

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3/2020

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Каляев, академик РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
Е. А. Микрин, академик РАН,
П. П. Пархоменко, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,
Е. А. Федосов, академик РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
Л. П. Боровских, канд. техн. наук
(зам. гл. редактора),
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,
М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
В. В. Клочков, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
В. В. Кульба, д-р техн. наук,
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,
д-р техн. наук,
Самара – В. Г. Засканов, д-р техн. наук,
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS¹,
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,
V. A. Levin, Academician of RAS,
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,
E. A. Mikrin, Academician of RAS,
P. P. Parkhomenko, Corr. Member of RAS,
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,
S. N. Vassilyev, Academician of RAS

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),
L. P. Borovskikh, Ph. D. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),
V. V. Klochkov, D. Sc. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),
E. Ya. Rubinovich, D. Sc. (Tech.),
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –
D. Sc. (Tech.),
Samara – V. G. Zaskanov, D. Sc. (Tech.),
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

¹ Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор

чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместители главного

редактора

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь

Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции

117997, ГСП-7, Москва,

ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.

Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет и электронная версия
подготовлены

ИП Кишенкова Т. В.

Фото на четвертой странице обложки

В.М. Бабилова

Отпечатано в ООО «Адвансед солюшнз»

Заказ № РВ320

Подписано в печать

18.05.2020 г.

Журнал зарегистрирован

в Министерстве Российской

Федерации по делам печати,

телерадиовещания и средств

массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе

Web of Science и Перечень

рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс

научного цитирования (РИНЦ).

На сайте Научной электронной

библиотеки (www.elibrary.ru) доступны

полные тексты статей.

Подписные индексы:

80508 и **81708** в каталоге Роспечати;

38006 в объединенном каталоге

«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное

бюджетное учреждение науки

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Анализ и синтез систем управления

Уткин А.В., Уткин В.А. Синтез систем стабилизации
при односторонних ограничениях на управляющие воздействия 3

Управление в социально-экономических системах

Губко М.В. Построение комплексных механизмов управления
организационным поведением 14

Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г. Многомерная модель
динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации 26

Бреер В.В. Теоретико-игровая пороговая модель биржевого
рынка 34

Хасянова С.Ю., Самсонов М.Е. Модель оценки эффекта воздействия
ипотечной секьюритизации на банковский бизнес 40

Информационные технологии в управлении

Промыслов В.Г., Семенков К.В. Методы оценки информационной
угрозы для беспилотных транспортных средств в среде
«умного города» 49

Подлазов В.С. Отказоустойчивый неблокируемый трехмерный
разреженный гиперкуб 59

Управление подвижными объектами и навигация

Бузииков М.Э., Галяев А.А. Оценка вероятности выживания цели
в задаче «атакующие — цель — защитники» 70

Хроника

Двенадцатая международная конференция «Управление развитием
крупномасштабных систем» MLSD'2019 78

Евгений Анатольевич Микрин 83

Павел Павлович Пархоменко 84



CONTROL SCIENCES

Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute
of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences

Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

Deputy Editors-in-Chief

L. P. Borovskikh, F. F. Pashchenko

Executive Editor-in-Chief

N. E. Maksimova

Editor

L. V. Petrakova

Publisher Sensidat-Plus LLC

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,

Moscow 117997, Russia

☎/☎ +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version
prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB320

Approved for print on 18.05.2020

The Journal is registered by the Ministry
of Press, Broadcasting and Mass Media
of the Russian Federation
Registration certificate of
ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI
(Russian Science Citation Index)
on the platform Web of Science
and in the list of peer-reviewed
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic
library (www.elibrary.ru) full texts of articles
are available.

Subscription indexes:

80508 and **81708** in the catalogue
of Rospechat;

38006 in the joint catalogue
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control
Sciences of Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

3.2020

CONTENTS

Analysis and Synthesis of Control Systems

Utkin, A.V., Utkin, V.A. The Synthesis of Stabilization Systems under
One-Sided Restrictions on Control Actions 3

Control in Social and Economic Systems

Goubko, M.V. Design of Integrated Mechanisms for Organizational
Behavior Control 14

Gubanov, D.A., Petrov, I.V., Chkhartishvili, A.G. Multidimensional
Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices 26

Breer, V.V. Game-Theoretic Threshold Model of the Stock Market 34

Khasyanova, S.Yu., Samsonov, M.E. The Estimation Model
of the Mortgage Securitization Effect on Banking Business 40

Information Technologies in Control

Promyslov, V.G., Semenov, K.V., Jharko, E.Ph. Security Threat
Assessment Methods for Unmanned Vehicles in a Smart City 49

Podlazov, V.S. Fault-Tolerant Non-Blocking Three-Dimensional Sparse
Hypercube 59

Control of Complex Technological Processes and Productions

Buzikov, M.E., Galayev, A.A. Target Survival Probability Estimation
for the Attackers — Target — Defenders Problem 70

Chronicle

**XII International Conference «Management of Large-Scale System
Development» MLSD'2019** 78

Yevgeny Anatolyevich Mikrin 83

Pavel Pavlovich Parkhomenko 84

СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ¹

А.В. Уткин, В.А. Уткин

Аннотация. Отмечено, что в практических приложениях теории автоматического управления часто встречаются ситуации, когда управляющие воздействия ограничены некоторой областью значений, в частности, могут принимать только неотрицательные значения. В таких случаях популярные методы синтеза такие, как например, методы синтеза модального и оптимального управления, неприменимы. Предложены методы стабилизации выходных (регулируемых) переменных в линейных стационарных системах с одним входом и одним выходом при неотрицательных (однополярных) ограничениях на управления. Основная идея состоит в реализации управляющих воздействий в виде линейных функций с насыщением, постоянные значения которых совпадают с ограничениями на управления. В качестве иллюстрации разработанных алгоритмов рассмотрен импульсный преобразователь напряжения постоянного тока, в котором управление имеет ключевую природу с состояниями «включено — выключено». Приведены результаты моделирования в среде Matlab Simulink.

Ключевые слова: стабилизация, односторонние ограничения на управления, инвариантность, преобразователь напряжения.

ВВЕДЕНИЕ

Примерами систем автоматического управления, в которых управления могут принимать односторонние (например, только положительные) значения, могут служить системы управления транспортными средствами с однонаправленной тягой, системы нагрева теплоносителя с естественным охлаждением и др. В случае таких систем классические методы синтеза обратной связи, такие как синтез модального управления, стандартные методы теории скользящих режимов, теории систем с глубокими обратными связями [1, 2], не могут быть применены непосредственно. Интуитивно

понятно, что идеология построения регуляторов с учетом ограничений на управляющие воздействия должна опираться на физику протекающего в объекте управления процесса. Например, скорость беспилотного транспортного средства может быть стабилизирована в окрестности заданного значения с помощью ускоряющей тяги и естественных или искусственно создаваемых тормозящих сил; при нагреве в заданной рабочей точке будет поочередно нагреваться и охлаждаться рабочее тело и т. п. Некоторые результаты получены для разрывных управлений «единица — ноль» для класса систем, в которых может быть реализован односторонний скользящий режим. В частности, такие режимы применяются в импульсных преобразователях напряжения с электронными ключами [3, 4].

В данной работе рассматриваются задачи стабилизации применительно к линейным системам с одним входом и одним выходом при действии внешних постоянных возмущений с односторон-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом РАН, № 7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».

ними ограничениями на управление. Разработаны алгоритмы управления в форме динамической обратной связи с использованием в законе управления кусочно-линейных обратных связей с насыщением. Свойства робастности и инвариантности замкнутых систем обеспечиваются с помощью наблюдателей состояния и возмущений на скользящих режимах и с большими коэффициентами усиления. Такой подход позволяет получить оценки не только компонент вектора состояния, но также оценки неизвестных составляющих модели объекта управления и внешних возмущений и использовать их для компенсации неопределенностей [5]. Полученные результаты применяются в задаче управления импульсным преобразователем напряжения постоянного тока [6, 7], модель которого описывается системой дифференциальных уравнений с параметрическими неопределенностями, при действии внешних возмущений и при неполных измерениях вектора состояния. Эффективность предложенных алгоритмов подтверждается результатами имитационного моделирования в среде Matlab Simulink.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются линейные стационарные системы с одним входом и одним выходом

$$\dot{x} = Ax + bu + Q\xi, \quad y_1 = d^T x, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R$ — управление, $y_1(t) \in R$ — выходная (регулируемая) переменная, $\xi(t) \in R^l$ — вектор внешних неконтролируемых возмущений, A , Q и b , d^T — вещественные матрицы и векторы соответствующих размеров с постоянными элементами, пара (A, b) управляемая, пара (d^T, A) наблюдаемая.

Ставится задача асимптотической стабилизации выходной переменной

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0 \quad (2)$$

в предположениях:

— вектор внешних возмущений содержит постоянные неизвестные функции времени $\dot{\xi} = \vec{0}$;

— управляющее воздействие принимает неотрицательные значения:

$$u(t) \in [0; U], \quad t \geq 0, \quad U = \text{const} > 0.$$

Обратим внимание, что задача регулирования выходной переменной $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = y_{1d} = \text{const}$ сво-

дится к задаче стабилизации ошибки регулирования $e_1(t) = y_1(t) - y_{1d}$, где $y_{1d} = \text{const}$ — заданное значение. Нижеследующие построения применимы для этого случая, если вместо выражения (2) определить цель управления в виде: $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$.

В § 2 приводятся методы решения поставленной задачи применительно к системам первого порядка. В § 3 полученные результаты распространяются на системы общего вида (1). В § 4 приводятся примеры синтеза управления в понижающем инверторе напряжения постоянного тока.

2. СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу стабилизации системы первого порядка

$$\dot{x} = bu + \eta(x, t) \quad (3)$$

с учетом ограничений на управление $0 \leq u(t) \leq U$ и в предположении, что слагаемое $\eta(x, t)$ удовлетворяет ограничениям

$$-N_1 \leq \eta(x, t) \leq N_1, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| \leq \bar{N}, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \leq N_x, \quad t \geq 0,$$

b , U , N_1 , N_2 , \bar{N} , N_x — известные положительные константы. В системе (3) управление u неотрицательно, $u \in [0, \infty)$, тогда как слагаемое $\eta(x, t)$ строго отрицательно ($\eta(x, t) \in [-N_1, -N_2]$) и включает в себя как нелинейность, так и внешнее возмущение.

Введем два вида одностороннего управления — разрывное и непрерывное.

Для разрывного управления

$$u = 0,5M[1 - \text{sign}(s)], \quad (4)$$

где $s = x$, $M = \text{const} > 0$, условие существования скользящего режима на линии переключения $s = 0$ определяется соотношением $s\dot{s} < 0$, $s \neq 0$ [2, 3]. Отсюда следуют неравенства на выбор амплитуды разрывного управления

$$\dot{s}_{s>0} = \eta < 0, \quad \dot{s}_{s<0} = bM + \eta > 0 \Rightarrow M > N_1/b,$$

при выполнении которого обеспечивается стабилизация переменной состояния $x(t) = 0$ за конечное время.

Теперь введем линейное управление с насыщением

$$u = Msat^+(-\bar{s}), \quad \bar{s} = kx + \eta, \quad k, M = \text{const} > 0, \quad (5)$$

где $Msat^+(\bar{s}) = \min(|\bar{s}|, M)0,5[1 + \text{sign}(\bar{s})]$. Из нечетности функции знака $\text{sign}(-\bar{s}) = -\text{sign}(\bar{s})$ сле-



дует, что $M\text{sat}^+(-\bar{s}) = \min(|\bar{s}|, M)0,5[1 - \text{sign}(\bar{s})]$. Для $b = \text{const} > 0$ примем

$$bM\text{sat}^+(\bar{s}) = \min(|\bar{s}|, bM)0,5[1 + \text{sign}(\bar{s})].$$

Покажем, что в замкнутой системе (3), (5) можно обеспечить асимптотическую стабилизацию переменной состояния $x(t)$ при соответствующем выборе параметров регулятора k, M .

Лемма 1. Если в замкнутой системе (3), (5) значения параметров управления $k, M = \text{const}$ удовлетворяют неравенствам

$$k > \frac{\bar{N}}{N_2} + N_x, \quad bM > N_1 + \frac{\bar{N}}{k + N_x},$$

то для произвольного начального условия $x(0) < \infty$ обеспечивается асимптотическая стабилизация переменной состояния: $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

Доказательство. В силу уравнения (3) запишем дифференциальное уравнение относительно вспомогательной переменной $\bar{s} = kx + \eta$:

$$\dot{\bar{s}} = k(\eta + bu) + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}(\eta + bu).$$

Задача синтеза состоит в том, чтобы выбором значений параметров M и k обеспечить попадание и удержание переменной $\bar{s}(t)$ в линейной зоне $\bar{s}(t) \in (-bM, 0)$.

Рассмотрим возможные варианты.

- При $\bar{s}(t) \leq -bM$ имеем $u = bM$ и, следовательно,

$$\dot{\bar{s}} = \left(k + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(\eta + bu) + \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

при этом справедлива оценка: $\dot{\bar{s}} \geq (k - N_x)(-N_1 + bM) - \bar{N}$. Тогда требование $\dot{\bar{s}} > 0$ в этой области приводит к следующему неравенству для выбора амплитуды при $k > N_x, bM > N_1 + \bar{N}/(k - N_x)$, при выполнении которого за конечное время обеспечивается $\bar{s}(t) > -bM$.

- При $\bar{s}(t) \geq 0$ имеем $u = 0$ и, следовательно,

$$\dot{\bar{s}} = \left(k + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\eta + \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

при этом справедлива оценка $\dot{\bar{s}} < -(k + N_x)N_2 + \bar{N}$. Тогда требование $\dot{\bar{s}} < 0$ в этой области приводит к следующему неравенству для выбора коэффициента усиления: $(k + N_x) > \bar{N}/N_2$, при выполнении которого за конечное время обеспечивается $\bar{s}(t) < 0$. Выбор коэффициента усиления из условия $k > \bar{N}/N + N_x$ удовлетворяет обоим рассмотренным вариантам.

Таким образом, при выполнении обоих указанных условий переменная \bar{s} при любых начальных условиях попадает в линейную зону $\bar{s}(t) \in (-bM, 0)$ за конечное время (либо уже находится в линейной зоне) и остается

в ней. В линейной зоне управление имеет вид $bu = -\bar{s} = -kx - \eta$, что обеспечивает устойчивость замкнутой системы: $\dot{x} = -kx$. Лемма 1 доказана. ♦

Обратим внимание, что производная по управлению равна нулю вне линейной зоны $\bar{s} \notin (-bM, 0)$, а в линейной зоне ограничена величиной

$$b\dot{u} = -\dot{\bar{s}} \Rightarrow b|\dot{u}| \leq (k + N_x)(bM - N_2) + \bar{N}$$

и, следовательно, определяется выбором коэффициента усиления $k > 0$.

3. СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА

3.1. Стабилизация при действии постоянных возмущений

Рассмотрим задачу стабилизации выходной переменной системы (1) в сделанных в § 1 предположениях.

Утверждение 1 [8]. Пусть система (1) замкнута стабилизирующей линейной обратной связью $u = f^T x$: $\dot{x} = \bar{A}x + Q\xi$, где матрица $\bar{A} = A + bf^T$ гурвицева. Тогда в пределе (при $t \rightarrow \infty$) имеем: $[\bar{A}x(\infty) + Q\xi = \vec{0}] \Rightarrow x(\infty) = -\bar{A}^{-1}Q\xi$, где здесь и далее под $x(\infty)$ понимается установившееся значение переменной. ♦

Подставляя полученное соотношение в выражение для выходной переменной $y_1(\infty) = d^T x(\infty) = -d^T \bar{A}^{-1}Q\xi$, убеждаемся, что для стабилизации выходной переменной (2) в «узкой» постановке (т. е. без расширения пространства состояния) требуется, чтобы выбор вектора f^T , кроме устойчивости замкнутой системы, дополнительно обеспечивал выполнение равенства [8]:

$$d^T \bar{A}^{-1}Q = d^T(A + bf^T)^{-1}Q = \vec{0}.$$

Пусть в системе (1) возмущения согласованные, т. е. действуют в пространстве управлений $\text{Im}Q \in \text{Im}b$ [8]. Тогда система (1) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(u + q^T \xi), \quad bq^T = Q, \quad \xi \in R^l, \\ \dot{\xi} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Для системы (6) имеет решение задача стабилизации всего вектора состояния. Действительно, с помощью невырожденного линейного преобразования

$$Tx = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in R^{n-1}, \quad x_0 \in R, \quad \det T \neq 0$$

система (6) представима в регулярной форме [5] в виде двух подсистем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{10}x_0, \\ \dot{x}_0 &= a_{01}^T x_1 + a_{00}x_0 + b_0(u + q_0^T \xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где в силу управляемости пары (A, b) пара (A_{11}, A_{10}) также управляема и $b_0 \neq 0$. Полагая в первой подсистеме (7) x_0 виртуальным управлением, введем локальную связь $\bar{x}_0 = x_0 - f_1^T x_1$. После выполнения соответствующих преобразований подобия система (7) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \bar{A}_{11}x_1 + A_{10}\bar{x}_0, \\ \dot{\bar{x}}_0 &= \bar{a}_{01}^T x_1 + \bar{a}_{00}\bar{x}_0 + b_0(u + q_0^T \xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где выбором вектора f_1^T обеспечивается гурвицевость матрицы $\bar{A}_{11} = (A_{11} + A_{12}f_1^T)$, $\bar{a}_{01}^T = a_{01}^T + a_{00}f_1^T - f_1^T \bar{A}_{11}$, $\bar{a}_{00}^T = a_{00} - f_1^T A_{10}$.

Расширим пространство состояний системы (8), дополнив ее интегральным звеном $\dot{z}_0 = \bar{x}_0$. Тогда справедливо

Утверждение 2 (векторный аналог ПИ-регулятора). *Существуют такие константы $f_0, f_{10} \neq 0$, что замкнутая расширенная система (8) с управлением $b_0 u = -\bar{a}_{01}^T x_1 + (f_0 - \bar{a}_{00})\bar{x}_0 + f_{10}z_0$ будет асимптотически устойчивой: $x(\infty) = \vec{0}$.*

Доказательство. В первой подсистеме (8) собственные движения устойчивы, следовательно, задача стабилизации сводится к стабилизации только второй подсистемы (8), которая с учетом расширения пространства состояний примет вид $\dot{z}_0 = \bar{x}_0$, $\dot{\bar{x}}_0 = \bar{a}_{01}^T x_1 + \bar{a}_{00}\bar{x}_0 + b_0(u + q_0^T \xi)$. С введенным выше управлением имеем замкнутую систему $\dot{z}_0 = \bar{x}_0$, $\dot{\bar{x}}_0 = f_0\bar{x}_0 + f_{10}z_0 + b_0q_0^T \xi$, которая с учетом обозначений $f_{10}\bar{z}_0 = f_{10}z_0 + b_0q_0^T \xi$ примет вид $\dot{\bar{z}}_0 = \bar{x}_0$, $\dot{\bar{x}}_0 = f_0\bar{x}_0 + d_{10}\bar{z}_0$. Очевидно, что выбором параметров f_0, f_{10} можно обеспечить асимптотическую сходимость переменных $\bar{x}_0(\infty) = 0$, $\bar{z}_0(\infty) = 0$ и, следовательно, $x_1(\infty) = \vec{0}$, при этом $z_0(\infty) = -f_{10}^{-1} b_0 q_0^T \xi$. Утверждение 2 доказано. ♦

Следствие из утверждения 2. Для систем с согласованными возмущениями (7) ПИ-регулятор обеспечивает решение задачи стабилизации произвольной выходной переменной $y_1 = d^T x$: $x(\infty) = 0 \Rightarrow y(\infty) = 0$. ♦

Следующий пример демонстрирует тот факт, что с помощью метода расширения пространства состояний можно обеспечить стабилизацию выходной переменной системы с несогласованными возмущениями [8].

Пример 1. Рассмотрим задачу стабилизации выходной переменной $y_1 = x_1$ системы второго порядка при действии постоянных, несогласованных возмущений: $\dot{x}_1 = x_2 + \xi_1$, $\dot{x}_2 = u + \xi_2$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = 0$.

Расширим пространство состояний $\dot{z}_1 = x_1$ и для расширенной системы сформируем линейную стабилизирующую обратную связь $u = -d_1 z_1 - k_1 x_1 - k_2 x_2$, где $d_1, k_1, k_2 = \text{const} > 0$ соответствуют коэффициентам гурвицева полинома. Расширенная замкнутая система $\dot{z}_1 = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2 + \xi_1$, $\dot{x}_2 = -d_1 z_1 - k_1 x_1 - k_2 x_2 + \xi_2$, после невырожденной замены переменных $\bar{z}_1 = z_1 + (k_2 \xi_1 + \xi_2)/d_1$, $\bar{x}_2 = x_2 + \xi_1$ относительно переменных $\bar{z}_1, x_1, \bar{x}_2$ примет канонический вид с устойчивой матрицей $\dot{\bar{z}}_1 = x_1$, $\dot{x}_1 = \bar{x}_2$, $\dot{\bar{x}}_2 = -d_1 \bar{z}_1 - k_1 x_1 - k_2 \bar{x}_2$, что обеспечивает асимптотическую сходимость в ноль указанных переменных, в частности, выходной переменной исходной системы $x_1(\infty) = 0$. В установившемся режиме выполняются соотношения $z_1(\infty) = -(k_2 \xi_1 + \xi_2)/d_1$, $x_2(\infty) = -\xi_1$. ♦

Одно из обобщений данного примера сводится к следующему утверждению. Пусть в системе (1) относительный порядок $\nu = \min\{i \in \overline{1, n} : d^T A^{i-1} b \neq 0\}$ меньше, чем размерность системы: $0 < \nu < n$. Тогда с помощью невырожденной линейной замены переменных

$$Tx = \begin{pmatrix} y \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad y^T = (y_1, \dots, y_\nu) \in R^\nu, \quad x_0 \in R^v, \quad \det T \neq 0$$

система (1) может быть представлена в виде двух подсистем [9]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1} + \bar{\xi}_i, \quad i = \overline{1, \nu-1}, \\ \dot{y}_\nu &= \alpha_{\nu 1}^T y + a_{\nu 0}^T x_0 + b_\nu u + \bar{\xi}_\nu; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{x}_0 = A_{01}y + A_{00}x_0 + Q_0 \xi, \quad \bar{\xi}_i = \dot{\xi}_i = 0, \quad (10)$$

где (9) — подсистема внешней динамики (форма «вход — выход» с учетом возмущений), $b_\nu = a^T A^{\nu-1} b \neq 0$, а (10) — подсистема внутренней динамики.

Расширим пространство состояния подсистемы (9), дополнив ее интегральным звеном $\dot{z}_1 = y_1$. Тогда справедливо

Утверждение 3. *Существуют такие константы $f_\nu^T, f_{\nu 1} \neq 0$, что в замкнутой расширенной подсистеме*



(9) с линейной обратной связью $b_v u = (f_v^T - a_{v1}^T) y - a_{v0}^T x_0 + f_{v1} z_1$ обеспечивается асимптотическая стабилизация выходной переменной: $y_1(\infty) = 0$.

Доказательство. С введенным выше управлением имеем замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_i = y_{i+1} + \bar{\xi}_i, \quad i = \overline{1, v-1}, \\ \dot{y}_v &= f_v^T y + f_{v1} z_1 + \bar{\xi}_v, \end{aligned}$$

которую представим в каноническом виде относительно смешанных переменных $\tilde{y}_1 = y_1, \tilde{y}_{i+1} = y_{i+1} + \bar{\xi}_1, i = \overline{1, v-1}$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \tilde{y}_1, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2, \quad \dot{\tilde{y}}_i = \tilde{y}_{i+1}, \quad i = \overline{1, v-1}, \\ \dot{\tilde{y}}_v &= f_v^T (\tilde{y} - \bar{\xi}) + f_{v1} z_1 + \bar{\xi}_v, \quad \bar{\xi}^T = (0, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{v-1}). \end{aligned}$$

С учетом обозначений $f_{v1} z_1 = f_{v1} z_1 - f_v^T \bar{\xi} - \bar{\xi}_v$ получим:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \tilde{y}_1, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = \tilde{y}_2, \quad \dot{\tilde{y}}_i = \tilde{y}_{i+1}, \quad i = \overline{1, v-1}, \\ \dot{\tilde{y}}_v &= f_v^T \tilde{y} + f_{v1} z_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что выбором параметров f_v^T, f_{v1} можно обеспечить асимптотическую сходимость в ноль переменных данной системы и, следовательно, обеспечить $y_1(\infty) = 0$.

