 2] с диаметром  $D = 1$ . Возьмем его за исходную сеть  $\text{Исх}(8)$  и расширим до  $R$ -портового маршрутизатора  $\text{РасС}(R, 8, m, \sigma)$  при разных  $m$  и  $\sigma$ . Частично это уже сделано ранее для  $m = 4$  и  $\sigma = 2$  (см. табл. 3 и рис. 4).

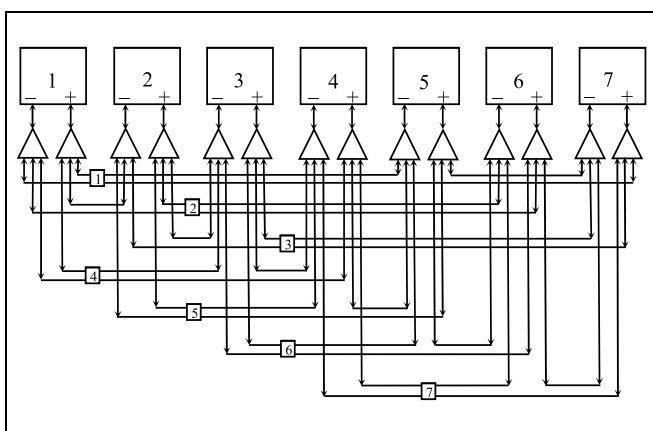


Рис. 7. Разреженное мультикольцо при  $p = 1$ ,  $m = 3$  и  $\sigma = 1$  с  $D = 1$

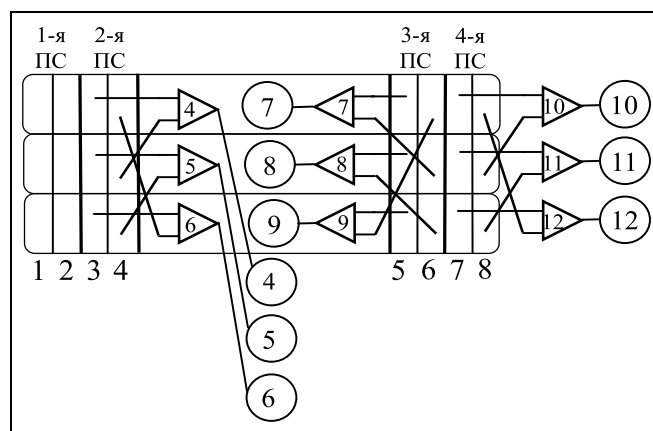


Рис. 8. Маршрутизатор  $\text{РасС}(12, 8, 2, 1)$  с диаметром  $D = 2$

Таблица 6

Таблица подсоединения узлов к кольцам при  $p = 1$ ,  $m = 3$  и  $\sigma = 1$

| Кольца $\text{ИсхС}(3)$ | Узлы |   |   |
|-------------------------|------|---|---|
| 1                       | 1    | 7 | 5 |
| 2                       | 2    | 1 | 6 |
| 3                       | 3    | 2 | 7 |
| 4                       | 4    | 3 | 1 |
| 5                       | 5    | 4 | 2 |
| 6                       | 6    | 5 | 3 |
| 7                       | 7    | 6 | 4 |

Таблица 7

Межсоединения в маршрутизаторе  $\text{РасС}(12, 8, 2, 1)$

| Копии<br>сети<br>Исх(8) | Порты сети Исх(8)  |   |                    |   |                    |   |                    |    |
|-------------------------|--------------------|---|--------------------|---|--------------------|---|--------------------|----|
|                         | 1                  | 2 | 3                  | 4 | 5                  | 6 | 7                  | 8  |
|                         | 1-я<br>ПС(3, 2, 1) |   | 2-я<br>ПС(3, 2, 1) |   | 3-я<br>ПС(3, 2, 1) |   | 4-я<br>ПС(3, 2, 1) |    |
|                         | Абоненты           |   |                    |   |                    |   |                    |    |
|                         | 1                  | 2 | 3                  | 4 | 5                  | 6 | 7                  | 8  |
| 1                       | 1                  | 3 | 4                  | 6 | 7                  | 9 | 10                 | 12 |
| 2                       | 2                  | 1 | 5                  | 4 | 8                  | 7 | 11                 | 10 |
| 3                       | 3                  | 2 | 6                  | 5 | 9                  | 8 | 12                 | 11 |

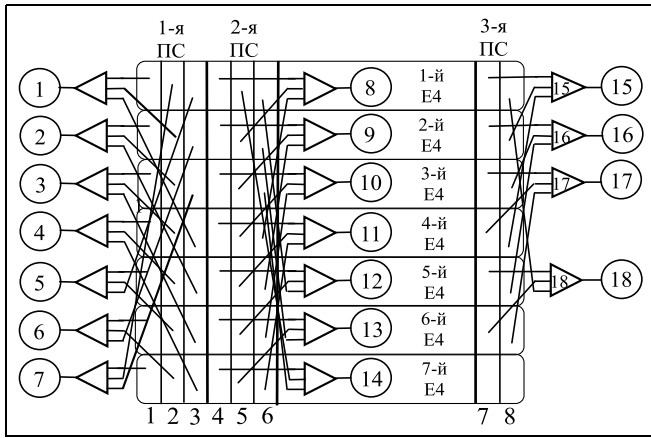
Рис. 9. Маршрутизатор РасС(18, 8, 3, 1) с диаметром  $D = 2$ 

Таблица 8

Межсоединения в маршрутизаторе РасС(18, 8, 3, 1)

| Копии<br>сети<br>ИсхС(8) | Порты сети ИсхС(8) |   |   |        |    |    |        |    |
|--------------------------|--------------------|---|---|--------|----|----|--------|----|
|                          | 1                  | 2 | 3 | 4      | 5  | 6  | 7      | 8  |
|                          | 1-я ПС             |   |   | 2-я ПС |    |    | 3-я ПС |    |
| 1                        | 1                  | 7 | 5 | 8      | 14 | 12 | 15     | 18 |
| 2                        | 2                  | 1 | 6 | 9      | 8  | 13 | 16     | 15 |
| 3                        | 3                  | 2 | 7 | 10     | 9  | 14 | 17     | 16 |
| 4                        | 4                  | 3 | 1 | 11     | 10 | 8  | 17     | 15 |
| 5                        | 5                  | 4 | 2 | 12     | 11 | 9  | 18     | 16 |
| 6                        | 6                  | 5 | 3 | 13     | 12 | 10 | 18     | 17 |
| 7                        | 7                  | 6 | 4 | 14     | 13 | 11 | —      | —  |

В минимальном варианте  $m = 2$  и  $\sigma = 1$ . Тогда схема соединений для маршрутизатора РасС(12, 8, 2, 1) дана в табл. 7, а сам маршрутизатор — на рис. 8.

Аналогично и при  $m = 3$  и  $\sigma = 1$ . Оказывается, что в этом случае  $R = 18$ , как это видно из схемы соединений для РасС(18, 8, 3, 1), задаваемой табл. 8. Сам маршрутизатор с диаметром  $D + 1$  представлен на рис. 9.

#### 4. МНОГОМЕРНЫЕ ТОРЫ С МАЛЫМИ ДИАМЕТРАМИ

Расширенные маршрутизаторы (см. рис. 4, 7, 8) позволяют создавать  $r$ -мерные ( $r = 1, 2, 3, 4$ ) торы. Для соединения маршрутизаторов в кольцах разных измерений достаточно отсоединить от каждого маршрутизатора по два абонента для каждого измерения. Освободившиеся дуплексные порты необходимо использовать для подсоединения к соседним маршрутизаторам и в направлении «+» и «-» в каждом измерении.

Простейший случай задает применение маршрутизаторов РасС(12, 8, 2, 1) и мультиколец

РазМк( $P, 3, 2, 1$ ) (рис. 10). Характеристики создаваемых торов даны в табл. 9, в которой  $P$  задает число маршрутизаторов в кольце каждого измерения, а  $M$  — общее число абонентов в торе, где  $M = P^r(12 - 2r)$ . Диаметр  $D$  тора складывается из двух скачков между маршрутизатором и абонентами (источниками и приемником), скачков между маршрутизаторами по кольцам каждого проходного измерения и двух скачков внутри маршрутизатора при смене измерения и  $D = r \lfloor pm/2 \rfloor + 2(r - 1) + 1$ , где  $p = \lceil P/N \rceil$ .

Дальнейшая оптимизация важных характеристик многомерных торов возможна, если их строить из маршрутизаторов РасС(18, 8, 3, 1) по рис. 9 и заменять в них кольца каждого измерения на муль-

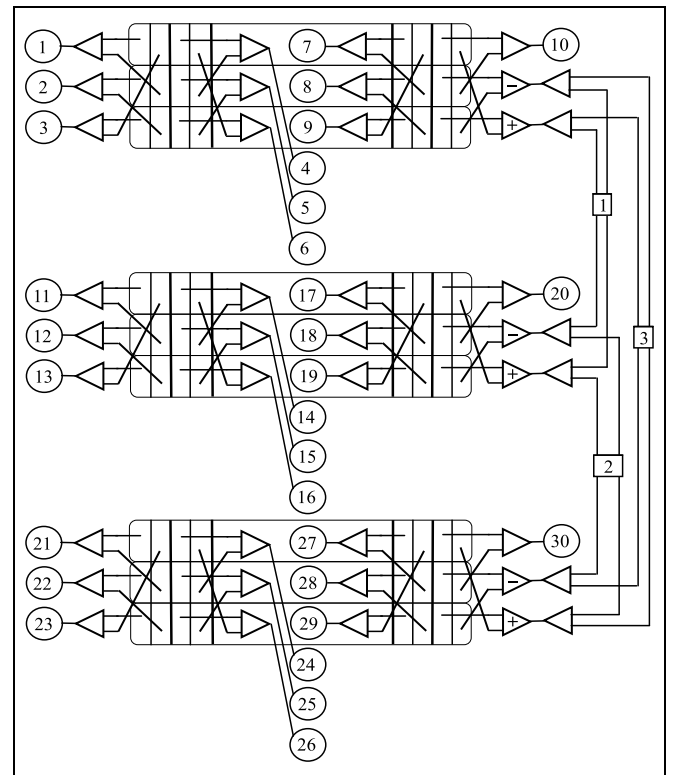
Рис. 10. Одномерный тор на базе маршрутизаторов РасС(12, 8, 2, 1) и мультиколец РазМк( $P, 3, 2, 1$ ) с диаметром  $D = 3$ 

Таблица 9

Торы из маршрутизаторов РасС(12, 8, 2, 1) и мультиколец РазМк( $P, 3, 2, 1$ )

| $P$ | 3   |     | 6    |     | 9    |     | 12     |     |
|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|--------|-----|
| $r$ | $M$ | $D$ | $M$  | $D$ | $M$  | $D$ | $M$    | $D$ |
| 1   | 30  | 3   | 60   | 4   | 90   | 5   | 120    | 6   |
| 2   | 72  | 6   | 288  | 8   | 648  | 10  | 1152   | 12  |
| 3   | 162 | 9   | 1296 | 12  | 4374 | 15  | 10 368 | 18  |

Таблица 10

**Торы из маршрутизаторов РасС(18, 8, 3, 1)  
и мультиколец РазМк(Р, 7, 3, 1)**

| $P$ | 7      |     | 14      |     |
|-----|--------|-----|---------|-----|
|     | $M$    | $D$ | $M$     | $D$ |
| 1   | 112    | 3   | 224     | 4   |
| 2   | 686    | 6   | 2744    | 8   |
| 3   | 4116   | 9   | 32 928  | 12  |
| 4   | 24 010 | 11  | 384 160 | 16  |

Таблица 11

**Торы из маршрутизаторов РасС(14, 8, 4, 2)  
и мультиколец РазМк(Р, 7, 4, 2)**

| $P$ | 7 ( $p = 1$ ) |     | 14 ( $p = 2$ ) |     |
|-----|---------------|-----|----------------|-----|
|     | $M$           | $D$ | $M$            | $D$ |
| 1   | 84            | 4   | 168            | 6   |
| 2   | 490           | 8   | 1960           | 12  |
| 3   | 2744          | 12  | 21 952         | 18  |
| 4   | 14 406        | 16  | 230 496        | 24  |

тиколыца, построенные в § 2. В этом случае характеристики создаваемых торов даны в табл. 10. Значения для табл. 10 рассчитываются по формулам:  $M = P'(18 - 2r)$ . В данном торе маршруты одинаковой длины в каждом измерении расщепляются по трем разным путям, что существенно снижает средние задержки передачи.

Несколько более слабые характеристики имеет 1-отказоустойчивые торы, которые строятся из маршрутизаторов РасС(14, 8, 4, 2) по рис. 4 и мультиколец РазМк(Р, 7, 4, 2) в каждом измерении. Характеристики этих торов задаются в табл. 11. Значения для табл. 11 рассчитываются по формулам:  $M = P'(14 - 2r)$ . Однако в данном торе маршруты одинаковой длины в каждом измерении расщепляются по четырем разным путям, что дополнительно снижает средние задержки передачи.

## 5. СРАВНЕНИЕ С СЕТЬЮ «АНГАРА»

Системные сети современных суперкомпьютеров строятся на базе многопортовых маршрутизаторов, например, единый однокристалльный 48-портовый маршрутизатор YARC для 3-мерного тора Gemini и для 4-мерного обобщенного гиперкуба Dragonfly фирмы CRAY [6, 7]. При этом имеется тенденция перехода на топологию гиперкуба как сети с меньшим диаметром и большим быстродействием, но и большей сложности.

В РФ в настоящее время нет таких маршрутизаторов. Имеется функционально полный однокристалльный маршрутизатор Е4 сети «Ангара» с 8 сетевыми дуплексными портами PCI-express и одним процессорным портом PCI-express [1, 2]. Первоначально предполагалось его использование в одноплатном варианте для построения системной сети в виде 4-мерного тора на  $M = 4K$  процессоров и с диаметром в  $D = 16$  скачков (8 маршрутизаторов в кольцах разных измерений). Потом было заявлено о возможности иметь на нем  $M = 16K \div 32K$  с диаметрами  $D = 24 \div 32$  скачков (до 16 маршрутизаторов в кольцах). Одноплатный вариант оказался не очень экономичным для построения малых сетей, так как расходовал один маршрутизатор для подсоединения к сети одного процессора.

Затем был создан однокорпусной 24-портовый маршрутизатор [1, 2, 8] путем сцепления четырех 8-портовых маршрутизаторов. Использование этого маршрутизатора резко упрощает построение сетей самого разного размера — от десятков процессоров до нескольких тысяч (в топологии одномерного или двумерного тора). В таком виде сеть «Ангара» считается базовой сетью для построения отечественных суперкомпьютеров.

Заметим, что 24-портовый маршрутизатор имеет внутренний диаметр в четыре скачка: один скачок от входного порта до соединительного порта в 8-портовом маршрутизаторе, два скачка между 8-портовыми маршрутизаторами и один скачок от соединительного порта до выходного порта. Одна-

Таблица 12

### Сравнительные характеристики торов

| $P$ | РасС(18, 8, 3, 1) |     |        |     |         |     |         |     | Ангара с 24-портовым маршрутизатором |     |      |     |
|-----|-------------------|-----|--------|-----|---------|-----|---------|-----|--------------------------------------|-----|------|-----|
|     | 7                 |     | 8      |     | 14      |     | 16      |     | 8                                    |     | 16   |     |
|     | $M$               | $D$ | $M$    | $D$ | $M$     | $D$ | $M$     | $D$ | $M$                                  | $D$ | $M$  | $D$ |
| 1   | 112               | 3   | 128    | 4   | 224     | 4   | 256     | 5   | 128                                  | 8   | 256  | 16  |
| 2   | 686               | 6   | 896    | 8   | 2 744   | 8   | 3584    | 10  | 502                                  | 13  | 2048 | 21  |
| 3   | 4116              | 9   | 6144   | 12  | 32 928  | 12  | 49 152  | 15  | —                                    | —   | —    | —   |
| 4   | 24 010            | 11  | 40 960 | 16  | 384 160 | 16  | 653 600 | 20  | —                                    | —   | —    | —   |



ко в сети для связи между 24-портовыми маршрутизаторами используются четыре дуплексных канала между заданными 8-портовыми маршрутизаторами. Это делает проходную задержку равной одному скачку.

В табл. 12 (справа) представлены характеристики сети «Ангара». При этом максимальное число процессоров опять достигается при размещении 16 маршрутизаторов в кольцах. Однако использование больше 8 маршрутизаторов в кольце не увеличивает его пропускную способность, но увеличивает задержки передачи по нему. Правда, наличие четырех дуплексных колец в каждом измерении в значительной мере снижает эти задержки.

Заметим, что 3-мерный тор на базе 24-портового коммутатора уже не может быть создан из-за недостаточного числа портов, что делает невозможным дальнейшее увеличение числа процессоров в сети «Ангара» без увеличения числа узлов в кольцах и задержек передачи по ним.

Также в табл. 12 (слева) приведены характеристики торов, составленных из маршрутизаторов РасС(18, 8, 3, 1) и разреженных мультиколец РазМк(Р, 7, 3, 1).

Видно, что построенный выше одномерный тор имеет в несколько раз меньший диаметр, чем одномерный тор сети «Ангара» при близком числе абонентов. Построенный двумерный тор имеет в два раза меньший диаметр, чем двумерный тор сети «Ангара» при несколько большем числе абонентов. В остальных случаях построенные торы имеют в несколько раз меньший диаметр и существенно большее число абонентов, чем может обеспечить сеть «Ангара» в любом варианте.

Построенные выше многомерные торы мы считаем оптимальными, так как они построены на базе оптимального распараллеливания сетевой структуры на основе квазиполного орграфа. Она позволяет строить расширенные маршрутизаторы с максимальным числом абонентов при заданных исходных маршрутизаторах. И наоборот, она позволяет иметь минимальный диаметр сети благодаря применению разреженных мультиколец.

Подобное распараллеливание структур сети сопровождается, конечно, увеличением ее аппаратных и кабельных затрат. Оценим их.

Примем, что сложность маршрутизатора пропорциональна квадрату числа портов. Тогда сложность  $s_K$  однокорпусного маршрутизатора «Ангара» составляет  $s_K = 64c$ , где  $c$  — коэффициент пропорциональности. Сложность  $s_X$  одного хаба  $1 \times 3$  можно оценить как  $s_X = 6c$  (мультиплексор + демуплексор).

Любой одномерный тор является дуплексным кольцом, к узлам которого подсоединены абоненты (процессоры). Поэтому сложность одномерно-

го тора «Ангара» с 8 корпусами в кольце задается как  $S_{A,1} = 2\,048c$ .

Любой двумерный тор является сетью, через узлы которой проходят дуплексные кольца разных измерений, что обеспечивает наличия в нем квадратичного числа узлов и абонентов. Поэтому сложность двумерного тора «Ангара» с 8 корпусами в кольце каждого измерения задается как  $S_{A,2} = 16\,384c$ . Они содержат  $M_{A,1} = 128$  и  $M_{A,2} = 502$  абонентов соответственно. Поэтому их удельная сложность составляет  $s_{A,1} = S_{A,1}/M_{A,1} = 16c$  и  $s_{A,2} = S_{A,2}/M_{A,2} = 32c$ .

Маршрутизатор РасС(18, 8, 3, 1) содержит 7 маршрутизаторов Е4 сложности  $s_K$  и 18 хабов  $1 \times 3$  сложности  $s_X$ . В результате сложность  $S_P$  расширенного маршрутизатора составляет  $S_P = 7 \times 64c + 18 \times 6c = 556c$ .

Одномерный тор содержит 7 таких маршрутизаторов и еще 14 хабов для образования разреженных мультиколец общей сложности  $S_{P,1} = 3976c$ . Он содержит  $M_{P,1} = 112$  абонентов. Поэтому его удельная сложность составляет  $s_{P,1} = 35,5c$ .

Двумерный тор содержит 49 таких маршрутизаторов и еще 28 хабов в каждом одномерном измерении для образования разреженных мультиколец общей сложности  $S_{P,2} = 28\,420c$ . Он содержит  $M_{P,2} = 686$  абонентов. Поэтому его удельная сложность составляет  $s_{P,2} = 41,4c$ .

Введем комплексную характеристику торов  $\aleph$  как произведение диаметра на удельную сложность. Тогда  $\aleph_{A,1} = 128c$  и  $\aleph_{P,1} = 106,5c$ , аналогично  $\aleph_{A,2} = 416c$  и  $\aleph_{P,2} = 250,2c$ . Отсюда можно сделать вывод, что повышенная сложность торов из расширенных маршрутизаторов с избытком обеспечивает их малые диаметры. При этом одновременно обеспечивается и большее число абонентов. Однако маршрутизаторы с разреженными мультикольцами имеют в 7/4 раза больший расход кабеля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен метод построения оптимальных системных сетей с топологией многомерных торов.

Оптимизация в работе осуществляется по таким важным функциональным характеристикам сети, как число ее абонентов и задержки передачи, задаваемые диаметром сети. Оптимизация осуществляется в элементной базе малопортовых маршрутизаторов и хабов путем построения или применения сетей с топологией квазиполных графов.

Применяется метод инвариантного по маршрутным свойствам расширения сетей для увеличения в них числа абонентов и уменьшения их диаметра в заданной элементной базе.

Показана возможность применения рассмотренного метода для повышения масштабируемости и быстродействия отечественной системной сети «Ангара».

Совместная удельная сложность по числу абонентов и задержкам передачи в оптимизированной сети оказалась меньше, чем у сети «Ангара».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов А.С., Макагон Д.В., Жабин И.А. и др. Первое поколение высокоскоростной коммуникационной сети «Ангара» // Научные технологии. — 2014. — Т. 15, № 1. — С. 21—28. [Simonov, A.S., Makagon, D.V., Zhabin, I.A., et al. Pervoe pokolenie vysokoskorostnoi kommunikatsionnoi seti «Angara» // Naukoemkie tekhnologii. — 2014. — Vol. 15, no. 1. — P. 21—28. (In Russian)]
2. Stegailov, V., Agarkov, A., Biryukov, S., et al. Early Performance Evaluation of the Hybrid Cluster with Torus Interconnect Aimed at Molecular Dynamics Simulations // International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics. — Springer. — Cham. — 2017. — P. 327—336.
3. Холл М. Комбинаторика. Главы 10—12. — Мир. М. — 1970. — 424 с. [Hall, M. Combinatorial Theory. — Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1967. (In Russian)]
4. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Метод инвариантного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем. Идеальная системная сеть // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 166—176. [Karavay, M.F., Podlazov, V.S. An Invariant Extension Method for System Area

Networks of Multicore Computational Systems. An Ideal System Network // Automation Remote Control. — 2010. — Vol. 71, no. 12. — P. 2644—2654.]

5. Подлазов В.С. Повышение характеристик многомерных торов // Управление большими системами. — 2014. — Вып. 51. — С. 60—81. [Podlazov, V.S. Boosting Performance of Multidimensional Tors // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 1. — P. 167—179.]
6. Alverson, R., Roweth, D. and Kaplan, L. The Gemini System Interconnect // 18th IEEE Symposium on High Performance Interconnects. — 2009. — P. 3—87.
7. Alverson, R., Froese, E., Kaplan, L. and Roweth, D. Cray XC® Series Network. — URL: <https://www.cray.com/sites/default/files/resources/CrayXCNetwork.pdf>.
8. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Расширение возможностей системной сети «Ангара» // Проблемы управления. — 2020. — № 2. — С. 47—56. [Karavay, M.F., Podlazov, V.S. Expanding the capabilities of the Angara system area network // Control Sciences. — 2020. — No. 2. — P. 47—56. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 16.04.2020, после доработки 10.06.2020.  
Принята к публикации 18.06.2020.

Каравай Михаил Федорович — д-р техн. наук,  
✉ mkaravay@ipu.ru,

Подлазов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук,  
✉ podlazov@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

## OPTIMUM MULTIDIMENSIONAL TORI BASED ON LOW-PORT ROUTERS AND HUBS

M.F. Karavay<sup>1</sup>, V.S. Podlazov<sup>2</sup>

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>1</sup>✉ mkaravay@ipu.ru, <sup>2</sup>✉ podlazov@ipu.ru

**Abstract.** A method for constructing optimal system networks with the topology of multidimensional tori is considered. The optimization was performed according to such important functional characteristics of the network as the number of its subscribers (processors) and transmission delays between them, set by the network diameter. Optimization was carried out in the element base of low-port routers and splitters of duplex channels (hubs) by using networks with the topology of quasi-complete graphs. Optimization is realized due to the invariant expansion of the multidimensional torus and the duplex channel with preservation of their route properties such as the routing method and maximum transmission delays (network diameter). It is shown that optimization leads to an increase in the number of subscribers with constant delays and to a reduction in delays with a constant number of subscribers. Optimization is accompanied by some complication of the network in terms of circuit and cable costs. In this case, the measure of complication (expressed in the number of times) is less than the measure of joint improvement of both characteristics. The comparative characteristics of the optimal tori and tori of the Angara domestic system network are given. A substantial increase in the number of subscribers and a decrease in the diameters of optimal tori in comparison with the Angara network have been proven.

**Keywords:** system-area networks of supercomputers, networks with the topology of multidimensional tori, networks with the topology of quasi-complete graphs, invariant expansion of networks, number of network subscribers and network diameter, optimization of network characteristics, Angara network.



# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ЭТАПЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ МАНЕВРЕННОГО САМОЛЕТА

О.В. Огородников

**Аннотация.** Рассмотрена модель многокритериальной оптимизационной задачи в условиях параметрической экспертной неопределенности. Данную модель целесообразно применять, когда параметры с экспертной неопределенностью не могут быть заданы экспертом точным значением. Для описания таких параметров применена теория неопределенности Б. Лю, так как она предоставляет аналитические выражения для вычисления детерминированных дубликатов целевых функций и ограничений, что позволяет эффективно решать оптимизационные задачи с экспертной неопределенностью, сводя неопределенные модели оптимизации к детерминированным моделям математического программирования. С использованием рассмотренной модели формализована и решена задача предварительного расчета параметров сверхзвукового маневренного самолета на этапе предварительного проектирования. Актуальность применения теории неопределенности в данной задаче связана с возросшей ролью этапа предварительного проектирования при разработке перспективной авиационной техники. Разработан и реализован численный оптимизационный алгоритм, который учитывает экспертные оценки неопределенных параметров и позволяет получить значения технических характеристик разрабатываемого летательного аппарата с различными уровнями степени уверенности в их реализации.

**Ключевые слова:** экспертная неопределенность, эпистемическая неопределенность, модель оптимизационной задачи, предварительное проектирование, Парето-решения, детерминированный дубликат, маневренный самолет, неопределенное программирование.

## ВВЕДЕНИЕ

Предварительный расчет технических характеристик перспективного летательного аппарата (ЛА) представляет собой начальный этап проектирования, в ходе которого принимаются решения, определяющие последующий облик ЛА как технической системы, и выполняется расчет его технических характеристик.

В настоящий момент из-за удорожания авиационной техники значительно возросла роль этапа предварительного проектирования, так как ошибки, допущенные при определении технического облика ЛА, впоследствии могут привести к большому ущербу на всех остальных этапах жизненного цикла.

Предварительное проектирование нового ЛА неизбежно сопровождается неопределенностью

его итоговых технических характеристик. Это связано с тем, что на этапе предварительного расчета летно-технических и маневренных характеристик перспективного ЛА невозможно сказать, каков будет уровень технологического совершенства конструкции планера, материалов, двигателя и других элементов на момент его непосредственного создания. Отсюда возникает целесообразность учета неопределенности исходных данных в предварительном расчете характеристик создаваемого ЛА. Неопределенность исходных данных означает, что невозможно точно сказать, какое значение будет принимать тот или иной параметр, однако можно определить диапазон значений, где каждому значению соответствует некоторая степень уверенности в его реализации. Такие параметры задаются на основе экспертной оценки специалиста, которую он делает на основе своего опыта.

Существует два типа неопределенности — статистическая (алеаторная) и экспертная (эпистемическая). Первая из них возникает, когда параметры характеризуются вариабельностью, зафиксированной в статистических данных, достаточных для принятия статистических гипотез о неопределенных параметрах. В этом случае параметру соответствует функция распределения вероятности. Экспертная неопределенность возникает из-за недостатка знаний, результатов наблюдений. В этом случае информацию получают от экспертов. Для работы с экспертной неопределенностью существует много математических теорий. Наиболее популярные из них это интервальная математика [1], теория нечетких множеств Л. Заде [2] и теория возможностей Л. Заде [3]. В данной работе для описания неопределенных параметров ЛА предлагается теория неопределенности Б. Лю, так как в ней существует эффективный инструмент для решения оптимизационных задач с экспертной неопределенностью, а именно, простые аналитические выражения для вычисления детерминированных дубликатов целевых параметров для достаточно широкого класса функций. Ранее с применением теории Б. Лю решались другие задачи предварительного проектирования в условиях параметрической [4, 5] и смешанной [6, 7] неопределенности.

## 1. МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ЭКСПЕРТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

### 1.1. О теории неопределенности

Приведем базовые понятия теории неопределенности Б. Лю [8], необходимые для формализации выбранной задачи предварительного расчета технических характеристик перспективного ЛА. Центральным понятием теории неопределенности служит мера неопределенности  $M$ , которая удовлетворяет аксиомам нормальности, дуальности, субаддитивности и произведения (мера произведения событий равна минимальной из мер этих событий). Мера неопределенности события отражает степень уверенности эксперта в том, что это событие произойдет.