При этом в установившемся режиме $f_{v1} z_1(\infty) = f_v^T \bar{\xi} + \bar{\xi}_v$. Утверждение 3 доказано. ♦

Предложенный алгоритм стабилизации выходных переменных будет работоспособным, если в подсистеме внутренней динамики (10) матрица A_{00} окажется гурвицевой. Методы компенсации неустойчивой нулевой динамики при постоянных возмущениях хорошо изучены, например, в работе [9].

3.2. Стабилизация с односторонними управлениями

Законы модального управления, представленные в п. 3.1, в общем случае не приемлемы в системах с односторонними управлениями. Выделим класс систем, приводимых к виду (9), (10) с устойчивыми собственными движениями в подсистеме внутренней динамики, в которых задача стабилизации выходной переменной y_1 имеет решение при односторонних ограничениях на управление. Идея представленного далее результата заключается в использовании идеологии блочного подхода [5], позволяющей свести задачу стабилизации системы

высокого порядка к задаче стабилизации системы первого порядка вида (3).

Для удобства дальнейшего изложения представим подсистему (11) более детально:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_{i+1} + \bar{\xi}_i, \quad i = \overline{1, v-2}, \quad \dot{y}_{v-1} = y_v + \bar{\xi}_{v-1}, \\ \dot{y}_v &= a_{v-1}^T \bar{y} + a_{vv} y_v + a_{v0}^T x_0 + b_v u + \bar{\xi}_v, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{v-1})^T$.

Расширим пространство состояний $\dot{z}_1 = y_1$ и, рассматривая переменную y_v в $(v-1)$ -м уравнении системы (11) в качестве фиктивного управления и введя стабилизирующую локальную связь $\bar{y}_v = y_v + f_{v-1}^T \bar{y} + f_{v1} z_1$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_i = y_{i+1} + \bar{\xi}_i, \quad i = \overline{1, v-2}, \\ \dot{y}_{v-1} &= -f_{v-1}^T \bar{y} - f_{v1} z_1 + \bar{y}_v + \bar{\xi}_{v-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\bar{y}}_v = b_v u + \eta_v(\bar{y}, z_1, y_v, t), \quad (13)$$

где $\eta_v = (a_{v-1}^T - a_{vv} f_{v-1}^T) \bar{y} + a_{vv} \bar{y}_v - a_{vv} f_{v1} z_1 + a_{v0}^T x_0 + \bar{\xi}_v + f_{v-1}^T \dot{\bar{y}} + f_{v1} y_1$.

Устойчивые собственные движения в системе (12) относительно переменных z_1, \bar{y} обеспечиваются выбором параметров f_{v-1}^T, f_{v1} . Если будет решена задача стабилизации переменной \bar{y}_v в системе (13), то согласно утверждению 3 будет обеспечена задача и стабилизации выходной переменной y_1 в системе (12).

Ограничим класс систем, в которых задача стабилизации выходной переменной y_1 имеет решение при односторонних ограничениях на управление предположением о том, что для системы (13) выполняются условия леммы 1. Тогда задача стабилизации системы (13) решается выбором управления в виде, аналогичном (5), а именно:

$$u = M \text{sat}^+(-\bar{s}_v), \quad \bar{s}_v = k \bar{y}_v + \eta_v, \quad k, M = \text{const} > 0.$$

Отметим, что для решения задачи стабилизации выходной переменной достаточно для системы (13) решить задачу поддержания координаты на любом постоянном уровне $\bar{y}_v \rightarrow \text{const}$, что оказывается проще, чем решение задачи стабилизации.

Замечание. Для разрывного одностороннего управления (4) скорость сходимости к плоскости $\bar{y} = 0$ при различных знаках различна по уровню,

и в реальном скользящем режиме возникает смещение. В установившемся режиме указанное смещение постоянно в силу утверждения 1. В § 5 будет показано, что введение астатизма позволяет компенсировать это смещение.

4. ПРИМЕНЕНИЕ К УПРАВЛЕНИЮ ПОНИЖАЮЩИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ НАПРЯЖЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассмотрим задачу регулирования выходного напряжения понижающего преобразователя постоянного тока (рис. 1), описываемого уравнениями вида [4]:

$$L\dot{x}_1 = -x_2 - rx_1 + uE, \quad C\dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{R}x_2, \quad (14)$$

где $x_1 = I$ — входной ток, $x_2 = V = \text{const}$ — выходное напряжение, C — емкость конденсатора, L — индуктивность дросселя, R — сопротивление нагрузки, r — активное сопротивление катушки, E — входное напряжение, u — управление.

Особенность модели (14) состоит в том, что управление имеет ключевую природу $u = \{0, 1\}$, т. е. может принимать два значения: 0, когда ключ разомкнут, и 1, когда ключ замкнут. В данном параграфе представлены два подхода к синтезу обратной связи. В п. 4.1 управление синтезируется в виде разрывной функции (4) и непосредственно применяется в алгоритме переключения ключа. Приводятся два алгоритма синтеза стабилизирующего разрывного управления. В одном из них синтезируется непосредственно разрывное управление по измерениям входного тока и нагрузки, в другом непосредственным измерениям доступны значения входного тока и входного напряжения. В п. 4.2 синтезируется непрерывное управление вида (5), которое применяется в стандартных методах синтеза широтно-импульсных модуляторов.

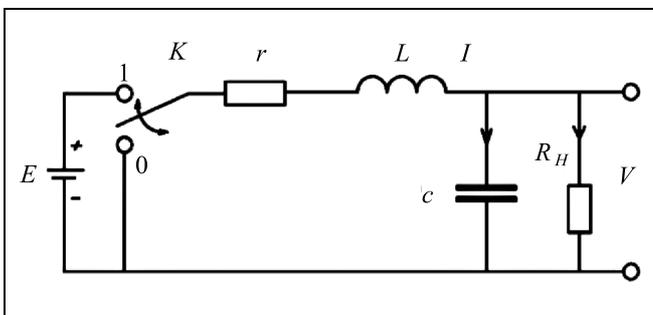


Рис. 1. Схема понижающего преобразователя напряжения

4.1. Управление на скользящих режимах

Процедура синтеза 1. В предположении, что измеряются входной ток x_1 и нагрузка R , ставится задача обеспечения заданного значения выходного напряжения $x_2 \rightarrow V_d = \text{const}$.

Представим систему (14) относительно переменных $s = x_1 - V_d/R$, $e_2 = x_2 - V_d$:

$$\begin{aligned} L\dot{s} &= -(e_2 + V_d) - r\left(s + \frac{1}{R}V_d\right) + uE, \\ C\dot{e}_2 &= -\frac{1}{R}e_2 + s. \end{aligned} \quad (15)$$

Выберем одностороннее управление в форме разрывной обратной связи

$$u = 0,5(1 - \text{sign}(s)), \quad (16)$$

где переменная $s = x_1 - V_d/R$ определяет плоскость скольжения. Условия возникновения скользящего режима на плоскости $s = 0$ имеют вид $s\dot{s} < 0$ при $s \neq 0$, откуда следует

$$L\dot{s}_{s>0} = -x_2 - r\left(s + \frac{1}{R}V_d\right) < 0,$$

$$\begin{aligned} L\dot{s}_{s<0} &= -x_2 - r\left(s + \frac{1}{R}V_d\right) + E > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < x_2 < E - \frac{r}{R}V_d. \end{aligned}$$

Уравнение движения в скользящем режиме получим из системы (15) при $s = 0$:

$$C\dot{e}_2 = -\frac{1}{R}e_2 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow x_2 \rightarrow V_d.$$

При малых положительных $s \approx 0$ выполняется соотношение:

$$L\dot{s}_{s>0} = -x_2 - r\left(s + \frac{1}{R}V_d\right) \approx -x_2 - \frac{r}{R}V_d < 0,$$

при малых по модулю отрицательных значениях $s < 0$ имеем

$$L\dot{s}_{s<0} = -x_2 - r\left(s + \frac{1}{R}V_d\right) + E \approx -x_2 - \frac{r}{R}V_d + E > 0.$$

Поскольку скорость с разных сторон от плоскости скольжения зависит от входного напряжения, то в общем случае происходит смещение плоскости на интервале переключения, и второе из уравнений (15) можно переписать в виде $C\dot{e}_2 = -e_2/R + s + s_m$, где $s_m = \text{const}$ — среднее значение отклонения от плоскости реального скольжения в установившемся режиме. Полагая в установившемся режиме



смещение плоскости скольжения от нуля постоянным $\dot{s}_m = 0$, согласно утверждению 2 следует выбрать вместо плоскости скольжения $s = 0$ (16) скорректированную плоскость вида

$$s_0 = s(t) + \alpha \int_0^t e_2(\tau) d\tau, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ e_2 = x_2 - V_d \quad (17)$$

Очевидно, что для компенсации смещения s_m требуются измерения выходного напряжения.

В предположении, что нагрузка доступна для измерения, организация скользящего движения по плоскости (16) обеспечивает робастное регулирование выходного напряжения, так как в этом случае для синтеза разрывного управления (16) не требуется знание параметров модели управления (14). В то же время, из описания первой подсистемы (15) следует, что для ее стабилизации непрерывным управлением, кроме измерения x_1 и R , требуется дополнительная информация о переменных x_2 и E . Существенный недостаток данной процедуры синтеза состоит в требовании измерения нагрузки преобразователя.

Рассмотрим альтернативную схему синтеза, которая основана на получении оценки нагрузки с помощью наблюдателя состояния и возмущений.

Процедура синтеза 2. В предположении, что измеряются ток x_1 и напряжение E , нагрузка неизвестна и постоянна $R = \text{const}$, для оценивания нагрузки представим систему уравнений (14) в виде

$$L\dot{x}_1 = -x_2 - rx_1 + uE, \quad C\dot{x}_2 = x_1 - x_2x_3, \quad \dot{x}_3 = 0 \\ (x_3 = 1/R) \quad (18)$$

и на ее основе построим наблюдатель состояния на скользящих режимах

$$L\dot{\bar{z}}_1 = -\bar{z}_2 - r\bar{z}_1 + uE + v_1, \\ C\dot{\bar{z}}_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\bar{z}_3 + v_2, \quad \dot{\bar{z}}_3 = v_3, \quad (19)$$

где \bar{z}_i — переменные состояния, $v_i, i = 1, 2, 3$ — разрывные корректирующие воздействия наблюдателя. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации ошибок наблюдения $\varepsilon_i = x_i - \bar{z}_i, i = 1, 2, 3$, для которых с учетом выражений (18) и (19) имеем систему дифференциальных уравнений

$$L\dot{\varepsilon}_1 = -\varepsilon_2 - r\varepsilon_1 - v_1, \\ C\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \bar{z}_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\bar{z}_3 - v_2, \\ \dot{\varepsilon}_3 = -v_3. \quad (20)$$

Кратко приведем типовую схему каскадного синтеза разрывных корректирующих воздействий [10—12] наблюдателя (19). При $v_1 = L_1 \text{sign}(\varepsilon_1)$ и выполнении достаточного условия $\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 < 0 \Rightarrow L_1 > |\varepsilon_2|$ в виртуальном пространстве ошибок наблюдения за конечное время $t > t_1 \geq 0$ возникнет скользящий режим по плоскости $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow \bar{z}_1 = x_1$, а эквивалентное значение корректирующего воздействия, получаемое с выхода фильтра с малой постоянной времени $\mu_1 \dot{t}_1 = -\tau_1 + v_1$, даст оценку фиктивного выхода для второго из уравнений системы (20) $v_{1eq} = \tau_1 \approx -\varepsilon_2$. При выборе $v_2 = L_2 \text{sign}(-\tau_1)$ с амплитудой $\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 < 0 \Rightarrow L_2 > |-\varepsilon_2\varepsilon_3 - \bar{z}_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\bar{z}_3|$ за теоретически конечное время $t > t_2 > t_1$ возникнет скользящий режим по плоскости $S_2 = \{S_1 \cap \varepsilon_2 = 0\} \Rightarrow \bar{z}_2 = x_2$, а эквивалентное значение корректирующего воздействия, получаемое с выхода фильтра $\mu_2 \dot{t}_2 = -\tau_2 + v_2$, даст оценку фиктивного выхода для третьего из уравнений системы (20) $v_{2eq} = \tau_2 = -\bar{z}_2\varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = -\tau_2/\bar{z}_2, \bar{z}_2(t) \neq 0$. При выборе $v_3 = L_3 \text{sign}(-\tau_2/\bar{z}_2), L_3 > 0$ за теоретически конечное время $t > t_3 > t_2$ возникнет скользящий режим по плоскости $S_3 = \{S_2 \cap \varepsilon_3 = 0\} \Rightarrow \bar{z}_3 = x_3 = 1/R$, что решает задачу оценивания неизвестной постоянной нагрузки.

Полученные оценки используются для синтеза динамической обратной связи (16)

$$u = 0,5(1 - \text{sign}(\tilde{s})), \quad \tilde{s} = \bar{z}_1 - \bar{z}_3 V_d \quad (21)$$

Заметим, что в законе управления (21) можно воспользоваться и оценками, получаемые с наблюдателя (28) — см. далее.

Недостаток наблюдателей состояния на скользящих режимах заключается в необходимости расширения динамического порядка системы путем введения в контур обратной связи фильтров, создающих эффект неучтенных динамических неидеальностей, что приводит к неудовлетворительному качеству (негладкости) оцениваемых сигналов [1]. В п. 4.2 будет представлен альтернативный метод синтеза наблюдателя состояния с помощью непрерывных корректирующих воздействий.

Отметим, что благодаря оценке выходного напряжения удастся обеспечить произвольные темпы сходимости выходного напряжения к заданному значению. Действительно, замена переменных

$s_1 = x_1 + (m - 1/R)\bar{z}_2 - mV_d$, $m = \text{const} > 0$ при $\bar{z}_2 = x_2$ приводит систему (14) к виду

$$C\dot{x}_2 = -m(x_2 - V_d) + s_1,$$

$$\dot{s}_1 = g_1x_2 + g_2s_1 + uE/L + g_3V_d,$$

$$g_1 = -\frac{1}{L} + \left(m - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{r}{L} - \frac{m}{C}\right),$$

$$g_2 = -\frac{r}{L} + \frac{1}{C}\left(m - \frac{1}{R}\right), \quad g_3 = -\frac{r}{L}m + \frac{m}{C}\left(m - \frac{1}{R}\right).$$

Тогда синтез разрывного управления $u = 0,5(1 - \text{sign}(s_1))$ и организация скользящего режима по плоскости $s_1 = 0$ обеспечат понижение динамического порядка указанной системы: $\dot{x}_2 = -m(x_2 - V_d)$, где выбор коэффициента $m > 0$ определяет темпы сходимости выходного напряжения к заданному значению.

Далее приводится процедура синтеза управления выходным напряжением понижающего преобразователя с помощью широтно-импульсной модуляции.

4.2. Управление на основе широтно-импульсной модуляции

Рассмотрим задачу поддержания выходного напряжения преобразователя (см. рис. 1) на заданном уровне $x_2 \rightarrow V_d$ с помощью непрерывного управления, подаваемого на вход широтно-импульсного модулятора.

Перепишем уравнения (15) так, чтобы первое уравнение имело вид, аналогичный уравнению (3):

$$L\dot{s} = -rs + uE + \eta_1, \quad C\dot{e}_2 = -\frac{1}{R}e_2 + s, \quad (22)$$

где $\eta_1 = -(e_2 + V_d) - rV_d/R < 0$, $s = x_1 - V_d/R$.

Для конкретной схемы инвертора напряжения в предположении $R \geq R_0 = \text{const} > 0$ можно получить следующие оценки

$$-N_{11} \leq \eta_1 \leq -N_{12}, \quad N_{11} = V_d\left(1 + \frac{1}{R_0}\right), \quad N_{12} = V_d$$

$$\text{и } |\dot{\eta}_1| \leq \bar{N}_1.$$

Выберем одностороннее непрерывное управление

$$Eu = M_1 \text{sat}^+(-\bar{s}), \quad \bar{s} = k_1s + \eta_1, \quad (23)$$

$$k_1, M_1 = \text{const} > 0,$$

где параметры $k_1, M_1 = \text{const} > 0$ выбираются согласно лемме 1 с учетом $N_x = 0$:

$$k_1 > \left(\frac{\bar{N}_1}{N_{12}}\right), \quad EM_1 > N_{11} + \frac{\bar{N}_1}{k_1}.$$

Тогда за конечное время выполняется соотношение $Eu = -k_1s - \eta_1$, и замкнутая система (22), (23) принимает вид

$$L\dot{s} = -(r + k_1)s, \quad C\dot{x}_2 = -\frac{1}{R}x_2 + \left(s + \frac{V_d}{R}\right),$$

т. е. в асимптотике $s(\infty) \rightarrow 0$, $x_2(\infty) \rightarrow V_d$, что и решает поставленную задачу. Как видно, для реализации управления (23) требуется информация о переменных $x_1(t)$, $e_2(t)$ и нагрузке R .

Предлагаемый далее наблюдатель состояния и нагрузки отличается от предложенного в п. 4.1 тем, что корректирующие воздействия выбираются непрерывными, а порядок наблюдателя равен порядку соответствующей модели объекта управления. Кроме того, при выборе амплитуд корректирующих воздействий применяются менее консервативные оценки, не требующие учета переходных процессов в наблюдателе состояния.

В предположении, что в системе (14) для измерения доступны переменные $x_1(t)$, $E(t)$, построим наблюдатель вектора состояния и нагрузки вида

$$L\dot{z}_1 = -rz_1 + uE + v_1, \quad C\dot{z}_2 = z_1 + v_2, \quad (24)$$

$$\dot{z}_3 = v_3$$

и для ошибок наблюдения $e_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, 3$ в силу выражений (18) и (24) получим систему:

$$L\dot{e}_1 = -x_2 - re_1 - v_1, \quad C\dot{e}_2 = e_1 - x_2x_3 - v_2, \quad (25)$$

$$\dot{e}_3 = -v_3.$$

Приведем пошаговую процедуру синтеза наблюдателя (24). Ниже $L_i, l_i, \Delta_i, \delta_i$, $i = \overline{1, 3}$ — положительные константы.

Шаг 1. Выберем $v_1 = L_1 \text{sat}(l_1 e_1)$. При $L_1 > E$ переменная e_1 за конечное время попадет в линейную зону и первое из уравнений (25) примет вид $L\dot{e}_1 = -x_2 - (r + l_1)e_1$, откуда следует соотношение $|e_1| \leq E/(r + l_1) = \Delta_1$, т. е. выбором коэффициента l_1 можно обеспечить наперед заданную точность получаемой оценки e_1 . Результат первого шага: $v_1 = l_1 e_1 = -x_2 + \delta_1$, где $\delta_1(l_1 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ — бесконечно малая величина.



Шаг 2. Выберем $v_2 = -L_3 \text{sat}[l_2(v_1 + z_2)]$. При $L_2 > E/R_0 + \Delta_1$ переменная ε_2 за конечное время попадет в линейную зону, и второе из уравнений (25) примет вид $C\dot{\varepsilon}_2 = -x_2x_3 - l_2(\varepsilon_2 + \delta_1)$, откуда следует

$$|\varepsilon_2| \leq \frac{1}{l_2} \left(\frac{E}{R_0} + \Delta_1 \right) + \delta_1 = \Delta_2,$$

т. е. выбором коэффициента l_2 (и значения δ_1) можно обеспечить наперед заданную точность получаемой оценки ε_2 . Результат второго шага: $v_2 = l_2(\varepsilon_2 + \delta_1) = -x_2x_3 + \delta_2$, где $\delta_2(l_2 \rightarrow \infty) = 0$ есть бесконечно малая величина.

Шаг 3. Выберем $v_3 = -L_3 \text{sat}[k_3(v_2 + z_2z_3)]$. Третье из уравнений (25) в линейной зоне принимает вид $\dot{\varepsilon}_3 = -l_3(x_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2z_3 + \delta_2)$, откуда следует оценка

$$|\varepsilon_3| \leq \Delta_3 = \frac{1}{x_2} |\varepsilon_2z_3 + \delta_2| \leq \frac{1}{x_2} \left(\frac{\Delta_2}{R_0} + \delta_2 \right) \rightarrow \frac{1}{V_d} \left(\frac{\Delta_2}{R_0} + \delta_2 \right),$$

$$\Delta_3 \rightarrow 0 \text{ при } \Delta_2, \delta_1 \rightarrow 0.$$

Таким образом, с помощью наблюдателя состояний (24), как и в случае наблюдателя (19), получены оценки переменных: $z_1 \rightarrow x_1$, $z_2 \rightarrow x_2$, $z_3 \rightarrow x_3 = 1/R$. С помощью этих оценок формируется непрерывное управление вида (23)

$$Eu = M_1 \text{sat}^+(-\bar{s}), \quad \bar{s} = k_1s + \eta_1, \quad k_1, M_1 = \text{const} > 0,$$

где $s = z_1 - z_3V_d$, $\eta_1 = -z_2 - z_3rV_d$. (26)

В заключение параграфа отметим особенности применения непосредственно разрывного управления и непрерывного управления с широтно-импульсной модуляцией. Если нагрузка известна, то для синтеза разрывного управления (16) не требуется дополнительной информации, кроме измерения входного тока, что наделяет замкнутую систему робастными свойствами (за исключением возникающего смещения, для компенсации которого требуется информация о выходном напряжении (17)). В то же время, применение непрерывного управления (23) заведомо предполагает использование информации о выходном напряжении. Если нагрузка неизвестна, то для синтеза и разрывного (16), и непрерывного (23) управления требуется получить оценку неизвестной нагрузки с помощью наблюдателей (19) или (24), что предполагает получение оценки выходного напряжения. В этом контексте тот факт, что в разрывном управлении не используется оценка выходного напряжения, а в непрерывном используется, становится не принципиальным.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании выбраны такие параметры модели (14): $L = 6,914 \times 10^{-3}$ Гн, $r = 0,2$ Ом, $C = 14,14 \times 10^{-6}$ Ф, $E = 20$ В, $V = 12$ В.

В предположении, что для измерения доступен входной ток и параметры модели объекта управления известны, вводится наблюдатель состояния вида (24) с параметрами: $L_1 = 20$, $L_2 = 2$, $L_3 = 1$; $l_1 = 10\,000$, $l_2 = 10$, $l_3 = 500$.

Нагрузка изменяется по такому сценарию: $R = 30$ Ом при $t \in [0; 0,05) \cup [0,1; 0,12)$ и $R = 20$ Ом при $t \in [0,05; 0,1)$.

На рис. 2 представлены результаты моделирования замкнутой системы (14) с разрывным управлением (16) с введением астатизма (17), где выбрано $\alpha = 10$. Как видно из графиков, наблюдается небольшое перерегулирование в начале переходного процесса по выходному напряжению, а затем оно полностью компенсируется. Дополнительные исследования показывают, что без введения астатизма при частоте переключений управления, равной 20 кГц, смещение выходного напряжения составляет 0,1 В, а при частоте 200 кГц уменьшается на два порядка до 0,01 В.

На рис. 3 показаны графики изменения нагрузки $R(t)$ и ошибок наблюдения (25) применительно к замкнутой системе (18) с управлением (21).

На рис. 4 показаны результаты моделирования замкнутой системы (18) с разрывным управлением (21), сформированным по оценкам наблюдателя (24). Погрешность обработки заданного значения выходного напряжения составляет $|e_2| \leq 10^{-4}$ В.