В теории неопределенности вводится понятие неопределенной переменной  $\xi$ , которая определяется функцией распределения неопределенности  $\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}$ , где  $\Phi(x)$  есть функция  $\Phi: R \rightarrow [0, 1]$ .

Распределение неопределенности содержит информацию о неопределенной переменной. Оно представляет собой совокупность значений вещественной переменной  $x$  и меры неопределенности  $M\{\xi \leq x\}$ , соответствующей этому значению. Эксперт на основе своего опыта ставит в соответствие каждому значению переменной  $\xi$  степень уверенности  $M$  (меру неопределенности) в том, что она

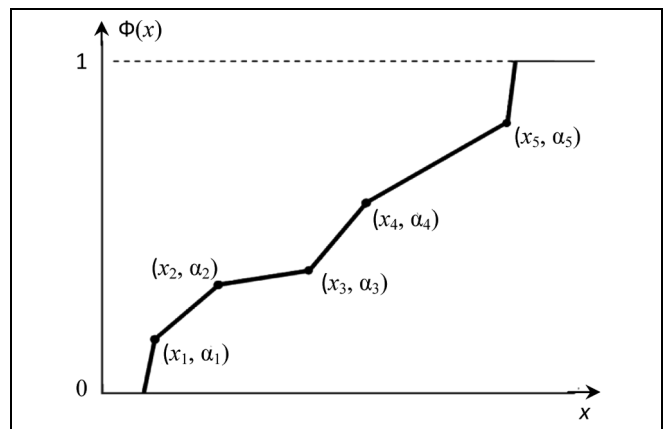


Рис. 1. Пример функции распределения неопределенности

не больше  $x$ . Функция распределения неопределенности  $\Phi(x)$  строится как аппроксимация полученных от эксперта значений  $x$  и  $M\{\xi \leq x\}$  (рис. 1).

В теории неопределенности приводятся выражения для расчета детерминированных дубликатов функции, зависящей от неопределенных параметров — ожидаемого значения  $E[\xi]$ , дисперсии  $V[\xi]$ , критических значений  $SUP_\alpha[\xi]$  и  $INF_\alpha[\xi]$ .

Если  $x$  — вектор действительных чисел (вектор детерминированных параметров) и  $f$  — непрерывная строго возрастающая по  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  и строго убывающая по  $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots, \xi_n$ , то  $\xi = f(\bar{x}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  имеет следующие ожидаемое значение и дисперсию при любом  $x$ :

$$E[\xi] = \int_0^1 f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+2}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) d\alpha,$$

$$V[\xi] = \int_0^1 (f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+2}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) - E[\xi])^2 d\alpha,$$

где  $\Phi_1^{-1}, \dots, \Phi_n^{-1}$  — функции, обратные функциям распределения неопределенных переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

Критические значения (аналогичные квантилю) неопределенной переменной  $\xi$ :

$$SUP_\alpha[\xi] = f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+2}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)),$$

$$INF_\alpha[\xi] = f(\bar{x}, \Phi_1^{-1}(1-\alpha), \Phi_2^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(1-\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(\alpha), \Phi_{m+2}^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)). \quad (1)$$

## 1.2. Задача неопределенного программирования

Общая постановка задачи оптимального проектирования с неопределенными параметрами выглядит таким образом:

$$\begin{cases} \min(\max)[f(\bar{x}, \bar{\xi})], \\ g_j(\bar{x}, \bar{\xi}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p, \end{cases}$$

$\bar{x}$  — вектор проектируемых параметров (вектор решений),  $\bar{\xi}$  — вектор неопределенных параметров,  $f(\bar{x}, \bar{\xi})$  — целевая функция,  $g_j(\bar{x}, \bar{\xi})$  — функция ограничения.

В таком виде эта задача не имеет решения, так как целевая функция  $f$ , зависящая от неопределенных параметров, сама является неопределенной. Чтобы перейти к задаче математического программирования, необходимо заменить целевые функции и ограничения их детерминированными дубликатами:

$$\begin{cases} \min_{\bar{x}}(\max_{\bar{\xi}})[d[f(\bar{x}, \bar{\xi})]], \\ d_j^*(g_j(\bar{x}, \bar{\xi})) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p, \end{cases} \quad (2)$$

где  $d$  — множество детерминированных дубликатов целевой функции,  $d_j^*$  — детерминированные дубликаты функции ограничений.

## 2. АЛГОРИТМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ МАНЕВРЕННОГО САМОЛЕТА ПОД ЗАДАНИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Предлагается алгоритм расчета параметров маневренного самолета в условиях экспертной неопределенности, который основан на инженерной методике расчета основных технических характеристик маневренного самолета под заданные тактико-технические требования (ТТТ) [9, 10]: требуемую дальность  $L$  крейсерского [8] полета на дозвуковой скорости, нормальную перегрузку в режиме маневра  $n_{z\text{ req}}$  (характеризует маневренность самолета), энергетическую скороподъемность  $P_s$  (характеризует, насколько быстро самолет может увеличивать свою кинетическую энергию) и массу полезной нагрузки  $m_{ec}$ . Разработанный алгоритм позволяет получить требования к геометрическим и массовым характеристикам, аэродинамическому качеству [11], параметрам силовой установки. Выходные параметры: объем самолета, площадь омываемой поверхности, взлетная масса, масса топлива, конструкции, силовой установки, взлетная форсажная тяга двигателя, а также максимальное аэродинамическое качество на режиме маневра и крейсерского полета. Выполнение полученных тре-

бований к аэродинамике, силовой установке, геометрическим и массовым характеристикам обеспечивает выполнение заданных ТТТ.

### 2.1. Задача расчета параметров

Задачу расчета параметров маневренного самолета можно представить как многокритериальную оптимизационную задачу в условиях экспертной неопределенности исходных данных. Предлагается минимизировать расчетные требования к максимальному аэродинамическому качеству на режиме крейсерского полета  $K_{\max cr}$  создаваемого самолета и взлетной тяге двигателя  $P_0$ :

$$\begin{cases} \min K_{\max cr}, \\ \min P_0, \\ 400 \leq \gamma_a \leq 600, \\ 3 \leq F \leq 3,5, \\ 0,13 \leq \gamma_{eng} \leq 0,2. \end{cases}$$

Оптимизируемые детерминированные параметры:  $\gamma_a$  — плотность самолета,  $\gamma_{eng}$  — отношение веса силовой установки к тяге двигателей,  $F$  — коэффициент формы (равен отношению площади поверхности самолета к поверхности равновеликой по объему сферы).

Неопределенные параметры:  $K_{compr}$  — отношение аэродинамического качества на режиме маневра к качеству на режиме крейсерского полета ( $K_{\max cr}$  к  $K_{\max man}$ ),  $k_{qs1}$  и  $k_{qs2}$  — коэффициенты, требующиеся для расчета массы 1 м<sup>2</sup> поверхности планера самолета,  $\bar{m}_{cl}$  — относительная масса топлива, затраченного на участке набора высоты перед крейсерским полетом,  $\bar{m}_{des}$  — относительная масса топлива, затраченного на участке снижения после крейсерского полета,  $L_{des+cl}$  — сумма длин участков набора высоты и снижения,  $C_f$  — коэффициент эквивалентного трения [10].

Минимизация требований к аэродинамическому качеству расширяет возможности для подбора аэродинамической компоновки перспективного ЛА, а минимизация требований к двигателю расширяет возможности по его подбору из уже существующих либо по разработке нового, так как время, затрачиваемое на создание нового авиационного двигателя, сопоставимо со временем создания всего самолета в целом.

В текущей постановке задачи отсутствуют ограничения в виде функций от неопределенных переменных, но присутствуют ограничения на оптимизируемые детерминированные параметры.

Применив модель оптимизационной задачи (2) и аналитические выражения для дубликатов целевых функций (1), перейдем к детерминированной двухкритериальной задаче оптимизации критических значений  $K_{\max cr}$  и  $P_0$ :

$$\begin{cases} \min \inf_{\alpha_{K_{\max cr}}} [K_{\max cr}], \\ \min \inf_{\alpha_{P_0}} [P_0], \end{cases}$$

где  $\alpha_{K_{\max cr}}$ ,  $\alpha_{P_0}$  — соответственно уровни степеней уверенности в том, что значения  $K_{\max cr}$  и  $P_0$  будут меньше определенного фиксированного значения.

На рис. 2 показано, что целевые функции  $K_{\max cr}$  и  $P_0$  строго монотонны по всем неопределенным параметрам. По оси абсцисс отложены значения неопределенных параметров, отнесенных к их номиналу.

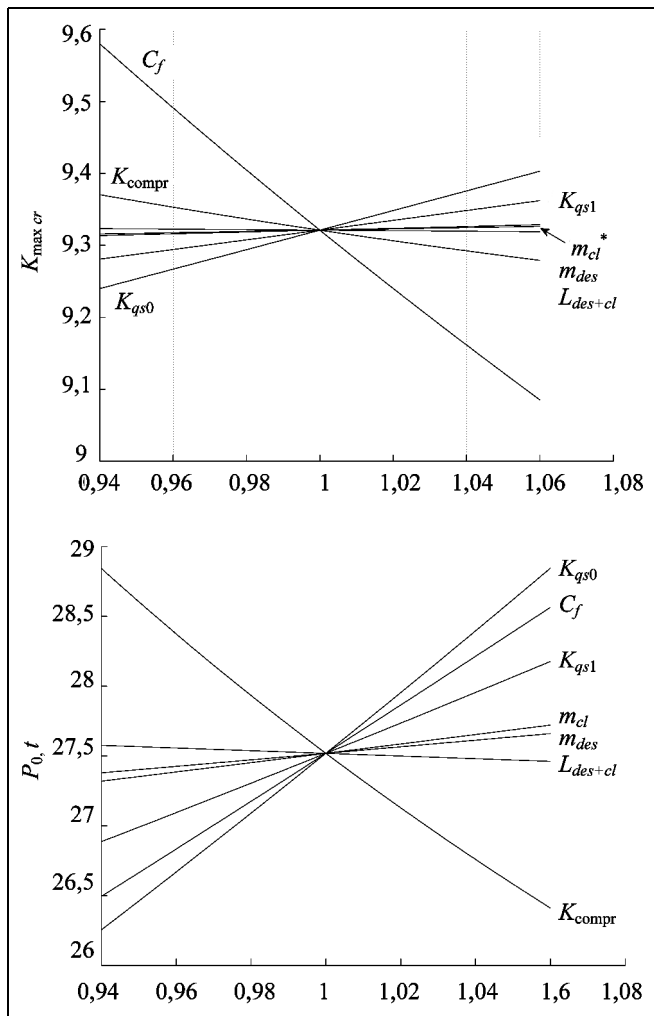


Рис. 2. Зависимость целевых функций от неопределенных параметров

## 2.2. Алгоритм расчета технических характеристик

Далее представлен алгоритм вычисления целевой функции  $K_{\max cr}$ , в котором учитывается неопределенность входных параметров. Чтобы алгоритм был пригоден для вычисления целевой функции  $P_0$ , необходимо на шаге 5 заменить  $\Phi_{C_f}^{-1}(1 - \alpha)$

на  $\Phi_{C_f}^{-1}(\alpha)$ , так как значение  $P_0$  строго монотонно возрастает по неопределенному параметру  $C_f$ , а значение  $K_{\max cr}$  убывает. По остальным неопределенным параметрам целевые функции ведут себя одинаково.

Для краткости приведены только те расчетные формулы, в которых присутствуют неопределенные параметры.

При выполнении разработанного алгоритма подбирается значение потребного максимального аэродинамического качества на режиме маневра  $K_{\max man}$ , обеспечивающего выполнение ТТТ и удовлетворяющего всем функциональным зависимостям между массовыми параметрами, геометрическими параметрами и параметрами силовой установки самолета.

**Шаг 1.** С помощью формулы Бреге [10, 11] определяется потребная для реализации дальности относительная масса полного запаса топлива:

$$\bar{m}_f = (1 + \Phi_{\bar{m}_{des}}^{-1}(\alpha)) - (1 + \Phi_{\bar{m}_{cl}}^{-1}(\alpha)) \times \exp\left(\frac{(L - \Phi_{L_{des+cl}}^{-1}(1 - \alpha)) C_{e cr}}{V_{cr} K_{\max cr}}\right),$$

$$K_{\max cr} = K_{\max man} \Phi_{K_{compr}}^{-1}(1 - \alpha),$$

где  $C_{e cr}$  — удельный расход топлива на режиме крейсерского полета,  $V_{cr}$  — скорость в режиме крейсерского полета,  $K_{\max cr}$  — максимальное аэродинамическое качество на режиме крейсерского полета;  $\Phi_{\bar{m}_{des}}^{-1}(\alpha)$ ,  $\Phi_{\bar{m}_{cl}}^{-1}(\alpha)$ ,  $\Phi_{L_{des+cl}}^{-1}(1 - \alpha)$  и  $\Phi_{K_{compr}}^{-1}(1 - \alpha)$  — обратные функции распределения неопределенности для неопределенных параметров  $\bar{m}_{des}$ ,  $\bar{m}_{cl}$ ,  $L_{des+cl}$  и  $K_{compr}$  соответственно. Все массовые параметры отнесены к взлетной массе самолета  $m_0$ .

**Шаг 2.** На основе требований к установившейся перегрузке  $n_{z req}$  и энергетической скороподъемности  $P_s$  определяется потребная тяговооруженность (отношение тяги двигателей к весу самолета) на режиме маневра  $P_{calc}/(m_{calc}g)$  и взлетная тяговооруженность  $P_0/(m_0g)$ .

**Шаг 3.** Далее с учетом взлетной тяговооруженности и коэффициентов, определяющих уровень

технологии двигателя и силовой установки, вычисляется относительная масса силовой установки  $\bar{m}_{pp}$ . Способ расчета  $\bar{m}_{pp}$  приведен в работе [9].

**Шаг 4.** На основе статистических закономерностей с учетом вычисленных ранее массы топлива, силовой установки и заданной массы полезной нагрузки  $m_{ec}$  определяются основные массовые и геометрические параметры: взлетный вес  $m_0$ , площадь омываемой поверхности  $A_{wet}$  и объем самолета  $V_a$ :

$$\begin{cases} m_0 = \frac{m_{ec}}{1 - \bar{m}_{pp} - \bar{m}_f - \bar{m}_{cch}}, \\ \bar{m}_{cch} = (\Phi_{k_{qs1}}^{-1}(\alpha) + \Phi_{k_{qs2}}^{-1}(\alpha) V_a^{1/3}) \frac{A_{wet}}{m_0}, \\ A_{wet} = (36\pi)^{1/3} F V_a^{2/3}, \\ V_a = \frac{m_0}{\gamma_a}, \end{cases}$$

где  $\bar{m}_{cch}$  — масса планера самолета, элементов управления и гидравлики,  $\Phi_{k_{qs1}}^{-1}(\alpha)$  и  $\Phi_{k_{qs2}}^{-1}(\alpha)$  — обратные функции распределения неопределенности для неопределенных параметров  $k_{qs1}$  и  $k_{qs2}$ .

**Шаг 5.** Далее выполняется поиск значения  $K_{max\ man}$ , при котором невязка  $\Delta$  становится меньше заданного проектировщиком значения. При таком  $K_{max\ man}$  будут согласованы полученные технические характеристики и реализованы все ТТТ:

$$\Delta = \left[ \frac{P_{calc}}{m_{calc}g} - \frac{n_{x1} n_z^2}{n_z^2 - 1} \right] \frac{1}{q_{calc}} - \frac{\Phi_{C_f}^{-1}(1 - \alpha) A_{wet}}{m_{calc}g},$$

где  $q_{calc}$  — скоростной напор [11] на расчетном режиме полета,  $n_{x1}$  — значение тангенциальной перегрузки [10, 11] при нормальной перегрузке  $n_z = 1$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $m_{calc}$  — масса самолета на расчетном режиме полета,  $\Phi_{C_f}^{-1}(1 - \alpha)$  — обратная функция распределения неопределенного параметра  $C_f$ .

В конце выполняется финальный расчет с найденным значением  $K_{max\ man}$ .

### 2.3. Результаты расчета

Для решения поставленной задачи предварительного расчета технических характеристик перспективного ЛА задаются параметры  $\alpha_{K_{max\ cr}}$ ,  $\alpha_{P_0}$  и вид функций распределения неопределенности  $\Phi$  неопределенных проектных параметров  $\gamma_a$ ,  $\gamma_{eng}$  и  $F$ .

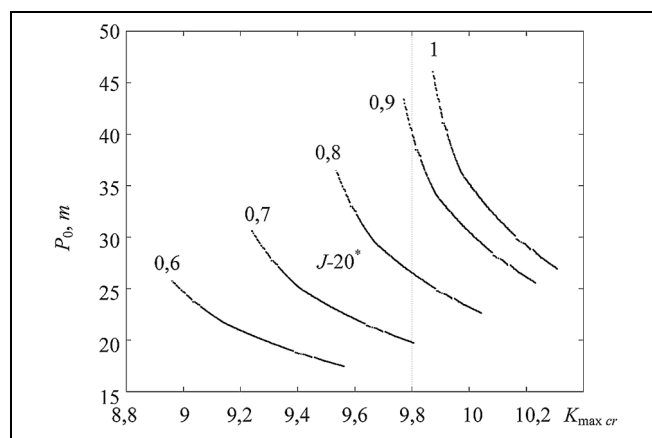


Рис. 3. Парето-фронты, соответствующие различным степеням уверенности от 0,6 до 1

В общем случае вид функции  $\Phi$  определяется только экспертом, но в данной задаче принято, что  $\Phi$  имеет вид

$$\Phi(x) = \left( 1 + \exp \left( \frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma} \right) \right)^{-1},$$

где  $e$  — номинальное значение неопределенного параметра,  $\sigma$  — стандартное отклонение.

Потом применяется многокритериальный генетический алгоритм в системе Matlab. Для каждой комбинации варьируемых в процессе оптимизации проектируемых параметров выполняется расчет согласно разработанному алгоритму из п. 2.2, вычисляются детерминированные дубликаты целевых функций. В результате применения описанного метода оптимизации на основе алгоритма предварительного расчета технических параметров маневренного самолета получены Парето-фронты, представленные на рис. 3.

С увеличением значений  $\alpha_{K_{max\ cr}}$  и  $\alpha_{P_0}$  повышается степень уверенности в том, что итоговые значения  $K_{max\ cr}$  и  $P_0$  при создании ЛА не превысят значений из соответствующего Парето-фронта.

Расчет выполнен для маневренного самолета типа J-20. Номинальные значения для неопределенных проектных параметров  $\gamma_a$ ,  $\gamma_{eng}$  и  $F$  заданы на основе экспертных оценок, взятых из открытых источников. Стандартное отклонение  $\sigma$  принято равным 4 % от номинала. Реальные значения  $K_{max\ cr}$  и  $P_0$ , взятые из открытой печати, также обозначены на рис. 3. Видно, что они соответствуют степени уверенности, которая лежит в диапазоне 0,75—0,8. На этапе предварительного проектирования данные значения степени уверенности принято считать удовлетворительными. Значения  $\alpha_{K_{max\ cr}}$  и  $\alpha_{P_0}$  взяты равными.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель многокритериальной оптимизационной задачи расчета летно-технических характеристик маневренного ЛА в условиях параметрической экспертной неопределенности. Параметры с экспертной неопределенностью моделируются с помощью теории неопределенности. Реализован численный оптимизационный алгоритм, в котором учитываются мнения экспертов, для получения технических характеристик ЛА с различными уровнями степени уверенности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Доброней Б.С. Интервальная математика: учеб. пособие. — Красноярск: Красноярский гос. ун-т., 2004. — 216 с. [Dobronets, B.S. Interval'naya matematika: ucheb. posobie. — Krasnoyarsk: Krasnoyarskii gos. un-t, 2004. — 216 s. (In Russian)]
2. Zadeh, L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338—353.
3. Zadeh, L.A. Fuzzy Sets as the Basis for a Theory of Possibility // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — Vol. 8. — P. 3—28.
4. Veresnikov, G.S., Ogorodnikov, O.V., Pankova, L.A., Pronina, V.A. Determining Maneuverable Aircraft Parameters in Preliminary Design Under Conditions of Uncertainty // Procedia Computer Science. — 2017. — Vol. 112. — P. 1123—1130.
5. Вересников Г.С., Пронина В.А., Панкова Л.А., Огородников О.В. Решение задач предварительного проектирования в условиях параметрической неопределенности // Проблемы управления. — 2017. — № 4. — С. 65—73. [Veresnikov, G.S., Pronina, V.A., Pankova, L.A., Ogorodnikov, O.V. Solving Preliminary Design Problems Under Conditions of Parametric Uncertainty // Control Sciences. — 2017. — № 4. — S. 65—73. (In Russian)]
6. Veresnikov, G.S., Pronina, V.A., Pankova, L.A., Ogorodnikov, O.V. Optimal design of technical objects under mixed parametric uncertainty / Proceedings of the 12th International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD). Moscow, 2019. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8911060>.
7. Вересников Г.С., Панкова Л.А., Пронина В.А., Огородников О.В. Предварительное проектирование летательных аппаратов в условиях смешанной неопределенности / Тр. 13-го Всерос. совещ. по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). — М.: ИПУ РАН, 2019. — С. 3155—3160. [Veresnikov, G.S., Pankova, L.A., Pronina, V.A., Ogorodnikov, O.V. Predvaritel'noe proektirovanie letatel'nykh apparatov v usloviyakh smeshannoi neopredelennosti / Tr. 13-go Vseros. soveshch. po problemam upravleniya (VSPU XIII, Moskva, 2019). — M.: IPU RAN, 2019. — S. 3155—3160. (In Russian)]
8. Liu, B. Theory and Practice of Uncertain Programming: 2-nd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 2007. — 485 p.
9. Bashkurov, I.G., Irodov, R.D. Calculation of Jet Aircraft Parameters Under Design Requirements // World Aviation Congress, October 13—16. — Anaheim, California, 1997, paper no. 975598.
10. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / под ред. Г.С. Бюшгенса. — М.: Физматлит, 1998. — 816 с. [Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircraft / ed. G.S. Byushgens. — M.: Fizmatlit, 1998. — 816 s. (In Russian)]
11. Авиация: Энциклопедия / Гл. ред. Г.П. Свищев. — М.: Большая рос. энцикл.: Центр. аэрогидродинам. ин-т, 1994. — С. 407—408. [Aviation: encyclopedia / Gl. ed. G.P. Svishchev. — M.: Great Russian encyclopedia: Central Aerohydrodynamic Institute, 1994. — S. 407—408. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Поступила в редакцию 27.04.2020, после доработки 7.07.2020.  
Принята к публикации 14.07.2020.

Огородников Олег Викторович — науч. сотрудник,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва, ✉ o.v.ogorodnikov@gmail.com.

## THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF MULTICRITERIA OPTIMIZATION UNDER PARAMETRIC UNCERTAINTY DURING PRE-CALCULATION OF JET AIRCRAFT PARAMETERS

O.V. Ogorodnikov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
✉ o.v.ogorodnikov@gmail.com

**Abstract.** A model of a multi-criteria optimization problem under parametric expert uncertainty is considered. This model is useful when the expert cannot set an exact value for a parameter with expert uncertainty. To describe such parameters, the uncertainty theory is applied. It provides analytical expressions for calculating deterministic duplicates of objective functions and constraints, which allows us to effectively solve optimization problems with expert uncertainty, reducing undefined optimization models to deterministic models of mathematical programming. The problem of preliminary calculation of supersonic jet aircraft parameters at the preliminary design stage is formalized and solved using the considered model. The relevance of applying the uncertainty theory to this problem relates to the increased role of the preliminary design stage in the development of advanced aircrafts. A numerical optimization algorithm has been developed and implemented that takes into account expert estimates of uncertain parameters and allows us to obtain the values of the technical characteristics of the developed aircraft with different levels of degree of belief in their implementation.

**Keywords:** expert uncertainty, epistemic uncertainty, model of an optimization problem, preliminary design, Pareto solutions, deterministic equivalent, maneuverable aircraft, uncertainty programming.

# РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВО ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО РАБОТАЮЩИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Ю.А. Зак

**Аннотация.** Классическая в теории расписаний задача построения последовательности выполнения заданий на одной машине в условиях наличия ограничений на времена начала и завершения выполнения заданий и учитывающая не только затраты времени на работу оборудования, но и потери на постобработку, рассмотрена для многостадийных производственных систем, состоящих из взаимосвязанной цепочки участков и цехов промышленного предприятия. Критерием оптимальности задачи является выполнение многостадийного расписания в кратчайшие сроки. Рассматриваемые в работе задачи относятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Исследованы свойства допустимых и оптимальных последовательностей выполнения заданий. Предложены методы расчета нижней границы длины оптимального расписания и правила отсева недопустимых и неоптимальных продолжений. Разработаны алгоритмы точного и приближенного решения задачи модифицированными методами ветвей и границ. Предложенные алгоритмы проиллюстрированы числовыми примерами. Выполненные автором вычислительные эксперименты показали, что наличие системы строгих ограничений на сроки выполнения заданий при реализации предложенных в работе алгоритмов в ряде случаев существенно сокращает число рассматриваемых вариантов.

**Ключевые слова:** последовательность выполнения заданий, многостадийное расписание, минимальное время, эвристический алгоритм, нижняя граница критерия оптимальности, отсев неперспективных продолжений, метод ветвей и границ.

## ВВЕДЕНИЕ

Определение допустимых и оптимальных последовательностей изготовления некоторого множества различных изделий, каждое из которых должно пройти последовательную обработку в  $K$  структурных подразделениях (например, участках или цехах) предприятия актуально для построения систем оперативно-календарного производства (см., например, работы [1–6]). Календарное планирование всей последовательной цепочки производств позволит повысить эффективность работы взаимосвязанной системы участков и цехов промышленного предприятия, определит конкретизацию во времени изготовления всех изделий, обеспечит выпуск различных видов продукции в установленные договором сроки и с наилучшими технико-экономическими показателями.

Каждое структурное подразделение производства в такой постановке задачи рассматривается

как отдельная стадия. Такими стадиями обработки могут быть группы станков, многопроцессорные и многопоточные или автоматические линии, а также различные структурные единицы предприятия более низкого уровня иерархии. Каждая стадия обработки рассматривается как одна машина. В дальнейшем в качестве времени обработки изделий на машине каждой стадии — это суммарное время выполнения всех операций этого задания на этом участке, т. е. на этой стадии обработки (суммарное время обработки на всех станках или автоматических линиях этой стадии). После изготовления на технологическом оборудовании на каждой стадии производится постобработка каждого изделия, связанная с контролем, испытанием, необходимым временем прослеживания (например, с охлаждением или нагреванием), оформлением необходимой документации, транспортными потерями времени и др., что также требует затрат времени.

Технологическая схема производства, рассматриваемая в данной задаче, представлена на рис. 1.

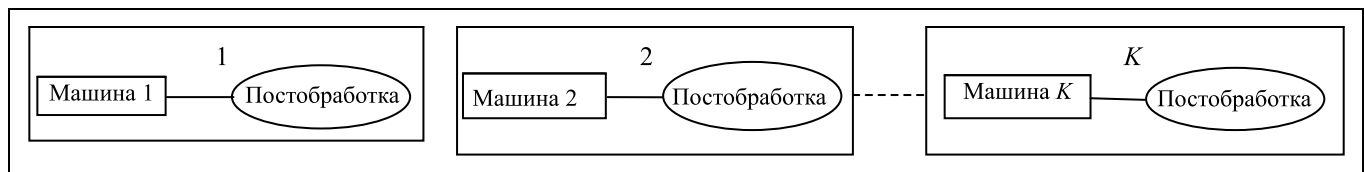


Рис. 1. Технологическая схема производства

Введем определение технологической организации производства «многостадийная обработка изделий на одной машине».

В монографиях и в периодической литературе по теории расписаний рассматривались в различных постановках и с различными критериями оптимальности математические модели, точные и приближенные методы решения классических задач построения последовательностей выполнения заданий на одной машине применительно только к одному структурному подразделению предприятия. Определенный интерес представляет учет времен, необходимых на постобработку после завершения изготовления изделий на машине. В качестве критериев оптимальности выбирается выполнения всего комплекса работ в кратчайшие сроки (см., например, работы [1, 2, 5, 6] и др.). При этом независимые друг от друга расписания для каждого отдельного участка могут оказаться совершенно не эффективными для общей многостадийной системы, включающей в себя последовательную цепочку из нескольких участков.

Задачам построения многостадийных расписаний выполнение заданий на одной машине, имеющим большое практическое значение и ярко выраженную специфику, как и задачам построения многостадийных расписаний в условиях ограничений на времена выполнения заданий, не уделялось достаточного внимания в литературе. Практически важные постановки и пути решения задач построения двухстадийных расписаний рассматривались в работах М.Х. Прилуцкого и Д.В. Седова [4], а в приложениях, когда второй стадией служит процесс сборки изделий, в работах Е.Н. Хоботова [3]. В работах автора [4, 6, 7] рассматривались постановки, математические модели, точные и приближенные методы решения некоторых классических задач в многостадийных производственных системах.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Технологический процесс предусматривает изготовление некоторого множества изделий на нескольких стадиях обработки. Каждая стадия рассматривается как одна единица оборудования, т. е. как одна машина. После изготовления на техно-

логическом оборудовании осуществляется постобработка каждого изделия, что также требует затрат времени. На всех стадиях обработки последовательность изготовления одинакова для всех изделий. Результат решения задачи — определение номеров временных интервалов, в которых начинается и заканчивается выполнение определенных заданий и постобработки на различных стадиях обработки. Номера этих интервалов заданы целыми числами. Поэтому времена выполнения заданий  $t_i^k$ ,  $r_i^k$ , а также граничные значения  $d_i^k$  выражены в номерах и числе временных интервалов. В качестве временной единицы, в зависимости от конкретных приложений, может рассматриваться час, минута, секунда и даже день или сутки.