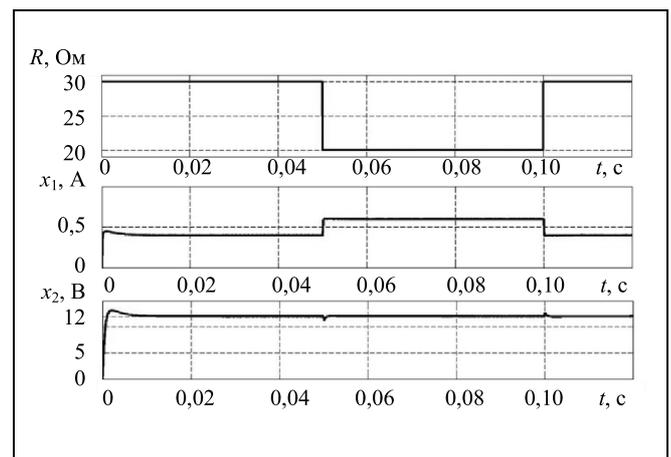


Рис. 2. Графики $R(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в замкнутой системе (14), (16), (17)

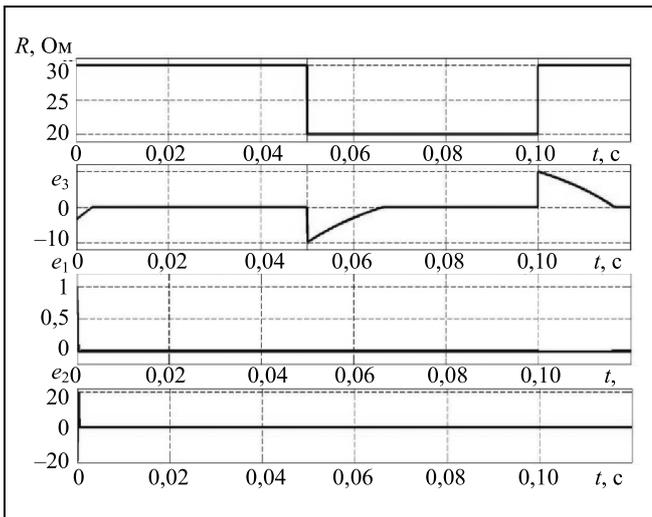


Рис. 3. Графики $R(t)$, $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ в замкнутой системе (16), (18), (24)

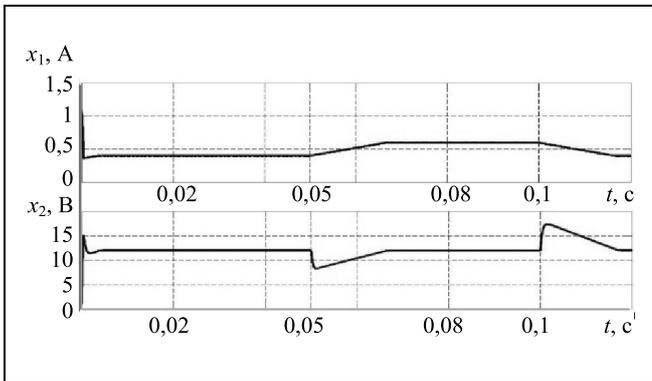


Рис. 4. Графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в замкнутой системе (18), (21), (24)

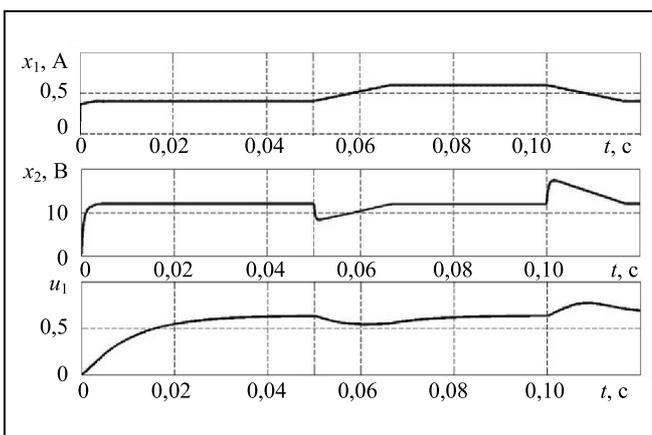


Рис. 5. Графики $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $u_1(t)$ в замкнутой системе (18), (24), (26)

На рис. 5 показаны результаты моделирования замкнутой системы с управлением (26) при $k_1 = 2000$, сформированным по оценкам с наблюдателя (24), с периодом широтно-импульсной модуляции, равным $T = 10^{-5}$ с. Погрешность отработки выходного напряжения составляет $|e_2| \leq 4 \times 10^{-3}$ В. Переходные процессы в наблюдателе (24) с управлением (26) близки к изображенным на рис. 4.

Как и следовало ожидать, характер поведения замкнутых систем во всех алгоритмах мало зависит от активного сопротивления катушки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны алгоритмы управления выходной переменной в многомерных линейных системах при воздействии внешних постоянных возмущений и/или производных задания в предположении, что управления односторонние (неотрицательные), ограниченные по амплитуде функции. Разрывные управления благодаря созданию скользящих режимов обеспечивают инвариантность по отношению к внешним неконтролируемым возмущениям и робастность замкнутых систем. При дополнительных требованиях на ограниченность и скорость роста управления введен односторонний (неотрицательный) аналог линейной функции с насыщением. В этом случае для обеспечения инвариантных свойств замкнутой системы применяется стандартный ПИ-регулятор.

В качестве приложения рассмотрены задачи управления импульсными понижающими преобразователями напряжения постоянного тока. Предложенные алгоритмы управления, предусматривающие измерение только входного тока, не робастны к изменению параметров объекта управления. Повидимому, построение робастных алгоритмов возможно только при измерении выходного напряжения. Эта задача требует дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A.* Sliding mode control and observation. — Boston: Birkhauser, 2012. — 356 p. — URL: <https://www.springer.com/gp/book/9780817648923>
2. *Utkin, V.I., Guldner, J., Shi, J.* Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems. — New York: CRC Press, 2009.
3. *Sabanovic, A., Sabanovic, N., Ohnishi, K.* Sliding Mode in Power Converters and Motion Control Systems // Int. J. Control. — 1993. — Vol. 57, no. 5. — P. 1237–1259.
4. *Shtessel, Y.B., Zinober, A.S.I., and Shkolnikov, I.A.* Sliding Mode Control of Boost and Buck-boost Power Converters Using Method of Stable System Center // Automatica. — 2003. — Vol. 39. — P. 1061–1067.



5. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 12. — С. 26—53. [Krasnova, S.A., Utkin, V.A., Utkin, A.V. Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 1. — P. 2120—2140.]
6. Kapat, S. Improved Time Optimal Control of a Buck Converter Based on Capacitor Current // IEEE Trans. on Power Electron. — 2012. — Vol. 27, no. 3. — P. 1444—1454.
7. Stefanutti, W., Mattavelli, P., Saggini, S., and Ghioni, M. Auto-tuning of Digitally Controlled DC-DC Converters Based on Relay Feedback // IEEE Trans. on Power Electronics. — 2007. — Vol. 22. — P. 199—207.
8. Wonham, W.F. Linear Multivariate Control: A Geometric approach. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1985.
9. Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 9. — С. 62—81. [Utkin, V.A., Utkin, A.V. Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 9. — P. 1577—1592.]
10. Уткин В.А. Метод разделения движений в задачах наблюдения // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 3. — С. 27—37. [Utkin, V.A. A Method for the Separation of Motions in Observation Problems // Automation and Remote Control. — 1990. — Vol. 51, no. 3. — P. 300—308.]
11. Comanescu, M. Speed and Rotor Position Estimation of the PMSM by SM Observers with Compound Manifolds and Linear Feedback // 9th International Conference on Compatibility and Power Electronics (CPE), 2015.
12. Yang, Z., Zhang, D., Sun, X., and Ye, X. Adaptive Exponential Sliding Mode Control for a Bearingless Induction Motor Based on a Disturbance Observer // IEEE Access. — 2018. — Vol. 6. — P. 35425—35434.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Поступила в редакцию 18.07.2019, после доработки 13.02.2020.
Принята к публикации 4.03.2020.

Уткин Антон Викторович — д-р техн. наук,
✉ utkin-av@rambler.ru,

Уткин Виктор Анатольевич — д-р техн. наук,
✉ vicutkin@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

THE SYNTHESIS OF STABILIZATION SYSTEMS UNDER ONE-SIDED RESTRICTIONS ON CONTROL ACTIONS

A.V. Utkin, V.A. Utkin

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
✉ utkin-av@rambler.ru, ✉ vicutkin@ipu.ru

Abstract. In practical applications of automatic control theory, situations are often encountered where control actions are limited to a certain range of values, in particular, they can only take non-negative values. In this case, such popular synthesis methods as modal and optimal control are not applicable. In this paper, the methods are proposed for stabilizing output (controlled) variables in linear stationary SISO systems under non-negative (unipolar) control constraints. The main idea is to implement control actions in the form of linear functions with saturation, constant values of which coincide with the restrictions on the controls. As an illustration of the developed algorithms, a pulsed DC/DC voltage converter is considered, in which the control has a switching nature with the «on — off» states. The simulation results in Matlab Simulink are presented.

Keywords: stabilization problem, one-sided control restrictions, invariance, DC/DC voltage converter.

Funding. The work was partially supported by the Fundamental Research Program in priority areas determined by the Presidium of the Russian Academy of Sciences (no. 7 «New Developments in Promising Areas of Energy, Mechanics, and Robotics»).

ПОСТРОЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ МЕХАНИЗМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМ ПОВЕДЕНИЕМ¹

М.В. Губко

Аннотация. Разработаны математическая модель и нотация описания комплексных механизмов управления организационным поведением на основе комбинирования относительно простых базовых механизмов управления (распределения ресурса, стимулирования, контроля и т. п.) в ациклический граф многошаговой игры, описывающей рассматриваемую организационную систему. Новизна нотации определяется тем, что, в отличие от стохастических игр на графах, в каждом состоянии задается не игра в нормальной форме, а иерархическая игра с неполной, в общем случае, информацией. Предложен метод исследования свойств комплексных механизмов управления организационным поведением с использованием аналогичной динамическому программированию процедуры обратной индукции. Метод позволяет в максимальной степени воспользоваться наработками теории управления организационными системами в области построения изолированных механизмов управления для типовых ситуаций взаимодействия участников организационных систем и применять их как «строительные блоки» для построения комплексных механизмов, позволяя при этом находить наилучшие параметры комплексного механизма управления, сохранять хорошие свойства базовых механизмов управления (в частности, неманипулируемость) при их объединении в комплексный механизм. Применимость метода показана на простых примерах построения комплексных механизмов планирования, стимулирования и контроля, намечены перспективы развития теории.

Ключевые слова: базовый механизм управления организационным поведением, многошаговая стохастическая игра на графе, обратная индукция, сильносвязанные механизмы.

ВВЕДЕНИЕ

Научный подход к познанию действительности основан на анализе — разложении окружающего мира на составляющие части, более простые для исследования, и, насколько это возможно, изолированное изучение каждой из частей для выявления закономерностей ее функционирования и прогноза или поиска наилучшего способа устройства объекта исследования [1]. Реальная жизнь, однако, всегда является результатом сложного взаимодействия большого количества факторов и ситуаций, поэтому для применимости теоретических результатов на практике анализ всегда дополняется обратным процессом — синтезом — осмысленным

соединением различных элементов, сторон предмета в единое целое.

Этот подход показал свою эффективность во многих науках, и теория организационного управления, предметом которой являются процессы управления в организациях — не исключение. В соответствии с подходом [2, 3], в процессе декомпозиции задачи организационного управления выделяются наиболее часто встречающиеся, типовые, ситуации взаимодействия участников организационной системы. Для этих ситуаций разрабатываются математические модели, которые исследуются в целях объяснения и предсказания развития ситуации в динамике и поиска оптимальных механизмов управления — наилучших с той или иной точки зрения правил взаимодействия участников системы [3, 4]. Хорошо исследованные механизмы управления для типовых ситуаций называются *базовыми*.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-19-10609).



К настоящему времени накоплены богатые результаты теоретического и экспериментального исследования базовых механизмов управления [2, 3]. Во многих типовых ситуациях для базовых механизмов управления доказана их оптимальность и другие положительные свойства (например, неманипулируемость [5, 6]). Однако обратная задача *комплексирования* механизмов управления пока далека от удовлетворительного решения, что служит одним из важных факторов, ограничивающих внедрение в практику менеджмента результатов теории управления в организационных системах [2, 3, 7]. Важные проблемы [8] комплексирования механизмов заключаются в обеспечении:

— *операциональности*, т. е. возможности нахождения оптимального (наилучшего в каком-то смысле) комплексного механизма управления;

— *наследования*, т. е. сохранения хороших свойств базовых механизмов управления (оптимальности, неманипулируемости) при их объединении в комплексный механизм.

В настоящей статье предлагается возможное решение этих двух проблем. Для этого, прежде всего, строится общая математическая модель комплексного механизма управления как многошаговой игры, шагами которой являются отдельные базовые механизмы управления, а затем, описывается процедура нахождения решения комплексного механизма посредством обратной индукции — последовательного решения локальных задач управления, что позволяет максимально полно использовать теоретические результаты в области базовых механизмов управления. Агрегированное влияние последующих действий участников системы на решения, принимаемые ими на более раннем этапе комплексного механизма, определяется добавкой (по типу функции Беллмана) к их локальным целевым функциям. Процесс аналогичен решению задачи оптимизации методом динамического (или, более общо, дихотомического) программирования [9]. *Операциональность* процедуры решения тем выше, чем более компактное дерево многошаговой игры удастся построить для данного комплексного механизма, а границы *наследования свойств* базового механизма определяются его применимостью для модифицированных целевых функций, включающих в себя «беллмановскую добавку».

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Практика бизнес-анализа и управленческого консалтинга основана на исследовании и улучшении бизнес-процессов организации. Для формализованного описания бизнес-процессов разработаны многочисленные нотации, подчеркивающие различные аспекты процессов функционирования

организации — функциональную декомпозицию в нотации IDEF0, декомпозицию производственных процессов на элементарные действия в нотации IDEF3, процессы передачи информации в нотации DFD, триггерные события в нотации EPC, интеграцию с информационными системами в нотации BPMN [10].

Основу нотаций составляют элементарные операции, в выполнении которых и состоит бизнес-процесс. Организационное управление — это, прежде всего, принятие различных решений, поэтому в контексте решения задач управления нас будут интересовать в основном операции принятия решений. Отметим, что все существующие нотации описания бизнес-процессов чрезвычайно плохо приспособлены к анализу функций управления. Более или менее четко можно выяснить лишь ответственного за принятие решения. Алгоритмы принятия решений (за исключением крайне простых случаев) в лучшем случае скрыты в текстовом описании операций (т. е. слабо формализованы), а зачастую и вовсе забываются бизнес-аналитиками. Даже если детально описано, как принимается решение, никогда не написано — почему оно принимается именно так, а не иначе: редко фиксируется конкретное множество альтернатив, в выборе из которых состоит решение, почти никогда не фиксируется критерий принятия решения. Зачастую при описании бизнес-процесса опускается *информированность* лица, принимающего решение, т. е. то, какой информацией о значимых факторах он обладает — а без этого, конечно, невозможно оценить, насколько эффективен тот или иной алгоритм принятия решений и как он может быть улучшен. Наконец, уровень принятия решения зачастую просто скрыт от рядовых бизнес-аналитиков; именно так в типичном описании бизнес-процесса появляются операции типа «бухгалтерия начисляет премию сотруднику» вместо по-настоящему важной операции «руководитель определяет размер премии сотрудника по результатам мониторинга эффективности выполнения тем поставленных задач на основе предыдущих договоренностей с учетом оценочной стоимости данного специалиста на рынке, объема премиального фонда и других факторов, соображений и ограничений», адекватное описание которой выливается в многостраничный документ, в итоге не отвечающий, тем не менее, на вопрос о том, почему премия начисляется именно так, и что будет, если этот алгоритм как-то изменить.

В связи с недостатками стандартных нотаций, для описания процессов принятия управленческих решений в организации (также называемых *механизмами управления*) в работе [3] была предложена специальная нотация, систематически учитывающая все аспекты, значимые для формального ис-

следования соответствующей задачи принятия решения. Это описание, основанное на методологии исследования операций и теории управления в организационных системах [2, 7], включает в себя состав лиц, вовлеченных во взаимодействие в процессе принятия решения, перечисление множеств их допустимых действий, целевые функции, порядок принятия решений и информированность участников (рис. 1).

Как видно из рис. 1, общая схема покрывает все этапы процесса организационного управления от планирования (этапы I и II на рис. 1 и 2) до стимулирования (этап VI на рис. 1 и 2), но на самом деле такие всеобъемлющие механизмы управления могут быть разработаны только для очень специальных задач и имеют узкую область применения, будучи при этом чрезвычайно трудоемкими в описании и исследовании. Одновременно с этим,

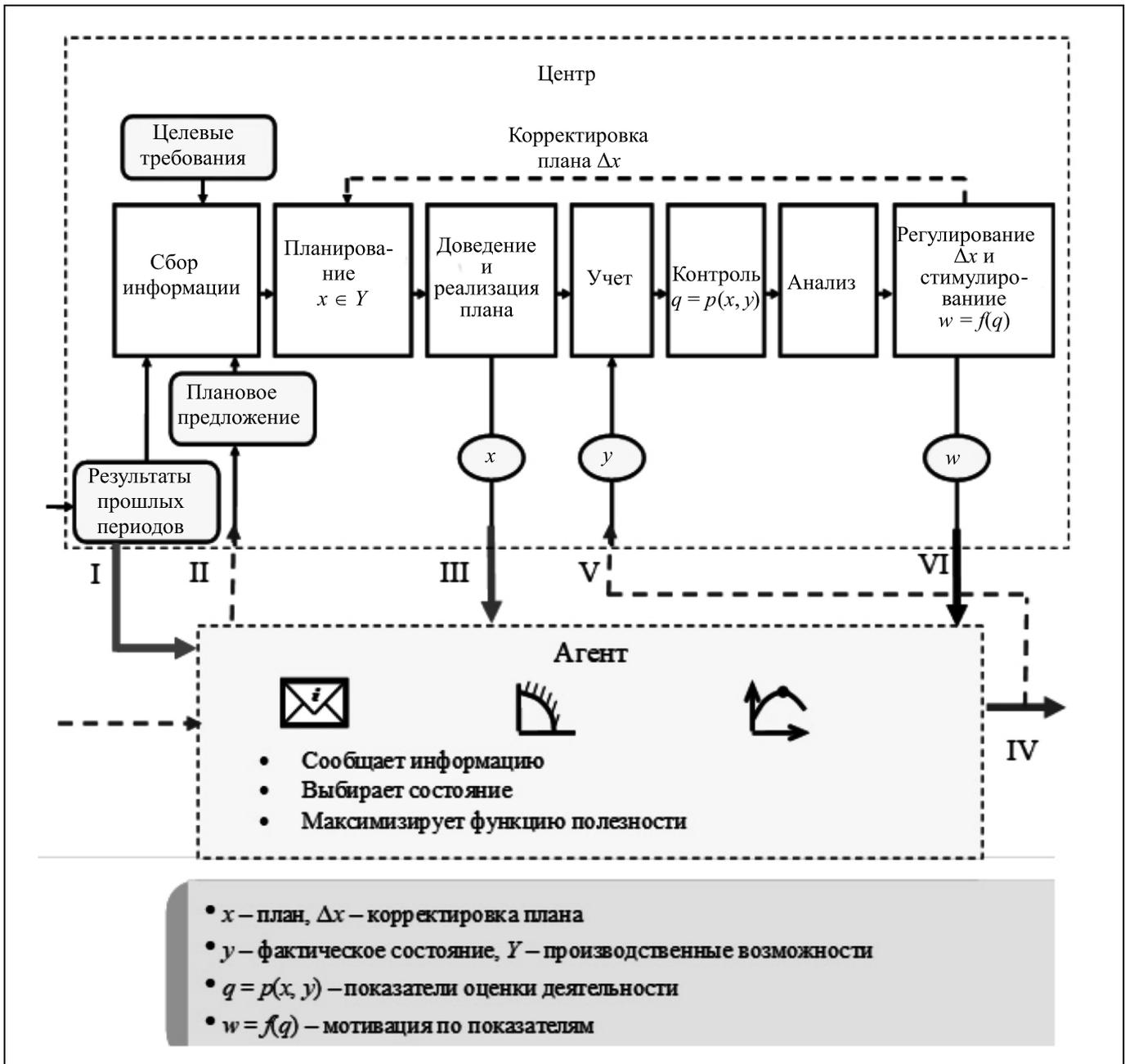


Рис. 1. Общая схема механизма управления [3]. Пунктирные стрелки соответствуют информационным, а сплошные — материальным и финансовым потокам

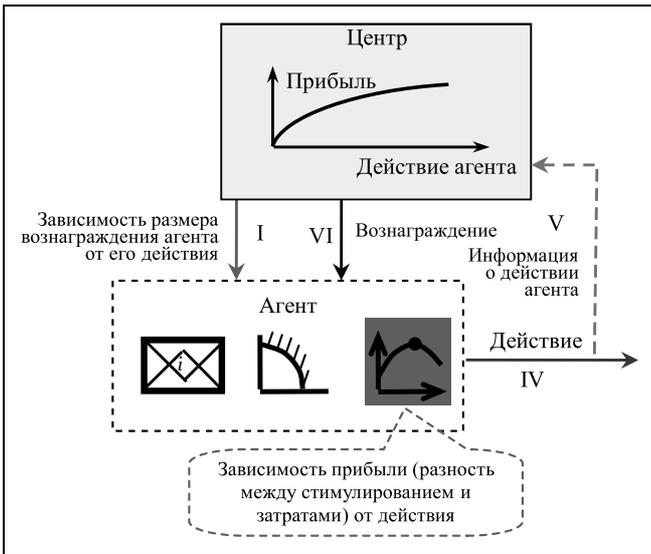


Рис. 2. Схема механизма материального стимулирования [3]. Пунктирные стрелки соответствуют информационным, а сплошные — материальным и финансовым потокам

для типовых, часто встречающихся на практике ситуаций организационного взаимодействия, в работе [3] описано семейство из нескольких десятков более простых базовых механизмов управления, каждый из которых покрывает не более одного этапа планирования, стимулирования, организации, контроля и имеет некоторую более или менее широкую сферу применения. В качестве примера можно привести механизм материального стимулирования (рис. 2), в котором отсутствует этап планирования. Существуют и еще более простые механизмы управления, например, механизм комплексного оценивания (см. его схему и описание в работе [3]).

На верхнем уровне описания бизнес-процесса, впрочем, сложный формализм рис. 1 и 2 «сворачивается» в стандартную для системного анализа вход-выходную схему (см. рис. 3), которую можно применять в стандартных нотациях (например, в нотации IDEF0, как в работе [3]) в качестве одной из операций сложного бизнес-процесса. Процесс, в котором встречается несколько операций-механизмов, в работе [3] называется комплексным механизмом управления. Такой подход позволяет связать основанный на методологии исследования операций и теоретико-игровых моделях подход теории управления организационными системами с традиционной практикой бизнес-анализа, показав место механизмов управления в общем потоке операционной деятельности организации.

В работе [3] предлагается использовать базовые механизмы как «кирпичики» при построении комплексных механизмов. Однако применимость

предложенной там нотации комплексирования механизмов ограничена, поскольку она не позволяет отвечать на вопросы операционности и наследования свойств базовых механизмов, сформулированные во Введении. В настоящей статье предлагается визуально похожий, но существенно более выразительный математический формализм, в рамках которого вопросы операционности и наследования свойств находят удовлетворительное разрешение.