Изготовление изделий на оборудовании каждой из этих стадий ведется без прерываний времени выполнения. После изготовления изделия на  $k$ -й стадии и постобработки изделие поступает на следующую стадию обработки. На машине каждой стадии обработки может начаться изготовление следующего стоящего в последовательности обработки изделия непосредственно после завершения изготовления предыдущего. Начало обработки каждого изделия на следующем стоящем в последовательной цепочке участке (следующей стадии) может начаться только после постобработки его на предыдущей стадии. Заданы допустимые времена начала обработки каждого изделия на 1-й стадии обработки и граничные времена завершения выполнения этого задания на последней стадии обработки (после завершения постобработки). Необходимо найти допустимую последовательность изготовления изделий, обеспечивающую выполнение всех ограничений на допустимые времена изготовления, которая обеспечит минимальное время выполнения расписания на всех стадиях обработки.

Эффективные алгоритмы точного решения такой задачи в одностадийных системах, учитывающие потери времени на постобработку с помощью Schrage-algorithms и его модификации впервые были предложены в работе [10] и развиты в условиях различного вида ограничений в работах автора [2, 4, 11].

Задачи теории расписаний для многостадийных производственных систем, как правило, отно-



сятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Они сложнее задач построения одностадийных расписаний и связаны с существенно большим числом переменных и ограничений. Построение математических моделей таких задач, исследование свойств их допустимых и оптимальных решений, а также алгоритмов получения эффективных и приближенных решений весьма актуально для построения систем календарного планирования производства, планирования ремонтных работ и обслуживания объектов.

**Математическая формулировка задачи.** Здесь и в дальнейшем под выполнением задания понимается завершение изготовления изделия на всех стадиях обработки. Введем обозначения:  $i = 1, \dots, n$  — индексы обрабатываемых изделий;  $k = 1, \dots, K$  — индексы различных стадий обработки;  $d_i^k$  — допустимый наиболее ранний срок начала выполнения  $i$ -го задания на  $k$ -й стадии обработки;  $d_i$  и  $D_i$  — соответственно граничное время начала и завершения выполнения  $i$ -го задания;  $t_i^k$  — время выполнения  $i$ -го задания на  $k$ -й стадии обработки;  $r_i^k$  — необходимое время постобработки после выполнения  $i$ -го задания на  $k$ -й стадии обработки;  $x_i^k$ ,  $\theta_i^k$  — соответственно время начала и завершения выполнения  $i$ -го задания на  $k$ -й стадии обработки;  $z_i^k$ ,  $r_i^k$  и  $Z_i^k$  — соответственно время начала, длительности и завершения постобработки  $i$ -го задания на  $k$ -й стадии технологического процесса;  $T_i = Z_i^K$  — время завершения всех работ многостадийного изготовления и постобработки  $i$ -го изделия;  $F = \max_{i \in \tilde{I}} T_i$  — время завершения всех работ многостадийного расписания, т. е. значение критерия оптимальности задачи.

Пусть построена некоторая последовательность выполнения заданий  $\tilde{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j, \dots, u_n\}$ .

Времена начала и завершения выполнения каждого из заданий и постобработки изделий на всех стадиях обработки определяются по формулам

$$\begin{aligned} x_{u_1}^1 &= d_{u_1}^1 + 1, & \theta_{u_1}^1 &= x_{u_1}^1 + t_{u_1}^1 - 1, \\ z_{u_1}^1 &= \theta_{u_1}^1 + 1, & Z_{u_1}^1 &= z_{u_1}^1 + r_{u_1}^1 - 1; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_{u_1}^k &= \max(d_{u_1}^k, Z_{u_1}^{k-1}) + 1, \\ \theta_i^k &= x_{u_1}^k + t_{u_1}^k - 1, & z_{u_1}^k &= \theta_{u_1}^k + 1, \\ Z_{u_1}^k &= z_{u_1}^k + r_{u_1}^k - 1, & k &= 1, \dots, K; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_{u_j}^1 &= \max(d_{u_j}^1, Z_{u_{j-1}}^1) + 1, & \theta_{u_{j-1}}^1 &= x_{u_j}^1 + t_{u_j}^1 - 1, \\ z_{u_j}^1 &= \theta_{u_j}^1 + 1, & Z_{u_1}^1 &= z_{u_1}^1 + r_{u_1}^1 - 1; \\ x_{u_j}^k &= \max(d_{u_j}^k, Z_{u_{j-1}}^{k-1}) + 1, & \theta_{u_j}^k &= x_{u_j}^k + t_{u_j}^k - 1, \\ z_{u_j}^k &= \theta_{u_j}^k + 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Z_{u_j}^k &= z_{u_j}^k + r_{u_j}^k - 1, \\ k &= 2, \dots, K, & j &= 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (4)$$

$$T_{u_j} = Z_{u_j}^K, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

## 2. СВОЙСТВА ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим две подпоследовательности  $\tilde{U}(s)$  и  $\tilde{U}(p)$ .

**Правило отсева 1.** Если для двух подпоследовательностей  $\tilde{U}(s)$  и  $\tilde{U}(p)$  справедливы условия

$$\begin{aligned} Z_{u_{m(s)}}^k &\leq Z_{u_{m(p)}}^k, & k &= 1, 2, \dots, (K-1), \\ \theta_{u_{m(s)}}^K &\leq \theta_{u_{m(p)}}^K, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{I}^1(p)$  и  $\tilde{I}^1(s)$  — подмножества заданий в подпоследовательностях  $\tilde{U}(s)$  и  $\tilde{U}(p)$ ,  $u_{m(s)}$  и  $u_{m(p)}$  — соответственно индексы заданий, стоящих на последнем месте в подпоследовательностях  $\tilde{U}(s)$  и  $\tilde{U}(p)$ ,  $Z_{u_{m(s)}}^k$  и  $Z_{u_{m(p)}}^k$  — соответственно времена завершения постобработки последнего стоящего в подпоследовательностях  $\tilde{U}(s)$  и  $\tilde{U}(p)$  задания на каждой стадии  $k = 1, 2, \dots, (K-1)$ ,  $\theta_{u_{m(s)}}^K$  и  $\theta_{u_{m(p)}}^K$  — времена завершения обработки этих изделий на машине последней  $K$ -й стадии, то подпоследовательность  $\tilde{U}(p)$  не содержит оптимальных решений и может быть отброшена как неперспективная.

Упорядочим все задания по неубыванию граничных времен их завершения, т. е. значений  $D_i$  —

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \{q_1, q_2, \dots, q_{l-1}, q_l, \dots, q_n \mid D_{q_{l-1}} \leq D_{q_l}, \\ & \quad l = 2, 3, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

**Правило отсева 2.** Если для некоторой подпоследовательности  $\tilde{U}(s)$  с подмножеством заданий  $\tilde{I}^1(s)$ , содержащей все  $(l-1)$  задания, стоящие в начале последовательности  $\tilde{Q}$ , и на последнем

месте которой стоит задание  $u_{m(s)}$ , справедливы условия

$$\max_{1 \leq k \leq K-1} \left\{ Z_{u_{m(s)}}^k + \sum_{g=k+1}^K (t_{q_l}^g + r_{q_l}^g) \right\} > D_{q_l},$$

$$q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}, \quad (8)$$

то эта подпоследовательность  $\tilde{U}(s)$  не содержит допустимых планов и может быть отброшена как неперспективная.

Доказательство этого утверждения следует из условий

$$Z_{q_l}^k + \sum_{g=k+1}^K (t_{q_{l+1}}^g + r_{q_{l+1}}^g) \leq \max(Z_{q_l}^k + \theta_{q_l}^{k+1}) +$$

$$+ \sum_{g=k+1}^K [\max(Z_{q_{l+1}}^{g-1}, \theta_{q_{l+1}}^g)] + (t_{q_{l+1}}^g + r_{q_{l+1}}^g).$$

**Правило отсева 3** может рассматриваться как усиление правила 2. Если выполняется хотя бы одно из системы неравенств

$$\max_{1 \leq k \leq K-1} \left\{ Z_{u_{m(s)}}^k + \sum_{q_l=(m_s+1)}^n \sum_{g=k+1}^K (t_{q_l}^g + r_{q_l}^g) \right\} > D_{q_l},$$

$$q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}, \quad (9)$$

то данная подпоследовательность выполнения заданий не имеет допустимых продолжений.

**Правило отсева 4.** Более слабые условия проверки допустимости строящейся последовательности, но требующие меньшего объема вычислений, связаны с проверкой двух или хотя бы одной из системы неравенств (10)–(12), которые имеют вид

$$Z_{u_{m(s)}}^{K-1} + \sum_{q_l=(m_s+1)}^{m_n} (t_{q_l}^K + r_{q_l}^K) > D_{q_l},$$

$$q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}, \quad (10)$$

$$\theta_{u_{m(s)}}^1 + \sum_{q_l=(m_s+1)}^{m_n} \sum_{g=1}^K (t_{q_l}^g + r_{q_l}^g) > D_{q_l},$$

$$q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}, \quad (11)$$

$$\theta_{u_{m(s)}}^1 + \sum_{g=1}^K (t_{q_l}^g + r_{q_l}^g) > D_{q_l},$$

$$\theta_{u_{m(s)}}^{K-1} + (t_{q_l}^K + r_{q_l}^K) > D_{q_l}. \quad (12)$$

### 3. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛИНЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

Выражения для вычисления нижней границы как в начале работы алгоритма, так и в процессе построения последовательности выполнения заданий, будут необходимы для реализации последовательных методов решения задачи (метода ветвей и границ и метода динамического программирования). Кроме того, информация о значении нижней границы длины оптимального расписания позволит оценить точность полученного решения различными алгоритмами приближенного решения задачи.

Время завершения выполнения и постобработки всех заданий многостадийной обработки изделий не может быть меньше каждой из величин

$$f^k = \min_{1 \leq i \leq n} d_i^k \sum_{i=1}^n t_i^k + \min_{1 \leq i \leq n} r_i^k, \quad k = 1, \dots, K.$$

После выполнения всех заданий с соответствующей постобработкой на  $k$ -й стадии технологического процесса необходимы еще временные затраты на всех остальных стадиях обработки, которые не могут быть меньше значения

$$\mu^l = \min_{1 \leq i \leq n} (d_i^l + t_i^l + r_i^l), \quad l = 1, \dots, (k-1),$$

$$(k+1), \dots, K, \quad l \neq k.$$

Следовательно, нижняя граница длины расписания  $\vartheta(F)$  должна быть не меньше значения

$$\vartheta^k(F) = f_k + \sum_{l=1, l \neq k}^K \mu_l, \quad k = 1, \dots, K.$$

С учетом изложенного выше значение нижней границы длины многостадийного расписания вычисляется по формуле

$$\vartheta(F) = \max_{1 \leq k \leq K} \left( f^k + \sum_{l=1, l \neq k}^K \mu^l \right). \quad (13)$$

Пусть на некотором  $s$ -м шаге алгоритма построена подпоследовательность выполнения подмножества заданий  $\tilde{I}^1(s) - \tilde{U}(s) = \{u_1(s), u_2(s), \dots, u_j(s), \dots, u_m(s)\}$ , нижняя граница длины расписания  $m \leq n$ , и вычислены значения  $\theta_{u_{m(s)}}^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .  $\tilde{I}^2(s) = \{\tilde{I}^1(s)\}$  — подмножество подлежащих выполнению заданий. Тогда

$$f^k(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} \max(d_i^k, \theta_{u_{m(s)}}^k) + \min_{\tilde{I}^2(s)} r_i^k, \quad k = 1, \dots, K; \quad (14)$$





$$\mu^l(s) = \min_{i \in \tilde{I}^2(s)} [\max(d_i^l, \theta_{u_{m(s)}}^l) + t_i^l + r_i^l], \quad (k+1), \dots, K, l \neq k. \quad (15)$$

Следовательно, нижняя граница длины расписания для подпоследовательности выполнения подмножества заданий вычисляется по формуле

$$\vartheta[\tilde{U}(s)] = \max_{1 \leq k \leq K} \left( f^k(s) + \sum_{l=1, l \neq k}^K \mu_l(s) \right). \quad (16)$$

В качестве еще одного выражения для вычисления нижней границы может рассматриваться формула

$$\vartheta\{F[\tilde{U}(s)]\} = \theta_{u_{m(s)}}^K + \sum_{q_l = (m_s + 1), q_l \in (\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s))}^{m_n} t_{q_l}^K + \min_{q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}} r_{q_l}^K. \quad (17)$$

#### 4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим алгоритм решения задачи модифицированным методом ветвей и границ.

В процессе построения расписания строим различные варианты подпоследовательностей выполнения заданий  $\tilde{U}(s)$ ,  $s = 1, \dots, S$ . При этом, пользуясь правилами 2 или 4 (см. § 2, а также правилом 1 и формулами (6), (8)–(12)), подпоследовательности, не содержащие допустимых и оптимальных решений, исключаем из рассмотрения. Процесс решения завершается, когда построена некоторая последовательность  $\tilde{U}(h)$ , в которой сроки завершения выполнения всех заданий меньше или равны установленным граничным значениям, а время выполнения расписания всех работ не превышает нижней границы длины расписания всех подлежащих дальнейшему развитию подпоследовательностей.

Времена начала и завершения выполнения заданий рассчитываются по формулам (1)–(5).

Пусть на некотором шаге решения задачи построено  $A(s)$  допустимых последовательностей выполнения заданий, критерии оптимальности которых соответственно равны  $F_\rho[\tilde{U}(s)]$ ,  $\rho = 1, \dots, A(s)$ ,  $\bar{F}[\tilde{U}(s)] = \min_{1 \leq \rho \leq A(s)} F_\rho[\tilde{U}(s)]$  — наилучшее из построенных расписаний. В начале работы алгоритма полагаем  $\bar{F}[\tilde{U}(s)] \rightarrow \infty$ .

Обозначим признаком  $\beta(s) = 0$  перспективные подпоследовательности  $\tilde{U}(s)$ , подлежащие дальнейшему развитию,  $\beta(s) = 1$  и  $\beta(s) = 2$  соответственно  $\tilde{U}(s)$ , не содержащие оптимальных и допустимых решений;  $\beta(s) = 3$  — допустимое решение задачи.