В статье [8] основная проблема комплексирования механизмов управления в организационно-технических системах сформулирована как поиск общих условий, которым должны удовлетворять механизмы управления, устойчивые к комплексированию. В настоящей статье вопрос ставится по-иному — в каких ситуациях комплексирования механизмов управления сохраняются положительные свойства исходных механизмов? Механизмы оказываются устойчивыми к комплексированию не сами по себе, а только в контексте тех или иных комплексных бизнес-процессов. Конструктивный вопрос состоит в поиске правил трансформации компонентов описания базовых механизмов управления (целевых функций, множеств стратегий, информированности,...), которые позволяют исследовать отдельные шаги комплексного механизма изолированно друг от друга, и исследовании границ применимости этих правил. Предлагаемые далее правила трансформации учитывают долгосрочное влияние локальных решений участников организационной системы и позволяют исследо-

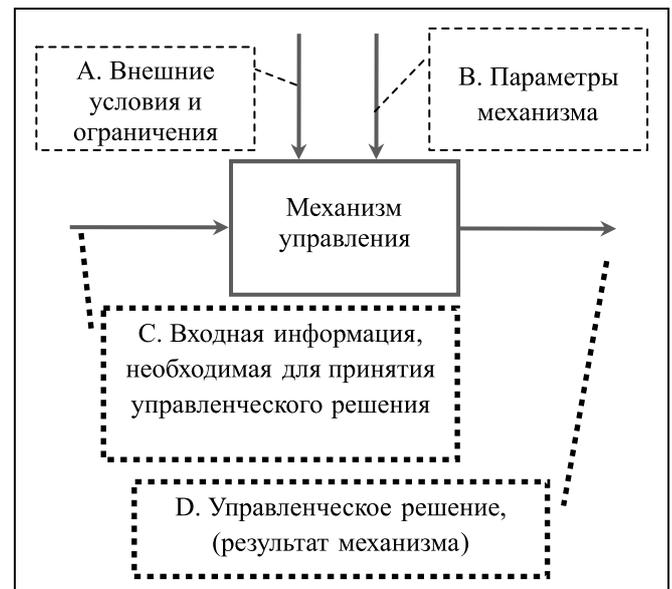


Рис. 3. Общая вход-выходная схема механизма управления [3]

вать сильносвязанные (в понимании статьи [8]) базовые механизмы в составе комплексных.

В зарубежной литературе вопросам комплексирования механизмов управления организационным поведением не уделяется практически никакого внимания. Одна из причин может состоять в том, что соответствующий раздел математики, теория механизмов (*mechanism design*), культивируется в основном экономистами-теоретиками [4], а не специалистами по менеджменту (*management*) и внутрифирменному управлению (*business administration*).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСНОГО МЕХАНИЗМА УПРАВЛЕНИЯ

Комплексный механизм управления определим следующим образом. Пусть задан *ациклический* граф $G(z_0) = \langle Z, L \rangle$ с единственной начальной вершиной $z_0 \in Z$. Вершины графа $z \in Z$ соответствуют состояниям организационной системы, в том числе z_0 — ее начальное состояние. Множество Z в общем случае бесконечное, а $L: Z \rightarrow Z$ — точно-множественное отображение, описывающее возможные переходы системы между состояниями. Вершины из множества $Z_T = \{z \in Z: L(z) = \emptyset\}$ называются терминальными.

В каждой вершине $z \in Z$ графа $G(z_0)$ разместим некоторый *механизм управления*, т. е. формализованную схему взаимодействия участников организационной системы, согласно работам [2, 3], определяемую (см. рис. 1) заданием:

- состава активной системы (перечисления участников системы — агентов);
- допустимых действий агентов;
- целей и предпочтений агентов;
- порядка функционирования (порядка принятия решений агентами, обычно, конкретизирующего шесть этапов, описанных в работе [3]);
- информированности агентов (определяющей, какой информацией обладают участники на момент принятия решений).

Математическая модель механизма управления представляет собой *иерархическую игру* n лиц [11, 12] с неполной, в общем случае, информацией:

$$\Gamma(z) = \langle N, \Omega, A_1^{[z]}, \dots, A_n^{[z]}, f_1^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n), \dots, f_n^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n), I^{[z]} \rangle. \quad (1)$$

Здесь $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков (иначе называемых агентами), Ω — множество *внешних факторов* (и N , и Ω — общие для всех игр), $A_i^{[z]}$ — множество действий i -го агента в игре $\Gamma(z)$, $f_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n)$ — его функция выигрыша в игре $\Gamma(z)$, за-

висящая от профиля a_1, \dots, a_n действий всех игроков и значения внешнего фактора $\theta \in \Omega$, $I^{[z]}$ — информированность игроков относительно значения внешнего фактора согласно работам [13–15], в том числе вероятностная информированность.

Один из игроков (традиционно, это игрок с номером 0 или 1) называется Центром — именно с точки зрения его интересов исследуется механизм и соответствующая ему игра. Обычно (но не обязательно) Центр делает первый ход в каждой из «локальных» иерархических игр $\Gamma(z)$, выбирая стратегию (иногда именно стратегия Центра называется механизмом управления в узком смысле этого слова) — правила игры в рамках фиксированного порядка ходов, которыми руководствуются остальные участники механизма управления (игроки), выбирающие свои действия a_i согласно этому порядку.

Термин «внешние факторы» достаточно условный: типичным примером таких факторов служит вектор $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ *типов* агентов, т. е. их персональных характеристик (производительности труда, например), влияющих на целевые функции, и, как следствие, на поведение агентов.

Агенты в общем случае могут быть неполностью информированы как относительно действий своих оппонентов, так и относительно значения внешнего фактора θ . Первый тип информированности фиксируется порядком ходов, который, в свою очередь, определяется типом разыгрываемой иерархической игры. Второй тип информированности отражается в структуре информированности $I^{[z]}$. Формальное общее определение произвольной структуры информированности довольно громоздко (см. работы [13–15]), поэтому на практике обычно ограничиваются словесными указаниями того, что является *общим знанием* [15] в игре, например, «все агенты, кроме Центра, точно знают значение θ , тогда как Центр знает только множество возможных значений внешних факторов Ω », как в моделях *реализуемости* по Нэшу (*Nash implementation* [16]) или «каждый агент $i = 1, \dots, n$ знает функцию субъективной вероятности $p_i(\theta)$ значений внешних факторов», как в задачах реализуемости по Байесу (*Bayesian implementation* [17]). Этих неформальных описаний достаточно для того, чтобы определить принципы принятия решения агентами и найти решение игры $\Gamma(z)$ (подробнее об этом — в § 3).

Не ограничивая общности рассмотрения, считаем, что агенты получают свои выигрыши непосредственно после розыгрыша игры $\Gamma(z)$. После этого новое состояние системы $z' \in L(z)$ определяется случайным образом с вероятностью перехода $\pi^{z \rightarrow z'}(\theta, a_1, \dots, a_n)$. В частном случае детермини-



рованного перехода, когда комбинация действий агентов и внешних факторов однозначно определяет новое состояние z' , определим функцию $z' = \pi^z(\theta, a_1, \dots, a_n)$. Описывающая комплексный механизм многошаговая игра на графе G состоит в последовательности переходов из начального состояния z_0 в одно из терминальных состояний с розыгрышем игры $\Gamma(z)$ в каждом из посещаемых состояний $z \in Z$.

Предлагаемая модель комплексного механизма управления организационным поведением близка к моделям *стохастических игр* [18, 19], также называемым *конкурентными марковскими процессами принятия решений* [20], которые являются промежуточным по сложности описанием между играми в стратегической форме и играми в развернутой форме [21]. Оригинальный элемент предлагаемой модели состоит в том, что элементарным «кирпичиком» многошаговой игры, разыгрываемой в каждом состоянии графа игры, служит не простейшая игра в нормальной форме, как в стохастических играх, а, в общем случае, довольно сложная иерархическая игра с неполной информацией. Стратегии агентов в иерархических играх высоких порядков (см. работы [11, 12]) зачастую представляют собой функции от действий других агентов, т. е. весьма многомерные объекты, и изображение взаимодействия агентов в виде игры в развернутой форме получилось бы чрезвычайно громоздким.

Предлагаемая же запись позволяет «спрятать» эту сложность внутри описания отдельного механизма управления, сконцентрировавшись на взаимодействии относительно слабосвязанных операций комплексного механизма управления, тем более что, как отмечалось в § 1, для многих распространенных ситуаций взаимодействия участников организационной системы известны типовые, так называемые, «базовые», механизмы управления. Эти механизмы хорошо изучены, они обладают привлекательными свойствами (такими, например, как неманипулируемость), для некоторых доказана их оптимальность [3]. Примерами классов базовых механизмов служат механизмы планирования, стимулирования, комплексного оценивания и многие другие (в работе [3] перечисляются более 20 классов).

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО МЕХАНИЗМА УПРАВЛЕНИЯ

Главная задача теории комплексных механизмов управления состоит в построении комплексного механизма, т. е. определении рационального поведения всех участников организационной системы. При этом было бы заманчиво использовать

многочисленные результаты по базовым механизмам управления — могут ли, и при каких условиях, базовые механизмы управления применяться в качестве строительных блоков комплексных механизмов, не теряют ли они такие свои привлекательные свойства, как оптимальность и неманипулируемость, какая доработка базовых механизмов требуется для эффективного их применения в комплексных механизмах?

Построение комплексного механизма сводится к решению соответствующей многошаговой игры. В качестве основного метода, как и в стохастических играх на графах [18, 19], предлагается воспользоваться обратной индукцией (backward induction) от терминальных состояний игры $z \in Z_T$ к начальному состоянию z_0 путем нахождения решения локальных игр $\Gamma(z)$, $z \in Z$, с учетом итерационно вычисляемых функций ожидаемого выигрыша агентов. Сначала для любого состояния игры $z \in Z$ определим *скорректированную иерархическую игру*

$$\Gamma'(z) = \langle N, \Omega, A_1^{[z]}, \dots, A_n^{[z]}, g_1^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n), \dots, g_n^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n), I^{[z]} \rangle,$$

отличающуюся от игры $\Gamma(z)$ только целевыми функциями.

Для произвольного терминального состояния $z \in Z_T$, игрока $i \in N$ и значения внешних факторов θ положим $g_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n) \equiv f_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n)$. Тогда для любого $z \in Z_T$ и любого $i = 1, \dots, n$ можно найти решение игры $\Gamma'(z)$ в соответствии с концепцией решения, по мнению исследователя, наиболее подходящей для этой игры (максимальный гарантированный результат, равновесие Штакельберга, равновесие Нэша и т. п. [2, 12]) в форме некоторого подмножества $\sigma^{[z]}(\theta) \subseteq A^{[z]} = A_1^{[z]} \times \dots \times A_n^{[z]}$ множества игровых ситуаций — исходов, для каждого из возможных значений внешних факторов $\theta \in \Omega$.

Для дальнейшего построения комплексного механизма, в общем-то, не имеют большого значения *стратегии* агентов, реализующие эти исходы. Это очень важно, поскольку в иерархических играх понятия *действий* и *стратегий* участников существенно отличаются, причем множества стратегий обычно неизмеримо более обширны, что крайне затрудняет алгоритмическое исследование механизмов управления организационным поведением [22].

Большое значение также имеет зависимость решения $\sigma^{[z]}(\theta)$ скорректированной игры $\Gamma'(z)$ от значений внешних факторов θ , характерная именно для механизмов организационного управления с их неполной, асимметричной и динамически ме-

няющейся информированностью участников. Принятие решений в условиях неполной информации предполагает устранение неопределенности (так называемая «гипотеза детерминизма» [2, 12]), в том числе относительно неполностью известного агентам значения θ , обычно путем усреднения в той или иной форме, что требует учета всевозможных вариантов θ . Таким образом, решение игры в каждой вершине $z \in Z$ графа комплексного механизма фактически представляет собой параметрическое семейство решений для всевозможных реализаций внешних факторов $\theta \in \Omega$. При этом даже если информированность i -го агента во время розыгрыша игры $\Gamma'(z)$ не предполагает знания значения θ , то порядок функционирования игры может позволить ему узнать его из действий других агентов, так что и весь исход игры, и его i -й компонент могут зависеть от значения θ .

Зная зависимость $\sigma^{[z]}(\theta)$, для любого значения внешних факторов θ легко вычислить ожидаемые выигрыши каждого агента, например, в простейшем случае их гарантированные выигрыши

$$F_i^{[z]}(\theta) = \inf\{g_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n) : (a_1, \dots, a_n) \in \sigma^{[z]}(\theta)\},$$
$$i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Теперь в любом таком состоянии $z \in Z$, что $L(z) \subseteq Z_T$, i -й агент, $i = 1, \dots, n$, может вычислить свой ожидаемый будущий выигрыш

$$e_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n) := E_{\pi_{z \rightarrow z'}(\theta, a_1, \dots, a_n)} F_i^{[z']}(\theta), \quad (3)$$

при условии реализации в игре $\Gamma(z')$ ситуации a_1, \dots, a_n и значения внешних факторов $\theta \in \Omega$. Здесь E — операция математического ожидания по вероятностям перехода в ситуации $z' \in L(z)$.

Рациональные агенты, разыгрывая игру в состоянии z , должны учитывать влияние ее результатов на выигрыши в будущих возможных состояниях из множества $L(z)$ и максимизировать свой полный будущий выигрыш

$$g_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n) := f_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n) + e_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n), \quad (4)$$

т. е., играть скорректированную игру $\Gamma'(z)$.

Важно отметить, что если игра $\Gamma(z)$ является типовой в том смысле, что для нее есть хорошо исследованный базовый механизм управления, и этот базовый механизм допускает и скорректированные целевые функции $g_i^{[z]}(\theta)$, $i = 1, \dots, n$, то результаты исследования этого базового механизма в полной мере переносятся на поведение агентов в скорректированной игре $\Gamma'(z)$ в состоянии $z \in Z$ комплексного механизма.

Таким образом, алгоритм обратной индукции для построения комплексного механизма управления состоит из следующих шагов.

1. Зададим множество состояний $Y := Z_T$.
2. Если множество Y пусто, алгоритм завершается.
3. Иначе для каждого состояния игры $z \in Y$ и всевозможных значений внешних факторов θ вычислим решение $\sigma^{[z]}(\theta)$ игры $\Gamma'(z)$ и, по формуле (2), гарантированные выигрыши $F_i^{[z]}(\theta)$, $i \in N$.
4. Положим $Y' := \{z \in Z : L(z) \subseteq Y\}$ и для всех $z \in Y'$ и всевозможных значений внешних факторов θ вычислим по формуле (3) ожидаемые будущие выигрыши $e_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n)$, что позволяет вычислить и полные будущие выигрыши $g_i^{[z]}(\theta, a_1, \dots, a_n)$ по формуле (4).
5. Положим $Y := Y'$ и перейдем на шаг 2.

В силу ацикличности графа состояний алгоритм вычисляет решение игры $\Gamma(z)$ для каждого состояния $z \in Z$ и завершается после вычисления решения скорректированной игры $\Gamma'(z_0)$ для начального состояния z_0 . Гарантированные выигрыши участников в игре $\Gamma'(z_0)$ определяют их гарантированные выигрыши во всей многошаговой игре, определяемой графом $G(z_0)$ и моделирующей комплексный механизм управления.

Отметим, что для построения комплексного механизма достаточно построить локальные механизмы для каждого состояния $z \in Z$, т. е. для каждой вершины сетевого описания комплексного механизма. Вычислительная сложность решения задачи синтеза локального механизма полностью определяется компонентами описания соответствующей иерархической игры (см. формулу (1)), и не зависит от сложности комплексного механизма, одним из состояний которого локальный механизм является¹. Если синтез локального механизма управления в каждом из состояний игры требует не более M операций, то синтез комплексного механизма требует порядка $M|Z|$ операций, т. е. трудоемкость задачи поиска комплексного механизма линейно растет по объему исходных данных

¹ Строго говоря, это верно в случае, если *массовая задача* [23] синтеза локального механизма включает в себя экземпляры задач для всевозможных скорректированных целевых функций $g_i^{[z]}$, которые могут сформироваться в результате обратной индукции. На практике это требование эквивалентно допустимости всех потенциально реализуемых в результате обратной индукции целевых функций $g_i^{[z]}$, $i = 1, \dots, n$, для механизма управления для произвольного состояния $z \in Z$, и не является ограничивающим.



(совокупности описаний локальных механизмов для каждого состояния $z \in Z$).

В этом параграфе не употребляется понятие «оптимального» механизма управления, поскольку цель настоящей статьи — не построение гипотетического механизма, наилучшего с точки зрения кого-либо из игроков в рамках тех или иных теоретических представлений о рациональном поведении, а описание формальной процедуры, позволяющей в рамках организационного дизайна наиболее полно использовать результаты исследований базовых механизмов, чтобы предсказывать свойства комплексного механизма, построенного из этих базовых «кирпичиков». При том что далеко не для всех базовых механизмов доказана их оптимальность (не для всех даже оценена их эффективность), они могут обладать другими положительными качествами (например, простотой применения или совместимостью с существующей нормативной базой), оправдывающими их применение в комплексных механизмах. При этом важно, что в результате применения описанной выше универсальной формальной процедуры комплексирования можно делать выводы об эффективности комплексного механизма — эффективность для i -го игрока определяется его средним выигрышем $E_0 F_i^{[z_0]}(\theta)$ в скорректированной игре в начальном состоянии z_0 .

4. ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСНОГО МЕХАНИЗМА ПЛАНИРОВАНИЯ, СТИМУЛИРОВАНИЯ И КОНТРОЛЯ

Рассмотрим несколько примеров построения комплексных механизмов. В классическом механизме распределения ресурса [24] целевые функции агентов считаются однопиковыми функциями от объема распределяемого им ресурса. При этом причина, по которой целевая функция агента уменьшается при получении большого объема ресурса, обычно не обсуждается, что выглядит особенно странно при рассмотрении механизмов распределения финансовых ресурсов. Как «много денег» может быть хуже, чем «мало денег»? Причина, очевидно, в механизмах последующего аудита, проверки эффективности использования выделенного ресурса, которые неявно предполагаются при рассмотрении механизмов распределения ресурса. Именно строгость и эффективность будущих проверок ограничивают жадность агентов на первом этапе комплексного двухэтапного механизма. Опишем этот пример формально.

Пример 1. Рассматривается организационная система с веерной структурой. На этапе I (в состоянии z_0) Центр (т. е. агент с номером, скажем, 0) владеет бюджетом объема R и распределяет его между n агентами для наиболее эффективного инвестирования на основе их

заявок a_1, \dots, a_n с помощью механизма планирования $\rho(\cdot)$, т. е. i -й агент получает ресурс в объеме $x_i = \rho_i(a_1, \dots, a_n)$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, действием i -го агента в иерархической игре этого этапа является заявка на ресурс $a_i \geq 0$, действием Центра — вектор (x_1, \dots, x_n) распределяемого ресурса. Стратегия же Центра в игре $\Gamma(z_0)$ состоит в назначении механизма планирования $\rho(\cdot)$, т. е. зависимости объема распределяемого ресурса от размеров заявок агентов.

Целевая функция этапа I, определяющая денежный эквивалент полезности i -го агента, равна просто объему получаемых финансовых ресурсов $f_i^I(\cdot) = x_i$, а целевая функция Центра $f_0^I(\cdot) = R - (x_1 + \dots + x_n)$. Вектор $\pi^I(\cdot) = (x_1, \dots, x_n)$ объемов ресурса определяет следующее состояние системы.

Проиллюстрируем сопряжение механизмов управления в комплексный механизм на простейшем примере, взяв максимально простые базовые механизмы, чтобы сконцентрироваться на их комплексировании (рис. 4).

Пусть на этапе II Центр проверяет эффективность расходования ресурса, проводя финансовую проверку агентов, и имеет возможность потребовать от i -го агента возврата вложений x_i , причем с процентом $\lambda_i \in [\lambda^{\min}, \lambda^{\max}]$. Таким образом, действием Центра в состоянии системы $x = (x_1, \dots, x_n)$ является вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ процентных ставок, тогда как действием i -го агента, $i = 1, \dots, n$ — вложение (при известных ставках λ) в инвестиционные проекты финансовых средств, ранее полученных от Центра, в объеме $y_i \in [0, x_i]$. Такая схема описывает, например, взаимоотношения банка с займополучателями или взаимоотношения центрального офиса инвестиционной компании с ее подразделениями.

Пусть суммарная прибыль $h_i(y_i)$ от инвестиций в объеме y_i при оптимальном доступном для i -го агента их вложении описывается гладкой монотонной вогнутой функцией, тогда его целевая функция запишется как

$$f_i^{[x]}(\lambda, y_1, \dots, y_n) = h_i(y_i) - (1 + \lambda_i)x_i,$$

а целевая функция Центра — как $f_0^{[x]}(\lambda, \cdot) = (1 + \lambda_1)x_1 + \dots + (1 + \lambda_n)x_n$.

Заметим, что функции $h_i(\cdot)$ характеризуют персональные возможности агентов, влияя на их целевые функции этапа II. Логично считать, что функция $h_i(\cdot)$ всегда известна агенту i , однако не известна Центру, пока он не провел проверку на этапе II, т. е. имеется неполная асимметричная информированность относительно этих функций. Поэтому кортеж функций $\theta := \langle h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot) \rangle$ представляет собой конкретную реализацию внешних факторов для данного комплексного механизма (см. рис. 4); довольно сложный объект, который, тем не менее, не причинит в данном примере особого беспокойства и не создаст проблем.

Решение игры этапа II очень простое. В силу монотонности $h_i(\cdot)$ оптимальна стратегия i -го агента $y_i = x_i$. Для Центра же, очевидно, выгодны максимальные процентные ставки $\lambda_i = \lambda^{\max}$. Это и есть решение игры эта-

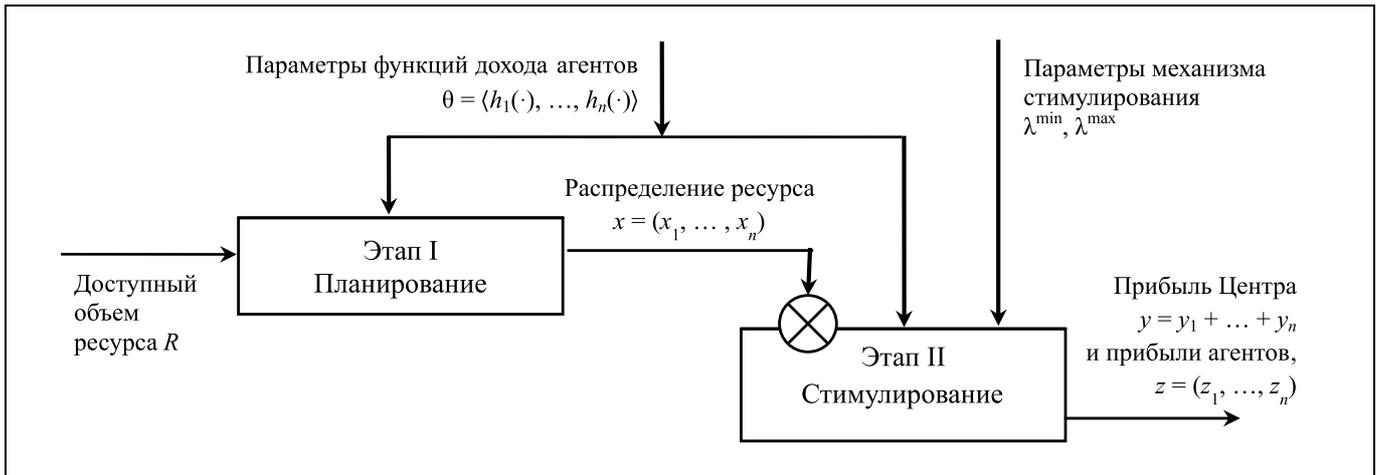


Рис. 4. Схема двухэтапного комплексного механизма управления из примера 1

па II, точнее, решение всего семейства игр для различных состояний x и значений внешних факторов θ , представляющее собой вариации на тему одного из базовых механизмов управления — механизма стимулирования L -типа в условиях полной информированности [25].

Таким образом, для значения внешних факторов $\theta := \langle h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot) \rangle$ и состояния игры $x = (x_1, \dots, x_n)$ запишем $F_0^{[x]}(\theta) = (1 + \lambda^{\max})(x_1 + \dots + x_n)$, $F_i^{[x]}(\theta) = h_i(x_i) - (1 + \lambda^{\max})x_i$, $i = 1, \dots, n$, и функции Беллмана в начальном состоянии игры z_0 запишутся как

$$e_i^{[z_0]}(\theta, x, a_1, \dots, a_n) = F_i^{[x]}(\theta).$$

Тогда функции полного выигрыша

$$g_0^{[z_0]}(\cdot) = R + \lambda_{\max}(x_1 + \dots + x_n),$$

$$g_i^{[z_0]}(\cdot) = f_i^{[z_0]}(\cdot) + e_i^{[z_0]}(\cdot) = h_i(x_i) - \lambda_{\max}x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Новые целевые функции агентов включают в себя функции $h_i(\cdot)$, т. е. в состоянии z_0 известны только им самим, но не Центру. Однако они представляют собой однопиковые функции, а значит, работает вся теория, разработанная для механизмов распределения ресурса [2, 7, 24, 26], и Центр может воспользоваться готовыми результатами по любому из доступных базовых механизмов распределения ресурса (прямых и обратных приоритетов, конкурсным и т. п.), что завершает построение комплексного механизма. ♦

Заметим, что в стандартных нотациях рассматриваемый бизнес-процесс включает в себя два шага (см. рис. 4), однако для целей организационного дизайна — построения механизма управления организационным поведением — его описание выглядит как «веер» расходящихся путей, описывающих переходы во всевозможные будущие состояния системы. Бесконечное число состояний на втором этапе процесса (на рис. 4 изображенное

значком мультиплицирования \otimes возле состояния системы x), тем не менее, не доставило особых трудностей в ходе анализа, поскольку все состояния второго этапа были исследованы так же, как и изображены — единым унифицированным способом. Возможность такой экономии вычислений определяется возможностью получения для второго этапа процесса аналитического решения, параметрически зависящего как от состояния игры $x = (x_1, \dots, x_n)$, так и от значения внешних факторов $\theta = \langle h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot) \rangle$.

Разумеется, этот (достаточно простой) процесс взаимодействия участников организационной системы можно было исследовать непосредственно, рассматривая его не как комплексный механизм управления в понимании настоящей статьи, а просто как сложную многошаговую иерархическую игру, где действия выбираются Центром, потом агентами, затем опять Центром и т. д. Описанный выше подход, однако, систематизирует и стандартизирует процесс этого исследования. Он позволяет в явном виде декомпозировать комплексный механизм управления на элементарные шаги, которые могут реализовываться механизмами из библиотеки базовых механизмов управления организационным поведением [3].

В частности, можно рассмотреть альтернативный вариант реализации второго этапа бизнес-процесса, добавить к процессу новые этапы (операции) и сравнить эффективность различных вариантов организации комплексного бизнес-процесса.

Пример 2. Если в примере 1 ослаблять искусственное верхнее ограничение на процент λ_i , то Центр сможет получать от агентов все большие и большие средства. В жизни, однако, это невозможно, так как у агентов всегда есть альтернатива — уволиться из организации,



если условия в ней становятся хуже, чем доступные агенту на рынке труда. В частности, логично считать, что после назначения Центром ставки λ_i i -й агент может отказаться от инвестирования, вернуть ранее полученные финансовые средства в объеме x_i и уволиться, получив альтернативный выигрыш u_i (наличие такого уровня *резервной полезности* — это стандартное предположение при рассмотрении базовых механизмов стимулирования [25, 27]). Максимально возможной будет процентная ставка $\lambda_i = \frac{h_i(x_i) - u_i}{x_i}$, при которой обе альтернативы приводят к одинаковому выигрышу. В этом

случае $g_0^{[z_0]}(\cdot) = \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - u_i)$, $g_i^{[z_0]}(\cdot) = u_i$, функции

полного выигрыша агентов на этапе I равны константе, а в целевую функцию Центра входят внешние факторы (функции $h_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$), т. е. Центр неточно знает свою целевую функцию. В теории игр это вполне допустимо — при выборе стратегии Центр должен устранить эту неопределенность путем усреднения или обмена информацией. Если, как обычно считается, выбор агента между равнозначными для него альтернативами определяется гипотезой благожелательности [2, 12, 24], то, скажем, при применении Центром на первом этапе механизма пропорционального распределения ресурса

$x_i = Ra_i / \sum_{j=1}^n a_j$, агенты сами выберут действия, при кото-

рых распределение ресурса будет оптимальным для Центра, т. е. будет максимизировать суммарную прибыль

$\sum_{i=1}^n h_i(x_i)$. Известны и более сложные стимулирующие

стратегии, когда ставка налогообложения λ_i зависит от действия агента y_i . С их помощью можно достичь того же исхода при тех же выигрышах. ♦

В заключение отметим, что в трудовых отношениях отказ от дальнейшего сотрудничества (увольнение по собственному желанию) обычно можно инициировать не только в любом состоянии многошаговой игры, но даже и в разные моменты иерархической игры, соответствующей локальному механизму управления, в разных состояниях информированности и т. д., поэтому такой альтернативный сценарий обычно не отображается напрямую на схеме комплексного механизма, иначе она стала бы слишком громоздкой. В рассматриваемом примере достаточно на рис. 4 заменить параметры λ^{\min} , λ^{\max} механизма на этапе II на вектор резервных полезностей $u = (u_1, \dots, u_n)$ или включить этот вектор во внешние условия θ . ♦

Интересно, что в примере 2 функции полного выигрыша на этапе I не зависят от действий агентов. Это является прямым следствием того, что на этапе II Центр имеет полную информацию о значении внешних факторов θ (функциях дохода агентов) и достаточно широкие возможности по перераспределению выигрыша. Когда дальновидные агенты понимают, что независимо от их действий игра попадет в состояние, где Центр умень-

шит их накопленный выигрыш до уровня *резервной полезности* u_i , $i = 1, \dots, n$, функции их полного выигрыша предыдущих состояний вплоть до начального перестают зависеть от их действий.

Насколько это осложняет или облегчает функционирование комплексных механизмов — вопрос спорный, но то, насколько подобная ситуация представляется контринтуитивной, вероятно, говорит о том, насколько редко полная информированность встречается в жизни. Для реальных комплексных механизмов скорее характерна их цикличность, нацеленность на долгосрочное взаимодействие с учетом накопления репутации и положительного опыта. Технически это можно сделать, введя в терминальных состояниях комплексного механизма дополнительное слагаемое, отвечающее за репутацию — долгосрочные последствия того или иного поведения участников организационной системы (причем как управляемых, так и управляющих). Базовые механизмы управления репутацией описаны в работе [28].

В рассмотренных простых примерах комплексный механизм был построен аналитически. Более сложные комплексные механизмы могут потребовать исследования численными методами. В этом должны помочь ранее разработанные в рамках гранта РФФ 16-19-10609 численные компьютерные модели базовых механизмов управления [29, 30] в среде моделирования RDS, «Расчет динамических систем» (на веб-странице [31] доступна библиотека реализованных в среде RDS на настоящий момент механизмов управления организационным поведением), дополненные возможностями задания схем комплексных бизнес-процессов, их анализа и синтеза, рассмотренными в настоящей статье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен вариант решения двух проблем комплексирования механизмов управления организационным поведением: операциональности (т. е. возможности построения сложного многоэтапного механизма управления) и наследуемости (т. е. сохранения хороших свойств базовых механизмов управления при их комплексировании). Для этого предложена нотация записи комплексных бизнес-процессов в форме стохастической игры на ациклическом графе, в вершинах которого размещаются базовые («элементарные») механизмы управления, а вероятности переходов между состояниями определяются действиями агентов в предыдущем состоянии. Также предложена формальная процедура решения этой игры методом обратной индукции, позволяющая итерационно вычислить добавку к целевым функциям текущей «локальной» игры, учитывающую влияние

локальных решений на будущее развитие игрового взаимодействия. Операциональность комплексного механизма при этом определяется степенью компактности получившегося описания игры, а наследование свойств базового механизма управления определяется его совместимостью с новыми модифицированными целевыми функциями, учитывающими долгосрочные последствия.

Новизна предложенной нотации определяется тем, что, в отличие от стохастических игр на графах, в каждом состоянии задается не игра в нормальной форме, а иерархическая игра с неполной, в общем случае, информацией. Рассмотренные примеры показывают удобство предложенной схемы для анализа и синтеза комплексных механизмов управления организационным поведением. Однако по сравнению с максимально общей моделью игр в развернутой форме [12] модель стохастических игр на графах имеет некоторые ограничения, которые наследуются и предложенной моделью комплексного механизма. В частности, на верхнем уровне описания механизма (уровне графа переходов между состояниями) нет информационных множеств, как в играх в развернутой форме, т. е. предполагается, что состояние, в котором находится система, является общим знанием. Такие состояния должны объединяться в рамках одного шага (состояния) многошаговой игры, и только практика может показать, насколько это осложняет исследование реальных механизмов управления.

В играх с неполной информацией каждое состояние системы представляет собой целое семейство игр для каждого из возможных значений внешних факторов. Это, конечно, усложняет исследование, как и наличие, в общем случае, бесчисленного числа состояний графа игры. Однако по прослеженной в предыдущих разделах логике рассмотрения многошаговой игры, очевидно, что каждое сочетание различных факторов, влияющих на принятие решения (итоговое значение функции Беллмана), заслуживает отдельного состояния на схеме комплексного механизма, и невозможно упростить рассматриваемую ситуацию без потери деталей, которые могут оказаться важными.

Наконец, отметим, что применимость предложенной схемы построения комплексного механизма определяется применимостью подхода обратной индукции к исследованию многошаговых игр. В теории игр рассматриваются и другие концепции решения игр с неполной информацией (forward induction, trembling hand equilibrium), однако они гораздо реже применяются в практике организационного управления — обычно стремятся построить механизмы управления, имеющие удовлетворительное решение в соответствии с любой теоретико-игровой концепцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Novikov, A.M., Novikov, D.A. Research methodology: From philosophy of science to research design. — N.-Y.: CRC Press, 2013.
2. Novikov, D. Theory of control in organizations. — Nova Publishers, 2013.
3. Burkov, V., Goubko, M., Kondrat'ev, V., et al. Mechanism design and management: mathematical methods for smart organizations: (for managers, academics and students). — Nova Publishers, 2013.
4. Börgers, T. An introduction to the theory of mechanism design. — Oxford: Oxford University Press, 2015.
5. Burkov, V.N., Lerner, A.Y. Fairplay in control of active systems / Differential games and related topics / H.W. Kuhn and G.P. Szego, eds. — Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company. — 1971. — P. 164–168.
6. Hurwicz, L. On informationally decentralized systems / Decision and organization: a volume in honor of Jacob Marshak / C.B. McGuire and R. Radner, eds. — Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company. — 1972. — P. 297–336.
7. Burkov, V., Goubko, M., Korgin, N., Novikov, D. Introduction to the theory of control in organizations / D. Novikov, ed. — N.-Y.: CRC, 2015.
8. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Проблемы комплексирования и декомпозиции механизмов управления организационно-техническими системами // Проблемы управления. — 2016. — № 5. — С. 14–23. [Burkov, V.N., Korgin, N.A., Novikov, D.A. Problems of integration and decomposition of organizational-technical systems' control mechanisms. — Control Sciences. — 2016. — No. 5. — P. 14–23. (In Russian)]
9. Бурков В.Н., Буркова И.В. Задачи дихотомической оптимизации. — М.: Радио и связь, 2003. [Burkov, V.N., Burkova, I.V. Zadachi dikhotomicheskoi optimizatsii. — M.: Radio i svyaz', 2003. (In Russian)]
10. Федоров И. Сравнительный анализ нотаций моделирования бизнес-процессов // Открытые системы. СУБД. — 2011. — № 8. — С. 28. [Fedorov, I. Sravnitel'nyi analiz notatsii modelirovaniya biznes-protsessov // Otkrytye sistemy. SUBD. — 2011. — No. 8. — S. 28. (In Russian)]
11. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1976. [Germeier, Yu.B. Igra s neprotivopolozhnyimi interesami. — M.: Nauka, 1976. (In Russian)]
12. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. — М.: СИНТЕГ, 2002. [Gubko, M.V., Novikov, D.A. Teoriya igr v upravlenii organizatsionnyimi sistemami. — M.: SINTEG, 2002. (In Russian)]
13. Mertens, J.F., Zamir, S. Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information // International Journal of Game Theory. — 1985. — Vol. 14, no. 1. — P. 1–29.
14. Novikov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Reflexion and control: mathematical models. — N.-Y.: CRC Press, 2014.
15. Brandenburger, A., Dekel, E. Hierarchies of beliefs and common knowledge // Journal of Economic Theory. — 1993. — Vol. 59, no. 1. — P. 189–198.
16. Maskin, E., Sjöström, T. Implementation Theory / Handbook of Social Choice and Welfare. — 2002. — Vol. 1. — P. 237–288.
17. Jackson, M.O. Bayesian implementation // Econometrica. — 1991. — Vol. 59, no. 2. — P. 461–477.
18. Shapley, L.S. Stochastic games // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1953. — Vol. 39, no. 10. — P. 1095–1100.
19. Parilina, E. A survey on cooperative stochastic games with finite and infinite duration // Contributions to Game Theory and Management. — 2018. — Vol. 11. — P. 129–195.
20. Filar, J., Vrieze, K. Competitive Markov Decision Processes: Theory, Algorithms, and Applications. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1997.



21. Myerson, R.B. Game theory. — Harvard: Harvard University Press, 2013.
 22. Nisan, N., Ronen, A. Algorithmic mechanism design // Games and Economic behavior. — 2001. — Vol. 35, no. 1–2. — P. 166–196.
 23. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно-решаемые задачи. — Мир, 1982. [Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. — San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1979.]
 24. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. — М.: Наука, 1981. [Burkov, V.N., Kondrat'ev, V.V. Mekhanizmy funktsionirovaniya organizatsionnykh sistem. — М.: Nauka, 1981. (In Russian)]
 25. Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. — М.: СИНТЕГ, 2003. [Novikov, D.A. Stimulirovanie v organizatsionnykh sistemakh. — М.: SINTEG, 2003. (In Russian)]
 26. Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах. — М.: ИПУ РАН, 2003. [Korgin, N.A. Nemanipuliruemye mekhanizmy obmena v aktivnykh sistemakh. — М.: IPU RAN, 2003. (In Russian)]
 27. Hashimzade, N., Myles, G., Black, J. A Dictionary of Economics / 5-th ed. — Oxford: Oxford University Press, 2017.
 28. Ермаков Н.С., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели репутации и норм деятельности. — М.: ИПУ РАН, 2005. [Ermakov, N.S., Ivashchenko, A.A., Novikov, D.A. Modeli reputatsii i norm deyatelnosti. — М.: IPU RAN, 2005. (In Russian)]
 29. Дорри М.Х., Серeda Л.А., Щепкин А.В. Анализ механизмов распределения фонда финансирования в среде программного комплекса РДС // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2018. — Т. 18, № 3. — С. 107–118. [Dorri, M.Kh., Sereda, L.A., Shchepkin, A.V. Analiz mekhanizmov raspredeleniya fonda finansirovaniya v srede programmogo kompleksa RDS // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gos. un-ta. Ser.: Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika. — 2018. — Т. 18, no. 3. — S. 107–118. (In Russian)]
 30. Дорри М.Х., Щепкин А.В. Моделирование соревновательного механизма стимулирования в среде программного комплекса РДС // Тр. 13-го Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, ИПУ РАН, 2019). — М., 2019. — С. 1710–1714. [Dorri M.H., Shchepkin A.V. Modelirovanie sorevnovatel'nogo mekhanizma stimulirovaniya v srede programmogo kompleksa RDS // Tr. 13-go Vseros. soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU XIII, Moskva, IPU RAN, 2019). — М., 2019. — S. 1710–1714.]
 31. URL: <https://www.ipu.ru/science/applied-research/products/calculation-of-dynamic-systems>.
- Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.*
- Поступила в редакцию 29.12.2019, после доработки 28.01.2020.
Принята к публикации 5.02.2020.*
- Губко Михаил Владимирович** — д-р физ.-мат. наук,
✉ mgoubko@mail.ru
- Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

DESIGN OF INTEGRATED MECHANISMS FOR ORGANIZATIONAL BEHAVIOR CONTROL

M.V. Goubko

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ mgoubko@mail.ru

Abstract. A mathematical model and a notation are developed of integrated mechanisms for problems of organizational behavior management. Singular basic mechanisms (resource allotment mechanisms, incentive schemes, monitoring and audit procedures) are combined into an acyclic graph of a multi-stage game, which reflects the structure of a business process in an organization. Instead of stochastic games on graphs, in this notation not just standard normal-form games but sophisticated principal-agent mechanisms with incomplete and asymmetric information can be located in graph nodes. Integrated mechanisms are analyzed using a backward induction procedure through an acyclic graph of a multi-stage game, which models the considered organizational interaction. This approach allows to reuse the best practices of organizational mechanisms developed by mechanism design and the theory of organizational behavior control for typical situations of principal-agent interaction that arise in managerial practice. These singular mechanisms are used as building blocks when a complex integrated mechanism is constructed, while their optimality and strategyproofness are preserved. Efficiency of alternative basic mechanisms (e. g. different auction rules) can be tested against a specific position (a node of a multi-stage graph game) in an integrated mechanism. The method is illustrated by simple examples of the design of integrated mechanisms for resource allotment, incentives' provision, and monitoring, and directions of prospective studies are outlined.

Keywords: basic mechanism for organizational behavior management, multistage stochastic game on graph, backward induction, strongly related mechanisms.

Funding. The work was performed with financial support of Russian Science Foundation (grant no. 16-19-10609).

МНОГОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ: ИНДЕКСЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ¹

Д.А. Губанов, И.В. Петров, А.Г. Чхартишвили

Аннотация. Рассмотрена многомерная модель динамики мнений в социальных сетях, которая позволяет моделировать динамику двух взаимосвязанных информационных процессов. Первый из них — процесс распространения наблюдаемого возбуждения в сети и совершения агентами наблюдаемых извне действий (например, в виде публикации сообщений), а второй (связанный с первым) — процесс формирования и изменения мнений агентов (являющихся характеристикой их внутреннего состояния). Показано, что такая модель позволяет моделировать и оценивать комплекс наиболее значимых и актуальных социально-психологических феноменов динамики мнений в сетях: консенсус или согласование мнений, сохранение различий во мнениях и расхождение мнений по разным полюсам — поляризацию мнений. Рассмотрены подходы к измерению поляризации мнений, предложены индексы поляризации мнений. При помощи численного моделирования показано, что предложенные индексы позволяют различать и оценивать ситуации с содержательно различными многомерными распределениями мнений участников социальной сети, а также находить направления наибольшей поляризации.

Ключевые слова: социальная сеть, формирование мнений, распространение активности, поляризация мнений, индексы поляризации мнений.

ВВЕДЕНИЕ

Основополагающие работы в области динамики представлений агентов в социальных сетях исследуют и моделируют в первую очередь феномен согласования мнений агентов (достижение консенсуса), когда взаимодействие между членами социальной сети приводит к постепенному уменьшению различий между мнениями участников взаимодействий (см. например, работы [1–3]). Однако в социальных сетях, помимо консенсуса, наблюдаются и приобретают все большую значимость такие социально-психологические феномены, как кластеризация мнений, поляризация мнений, неконформизм и т. п. [4]. Актуальна разработка новых математических моделей, учитывающих эти феномены [5–10], с тем, чтобы обеспечить адекватное решение задач информационного влияния и управления [1, 11, 12]. В частности, имеются мо-

дели, в которых моделируется эффект кластеризации мнений благодаря ограниченному доверию агентам сети [5, 13, 14], а в ряде других моделей эффект поляризации достигается путем отторжения мнений антипатичных членов сети (отрицательное влияние) [15–17].

В настоящей работе рассматривается эффект поляризации мнений, которая понимается как расхождение по разным полюсам мнений участников обсуждения некоторого вопроса в социальной сети. Наличие эффекта поляризации в онлайн-вых социальных сетях подтверждается рядом эмпирических исследований [18, 19]. Для измерения уровня поляризации применяются меры неравенства и разработаны меры поляризации сети (см. например, работы [20, 21]).

Далее в § 1 рассмотрена модель динамики мнений в социальной сети, которая была предложена в работе [22] и которая при определенных условиях приводит к сохранению различий в мнениях агентов и поляризации мнений агентов. В § 2 предложены подходы к измерению поляризации мнений. В § 3 приведены результаты имитационного

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 18-29-22042).



моделирования, реализующего предложенные подходы к моделированию динамики и оценке поляризации мнений.

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ

Под социальной сетью понимается структура, состоящая из множества агентов (субъектов — индивидуальных или коллективных, например, индивидов, семей, групп) и определенного на нем множества связей (например, знакомства, дружбы, коммуникаций). Формально социальная сеть представляет собой граф $G = (N, E)$, в котором $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество вершин (агентов), а E — множество ребер (отношений).

Рассмотрим в такой социальной сети динамику двух информационных процессов. Один из них — процесс распространения активности агентов и совершения ими действий (например, в виде публикации сообщений), а другой (связанный с первым) — процесс формирования мнений агентов и выражения мнений в действиях.

Процесс распространения активности агентов сети. Будем считать, что агент $i \in N$ в начальный момент времени выбирает действие $y_i^{(0)} \in \{0, 1\}$ (0 можно интерпретировать как отсутствие активности агента), исходя из присущей ему готовности к действию $p_i^{(0)} \in [0, 1]$, т. е. выбирает действие $y_i^{(0)} = 1$ с вероятностью $p_i^{(0)}$. Однако в последующие моменты времени $t = 1, 2, \dots$ уровень готовности агента к действию зависит также от действий, совершенных агентами сети в предыдущий момент времени:

$$p_i^{(t)} = \alpha p_i^{(0)} + (1 - \alpha) \sum_{j \in N} \alpha_{ij} y_j^{(t-1)},$$

где коэффициент $0 \leq \alpha \leq 1$ может интерпретироваться как индивидуальная особенность — некоторые склонны писать чаще, некоторые реже, вне зависимости от поведения окружения, $A = (a_{ij})$ — стохастическая (по строкам) матрица влияния. Соответственно, агент выполнит действие $y_i^{(t)} = 1$ с вероятностью $p_i^{(t)}$.

Содержательно, готовность агента связана с активностью его окружения, например, если все вокруг пишут чаще, то и агент пишет чаще.

Процесс формирования мнений агентов сети. Агенты в сети имеют определенные мнения. Будем считать, что возможны m классов «крайних» позиций, и мнение i -го агента в каждый t -й момент времени представляет собой m -компонентный сто-

хастический (по строкам) вектор $x_i^{(t)} \left(\sum_{l=1}^m x_{il}^{(t)} = 1 \right)$.

Агент выражает свое мнение в действиях (сообщениях), причем высказанное им в сообщении мнение $s_i^{(t)}$ является одним из m «крайних» вариантов. Высказывание мнения происходит с вероятностями, совпадающими с компонентами вектора $x_i^{(t)}$:

$$P(s_i^{(t)} = I_{*l} | y_i^{(t)} = 1) = x_{il}^{(t)},$$

где I_{*l} — l -й столбец единичной матрицы.

Динамика мнений i -го агента задается таким образом:

$$x_i^{(t)} = \beta x_i^{(0)} + (1 - \beta) \times \left(b_{ii}^{(t-1)} x_i^{(t-1)} + \sum_{j \in N_i} b_{ij}^{(t-1)} s_j^{(t-1)} \right),$$

где коэффициент $0 \leq \beta \leq 1$ отражает приверженность своему начальному мнению, $B^{(t)} = (b_{ij}^{(t)})$ — матрица доверия агента сообщениям соседей, $N_i = \{k \in N: a_{ik} > 0\}$ — множество соседей i -го узла в сети. Иными словами, мнение агента в каждый момент времени зависит как от его начального мнения, так и мнений его окружения в предыдущий момент времени.