Упорядочим все подлежащие выполнению задания в последовательность  $\tilde{Q}$  в соответствии с выражением (7). Алгоритм предусматривает выполнение следующих шагов.

**Шаг 1.** Полагаем  $\tilde{U}(s) = \{q_s\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Рассчитываем значения  $x_{q_s}^k$ ,  $\theta_{q_s}^k$ ,  $Z_{q_s}^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , по формулам (1), (2). Полагаем  $\tilde{I}^1(s) = \{q_s\}$ ,  $\tilde{I}^2(s) = \left\{ \frac{\tilde{I}}{q_s} \right\}$ . Если выполняется неравенство

$$Z_{q_s}^K > D_{q_s},$$

хотя бы для одного значения  $q_s$ , то не существует допустимых решений задачи, и алгоритм завершает работу. В противном случае полагаем  $\beta(s) = 0$ , вычисляем значение нижней границы  $\vartheta\{F[\tilde{U}(s)]\}$  (например, по формуле (17), положив  $u_{m(s)} = q_s$ ). Обозначим  $B(s)$  — число построенных подпоследовательностей. Переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Обозначим  $\tilde{Q}(s) = \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1(s)\}$ , где  $\tilde{Q}(s) = \{\bar{q}_1(s), \dots, \bar{q}_l(s), \dots, \bar{q}_p(s)\}$  — последовательность, в которой отсутствуют все индексы заданий множества  $\tilde{I}^1(s)$ . Среди последовательностей  $\tilde{U}(s)$ , у которых  $\beta(s) = 0$ , выбираем  $\tilde{U}(s)$  с наименьшим значением нижней границы  $\vartheta\{F[\tilde{U}(s)]\}$ . Если таких последовательностей не существует, то допустимое расписание с наименьшим значением критерия оптимальности является решением задачи. Если построенных допустимых расписаний не существует, т. е.  $\bar{F}[\tilde{U}(s)] \rightarrow \infty$ , то не существует допустимых решений задачи, и алгоритм завершает работу. Если  $\tilde{I}^2(s) \neq \emptyset$ , то устанавливаем на последнее место в строящейся  $\tilde{U}(s)$  каждое из заданий подмножества  $\tilde{I}^2(s) = \{j_1(s), j_2(s), \dots, j_\mu(s)\}$ ,  $\tilde{I}^1[B(s) + h] = \{\tilde{I}^1(s) \cup j_h(s)\}$ ,  $\tilde{I}^2[B(s) + h] = \{\tilde{I}^2(s)/j_h(s)\}$ ,

$$\tilde{U}[B(s) + h] = \{u_1(s), u_2(s), \dots, u_l(s), \dots, u_m(s), j_h(s)\}, \quad h = 1, 2, \dots, \mu.$$

Полагаем  $\beta(s) = 1$ . Вычисляем по формулам (2)–(5) значения  $x_{j_h(s)}^k$ ,  $\theta_{j_h(s)}^k$ ,  $Z_{j_h(s)}^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Полагая для  $\tilde{U}[B(s) + h]$  значение  $u_m(s) = j_h(s)$ , проверяем выполнение неравенств (9) или (11) и (12), положив  $q_l \in \{\tilde{Q}/\tilde{I}^1[B(s) + h]\}$ . Если для какого-то индекса  $j_h(s)$  выполняется хотя бы одно из этой системы неравенств, то полагаем  $\beta[B(s) + h] = 2$ .

Для подмножеств, для которых ни одно из этой системы неравенств не выполняется, полагаем  $\beta[B(s) + h(s)] = 0$ , вычисляем значение нижней границы по формулам (16) или (17). Увеличиваем число построенных подпоследовательностей на число  $\mu$ , и переходим к шагу 3. Если  $\tilde{I}^1[B(s) + h(s)] = \tilde{I}$ , то переходим к шагу 5.

**Шаг 3.** Если для подпоследовательности  $\tilde{U}[B(s) + h]$  выполняется хотя бы одно из неравенств

$$Z_{j_h(s)}^{K-1} + (t_{\gamma(s)}^K + r_{\gamma(s)}^K) > D_{\gamma(s)},$$

$$\theta_{u_{j_h(s)}}^1 + \sum_{g=1}^K (t_{\gamma(s)}^g + r_{\gamma(s)}^g) > D_{\gamma(s)},$$

то  $\tilde{U}[B(s) + h]$  не содержит допустимых решений, полагаем  $\beta[B(s) + h(s)] = 3$  и переходим к шагу 2. В противном случае переходим к шагу 4.

**Шаг 4.** Для всех вновь построенных перспективных подмножеств  $\tilde{I}^1[B(s) + h(s)]$ , для которых  $\beta[B(s) + h(s)] = 0$ , проверяем правила 1–3 перспективности продолжения со всеми ранее построенными подпоследовательностями  $\tilde{U}(s)$ ,  $s = 1, \dots, B(s)$ , у которых  $\beta(s) = 0$ . Если будет установлено, что какое-либо из них не содержит оптимальных решений, то для этого подмножества полагаем  $\beta[B(s) + h(s)] = 2$  или  $\beta(s) = 2$ . Переходим к шагу 2.

**Шаг 5.** Для построенной допустимой последовательности выполнения заданий значение критерия оптимальности равно  $T_{j_h(s)} = F[B(s) + h(s)] = Z_{j_h(s)}^K$ . Если выполняется неравенство  $\bar{F}[\tilde{U}(s)] > F[B(s) + h(s)]$ , то полагаем

$$\bar{F}[\tilde{U}(s)] = F[B(s) + h(s)].$$

Если

$$\bar{F}[\tilde{U}(s)] \leq (\min_{1 \leq s \leq [B(s) + h(s)]} \{F[\tilde{U}(s)]\} | \beta(s) = 0,$$

то получено решение задачи, и алгоритм завершает работу. В противном случае переходим к выполнению шага 2.

При полной реализации алгоритма ветвей и границ этот алгоритм является алгоритмом экспоненциальной сложности. В случае реализации односторонней схемы ветвления без последующего возвращения к вершинам дерева с меньшим значением нижней границы и в условиях достаточно большой области допустимых решений алгоритм решения в ряде случаев может иметь полиномиальную сложность.

Полиномиальным алгоритмом можно гарантировать получение только приближенного решения задачи без учета ограничений. Здесь методом вет-

вей и границ строится только одна ветвь дерева решений задачи, не обращая внимания, что вершины других ветвей содержат граничные значения критерия оптимальности лучше, чем в строящемся решении. На каждом шаге, требующем определенного объема вычислений, выбирается место в последовательности одного из заданий. Так как таких заданий  $N$ , то этот алгоритм является алгоритмом полиномиальной сложности.

## 5. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Времена выполнения семи заданий на машинах трех стадий изготовления изделий, а также потери времени на постобработку на каждой из этих стадий и допустимые времена начала и завершения выполнения заданий сведены в табл. 1. Последовательность по невозрастающей времен завершения выполнения заданий (7) имеет вид  $\tilde{Q} = \{7, 3, 4, 1, 6, 2, 5\}$ .

Вычислим значение нижней границы длины расписания по формуле (13):

$$\theta_1^3 = 10 + 12 + 2 + 12 + 4 + 9 = 49,$$

$$\theta_2^3 = 5 + 15 + 3 + 3 + 4 + 10 = 40,$$

$$\theta_3^3 = 8 + 10 + 5 + 3 + 7 + 12 = 45,$$

$$\theta_4^3 = 0 + 8 + 7 + 8 + 5 + 13 = 41,$$

$$\theta_5^3 = 12 + 9 + 4 + 10 + 2 + 10 = 47,$$

$$\theta_6^3 = 5 + 6 + 6 + 9 + 4 + 11 = 41,$$

$$\theta_7^3 = 1 + 15 + 4 + 6 + 5 + 8 = 39.$$

$$T^3 = 9 + 10 + 12 + 13 + 10 + 11 + 8 = 73;$$

$$\vartheta(F) = \min(\theta_1^3 + (T^3 - 9 + 2); \theta_2^3 + (T^3 - 10 + 2);$$

$$\theta_3^3 + (T^3 - 12 + 2); \theta_4^3 + (T^3 - 13 + 3);$$

$$\theta_5^3 + (T^3 - 10 + 2); \theta_6^3 + (T^3 - 11 + 2);$$

$$\theta_7^3 + (T^3 - 8 + 2)) = 104.$$

Таблица 1

Временные параметры задачи

| Но-<br>мер<br>зада-<br>ния | $d_i$ | Временные параметры на различных<br>стадиях обработки $k = 1, 2, 3$ |         |            |         |            |         | $D_i$ |
|----------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------|---------|------------|---------|------------|---------|-------|
|                            |       | 1-я стадия                                                          |         | 2-я стадия |         | 3-я стадия |         |       |
|                            |       | $t_i^1$                                                             | $r_i^1$ | $t_i^2$    | $r_i^2$ | $t_i^3$    | $r_i^3$ |       |
| 1                          | 10    | 12                                                                  | 2       | 12         | 4       | 9          | 3       | 80    |
| 2                          | 5     | 15                                                                  | 3       | 3          | 4       | 10         | 5       | 102   |
| 3                          | 8     | 10                                                                  | 5       | 7          | 3       | 12         | 4       | 66    |
| 4                          | 0     | 8                                                                   | 7       | 8          | 5       | 13         | 2       | 72    |
| 5                          | 12    | 9                                                                   | 4       | 10         | 2       | 10         | 6       | 115   |
| 6                          | 5     | 6                                                                   | 6       | 9          | 4       | 11         | 5       | 93    |
| 7                          | 1     | 15                                                                  | 4       | 6          | 5       | 8          | 4       | 55    |



Далее приведен процесс решения задачи. Для всех построенных подпоследовательностей выполнения заданий нижняя граница оптимального решения вычисляется по формулам (14), (15) или (16), (17).

$s = 1$ .

Задание 1:  $\theta_1^3 = 10 + 12 + 2 + 12 + 4 + 9 = 49$ ,  $9(T_7^3) = 49 + 8 + 4 = 61 > 55$ , т. е. недопустимо.

Задание 2:  $\theta_2^3 = 5 + 15 + 3 + 3 + 4 + 10 = 40$ ,  $9(\theta_7^3) = 40 + 8 + 4 = 52 < 55$ ;  $9(\theta_7^3) = 48$ ,  $9(T_3^3) = 48 + 12 + 4 = 64 < 68$ ;  $9(\theta_3^3) = 6$ ,  $9(T_4^3) = 60 + 13 + 2 = 75 > 72$ , т. е. недопустимо.

Задание 3:  $\theta_3^3 = 8 + 10 + 5 + 3 + 7 + 12 = 45$ ,  $9(T_7^3) = 45 + 8 + 4 = 57 > 55$ , т. е. недопустимо.

Задание 5:  $\theta_5^3 = 12 + 9 + 4 + 10 + 2 + 10 = 47$ ,  $9(T_7^3) = 47 + 8 + 4 = 59 > 55$ , т. е. недопустимо.

Задание 6:  $\theta_6^3 = 3 + 6 + 6 + 9 + 4 + 11 = 39$ ,  $9(T_7^3) = 39 + 8 + 4 = 51 < 55$ ,  $9(\theta_7^3) = 47$ ,  $9(T_3^3) = 47 + 12 + 4 = 63 < 68$ ;  $9(\theta_3^3) = 59$ ,  $9(T_4^3) = 59 + 13 + 2 = 74 > 72$ , т. е. недопустимо.

Аналогичные вычисления для заданий 4 и 7 показали допустимость установки их на 1-е место в строящейся последовательности. Вычислим значения нижних границ для каждого из этих вариантов:  $9(F|u_1 = 4) = \theta_4^3 + 9 + 10 + 12 + 10 + 11 + 8 + 3 = 41 + 63 = 104$ ,  $9(F|u_1 = 7) = \theta_7^3 + 9 + 10 + 12 + 13 + 10 + 11 + 2 = 38 + 67 = 105$ .

Выбирая вершину с наименьшим значением нижней границы и выполняя аналогичные вычисления на каждом шаге, строим дерево решений задачи.

$s = 2$ .  $\tilde{U} = \{4, 7\}$ . Так как  $\theta_4^3 = 41$ ,  $9\{\theta_3^3|u_1 = 4\} = 41 + 12 = 53$ ,  $9\{T_7^3|u_1 = 4\} = 53 + 8 + 4 = 65 > 55$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = \{4, 7\}) = 105$ .

$s = 3$ .  $\tilde{U} = \{4, 7, 3\}$ . Так как  $\theta_7^3 = 49$ ,  $9\{\theta_6^3|\tilde{U} = (4, 7, 3)\} = 49 + 11 = 60$ ,  $9\{T_1^3(\tilde{U} = (4, 7, 1))\} = 60 + 9 + 3 = 72 < 80$ ,  $9\{T_1^3(\tilde{U} = (4, 7, 6, 1, 3))\} = 60 + 9 + 12 + 4 = 85 > 68$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (4, 7, 3)) = 105$ .

$s = 4$ .  $\tilde{U} = \{4, 7, 3, 1\}$ . Так как  $\theta_3^3 = 61$ ,  $9\{\theta_6^3|\tilde{U} = (4, 7, 3, 6)\} = 61 + 11 = 72$ ,  $9\{T_6^3(\tilde{U} = (4, 7, 3, 2))\} = 72 + 5 = 77 < 90$ ,  $9\{T_1^3(\tilde{U} = (4, 7, 2, 1))\} = 72 + 9 + 3 = 84 < 80$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (4, 7, 3, 1)) = 108$ .

$s = 5$ .  $\tilde{U} = \{7, 3\}$ . Так как  $\theta_7^3 = 38$ ,  $9\{\theta_2^3|\tilde{U} = (7, 4)\} = 38 + 13 = 51$ ,  $9\{T_4^3(\tilde{U} = (7, 4, 3))\} = 51 + 12 + 4 = 67 > 66$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (7, 3)) = 107$ .

$s = 6$ .  $\tilde{U} = \{7, 3, 4\}$ . Так как  $\theta_3^3 = 52$ ,  $9\{\theta_1^3|\tilde{U} = (7, 3, 1)\} = 52 + 9 = 61$ ,  $9\{T_4^3(\tilde{U} = (7, 3, 1, 4))\} = 61 + 13 + 2 = 76 > 72$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (7, 3, 4)) = 109$ .

$s = 7$ .  $\tilde{U} = \{4, 7, 3, 1, 6\}$ . Так как  $\theta_1^3 = 72$ ,  $9\{\theta_2^3|\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 2)\} = 72 + 10 = 82$ ,  $9\{T_6^3(\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 2, 6))\} = 82 + 11 + 5 = 96 > 93$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 6)) = 109$ .

$s = 8$ .  $\tilde{U} = \{4, 7, 3, 1, 6, 2\}$ . Так как  $\theta_6^3 = 83$ ,  $9\{\theta_5^3|\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 6, 5)\} = 83 + 10 = 93$ ,  $9\{T_2^3(\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 6, 5, 2))\} = 93 + 10 + 5 = 108 > 102$ , то остальные варианты недопустимы;  $9(F|\tilde{U} = (4, 7, 3, 1, 6, 2)) = 109$ .