Матрица доверия переменная и отражает зависимость степени доверия агента сообщениям других агентов от их содержания:

$$b_{ij}^{(t)} = \begin{cases} \phi(d_{ij}^{(t)}), & j \in N_i \wedge y_j^{(t)} = 1, \\ 1, & j = i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

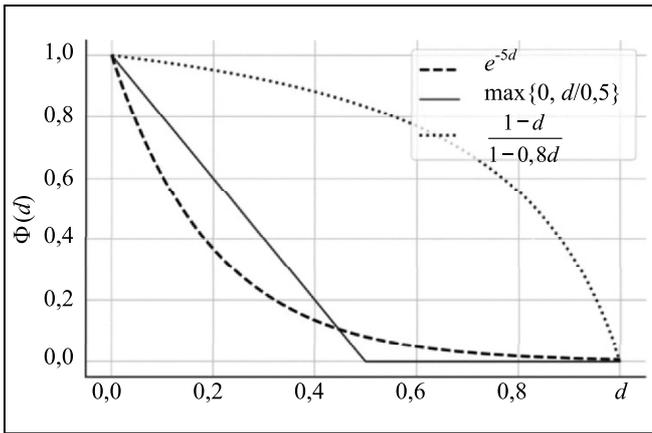
где $d_{ij}^{(t)} = 1 - \sum_{l=1}^m \min(x_{il}^{(t)}, s_{jl}^{(t)})$ — мера несходства мнений агентов i и j , а ϕ — некоторая функция на полуинтервале $[0, +\infty)$. Функция $d_{ij}^{(t)}$ является метрикой, что доказывает

Утверждение 1. Функция $d(x, y) = 1 - \sum_{l=1}^m \min(x_l, y_l)$,

где $x, y \in R_+^m$, $\sum_{l=1}^m x_l = 1$, $\sum_{l=1}^m y_l = 1$, является метрикой.

Доказательство. Из стохастичности рассматриваемых векторов следует справедливость равенства

$$\sum_{l=1}^m \min(x_l, y_l) + \sum_{l=1}^m \max(x_l, y_l) = 2.$$


 Рис. 1. Примеры функций $\phi(d)$

Тогда исходную функцию можно переписать как

$$d(x, y) = \sum_{l=1}^m \max(x_l, y_l) - 1.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \max(x_l, y_l) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \min(x_l, y_l) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\max(x_l, y_l) - \min(x_l, y_l)) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m |x_l - y_l|. \end{aligned}$$

Функция $d(x, y)$ является метрикой, поскольку метрикой является функция $d_1(x, y) = \sum_{l=1}^m |x_l - y_l|$. ♦

В том случае, когда $\phi(d)$ — монотонно убывающая функция на интервале $[0, +\infty)$, агент максимально доверяет соседям, которые сообщают информацию, совпадающую с его мнением [12]. Примерами такого рода функций могут быть $\phi(d) = e^{-\gamma d}$, $\phi(d) = 2/(e^{2d} + 1)$, $\phi(d) = \max\{0, 1 - d/\gamma\}$ и др. (см. графики функций на рис. 1).

Далее будем считать, что выполняется условие нормировки по строкам, т. е. матрица $B^{(d)}$ является стохастической. Тогда элемент матрицы $b_{ij}^{(t)}$ можно интерпретировать как вероятность выделения i -м агентом мнения, высказанного j -м агентом.

2. МНОГОМЕРНЫЕ ИНДЕКСЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ СЕТИ

Существует множество возможных индексов неравенства и поляризации сети (см., например, работы [20, 21]). Обычно они предполагают, что мнения агентов расположены на отрезке, т. е. являются одномерной величиной, что естественно,

например, для политических мнений в условиях двухпартийной политической системы США либо в ситуации выбора между компьютерами фирм Microsoft и Apple. В данной работе мы рассматриваем более общий случай, когда существует несколько «полюсов мнений».

В настоящем параграфе мы рассмотрим два различных подхода к построению индекса поляризации и докажем, что в одномерном случае они дают одинаковый результат. После этого будет предложено их обобщение на многомерный случай. В многомерном случае эти подходы дают различные по содержательному смыслу индексы, позволяющие учитывать различные аспекты феномена поляризации мнений.

Первый подход к построению индекса поляризации был предложен в работе [21]. С точностью до константы он представляет собой среднее расстояние мнений агентов до их среднего значения:

$$\Pi = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} |x_i - \mu|, \quad (1)$$

где $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} x_i$. Чем больше значение показателя (1), тем больше степень поляризованности общества.

Второй подход основан на следующей идее. Не ограничивая общности, будем считать, что мнения упорядочены по неубыванию (т. е. $x_1 \leq \dots \leq x_n$), и рассмотрим всевозможные разбиения индивидов на два множества $N_0(k) = \{1, \dots, k\}$ и $N_1(k) = \{k+1, \dots, n\}$. Индексом поляризации будем считать, с точностью до нормирующего множителя максимальную (по всевозможным k) сумму разностей мнений индивидов, принадлежащих разным частям разбиения:

$$\pi = \frac{4}{n^2} \max_{k \in N \setminus \{n\}} \sum_{\substack{i \in N_1(k) \\ j \in N_0(k)}} (x_i - x_j). \quad (2)$$

Содержательный смысл индекса поляризации (2) следующий. Группа индивидов разбита на два множества в соответствии с их мнениями. Индивиды из первого множества тяготеют к полюсу 0, индивиды из второго множества — к полюсу 1. Чем больше различие средних мнений и чем ближе число индивидов в подмножествах, тем выше поляризация. Легко видеть, что минимальное значение, равное нулю, индекс (2) принимает в случае, когда все мнения совпадают (см. графики с маркерами в виде квадратов на рис. 2). Нетрудно также показать, что максимальное значение индекса (2) равно 1 и достигается в случае, когда ровно половина мнений равна 0, а вторая половина равна 1 (см. графики с маркерами в виде треугольников на



рис. 2). Промежуточное значение индекса можно получить, например, в случае равномерного распределения мнений на отрезке от 0 до 1 (см. графики с маркерами в виде кружков на рис. 2).

Оказывается, что справедливо

Утверждение 2. Значения индексов (1) и (2) совпадают с точностью до константы, зависящей только от числа агентов n .

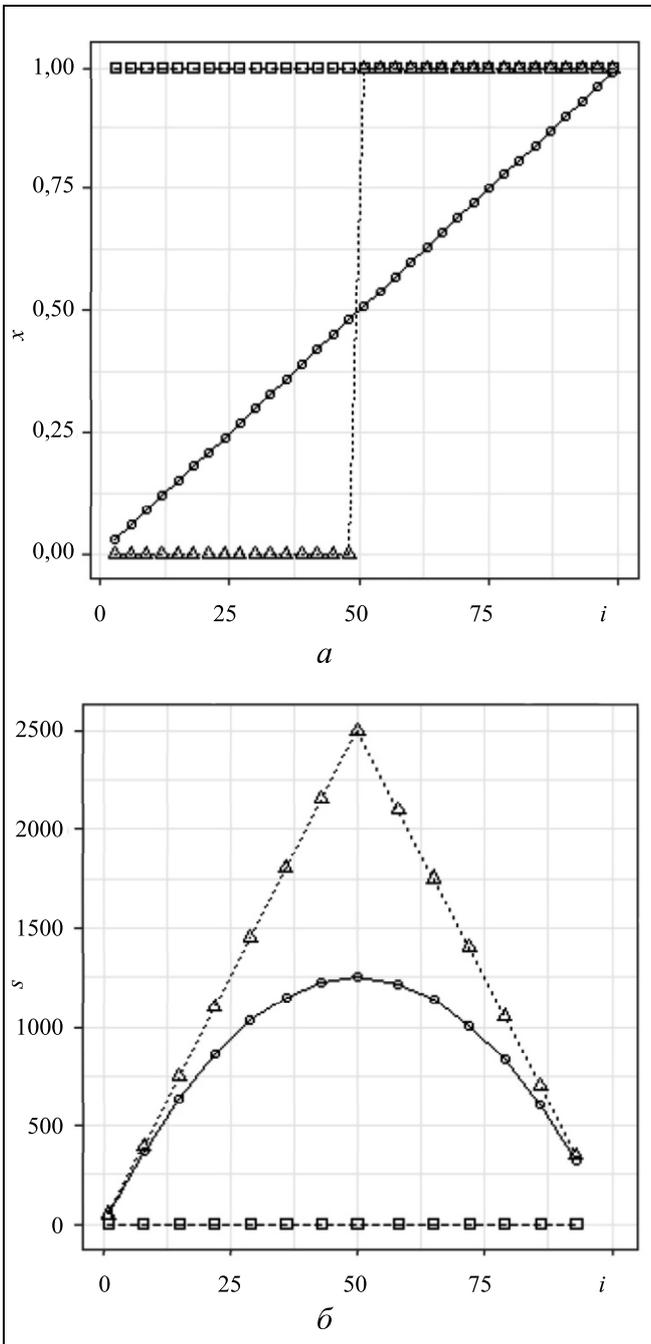


Рис. 2. Значения векторов x_i (а) и значение суммы, максимизируемой в выражении (2) (б)

Доказательство. Докажем сначала, что решением оптимизационной задачи

$$\max_{k \in N \setminus \{n\}} \sum_{\substack{i \in N_1(k) \\ j \in N_0(k)}} (x_i - x_j) \quad (3)$$

являются такие $k \in N \setminus \{n\}$, для которых $x_k \leq \mu \leq x_{k+1}$. Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\psi(k) = \sum_{i \in N_1(k), j \in N_0(k)} (x_i - x_j).$$

Справедливы равенства:

$$\psi(k) = \sum_{i \in N_1(k+1), j \in N_0(k)} (x_i - x_j) + \sum_{j \in N_0(k)} (x_{k+1} - x_j),$$

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= \sum_{i \in N_1(k+1), j \in N_0(k+1)} (x_i - x_j) = \\ &= \sum_{i \in N_1(k+1), j \in N_0(k)} (x_i - x_j) + \sum_{i \in N_1(k+1)} (x_i - x_{k+1}). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует соотношение

$$\psi(k+1) - \psi(k) = \sum_{i \in N} x_i - nx_{k+1} = n(\mu - x_{k+1}),$$

из которого следует, что разность $\psi(k+1) - \psi(k)$ с ростом k монотонно не возрастает (напомним, что мы считаем мнения упорядоченными: $x_1 \leq \dots \leq x_n$), и для некоторого значения k становится неположительной. Поэтому максимум функции $\psi(k)$ достигается в точности для таких значений k (их может быть несколько), для которых одновременно выполнены условия

$$\psi(k+1) - \psi(k) \leq 0, \quad \psi(k) - \psi(k-1) \geq 0,$$

т. е. $x_k \leq \mu \leq x_{k+1}$, что и определяет значения k , являющиеся решением оптимизационной задачи (3).

Таким образом, соотношение (2) можно переписать в виде

$$\pi = \frac{4}{n^2} \sum_{i \in N_1(k), j \in N_0(k)} (x_i - x_j),$$

где k такое, что $x_j \leq \mu$ для $j \in N_0(k)$ и $x_i \geq \mu$ для $i \in N_1(k)$. Завершают доказательство утверждения 2 цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} |x_i - \mu| &= \sum_{i=1}^k (\mu - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - \mu) = \\ &= k\mu - \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i - (n-k)\mu = \\ &= (2k-n)\mu + \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^k x_i = 2 \left(k\mu - \sum_{i=1}^k x_i \right); \\ \sum_{i \in N_1(k), j \in N_0(k)} (x_i - x_j) &= k \sum_{i=k+1}^n x_i - (n-k) \sum_{i=1}^k x_i = \\ &= k \sum_{i=1}^n x_i - n \sum_{i=1}^k x_i = n \left(k\mu - \sum_{i=1}^k x_i \right). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Утверждение 2 показывает, что в одномерном случае индексы (1) и (2) дают, по сути, один и тот же результат.

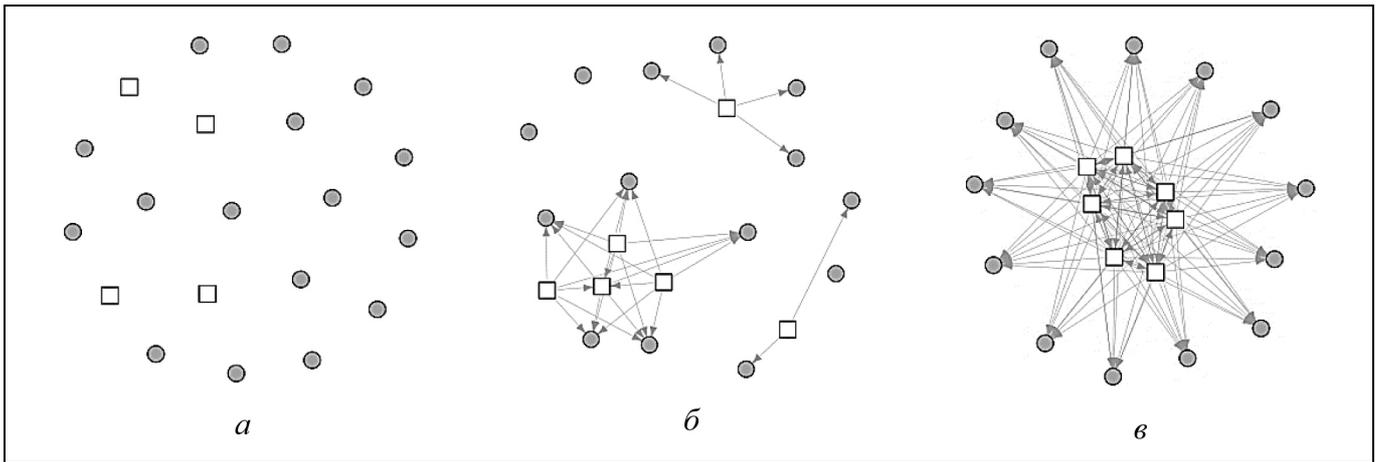


Рис. 3. Взаимосвязь процессов активности и влияния при $k = 0$ для разных значений γ : $\gamma = 0,1$ (а); $\gamma = 0,5$ (б); $\gamma = 1$ (в); тип вершин отражает текущее состояние агента (\square — активен, \circ — не активен)

Рассмотрим теперь многомерный случай, когда мнение x_i каждого агента представляет собой не число на отрезке $[0, 1]$, а стохастический вектор из m компонент: $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$.

Естественное обобщение индекса (1) на многомерный случай — среднее расстояние до точки, представляющей собой покомпонентное среднее значение мнений агентов:

$$\Pi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, \mu) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{q=1}^m |x_{iq} - \mu_q|, \quad (3)$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iq}$, $q \in M = \{1, \dots, m\}$.

Многомерный индекс поляризации, определяемый выражением (3), будем называть *симметричным* индексом поляризации.

Рассмотрим теперь обобщение индекса, определяемого выражением (2). Он основан на делении множества агентов на два множества — тяготеющих к полюсу 0 и тяготеющих к полюсу 1. В многомерном случае эти два полюса можно выделять различными способами, каждый из которых соответствует разбиению множества $M = \{1, \dots, m\}$ на два непустых подмножества. Зафиксировав разбиение $M = M_0 \cup M_1$, $M_0 \cap M_1 = \emptyset$, поставим i -му агенту с вектором мнений $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ его *агрегированное мнение*, характеризующее расположение агента между двумя полюсами M_0 и M_1 — число $y_i = \sum_{j \in M_1} x_{ij}$. Заметим, что при этом $1 - y_i = \sum_{j \in M_0} x_{ij}$, т. е. ситуация свелась к одномерному случаю с двумя полюсами мнений. Поэтому обобщением ин-

декса поляризации (2) служит выражение, зависящее от разбиения $M = M_0 \cup M_1$:

$$\pi(M_0, M_1) = \frac{4}{n^2} \max_{k \in N \setminus \{n\}} \sum_{\substack{i \in N_1(k) \\ j \in N_0(k)}} (y_i - y_j), \quad (4)$$

где, не ограничивая общности, будем считать, что агрегированные мнения упорядочены по неубыванию (т. е. $y_1 \leq \dots \leq y_n$), а максимум ищется, как и в случае индекса (2), по всевозможным разбиениям агентов на два множества $N_0(k) = \{1, \dots, k\}$ и $N_1(k) = \{k + 1, \dots, n\}$.

Многомерный индекс поляризации, определяемый выражением (4), будем называть *асимметричным* индексом поляризации.

3. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

В целях иллюстрации качественных особенностей модели, рассмотрим ее в несколько упрощенной форме: в рамках настоящего параграфа будем считать $\alpha = \beta = 0$, матрица A соответствует полному графу и

$$\phi(d) = \max\{0, 1 - d/\gamma\}.$$

При таком выборе параметров и вида функции $\phi(d)$, в модели возникает внутригрупповое взаимодействие: «инициаторами» таких групп выступают активные агенты, а i -й неактивный узел принимает сообщения от j -го активного узла только при $d_{ij}^{(k)} < \gamma$ (рис. 3).

Поскольку матрица A связей между агентами соответствует полному графу, наличие ребер и их направление полностью определяются матрицей $B^{(t)}$.

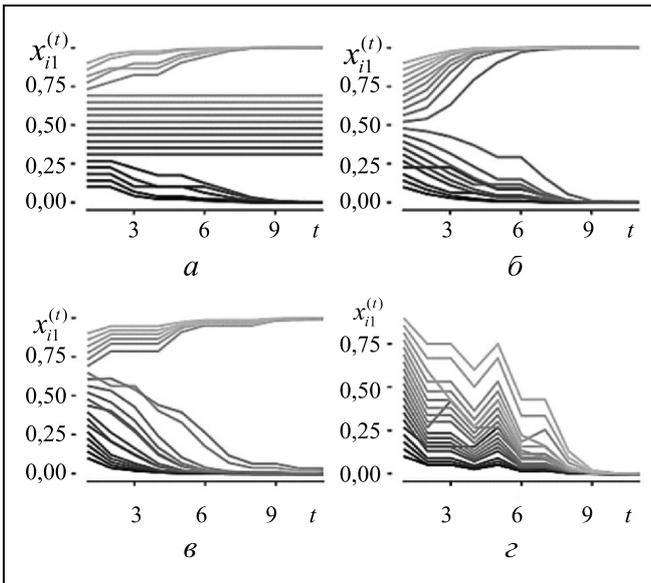


Рис. 4. Траектории первой компоненты вектора $x_i^{(t)}$ в случае $m = 2, n = 20$: $\gamma = 0,3$ (а); $\gamma = 0,5$ (б); $\gamma = 0,7$ (в); $\gamma = 1$ (з)

Рассмотрим случаи двух- и трехкомпонентного вектора мнений.

Случай $m = 2$. Пусть в момент времени $t = 0$ агенты равномерно распределены на отрезке $[0,1, 0,9]$. В такой размерности зависимость траекторий $x_i^{(t)}$ легко представить графически (рис. 4).

В случае $\gamma < 1/2$ возникает множество агентов, невосприимчивых к сообщениям соседей. Для $1/2 \leq \gamma \leq 1$ i -й агент, чья первая компонента $x_i^{(0)}$ лежит в интервале $[1 - \gamma, \gamma]$, может попасть под влияние или сообщения $s_j^{(t)} = (0, 1)$ или $s_j^{(t)} = (0, 1)$ в зависимости от активности остальных агентов: в такой ситуации агент имеет склонность отдавать предпочтение информации, полученной первой (*primacy effect*). На рис. 4 показаны различные эффекты динамики мнений: сохранение различий во мнениях (рис. 4, а), согласование мнений — консенсус (рис. 4, з), а также усиление различий во мнениях или поляризация (значение индекса поляризации для случаев рис. 4, а–з составляет 0,3, 0,5, 0,4 и 0 соответственно).

Случай $m = 3$ можно представить в виде симплекса (рис. 5), точки которого характеризуют соотношение между компонентами вектора $x_i^{(t)}$. В отличие от двумерного случая, вместо $\gamma = 1/2$ «порогом» будет выступать значение $\gamma = 2/3$. Кроме того, центр масс нечувствителен к доле «невосприимчивых» агентов, в то время как значение индекса поляризации отражает их роль.

На рис. 5, а, б показано сохранение различий во мнениях, рис. 5, з соответствует консенсусу, а рис. 5, в — поляризации (значение симметричного индекса поляризации для случаев рис. 5, а–з составляет 0,2, 0,4, 0,7 и 0 соответственно).

Во всех рассмотренных случаях параметр γ не зависел от типа сообщения, принимаемого агентом. Преобразуем функцию $\phi(d)$, явным образом записав зависимость $d = d(x, s)$:

$$\phi(d(x, s)) = \max \left\{ 0, 1 - \sum_{l=1}^3 \frac{|x_l^{(k)} - s_l^{(k)}|}{2\gamma_l} \right\}.$$

Тогда множество агентов, невосприимчивых к сообщениям соседей, при $t \rightarrow \infty$ характеризуется ограничениями:

$$x_1 + x_2 \geq \gamma_3;$$

$$x_1 + x_3 \geq \gamma_2;$$

$$x_2 + x_3 \geq \gamma_1.$$

На рис. 6 и 7 показаны два случая итогового распределения векторов мнений агентов для различных γ_l .

В случае $\gamma_l = (0,3; 0,3; 0,7)$ (см. рис. 6) симметричный индекс поляризации равен 0,42, в то время

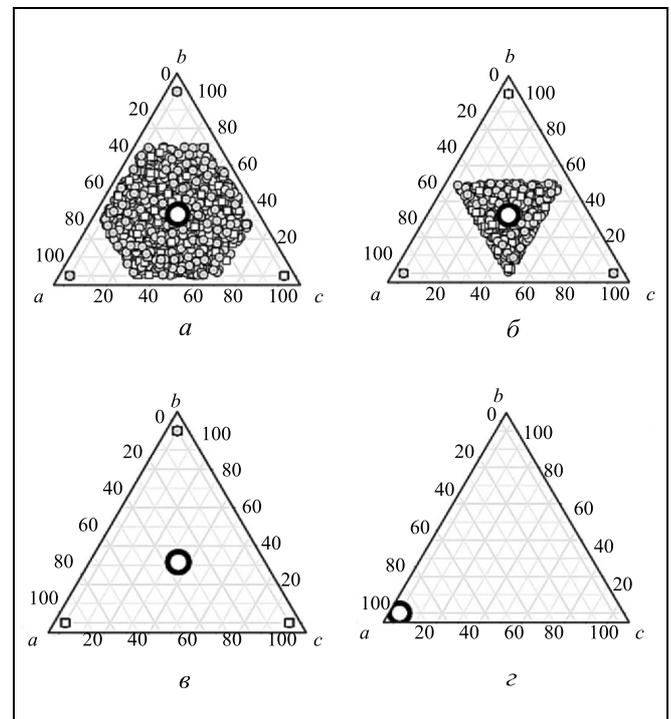


Рис. 5. Распределение мнений агентов при $m = 3$ и $t \rightarrow \infty$: $\gamma = 0,3$ (а); $\gamma = 0,5$ (б); $\gamma = 0,7$ (в); $\gamma = 1$ (з); \circ — центр масс

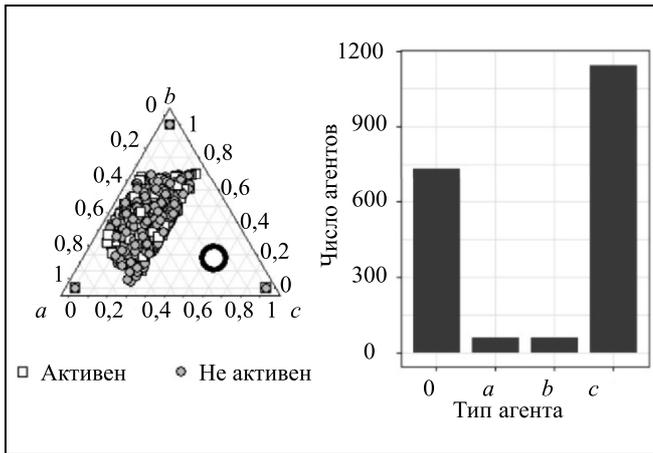


Рис. 6. Итоговое распределение мнений агентов при $m = 3$ и $\gamma_1 = (0,3; 0,3; 0,7)$

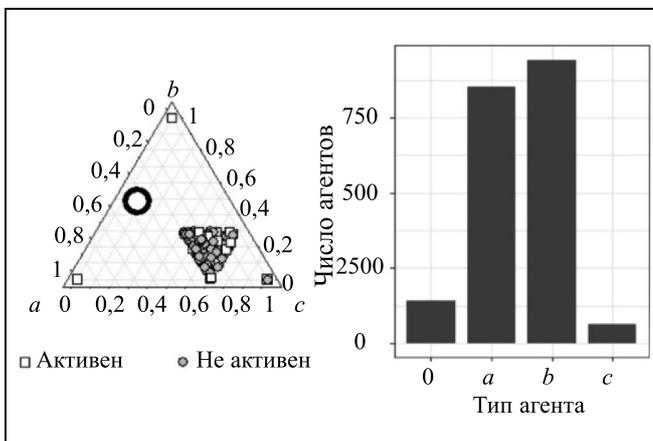


Рис. 7. Итоговое распределение мнений агентов при $m = 3$ и $\gamma_1 = (0,7; 0,7; 0,3)$

как асимметричный принимает значение 0,42, 0,45 и 0,82 в зависимости от разбиения множества компонент мнений на два непустых подмножества.

В случае $\gamma_1 = (0,7; 0,7; 0,3)$ (см. рис. 7) симметричный индекс поляризации равен 0,54, в то время как асимметричный принимает значение 0,91, 0,97 и 0,29 в зависимости от разбиения множества компонент мнений на два непустых подмножества.

Видно, что для этих двух существенно различных случаев итоговых распределений мнений (см. рис. 6 и 7) симметричный индекс поляризации принимает примерно одинаковые значения, в то время как предложенный в данной работе асимметричный индекс отражает различие ситуаций и позволяет находить направления поляризации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные примеры показывают, что предлагаемая модель динамики мнений достаточно гибкая и содержательно богатая, позволяющая учитывать значимые эффекты формирования мнений в социальных сетях, в том числе поляризацию мнений. Показано также, что предложенный индекс поляризации позволяет различать и оценивать ситуации с содержательно различными многомерными распределениями мнений участников сети, а также находить направления наибольшей поляризации. Перспективное направление дальнейших исследований состоит в моделировании динамики мнений для более сложных сетевых структур, а также в исследовании задач управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chkhartishvili, A.G., Gubanov, D.A., Novikov, D.A. Social Networks: Models of information influence, control and confrontation. — Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019.
2. De Groot, M.H. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. — 1974. — No. 69. — P. 118—121.
3. Kozitsin, I.V., Belolipetskii, A.A. Opinion convergence in the Krasnoshechekov model // The Journal of Mathematical Sociology. — 2019. — Vol. 43, no. 2. — P. 104—121.
4. Myers, D.G. Social Psychology. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1999.
5. Deffuant, G., Neau, D., Amblard, F., Weisbuch, G. Mixing Beliefs among Interacting Agents // Advances in Complex Systems. — 2000. — Vol. 03. — P. 87—98.
6. Parsegov, S.E., Proskurnikov, A.V., Tempo, R., Friedkin, N.E. Novel Multidimensional Models of Opinion Dynamics in Social Networks // IEEE Trans. Autom. Control. — 2017. — Vol. 62, no. 5. — P. 2270—2285.
7. Friedkin, N.E., Proskurnikov, A.V., Tempo, R., Parsegov, S.E. Network Science on Belief System Dynamics under Logic Constraints // Science. — 2016. — Vol. 354, no. 6310. — P. 321—326.
8. Altafini, C. Consensus Problems on Networks with Antagonistic Interactions // IEEE Trans. Autom. Control. — 2014. — Vol. 58, no. 4. — P. 935—946.
9. Petrov, A., Proncheva, O. Modeling Propaganda Battle: Decision-Making, Homophily, and Echo Chambers / Conference on Artificial Intelligence and Natural Language, 2018. — P. 197—209.
10. Sirbu, A., Pedreschi, D., Giannotti, F., Kertész, J. Algorithmic Bias Amplifies Opinion Fragmentation and Polarization: A Bounded Confidence Model // PLOS ONE. — 2019. — No. 3 (14). — P. e0213246. — URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0213246>
11. Chkhartishvili, A.G., Gubanov, D.A. A Conceptual Approach to Online Social Networks Analysis // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, no. 8. — P. 1455—1462.
12. Chkhartishvili, A.G., Gubanov, D.A. Influence Levels of Users and Meta-Users of a Social Network // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 3. — P. 545—553.
13. Hegselmann, R., Krause, U. Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis and Simulation // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. — 2002. — Vol. 5, no. 3.



14. *Hegselmann, R., Krause, U.* Opinion Dynamics under the Influence of Radical Groups, Charismatic Leaders, and Other Constant Signals: A Simple Unifying Model // *Networks and Heterogeneous Media*. — 2015. — Vol. 10, no. 3. — P. 477–509.
15. *Jager, W., Amblard, F.* Uniformity, Bipolarization and Pluriformity Captured as Generic Stylized Behavior with an Agent-based Simulation Model of Attitude Change // *Computational & Mathematical Organization Theory*. — 2005. — Vol. 10, no. 4. — P. 295–303.
16. *Maes, M., Bischofberger, L.* Will the Personalization of Online Social Networks Foster Opinion Polarization? // Available at SSRN 2553436. — 2015.
17. *Takács, K., Flache, A., Mäs, M.* Discrepancy and Disliking Do not Induce Negative Opinion Shifts // *PLOS ONE*. — 2016. — Vol. 11, no. 6. — P. e0157948.
18. *Gentzkow, M.* Polarization in 2016 // *Toulouse Network for Information Technology Whitepaper*. — 2016.
19. *Abramowitz, A.I., Saunders, K.L.* Is Polarization a Myth? // *The Journal of Politics*. — 2008. — Vol. 70, no. 2. — P. 542–555.
20. *Esteban, J.-M., Ray, D.* On the Measurement of Polarization // *Econom. J. Econom. Soc.* — 1994. — Vol. 62, iss. 4 — P. 819–851.
21. *Алескеров Ф.Т., Голубенко М.А.* Об оценке симметричности политических взглядов и поляризованности общества. Препринт WP7/2003/04 — М.: ГУ ВШЭ, 2003. [*Aleskerov, F., Golubenko, M.* On the evaluation of a symmetry of political views and polarization of society. Working paper WP7/2003/04. — Moscow: State University — Higher School of Economics, 2003. (In Russian)]
22. *Губанов Д.А., Петров И.В.* О модели поляризации мнений в социальных сетях / Материалы 12-й междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2019, Москва, ИПУ РАН). — М, 2019. — С. 1200–1202. [*Gubanov, D.A., Petrov, I.V.* Multidimensional Model of Opinion Polarization in Social Networks / *Proceedings of the 12th Intern. Conf. «Management of Large-Scale System Development» (MLSD)*. Moscow, Russia: IEEE, 2019. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8910967>]

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

*Поступила в редакцию 20.12.2019, после доработки 16.01.2020.
Принята к публикации 5.02.2020.*

Губанов Дмитрий Алексеевич — канд. техн. наук,
✉ dmitry.a.g@gmail.com,

Петров Илья Владимирович — аспирант,
✉ zyxzy@protonmail.ch,

Чхартишвили Александр Гедванович — д-р физ.-мат. наук,
✉ sandro_ch@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

MULTIDIMENSIONAL MODEL OF OPINION DYNAMICS IN SOCIAL NETWORKS: POLARIZATION INDICES

D.A. Gubanov¹, I.V. Petrov², A.G. Chkhartishvili³

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ dmitry.a.g@gmail.com, ²✉ zyxzy@protonmail.ch, ³✉ sandro_ch@mail.ru

Abstract. We consider a multidimensional model of opinion dynamics in social networks. Within the framework of the model, the dynamics of two interconnected information processes in a social network is studied. The first process is the excitation of agents and their externally observed actions (e. g., in the form of messages published in the network). The second process, which has an obvious connection with the first one, is the formation of agents' opinions (which are a characteristic of their internal state). We demonstrate that the proposed model of opinion dynamics is flexible, allowing to take into account the significant effects of opinion formation in social networks, including consensus or agreement of opinions, preservation of differences in the agents' opinions, and even polarization of opinions. We propose approaches to measuring the polarization of opinions and present the simulation results. We show that the proposed polarization index for a network allows us to distinguish and evaluate situations with meaningfully different multidimensional distributions of opinions in a social network, as well as to find directions for the greatest polarization.

Keywords: social network, opinion dynamics, activity spreading, opinions polarization, polarization measures.

Funding. The work was performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research, project no. 18-29-22042.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ПОРОГОВАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВОГО РЫНКА

В.В. Бреер

Аннотация. Рассмотрена теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения агентов, участвующих в купле-продаже одиночного биржевого актива. Агенты разделены на две группы — покупатели и продавцы. Предполагается, что у каждого из агентов существует порог приемлемой ему цены, для покупателя — это верхняя цена, при которой он еще согласен на сделку, а для продавца — это нижняя «комфортная» в том же смысле цена. Учитывается, что агент принимает решение, участвовать ли в сделке, сравнивая свою пороговую цену с рыночной ценой. Предполагается, что на рыночную цену влияют объемы спроса и предложения в соответствии с классическими кривыми спроса и предложения. Построены эмпирические функции распределения ценовых порогов, которые служат для характеристики равновесия Нэша, а также позволяют в перспективе исследовать предельный переход к бесконечному числу агентов. Доказано утверждение о характеристике равновесия Нэша, первая часть которого показывает объемы потенциального спроса и предложения, вторая часть — состояния агентов, исходя из объемов спроса и предложения. Исследованы примеры существования и условия единственности равновесия Нэша. Найдены фокальные точки среди всех равновесий Нэша.

Ключевые слова: теоретико-игровая модель, бинарное пороговое коллективное поведение, биржевой товарный рынок, равновесие Нэша.

ВВЕДЕНИЕ

Упрощенно говоря, главной мотивацией в принятии решения покупателя или продавца совершить сделку служит излишек, представляющий собой разницу между реальной рыночной ценой и пороговой (внутренне комфортной) ценой участника рынка. Для продавца этот порог, например, может обуславливаться себестоимостью актива либо, в случае намерения срочно сбыть актив, — быстротой реализации товара. Для покупателя порог может определяться ограничением денежных ресурсов или полезностью данного актива. Возможны и другие, более сложные стратегии определения «комфортной цены» для участников рынка, но нас будет интересовать этап сделки, когда эта цена каждым уже определена.

Принимая участие в биржевых торгах, участники, как правило заранее определяют цену, по которой они готовы совершить сделку, а также объем (число единиц) товара. Перед покупателями и продавцами стоит бинарный выбор: объявить (действовать) или не объявлять (бездействовать) о своем намерении совершить транзакцию актива — куплю или продажу.

Для описания этого поведения была выбрана теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения. Близки к ней модели бинарного коллективного поведения, а также основанные на аппаратах статистической физики частиц с двумя состояниями [1, 2], случайных разностных схем [3] и пороговой динамики [4, 5]. Теоретико-игровые пороговые модели подобного типа рассмотрены в статье [6].

В предлагаемой математической модели рынка рассматриваются два конечных множества агентов — покупатели и продавцы, каждый из которых принимает бинарное решение участвовать в торгах со своей ценой и объемом или не участвовать. В результате действий агентов объемы спроса и предложения меняют рыночную цену актива в соответствии с законами экономической теории [7]: рост спроса увеличивает цену, а рост предложения ее уменьшает. Далее определяются условия на агентскую пороговую и рыночную цены, при которых для агента обстановка благоприятна. При этом учитываются удельные издержки агентов. Считается что, участие или неучастие одного агента в торгах не сильно влияет на рыночную цену актива.



После определения всех свойств математической модели рынка задается игра в нормальной форме и находится характеристика равновесия Нэша для этой игры. Отметим, что это равновесие не объясняет, сколько сделок реально произойдет в торгах, а лишь определяет объем спроса и предложения. Чему будет равна цена и сколько сделок состоится, зависит от правил, установленных на бирже.

1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

Пусть агенты играют в «игру на рынке с одним биржевым активом», правила которой заключаются в следующем:

- В игре участвуют два множества агентов: S (*Sellers*) — конечное множество продавцов и B (*Buyers*) — конечное множество покупателей, их число обозначим через $n_S = |S|$ и $n_B = |B|$ соответственно.

- Покупатель $i \in B$ принимает бинарное решение $\omega_i \in \{0, 1\}$ — купить ($\omega_i = 1$) или не купить ($\omega_i = 0$) актив фиксированного количества (объема) $v_i \in \mathbf{Z}^+$ (целое число) по цене за единицу, не превышающей порога $C_B(i) \in \mathbf{R}^+$. Этот порог может иметь различные причины, зависящие от конкретной содержательной интерпретации математической модели. Так, если мы в качестве этой интерпретации подразумеваем ограничение ресурсов покупателя $i \in B$, намеревающегося совершить покупку, то величина $C_B(i)v_i$ как раз равна этим бюджетным ограничениям. Если же покупатель действует на бирже, намереваясь совершить покупку какого-то актива, то порог возникает вследствие субъективных представлений покупателя о цене $C_B(i)$ актива в будущем. Объем спроса покупателей обозначим через $v_B = v_B(\omega_B) = \sum_{i \in B} v_i \omega_i$, где $\omega_B = \{\omega_i\}_{i \in B}$. Объем всего

потенциального спроса обозначим через $V_B = \sum_{i \in B} v_i$.

- Продавец $j \in S$ принимает бинарное решение $\omega_j \in \{0, 1\}$ — продать ($\omega_j = 1$) или не продавать ($\omega_j = 0$) актив не более фиксированного количества (объема) $v_j \in \mathbf{Z}^+$ (целое число) по цене, не ниже порога $C_S(j) \in \mathbf{R}^+$. Как и в случае с покупателем, порог может иметь различные причины, зависящие от конкретной содержательной интерпретации математической модели. Так если мы в качестве этой интерпретации подразумеваем себестоимость актива, который в количестве $v_j \in \mathbf{R}^+$ продавец $j \in S$ намеревается выставить на продажу, то величина $C_S(j)v_j$ равна этой себестоимости. Если же продавец действует на бирже, намереваясь совершить продажу какого-то актива, то порог возникает вследствие

субъективных представлений поставщика о цене $C_S(j)$ актива в будущем. Объем предложения продавцов обозначим через $v_S = v_S(\omega_S) = \sum_{j \in S} v_j \omega_j$, где $\omega_S = \{\omega_j\}_{j \in S}$. Объем всего потенциального предложения обозначим через $V_S = \sum_{j \in S} v_j$.

- Объемы спроса $v_B(\omega_B)$ и предложения $v_S(\omega_S)$ влияют на удельную цену актива $P(v_B(\omega_B), v_S(\omega_S))$, единую для всего рынка. В соответствии с классическими кривыми спроса и предложения (см., например, работу [7]) будем считать, что функция цены $P(\cdot, \cdot)$ не убывает по первому аргументу — объему спроса, и не возрастает по второму — объему предложения.

- Множество $\omega_{-i} = \{\omega_j\}_{j \neq i}$ будем называть обстановкой агента $i \in B \cup S$. Обстановку ω_{-i} покупателя $i \in B$, для которой

$$C_B(i) - P(v_{B \setminus i}(\omega_{B \setminus i}), v_S(\omega_S)) > 0, \quad (1)$$

или обстановку ω_{-j} продавца $j \in S$, для которой

$$P(v_B(\omega_B), v_{S \setminus j}(\omega_{S \setminus j})) - C_S(j) > 0, \quad (2)$$

будем называть благоприятной обстановкой для покупателя или продавца соответственно. В экономической теории разность в условии (1) называется *излишком потребителя* [7]. Разность в условии (2), следуя этой логике, назовем *излишком продавца*. Эти излишки возникают, как указывалось выше, вследствие бюджетных ограничений, себестоимости актива или представлений участников рынка о будущей цене актива.

- Каждый покупатель и продавец (агент) $i \in B \cup S$ при совершении сделки несет удельные издержки $\varepsilon_i > 0$, которые меньше минимального излишка этого агента при любой благоприятной обстановке:

$$\varepsilon_i < \min_{\{\omega_{-i}: C_B(i) > P(v_{B \setminus i}, v_S)\}} [C_B(i) - P(v_{B \setminus i}, v_S)], \quad i \in B, \quad (3)$$

$$\varepsilon_i < \min_{\{\omega_{-i}: P(v_B, v_{S \setminus i}) > C_S(i)\}} [P(v_B, v_{S \setminus i}) - C_S(i)], \quad i \in S. \quad (4)$$

Этими издержками может быть комиссия на транзакцию, установленная биржей.

- Будем считать, что справедлива гипотеза слабого влияния [8, с. 32] действий агентов на цену актива:

$$\max_{\omega_{-i}} [P(v_{B \setminus i} + v_i, v_S) - P(v_{B \setminus i}, v_S)] < \varepsilon_i, \quad i \in B, \quad (5)$$

$$\max_{\omega_{-i}} [P(v_B, v_{S \setminus i}) - P(v_B, v_{S \setminus i} + v_i)] < \varepsilon_i, \quad i \in S, \quad (6)$$

т. е. максимальная разница между ценами актива при действии или бездействии отдельного игрока

(продавца или покупателя) такова, что она меньше удельных издержек этого игрока. Другими словами, игрок слабо влияет на рыночную цену.

Указанные выше ограничения модели вполне подходят для описания биржевых торгов, например, на валютной бирже Forex. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности для других содержательных интерпретаций, будем описывать возникающие эффекты в рамках примера валютной биржи.

2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

Цель покупателей на бирже — получение прибыли, поэтому целевую функцию покупателя $i \in B$ запишем в виде:

$$u_i(\omega_i, v_{B \setminus i}, v_S) = (C_B(i) - P(v_{B \setminus i}, v_S) - \varepsilon_i)\omega_i v_i \quad (7)$$

Получит ли он реально прибыль по окончании сделки, зависит от многих факторов, но его намерение действовать $\omega_i = 1$, а именно купить актив, зависит от того, будет ли положительным значение выражения, стоящего в скобках формулы (7). Как видно из этого определения целевой функции, кроме не сильно измененной в силу гипотезы слабого влияния (5) рыночной цены, на решение покупателя влияет его оценка будущей цены $C_B(i)$. На биржевых торгах величина ε_i является комиссией, которая взимается с покупателя за осуществление сделки. Покупатель заранее фиксирует цену $C_B(i)$, а также объем актива v_i , который он намеревается купить. После формирования ордера на покупку запускается тот или иной механизм сделки, определяемый правилами биржевой торговли.

Целевую функцию продавца $i \in S$, по аналогии, запишем в виде:

$$u_i(\omega_i, v_{S \setminus i}, v_B) = (P(v_{S \setminus i}, v_B) - C_S(i) - \varepsilon_i)\omega_i v_i \quad (8)$$

Рассмотрим игру в нормальной форме $G = (\{0, 1\}^{n_S + n_B}, \{u_i\}_{i \in S \cup B}, S \cup B)$. Будем считать, что агенты информированы об игре G и ведут себя так, чтобы максимизировать свои целевые функции.

Определение равновесия Нэша $\omega^* \in \{0, 1\}^{n_S + n_B}$ в игре G имеет вид:

$$u_i(\omega_i^*, v_{B \setminus i}^*, v_S^*) \geq u_i(1 - \omega_i^*, v_{B \setminus i}^*, v_S^*), \quad \forall i \in B, \quad (9)$$

$$u_i(\omega_i^*, v_{S \setminus i}^*, v_B^*) \geq u_i(1 - \omega_i^*, v_{S \setminus i}^*, v_B^*), \quad \forall i \in S, \quad (10)$$

где $v_{S \setminus i}^*$, v_B^* и $v_{B \setminus i}^*$, v_S^* — объемы соответствующих спроса и предложения при ситуации $\omega^* \in \{0, 1\}^{n_S + n_B}$.

Введем обозначения:

$$\Phi_B(x) = \sum_{i \in B} v_i \chi\{C_B(i) > x\} \text{ — для объема спроса}$$

покупателей B , которые имеют ценовые пороги больше x (где χ — индикатор множества), и

$$\Phi_S(x) = \sum_{i \in S} v_i \chi\{C_S(i) < x\} \text{ — для объема предложения}$$

продавцов S , которые имеют ценовые пороги меньше x .

Функция $\Phi_S(\cdot)/V_S$ — эмпирическая функция распределения ценовых порогов продавцов с поправкой на доли объема предложения. Аналогично, функция $1 - \Phi_B(\cdot)/V_B$ — эмпирическая функция распределения ценовых порогов покупателей с поправкой на доли объема спроса. Эти функции при соответствующем предельном переходе по числу игроков могут сходиться к некоторым распределениям, в этом случае можно ставить задачу типа закона больших чисел, центральной предельной теоремы и больших уклонений. В этой работе мы остановимся на теоретико-игровой модели с конечным числом игроков.

Имеет место следующая характеристика равновесия Нэша рассматриваемой игры G .

Утверждение. Пусть пара чисел v_B^* , v_S^* — решение системы уравнений

$$\begin{cases} v_B^* = \Phi_B(P(v_B^*, v_S^*)) \\ v_S^* = \Phi_S(P(v_B^*, v_S^*)) \end{cases}, \quad (11)$$

и ситуация $\omega^* = \omega_S^* \times \omega_B^* \in \{0, 1\}^{|S|} \times \{0, 1\}^{|B|}$ удовлетворяет условиям:

$$\omega_B^* : \omega_i^* = \chi\{C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*)\}, \quad \forall i \in B, \quad (12)$$

$$\omega_S^* : \omega_i^* = \chi\{C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*)\}, \quad \forall i \in S. \quad (13)$$

Тогда она является равновесием Нэша (9), (10) игры G с объемами спроса v_B^* покупателей и предложения v_S^* продавцов.

Обратно, пусть ситуация $\omega^* = \omega_S^* \times \omega_B^* \in \{0, 1\}^{|S|} \times \{0, 1\}^{|B|}$, в которой объемы активов продавцов и покупателей равны соответственно v_S^* и v_B^* , является равновесием Нэша (9), (10) игры G . Тогда для нее выполнены условия (11), (12) и (13). ♦

Доказательство утверждения см. в Приложении.

Как видно из утверждения, при равновесии Нэша может возникнуть избыточный (неудовлетворенный) спрос при $v_B^* > v_S^*$ в условии (11) или избыточное предложение (при $v_B^* < v_S^*$). Таким образом равновесие Нэша в этой игре не приводит к классическому рыночному равновесию равенства величин спроса и предложения. Так как возможно купить только тот объем, который выставлен на



Пример равновесия Нэша при $n_B = 9, n_S = 7, P(i, j) = 5$

$\omega_p, i \in B$	$C_B(i) = i - 1$	$i \in B$	$P(i, j) = \max(i, n_S - j)$	j	$C_S(n_B + j) = j - 1$	$\omega_{n_B + j}, n_B + j \in S$
0	0	1	6	1	0	1
0	1	2	5	2	1	1
0	2	3	4	3	2	1
0	3	4	4	4	3	1
0	4	5	5	5	4	1
0	5	6	6	6	5	0
1	6	7	7	7 = n_S	6	0
1	7	8				0
1	8	9 = n_B				0

продажу (и продать только тот объем, который купят), то в реальности при неудовлетворенном спросе будет совершено сделок на сумму $P(v_B^*, v_S^*)v_S^*$ (это соответствует понятию *объем торговли* (Trade Volume) в аналитике биржевых торгов). Остальная часть сделок $P(v_B^*, v_S^*)(v_B^* - v_S^*)$ останется незакрытыми, что соответствует понятию *открытого интереса* (Open Interest) в аналитике биржевых торгов. При избыточном предложении ($v_B^* < v_S^*$) можно рассуждать аналогично, получив незакрытую часть сделок $P(v_B^*, v_S^*)(v_S^* - v_B^*)$.