$s = 8$ .  $\tilde{U} = \{4, 7, 3, 1, 6, 2, 5\}$ ,  $(F|\tilde{U} = \{4, 7, 3, 1, 6, 2\})$ . Дерево решений задачи, построенное методом ветвей и границ описанным алгоритмом решения, приведено на рис. 2. Слева или справа от каждой вершины стоит значение нижней границы критерия оптимальности. Времена начала и завершения выполнения заданий на машинах и постобработки на различных стадиях изготовления в оптимальной последовательности их обработки приведены в табл. 2.

Таблица 2

Времена начала и завершения выполнения заданий в оптимальном решении

| Последовательность выполнения заданий | Времена начала и завершения выполнения заданий |              |         |            |              |         |            |              |           |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|--------------|---------|------------|--------------|---------|------------|--------------|-----------|
|                                       | 1-я стадия                                     |              |         | 2-я стадия |              |         | 3-я стадия |              |           |
|                                       | $x_i^1$                                        | $\theta_i^1$ | $T_i^1$ | $x_i^2$    | $\theta_i^2$ | $T_i^2$ | $x_i^3$    | $\theta_i^3$ | $T_i^3$   |
| 4                                     | 1                                              | 8            | 15      | 16         | 23           | 28      | 29         | 41           | 43 < 72   |
| 7                                     | 9                                              | 23           | 27      | 28         | 33           | 38      | 42         | 49           | 53 < 55   |
| 3                                     | 24                                             | 33           | 38      | 39         | 45           | 48      | 50         | 61           | 65 < 66   |
| 1                                     | 34                                             | 45           | 47      | 48         | 59           | 63      | 64         | 72           | 75 < 80   |
| 6                                     | 46                                             | 51           | 57      | 60         | 68           | 72      | 73         | 83           | 88 < 93   |
| 2                                     | 52                                             | 66           | 69      | 70         | 72           | 75      | 84         | 93           | 98 < 102  |
| 5                                     | 67                                             | 75           | 79      | 80         | 89           | 91      | 94         | 103          | 109 < 115 |

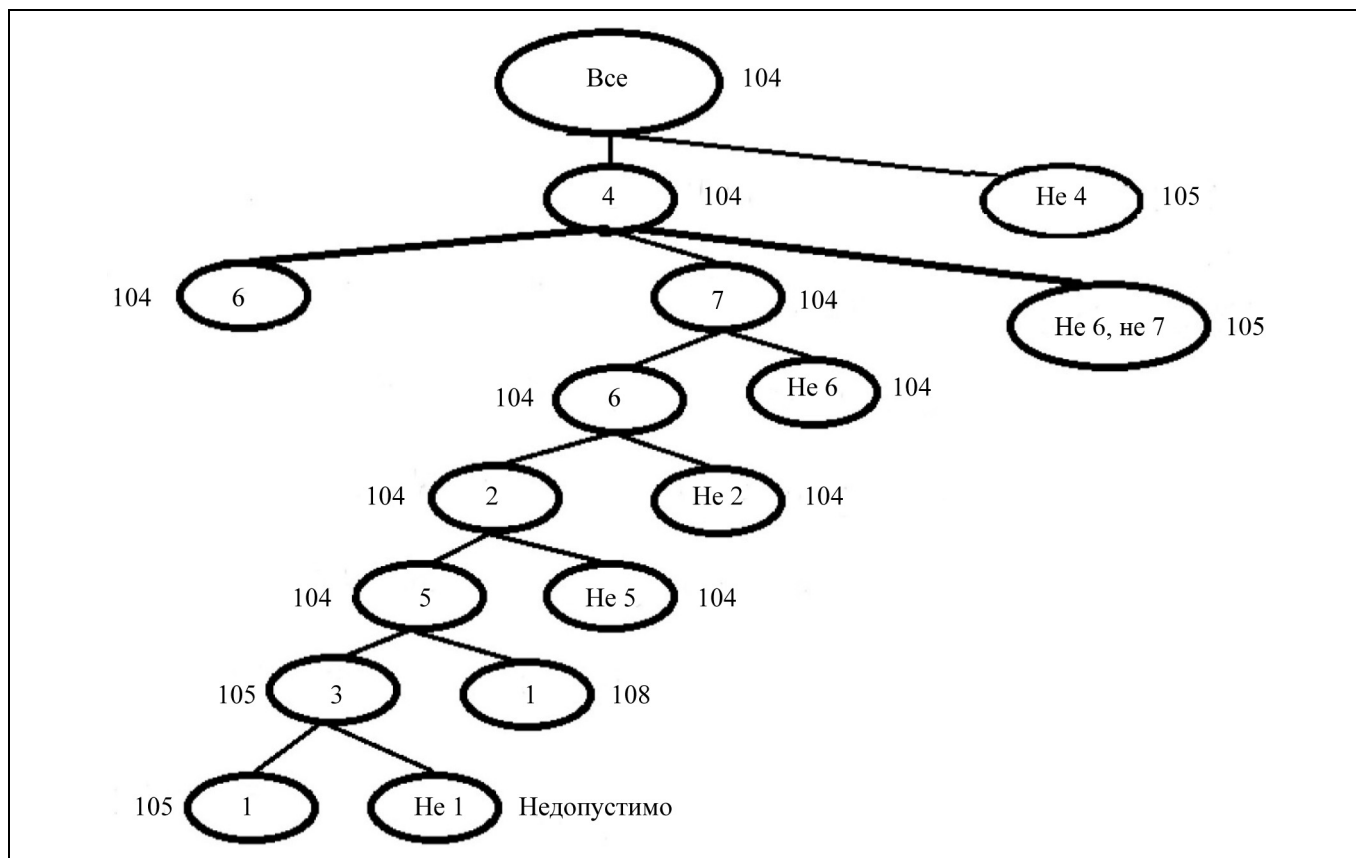


Рис. 2. Дерево решений примера

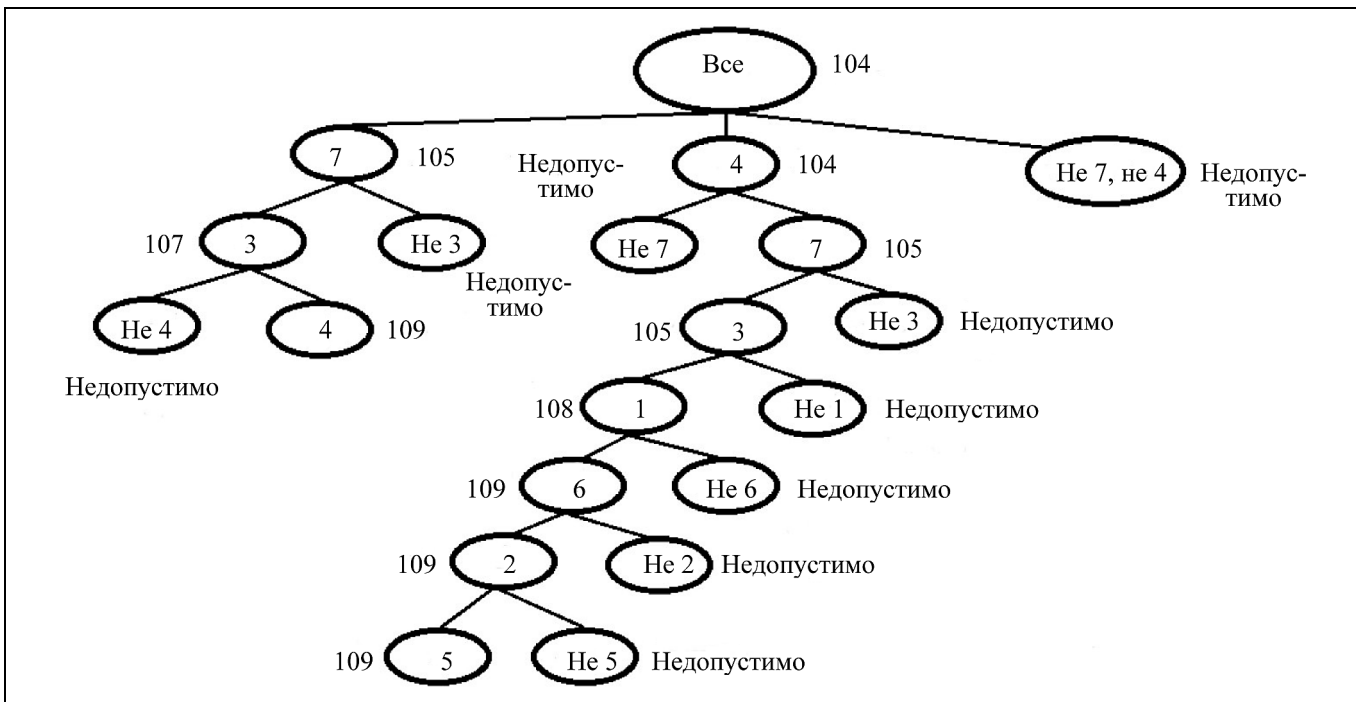


Рис. 3. Дерево приближенного решения задачи

Таблица 3

## Времена начала и завершения выполнения заданий

| Последовательность выполнения заданий | Времена начала и завершения выполнения заданий |              |         |            |              |         |            |              |            |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|--------------|---------|------------|--------------|---------|------------|--------------|------------|
|                                       | 1-я стадия                                     |              |         | 2-я стадия |              |         | 3-я стадия |              |            |
|                                       | $x_i^1$                                        | $\theta_i^1$ | $T_i^1$ | $x_i^2$    | $\theta_i^2$ | $T_i^2$ | $x_i^3$    | $\theta_i^3$ | $T_i^3$    |
| 4                                     | 1                                              | 8            | 15      | 16         | 23           | 28      | 29         | 41           | 43         |
| 7                                     | 9                                              | 23           | 27      | 28         | 33           | 38      | 42         | 49           | 53         |
| 6                                     | 24                                             | 29           | 35      | 36         | 44           | 48      | 50         | 60           | 65         |
| 2                                     | 30                                             | 44           | 47      | 48         | 50           | 54      | 61         | 70           | 75         |
| 5                                     | 45                                             | 53           | 57      | 58         | 67           | 69      | 71         | 80           | 86         |
| 3                                     | 54                                             | 63           | 68      | 69         | 75           | 78      | 81         | 92           | 96         |
| 1                                     | 64                                             | 75           | 77      | 78         | 89           | 93      | 94         | 102          | <b>105</b> |

Рассмотрим также приближенное решение данного примера в условиях, когда ограничения на времена завершения выполнения заданий отсутствуют, т. е.  $D_i \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . Применим одностороннюю схему ветвления, не обращая внимание на то, что в дереве решений есть вершины с меньшим значением нижней границы функции цели. Дерево решений задачи в этом случае представлено на рис. 3.

Времена начала и завершения выполнения заданий на машинах и постобработки на различных стадиях изготовления в оптимальной последовательности их обработки при отсутствии ограничений на времена завершения их выполнения приведены в табл. 3.

Значение критерия оптимальности в полученном приближенном решении очень близко к значению нижней границы длины расписания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе постановки и методы решения задач построения расписаний работы последовательных цепочек участков и цехов взаимосвязанных производств могут найти широкое применение в системах календарного планирования мелко- и среднесерийного производства. Существенная особенность рассматриваемых задач состоит в учете затрат времени не только на работу оборудования, но и потерь времени на постобработку на каждой стадии изготовления, а также в наличии системы ограничений на сроки начала выполнения заданий на 1-й стадии обработки и завершения их выполнения на последней стадии после постобработки. В качестве критерия оптимальности принято построение последовательности вы-

полнения всех заданий системой взаимосвязанных производств в кратчайшие сроки. Сформулированные задачи обобщают известную в теории расписаний задачу построения последовательности выполнения заданий на одной машине с учетом постобработки и относятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Алгоритмы получения точных решений таких задач применимы, в самом общем случае, только для решения задач малой размерности. В статье приведены математическая постановка, формулы выражения вычисления нижней границы значения критерия оптимальности, а также свойства допустимых последовательностей выполнения заданий и правила отсева недопустимых и неоптимальных продолжений.

Предложены алгоритмы получения точных и приближенных решений задачи на основе модифицированного метода ветвей и границ. Полученные результаты проиллюстрированы числовым примером, выполненные автором вычислительные эксперименты показали, что наличие системы строгих ограничений на сроки выполнения заданий при реализации приведенных в работе алгоритмов в ряде случаев существенно сокращает число рассматриваемых вариантов. Это позволяет при сравнительно небольшом объеме вычислений получить допустимые и даже оптимальные или очень близкие к оптимальным решения, а также на начальных этапах решения установить несовместность системы ограничений задачи.

Предложенные в работе алгоритмы применимы для практического применения в автоматизированных системах календарного планирования производств, строительства объектов, выполнения ремонтных работ и в других приложениях.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев А.А. — Теория расписаний. Методы и алгоритмы. — М. — ИПУ РАН. — 2019. — 408 с. [Lasarev, A.A. Schedule theory. Methods and algorithms. — M. — IPU RAN. — 2019. — 408 p. (In Russian)]
2. Зак Ю.А. Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок. — М.: URSS, 2012. — 394 с. [Zack, Yu.A. Applied Problems of the Theory of Schedules and Traffic Routing. — M., URSS, 2012. — 394 p. (In Russian)]
3. Хоботов Е.Н. О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производствах // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 12. — С. 85—100. [Hobotov, E.N. On Some Models and Methods for Solving Planning problems in Discrete Production // Automation and Remote Control. — 2007. — Vol. 68, iss. 12. — P. 2172—2186.]
4. Прилуцкий М.Х., Седаков Д.В. Календарное планирование многостадийных производственных систем с взаимозаменяемым оборудованием // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2014. — № 4 (1). — С. 433—437. [Priluzkij, M.H., Sedakov, D.V. Scheduling of Multistage Production Systems with Interchangeable Equipment // Bulletin of Nizhny Novgorod University im. N.I. Lobachevsky. — 2014. — No. 4 (1). — P. 433—437. (In Russian)]
5. Domschke, W., Scholl, A., Voß, S. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. — Springer Verlag: Berlin — Heidelberg, 2005. — 456 s.
6. Brucker P. Scheduling Algorithms. — Springer-Verlag: Berlin — Heidelberg — New York, 1998. — 377 p.
7. Зак Ю.А. Построение двухстадийных расписаний обработки изделий на одной машине. — Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 4. — С. 19—36. [Zack, Yu.A. Construction of two-stage product processing schedules on one machine // Systems research and information technology. — 2018. — No. 4. — P. 19—36.]
8. Зак Ю.А. Двухстадийные задачи планирования для поточной линии // Проблемы управления. — 2019. — № 6. — С. 52—62. [Zack, Yu.A. Two-stage planning tasks for the flow // Control Sciences. — 2019. — No. 6. — P. 52—62. (In Russian)]
9. Зак Ю.А. Алгоритмы приближенного решения многостадийных Flow-shop-problem // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 100—109. [Zack, Yu.A. Algorithms for the approximate solution of multistage Flow-shop-problem // Systems research and information technology. — 2019. — No. 3. — P. 100—109.]
10. Carlier, J. The one-machine sequencing problem // European Journal of Operational Research. — 1982. — Vol. 11. — P. 42—47.
11. Зак Ю.А. Построение допустимых и оптимальных расписаний выполнения работ на одной машине // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 1. — С. 51—66. [Zack, Yu.A. Construction of admissible and optimal schedules of work execution on one machine // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — No. 1. — P. 51—66. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 19.02.2020, после доработки 7.07.2020.

Принята к публикации 16.07.2020.

Зак Юрий Александрович — д-р техн. наук,  
эксперт и консультант, г. Аахен, Германия,  
✉ yuriy\_zack@hotmail.com.

## SCHEDULES FOR PERFORMING TASKS IN INTERCONNECTED SEQUENTIAL PRODUCTION SYSTEMS

Yu.A. Zack

✉ yuriy\_zack@hotmail.com

**Abstract.** The problem, which is classical in scheduling theory, of constructing a sequence of tasks execution on one machine under conditions of restrictions on the start and end times of tasks execution and which takes into account not only the time spent on equipment operation, but also the losses for post-processing, is considered for multistage production systems consisting of an interconnected chain of sections and workshops of an industrial enterprise. The criterion for the optimality of the task is the implementation of the multistage schedule in the shortest possible time. The problems considered in this paper belong to the class of NP-complete problems of exponential complexity. The properties of admissible and optimal task execution sequences are investigated. Methods for calculating the lower bound for the length of the optimal schedule and the rules for rejecting inadmissible and non-optimal extensions are proposed. Algorithms for the exact and approximate solution of the problem by modified branch and bound methods have been developed. The proposed algorithms are illustrated with numerical examples. The computational experiments performed by the author have shown that the presence of a system of strict restrictions on the timing of tasks when implementing the algorithms proposed in the paper in a number of cases significantly reduces the number of options under consideration.

**Keywords:** sequence of task execution, multistage schedule, minimum time, heuristic algorithm, lower bound of the optimality criterion, screening out unpromising continuations, branch and bound method.

## ЛЕОНИД ПЕТРОВИЧ БОРОВСКИХ

14.04.1944—29.07.2020

В ночь с 28 на 29 июля 2020 года скоропостижно скончался Леонид Петрович Боровских, заместитель главного редактора журнала «Проблемы управления».

Леонид Петрович родился в многодетной рабочей семье в небольшом городке Шумиха под Челябинском, куда они вскоре и переехали. В 1961 году Леонид приезжает в Москву, чтобы поступить в Московский физико-технический институт, который заканчивает в 1967 году. Еще в школьные годы он прекрасно разбирался в технике и собственноручно собирал довольно сложные по тем временам радиотехнические устройства. Так что высокая теоретическая подготовка, полученная им в одном из лучших вузов страны, изначально сочеталась со способностью ощущать и ее прикладное значение.

По окончании МФТИ Леонид Петрович приходит на работу в Институт автоматики и телемеханики АН СССР (с 1972 г. — Институт проблем управления) в лабораторию Дмитрия Ивановича Агейкина, где он начал трудиться еще в 1966 году, будучи студентом, в группе сотрудников, которая позднее в 1977 году выделилась в отдельную лабораторию «Теории и средств преобразования измерительной информации» под руководством Владимира Юрьевича Кнеллера. Изучение вопросов, связанных с преобразованием и изменением параметров объектов, представимых в виде многоэлементных двухполюсников, становится основным направлением научной деятельности Л.П. Боровских. Под руководством В.Ю. Кнеллера он пишет и защищает в 1979 году кандидатскую диссертацию на тему «Исследование методов и средств преобразования параметров объектов, представляемых многоэлементными двухполюсниками». Научные результаты, полученные Л.П. Боровских, существенно раздвигали рамки представлений того времени о различных аспектах исследуемой им проблемы. Эти результаты позднее вошли в книгу «Определение параметров многоэлементных двухполюсников», написанную в соавторстве с В.Ю. Кнеллером и выпущенную в 1986 году издательством «Энергоатомиздат».

Будучи с 1984 года по должности старшим научным сотрудником, примерно в то же время Л.П. Боровских получает и ученое звание старшего научного сотрудника. За свою многолетнюю активную и плодотворную научную деятельность он опубликовал десятки научных трудов.

В особенно трудные для науки 1990-е годы Леонид Петрович остается верен и ей и Институту. В 1995 го-



ду ему было присвоено почетное звание Ветерана Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

Тогда же, в 1990-е, Леонид Петрович стал заниматься научным редактированием. На протяжении долгих лет он был научным редактором в журнале «Измерения, контроль, автоматизация». А когда в 2003 году Институт начал издавать журнал «Проблемы управления», дирекция пригласила его в редколлегия журнала на должность заместителя главного редактора. Так началась новая и, быть может, самая яркая и счастливая страница

его жизни. При его непосредственном участии было выпущено более ста номеров журнала «Проблемы управления».

Редактором Леонид Петрович был замечательным, он всегда стремился помочь авторам своим компетентным и доброжелательным советом. Его помыслы всегда были связаны с журналом. Он стремился максимально поднять его уровень, болел за его место в рейтингах и гордился достигнутыми успехами. Помогать авторам публиковать качественные статьи, выпускать научный журнал, соответствующий самым высоким стандартам, — в этом он видел задачу своей работы в редакции, ибо судьба отечественной науки всегда искренне волновала Леонида Петровича.

В 2019 году в связи с 80-летием со дня образования Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН Леонид Петрович Боровских был награжден Почетной грамотой Российской академии наук за многолетний добросовестный труд на благо российской науки, большой вклад в развитие фундаментальных и прикладных исследований в различных областях теории управления и ее приложений. Леонид Петрович всегда был общественно активным человеком. Круг его интересов не замыкался в чисто профессиональных рамках: десятилетия своей жизни он посвятил лыжному спорту и вместе с коллегами принимал участие в лыжных марафонах.

*Леонид Петрович был удивительно обаятельным, общительным, доброжелательным, отзывчивым человеком, профессионалом своего дела, — таким он и останется в нашей памяти.*

**Сотрудники Института проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН  
Редсовет, редколлегия и редакция журнала  
«Проблемы управления»**

# О КОНКУРСАХ НА СОИСКАНИЕ ЗОЛОТЫХ МЕДАЛЕЙ И ПРЕМИЙ ИМЕНИ ВЫДАЮЩИХСЯ УЧЕНЫХ, ПРОВОДИМЫХ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИЕЙ НАУК В 2021 ГОДУ

Российская академия наук продолжает прием документов на конкурсы на соискание золотых медалей и премий имени выдающихся ученых, каждая из которых присуждается в знаменательную дату, связанную с жизнью и деятельностью ученого, именем которого названа медаль или премия.

Золотые медали присуждаются за выдающиеся научные работы, открытия и изобретения или по совокупности работ большого научного и практического значения.

В конкурсах на соискание золотых медалей могут участвовать лишь отдельные лица персонально.

Премии присуждаются за отдельные выдающиеся научные работы, открытия, изобретения, а также за серии научных работ по единой тематике.

На соискание премий могут быть представлены работы или серии работ единой тематики, как правило, отдельных авторов. При представлении работ выдвигаются лишь ведущие авторы, причем не более трех человек.

Право выдвижения кандидатов на соискание золотых медалей и премий предоставляется:

- а) академикам и членам-корреспондентам Российской академии наук;
- б) научным учреждениям, высшим учебным заведениям;
- в) научным и инженерно-техническим обществам;
- г) научным советам Российской академии наук и других ведомств по важнейшим проблемам науки;
- д) научно-техническим советам государственных комитетов, министерств, ведомств; техническим советам промышленных предприятий; конструкторским бюро.

Организации или отдельные лица, выдвинувшие кандидата на соискание золотой медали или премии, обязаны представить в Российскую академию наук (119991, Москва, Ленинский проспект, 14, корп. 2, Экспедиция) с надписью: «На соискание золотой медали (премии) имени...»:

а) мотивированное представление, включающее научную характеристику работы, ее значение для развития науки и народного хозяйства;

б) при выдвижении работ на соискание премии — опубликованную научную работу (серию работ), материалы научного открытия или изобретения — в трех экземплярах (при выдвижении закрытых работ допускается представление рукописных материалов в одном экземпляре);

*Примечание.* При выдвижении кандидата на соискание золотой медали представление опубликованных научных работ (серий работ), материалов научного открытия или изобретения не обязательно.

в) сведения об авторе (перечень основных научных работ, открытий, изобретений, место работы и занимаемая должность, домашний адрес, номера служебного, домашнего и мобильного телефонов, электронная почта);

г) справку о том, что представляемая на конкурс работа ранее не была удостоена Государственной премии, а также именных государственных премий.

Работы, удостоенные Государственной премии, а также именных государственных премий, на соискание золотых медалей и премий имени выдающихся ученых не принимаются.

Ученым, удостоенным золотых медалей или премий, предоставляется право при печатании работ отмечать в заголовке «Удостоена золотой медали (премии) имени... Российской академии наук за... год».

Решения президиума РАН о присуждении золотых медалей и премий, а также краткие аннотации о работах, удостоенных золотых медалей или премий, публикуются в «Вестнике Российской академии наук», в «Известиях Российской академии наук» соответствующей серии и в газете «Поиск». В «Вестнике Российской академии наук» помещаются портреты ученых, удостоенных золотых медалей и премий.

Рассмотренные на заседании президиума РАН печатные научные работы, за которые присуждены золотые медали или премии, передаются в Библиотеку Российской академии наук на хранение.

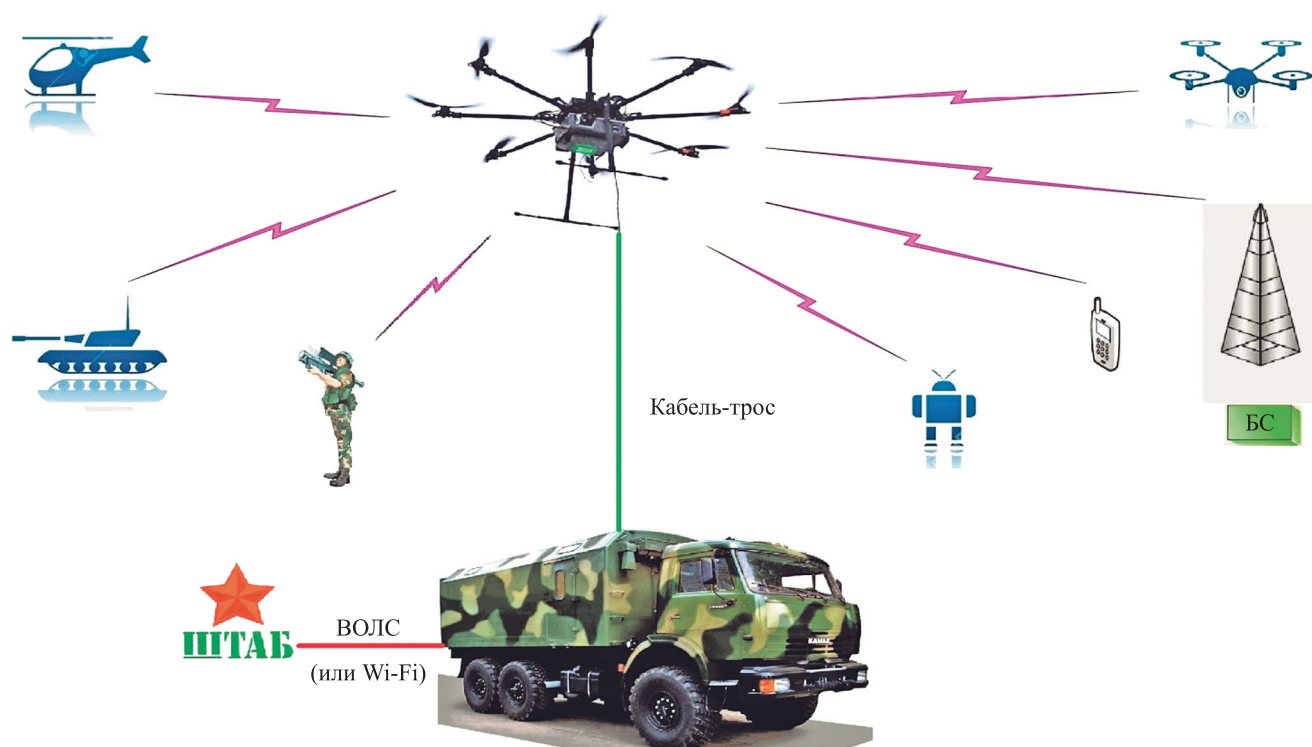
Золотые медали, а также дипломы о присуждении золотых медалей вручаются удостоенным их лицам на годичном общем собрании членов РАН. Дипломы о присуждении премий вручаются удостоенным их лицам на заседании президиума РАН.

Справки по телефону: (499) 237-99-33

Более подробная информация: <https://www.ipu.ru/node/58307>



# МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИВЯЗНЫЕ ВЫСОТНЫЕ БЕСПИЛОТНЫЕ ПЛАТФОРМЫ ДЛИТЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ



## Назначение и области применения

- Мониторинг подвижных наземных и воздушных объектов
- Охрана критически важных объектов с применением на борту аппаратуры видео- и радиолокационного наблюдения
- Создание сети сотовой связи на обширной территории с помощью привязных высотных платформ в качестве «LTE-вышек»
- Создание телекоммуникационной инфраструктуры в районах стихийных бедствий
- Локальные навигационные системы, успешно функционирующие в условиях отсутствия, ослабления или намеренного «глушения» сигналов спутниковой навигации
- Экологический мониторинг и мониторинг лесных пожаров

## Основные технические характеристики

Высота подъема. . . . . до 300 м  
Передача мощности «земля – борт» . . . 20 кВт  
Полезная нагрузка . . . . . 30 кг  
Время полета. . . . . не менее 24 ч  
Всепогодная эксплуатация –  
температурный режим . . . . . от – 50 до + 50°C  
Ограничение по ветру. . . . . не более 15 м/с  
Время развертывания . . . . . не более 10 мин

Наземное электропитание от трехфазной системы электроснабжения переменного тока 220/380 В частотой 50 или 400 Гц; в мобильном исполнении в полевых условиях в качестве источника электропитания может быть использована электростанция мощностью 15 кВт

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

☎ (495) 334-75-91, ✉ [vishn@inbox.ru](mailto:vishn@inbox.ru)

<http://www.ipu.ru>