Существование и единственность равновесия Нэша. Если все пороги покупателей находятся левее всех порогов поставщиков, то единственным равновесием Нэша (нулевым) будет ситуация, когда все агенты бездействуют. Действительно, ни для какого игрока, будь то покупатель или продавец, не будет существовать *благоприятной обстановки*. Для существования ненулевого равновесия Нэша необходимо (но не достаточно) чтобы хотя бы один порог продавца был больше порога покупателя.

Пусть объемы у каждого покупателя и у каждого продавца единичны $v_i = 1, i \in B, v_j = 1, j \in S$. Тогда функция цены будет зависеть от числа действующих игроков. Упорядочим пороги покупателей $\{C_B(i)\}_{i \in B}$ и продавцов $\{C_S(i)\}_{i \in S}$ по возрастанию вдоль оси \mathbf{R}^+ . Будем считать, что не существует покупателей с порогом меньше минимального порога продавцов $C_S(n_S)$, а также не существует продавцов с порогом больше максимального порога покупателей $C_B(n_B)$. Их всегда можно не учитывать, так как эти покупатели и продавцы будут бездействовать при любой обстановке.

Обозначим через $P(i, j)$ функцию цены для каких-то натуральных чисел $0 \leq i \leq n_B$ и $0 \leq j \leq n_S$. Согласно утверждению, выполнение условия $C_B(i) > P(i, j) > C_S(j)$ эквивалентно равновесию Нэша. В силу упорядоченности индекса игроков по возрастанию порогов, все покупатели с индек-

сами $i' \in B : i' \leq i$ и продавцы $j' \in S : j' \geq j$ будут действовать. Остальные — бездействовать.

В качестве примера рассмотрим такие параметры игры: $\{C_B(i) = i - 1\}_{1 \leq i \leq n_B}, \{C_S(n_B + j) = j - 1\}_{1 \leq j \leq n_S}, P(i, j) = \max(i, n_S - j)$. Пример равновесия Нэша в этой игре с параметрами $n_B = 9, n_S = 7, P(i, j) = 5$ представлен в таблице (в ней ячейка для рыночной цены $P(i, j) = 5$ выделена полужирным). Легко заметить, что равновесие Нэша будет существовать для любого значения рыночной цены, а всего в такой игре будет $\min(n_B, n_S)$ равновесий Нэша, поэтому единственности, в общем, нет.

Если же мы будем выбирать из существующих равновесий Нэша те, которые минимизируют либо избыточный спрос, либо избыточное предложение, то тем самым мы, с одной стороны, выделим фокальные точки среди равновесий Нэша, а, с другой, приблизим игру к описанию классического рыночного равновесия. Так, например, для игры, представленной в таблице, такое равновесие будет при рыночной цене, равной четырем. Тогда будет равное число покупателей и продавцов (по четыре), участвующих в сделке. Формальное описание таких фокальных точек представляет интерес для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения игроков — продавцов и покупателей — на биржевом рынке. Найденная характеристика равновесия Нэша в этой игре позволяет определить уровни потенциальных спроса и предложения, а через них и состояния игроков. Модель описывает намерения игроков, но состоятся ли сделки, зависит от правил определения рыночной цены на конкретной бирже, а также от определения очередности сделок на ней.

Представляется перспективным расширить эту модель, чтобы она позволила определить реальную рыночную цену, объем спроса и предложения, исходя из общих правил работы товарных бирж. По-видимому, для этого необходимо перейти к стохастической макромодели и применить методы, аналогичные методам статистической физики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Достаточность. В силу условия (12) и определения функции $\Phi_B(\cdot)$ справедливо равенство:

$$\sum_{i \in B} v_i \omega_i^* = \sum_{i \in B} v_i \chi\{C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*)\} = \Phi_B(P(v_B^*, v_S^*)),$$

значит в силу (11) выполнено равенство $v_B^* = \sum_{i \in B} v_i \omega_i^*$, что является объемом спроса в ситуации ω^* .

Аналогично, в силу условия (13) и согласно определению функции $\Phi_S(\cdot)$ справедливо

$$\sum_{i \in S} v_i \omega_i^* = \sum_{i \in S} v_i \chi\{C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*)\} = \Phi_S(P(v_B^*, v_S^*)),$$

т. е. согласно системе уравнений (11) выполнено равенство $v_S^* = \sum_{i \in S} v_i \omega_i^*$, что является объемом предложения

в ситуации ω^* поставщиками S .

Докажем, что состояние ω^* , подчиняющееся выражениям (11), (12) и (13), является равновесием Нэша (9), (10). Пусть $i \in B$ таково, что $\omega_i^* = 1$, тогда из условия (12) следует, что

$$C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*). \quad (14)$$

Согласно неравенству (14) и *неубыванию* цены $P(\cdot, \cdot)$ по первому аргументу $C_B(i) > P(v_B^* - v_i, v_S^*)$. Кроме того, учитывая что $v_{B \setminus i}^* = v_B^* - v_i$, из определения целевой функции (7) и свойства (3) следует неравенство

$$u_i(1, v_{B \setminus i}^*, v_S^*) = (C_B(i) - P(v_{B \setminus i}^*, v_S^*) - \varepsilon_i) v_i > 0 = u_i(0, v_{B \setminus i}^*, v_S^*),$$

т. е. для $\omega_i^* = 1$ выполнено неравенство Нэша для покупателя $i \in B$.

Если $\omega_i^* = 0$, $i \in B$, то из условия (12) следует, что

$$C_B(i) \leq P(v_B^*, v_S^*). \quad (15)$$

Значит, согласно определению целевой функции (7), неравенствам (15) и $\varepsilon_i > 0$ с учетом $v_{B \setminus i}^* = v_B^*$ выполнено неравенство

$$u_i(0, v_{B \setminus i}^*, v_S^*) = 0 \geq (C_B(i) - P(v_B^*, v_S^*)) v_i > (C_{B \setminus i}(i) - P(v_{B \setminus i}^*, v_S^*) - \varepsilon_i) v_i = u_i(1, v_{B \setminus i}^*, v_S^*),$$

т. е. для $\omega_i^* = 0$ выполнено неравенство Нэша для покупателя $i \in B$.

Таким образом, для любого покупателя $i \in B$ значение ω_i^* , определяемое условием (12), *не уменьшает* значения его целевой функции.

Аналогично это можно показать и для множества продавцов S . Так, пусть $i \in S$ таково, что $\omega_i^* = 1$, тогда из условия (13) следует, что

$$C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*), \quad (16)$$

т. е. согласно неравенству (16) и *невозрастанию* цены $P(\cdot, \cdot)$ по второму аргументу $C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*) \leq P(v_B^*, v_S^* - v_i)$. В силу определения целевой функции (8) и свойства (4), с учетом $v_{S \setminus i}^* = v_S^* - v_i$, выполнено неравенство

$$u_i(1, v_B^*, v_{S \setminus i}^*) = (P(v_B^*, v_{S \setminus i}^*) - C_B(i) - \varepsilon_i) v_i > 0 = u_i(0, v_B^*, v_{S \setminus i}^*).$$

Поэтому при $\omega_i^* = 1$ выполнено равновесие Нэша для поставщика $i \in S$.

Если $\omega_i^* = 0$, $i \in S$, то из условия (13) следует, что

$$C_S(i) \geq P(v_B^*, v_S^*). \quad (17)$$

Согласно определению целевой функции (8), неравенствам (17) и $\varepsilon_i > 0$, учитывая, что $v_{S \setminus i}^* = v_S^*$, выполнено неравенство

$$u_i(0, v_B^*, v_{S \setminus i}^*) = 0 \geq (P(v_B^*, v_{S \setminus i}^*) - C_S(i)) v_i > (P(v_B^*, v_{S \setminus i}^*) - C_S(i) - \varepsilon_i) v_i = u_i(1, v_B^*, v_{S \setminus i}^*),$$

в силу которого действие $\omega_i^* = 0$ выгодно для поставщика $i \in S$. Таким образом, для любого поставщика $i \in S$ значение ω_i^* , определяемое условием (13), *не уменьшает* значения его целевой функции, т. е. состояние ω^* является равновесием Нэша (9) и (10). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $v_B^* = \sum_{i \in B} v_i \omega_i^*$, $v_S^* = \sum_{i \in S} v_i \omega_i^*$ — соответственно объемы спроса и предложения в ситуации равновесия Нэша (9), (10).

Докажем, что из выражения (9) следует условие (12). Предположим, что условие (12) не выполнено, т. е. $\exists i_0 \in B: \omega_{i_0}^* = \chi\{C_B(i_0) \leq P(v_B^*, v_S^*)\}$. Но тогда, если $\omega_{i_0}^* = 1$, то $C_B(i_0) \leq P(v_B^*, v_S^*)$. Так как $v_B^* = v_{B \setminus i_0}^* + v_{i_0}$ и справедливо выражение (5), выполнено неравенство

$$u_{i_0}(1, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*) = (C_B(i_0) - P(v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*) - \varepsilon_{i_0}) v_{i_0} < (C_B(i_0) - P(v_B^*, v_S^*)) v_{i_0} \leq 0 = u_{i_0}(0, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*),$$

т. е. $\omega_{i_0}^* = 1$ не соответствует равновесию Нэша, так как при $\omega_{i_0}^* = 0$ целевая функция (7) имеет строго большее значение.

Если же $\omega_{i_0}^* = 0$, то, в силу предположения, что условие (12) не выполнено, справедливо $C_B(i_0) > P(v_B^*, v_S^*)$. Так как $v_{B \setminus i_0}^* = v_B^*$ и, значит, в силу неравенства (3) выполнено:

$$u_{i_0}(0, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*) = 0 < (C_B(i_0) - P(v_B^*, v_S^*) - \varepsilon_{i_0}) v_{i_0} = u_{i_0}(1, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*),$$



т. е. $\omega_{i_0}^* = 0$ не соответствует равновесию Нэша. Согласно принципу «от противного» из выражения (9) следует условие (12).

Докажем, что из выражения (10) следует условие (13). Предположим, что условие (13) не выполнено, т. е. $\exists i_0 \in \mathcal{S}: \omega_{i_0}^* = \chi\{C_S(i_0) \geq P(v_B^*, v_S^*)\}$. Но тогда, если $\omega_{i_0}^* = 1$, то $C_S(i_0) \geq P(v_B^*, v_S^*)$. Поскольку $v_S^* = v_{S \setminus i_0}^* + v_{i_0}$, то с учетом выражения (6), выполнено неравенство

$$u_{i_0}(1, v_B^*, v_{S \setminus i_0}^*) = (P(v_B^*, v_{S \setminus i_0}^*) - C_S(i_0) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} < \\ < (P(v_B^*, v_S^*) - C_S(i_0))v_{i_0} \leq 0 = u_{i_0}(0, v_B^*, v_{S \setminus i_0}^*).$$

Если же $\omega_{i_0}^* = 0$, то $C_S(i_0) < P(v_B^*, v_S^*)$. Так как $v_{B \setminus i_0}^* = v_B^*$ и, значит, в силу (4) выполнено неравенство:

$$u_{i_0}(0, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*) = 0 < (P(v_B^*, v_S^*) - C_S(i_0) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} = \\ = u_{i_0}(1, v_{B \setminus i_0}^*, v_S^*).$$

Согласно принципу «от противного» из выражения (9) следует условие (12).

Из выполнения условий (12) и (13) и по определению функций $\Phi_B(\cdot)$ и $\Phi_S(\cdot)$, как это было проделано вначале доказательства, следует система уравнений (11). Необходимость доказана. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kristoufek, L., Vosvrda, M.* Herding, Minority Game, Market Clearing and Efficient Markets in a Simple Spin Model Framework // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* — 2018. — Vol. 54. — P. 148–155.
2. *Wang, J., Deng, S.* Fluctuations of Interface Statistical Physics Models Applied to a Stock Market Model // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* — 2008. — Vol. 9. — P. 718–723.
3. *Nyberg, H.* Forecasting the Direction of the US Stock Market with Dynamic Binary Probit Models // *International Journal of Forecasting.* — 2011. — Vol. 27. — P. 561–578.
4. *Sato, A.-H., Takayasu, H.* Dynamic Numerical Models of Stock Market Price: from Microscopic Determinism to Macroscopic Randomness // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — February 1998. — Vol. 250, iss. 1–4, 15. — P. 231–252.
5. *Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T., Hamada, K.* Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements — the Case of Market Price // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — June 1992. — Vol. 184, iss. 1. — P. 127–134. DOI: 10.1016/0378-4371(92)90161-1
6. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые модели конформного поведения // *Автоматика и телемеханика.* — 2012. — № 10. — С. 111–126. [*Breer, V.V.* Game-theoretic models of collective conformity behavior. — *Automation & Remote Control.* — 2012. — Vol. 73. — P. 1680–1692.]
7. *Курс экономической теории / под ред. А.Н. Чепурина, Е.А. Киселевой.* — Киров: АСА, 2006. — 832 с. [*Kurs ekonomicheskoi teorii / M.N. Chepurin, E.A. Kisileva (eds).* — *Kirov: ASA, 2006.* — 832 s. (In Russian)]
8. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 255 с. [*Burkov, V.N.* *Osnovy matematicheskoi teorii aktivnykh sistem.* — М.: Nauka, 1977. — 255 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 16.03.2020, после доработки 26.03.2020.
Принята к публикации 28.03.2020.

Бреер Владимир Валентинович — канд. техн. наук,
✉ breer@live.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

GAME-THEORETIC THRESHOLD MODEL OF THE STOCK MARKET

V.V. Breer

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ breer@live.ru

Abstract. The game-theoretic model of the binary threshold collective behavior of agents who participate in the sale and purchase of a single exchange asset is considered. The agents were divided into two groups — buyers and sellers. It was assumed that for each of the agents, a threshold of acceptable price exists; for the buyer — it is the upper price at which he still agrees to make the transaction, and for the seller — it is the lower «comfortable» price. It was taken into account that the agent decides whether to participate in the transaction by comparing his threshold price with the market price. It was assumed that the market price is affected by the volumes of supply and demand in accordance with the classic supply and demand curves. Empirical distribution functions of price thresholds are constructed, which are used to characterize Nash equilibrium, and also allow to study the limit transition to an infinite number of agents in the future. A theorem on the characterization of Nash equilibrium is proved, the first part of which shows the volumes of potential supply and demand. The second part of this characterization presents the state of agents based on the volumes of supply and demand. We studied examples of the existence and uniqueness conditions for Nash equilibrium. Focal points are found among all Nash equilibria.

Keywords: game-theoretic model, binary threshold collective behavior, exchange commodity market, Nash equilibrium.

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТА ВОЗДЕЙСТВИЯ ИПОТЕЧНОЙ СЕКЬЮРИТИЗАЦИИ НА БАНКОВСКИЙ БИЗНЕС

С.Ю. Хасянова, М.Е. Самсонов

Аннотация. Статья посвящена проблеме развития рынка ипотечной секьюритизации в России. Целью исследования является оценка среднего эффекта воздействия сделок ипотечной секьюритизации на показатели деятельности российских банков, проводивших такие сделки в период с 2012 по 2018 гг. В работе использована методология Propensity Score Matching, применяемая для оценки эффекта воздействия события на определенный объект или процесс. Источниками данных являются база данных Cbonds, содержащая информацию о датах и объемах сделок секьюритизации в РФ, и база данных Банка России по показателям деятельности банков. Результаты показали, что основным положительным эффектом секьюритизации для российских банков в анализируемом периоде стал рост ликвидных активов, а негативные последствия проявились в ухудшении качества и снижении доходности кредитного портфеля. В отличие от зарубежной практики секьюритизация не принесла российским банкам выгод, связанных с сокращением стоимости фондирования и повышением рентабельности. Полученные результаты вносят вклад в теорию финансовой устойчивости банков и могут быть полезны как самим банкам при принятии решения о проведении секьюритизации, так и органу надзора в регулятивных целях. Практическую значимость для риск-менеджмента банков представляет вывод об использовании секьюритизации как источника ликвидности в условиях структурного дефицита ликвидности. Раскрытие потенциала секьюритизации в интересах повышения эффективности банковского бизнеса может быть обеспечено регулятивными мерами по совершенствованию ее механизма.

Ключевые слова: банковский сектор, ипотечное кредитование, ипотечная секьюритизация, ликвидность, кредитный риск, доходность, финансовая устойчивость, системный риск.

ВВЕДЕНИЕ

Ипотечная секьюритизация¹ (далее — секьюритизация) представляет собой инновационный финансовый инструмент, позволяющий улучшить показатели банковского бизнеса, но при определенных условиях она может иметь крайне негативные последствия для устойчивости финансового сектора. Риски секьюритизации проявляются в

росте проблемных активов на балансах банков в результате непрозрачности секьюритизированных продуктов, завышения их кредитных рейтингов, ослабления рыночного регулирования. Вместе с тем, секьюритизация имеет ряд неоспоримых преимуществ, главным из которых представляется возможность привлечения банками дополнительных ресурсов для пополнения ликвидности и расширения кредитной активности, что способствует экономическому росту. В последнее время официальные власти многих стран делают усилия по восстановлению рынка секьюритизации путем создания дополнительных стимулов для его участников и совершенствования механизма секьюритизации. Например, в ЕС в результате предпринятых мер объем выпуска секьюритизированных продуктов в 2018 г. составил почти 270 млрд. евро, или 68 % от уровня предкризисного 2007 г., при этом объем

¹ В научной литературе секьюритизацию определяют как процесс трансформирования банком неликвидных активов, традиционно удерживаемых до погашения, в ликвидные ценные бумаги путем объединения этих активов в пул и передачи специальному юридическому лицу, защищенному от банкротства, которое финансирует покупку активов посредством выпуска ценных бумаг, обеспеченных залогом пула [1]. В данном исследовании изучается ипотечная секьюритизация, т. е. применительно к пулу ипотечных кредитов.



размещения составил 136 млрд. евро, или 136 % от уровня 2007 г. [2].

В России объем и число сделок секьюритизации по сравнению с западными странами незначительны, а риски секьюритизации не столь ощутимы в силу малой доли ипотечных кредитов в активах банков и, следовательно, слабой потребности в рефинансировании таких кредитов. Тем не менее, этот сегмент рынка растет: к 2018 г. его объем превысил 160 млрд. руб. (в три раза больше чем в 2006 г.) [3], что свидетельствует о заинтересованности банков в поиске альтернативных депозитам источников финансирования. В условиях оживления российской экономики ипотечный портфель банков по официальным прогнозам увеличится к 2024 г. в три раза, до 17 трлн. руб. В целях поддержания устойчивых темпов роста ипотеки Правительством РФ поставлена задача обеспечить доступ банков к оперативному рефинансированию ипотечных кредитов путем формирования ликвидного, инвестиционно привлекательного рынка ипотечных ценных бумаг [4]. Поскольку секьюритизация в России традиционно проводится крупнейшими банками (доля пяти банков-лидеров по объему ипотечного кредитования составляет в среднем 80 %) [3], полезно было бы оценить выгоды и риски, которые она приносит этим банкам, что позволит обосновать целесообразность проведения подобных сделок другими банками.

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Интерес исследователей к изучению вопросов, связанных с воздействием секьюритизации на деятельность банков и финансовый сектор в целом, возник после мирового финансового кризиса 2007—2009 гг., источником которого стало падение рынка ипотечных бумаг в США, и усилился по мере восстановления рынка. Обзор зарубежной научной литературы показал, что оценка эффектов секьюритизации неоднозначна [5].

В статье [6] показано влияние секьюритизации на увеличение целевого объема кредитного портфеля банков-инициаторов сделок (далее — оригинаторы), которое продолжается на протяжении нескольких лет в результате рефинансирования кредитов [6]. В подтверждение этого доказана взаимосвязь между секьюритизацией и расширением ипотечного кредита в США до кризиса, что, в свою очередь, способствовало росту прибыльности банковского бизнеса [7]. В то же время прямой взаимосвязи между секьюритизацией и эффективностью американских банков не найдено [8]. Неоднозначными представляются выводы исследователей и по поводу возможности регулятивного арбитража при проведении сделок секьюритиза-

ции, которая возникает в силу неоднородных требований надзора². Так, авторы статьи [2] считают, что секьюритизация не приводит к регулятивному арбитражу, тогда как другие пришли к противоположному выводу [10].

Во многих работах доказано положительное влияние секьюритизации на платежеспособность и ликвидность банков, поскольку секьюритизация обеспечивает относительно дешевые источники финансирования и делает кредитование менее чувствительным к стоимости привлеченных средств [11—13]. Например, банки становятся более восприимчивыми к ликвидности и финансовым потрясениям, когда рынок секьюритизации сжимается [12]. Ряд авторов объясняют улучшение ликвидности не только притоком денежных средств, но и повышением качества кредитов на балансе оригинаторов [13].

В качестве негативного эффекта секьюритизации исследователи называют сопутствующие риски, которые связаны с проблемой асимметрии информации, поскольку оригинатор, как более информированная о качестве секьюритизируемых кредитов сторона, может воспользоваться своим преимуществом и включать в продаваемый пул кредиты худшего качества [14, 15]. Вместе с тем оригинаторы, зарекомендовавшие себя добросовестными продавцами на начальном этапе, могут впоследствии ослаблять требования к заемщикам, полагая, что кредиты все равно будут проданы [16, 17]. Ослабление стимула оригинаторов к мониторингу выдаваемых кредитов исследователи считают основной причиной накопления и распространения системного риска [18, 19].

Таким образом, результаты зарубежных исследований показывают, что секьюритизация предоставляет оригинатору возможности, проявляющиеся в расширении бизнеса, росте прибыли, более гибком управлении рисками и ликвидностью, снижении стоимости фондирования и применении регулятивного арбитража. В качестве показателей, позволяющих определить выгоды оригинатора от секьюритизации, авторы указанных работ называют показатели структуры баланса, структуры кредитного портфеля, риска кредитного портфеля, ликвидности, капитала, издержек, доходности.

В отечественной научной литературе рассматриваются в основном концептуальные вопросы функционирования рынка ипотечного кредито-

² Регулятивный арбитраж — управление банками значением норматива достаточности капитала (отношение капитала банка к рисковому активу за минусом резервов на возможные потери) с помощью различных методик оценки рисков и резервов в целях занижения уровня риска и поддержания меньшего запаса капитала.

ния, анализируются факторы, сдерживающие его развитие, предлагаются меры по минимизации рисков, включая системный риск [20—23]. Так, разработан метод оценки доли потерь первичных кредиторов в случае дефолта ипотечных заемщиков, получивших кредит в рамках государственных программ ипотечного жилищного кредитования в России в 2008—2012 гг., в зависимости от параметров кредитной сделки [23]. Показано, что ипотечные кредиты с более высокой долей заемных средств в стоимости приобретенного жилья характеризуются более высокими потерями при реализации дефолта и большими суммами долга, подверженными риску дефолта, но при этом и более высоким ожидаемым процентным доходом. Предложенный метод расчета компонентов кредитного риска в отношении различных пулов ипотечных кредитов, а также подход к определению риска ипотечного портфеля с учетом издержек по урегулированию проблемной задолженности имеют практическую ценность для совершенствования внутренних систем риск-менеджмента в банках благодаря повышению точности оценки ожидаемых потерь по ссудам и «настройки» капитала под принимаемые риски.

Отметим, что позитивные и негативные эффекты секьюритизации во многом связаны с правомочностью оценки рисков ипотечного кредитования первичным кредитором, а именно организацией внутренних процедур мониторинга рисков, адекватностью применяемых подходов, методов и моделей. Крупнейшие российские банки — инициаторы сделок секьюритизации — осуществляют оценку кредитного риска розничных заемщиков на основе IRB-подхода (*англ.* Internal Ratings Based Approach), предполагающего анализ трех компонентов кредитного риска: вероятности дефолта заемщика, уровня потерь банка при наступлении дефолта и стоимости кредитного требования под риском дефолта [24, 25], при этом уровень потерь банка зависит от соотношения ссудной задолженности заемщика и стоимости залога (кредит/залог) [26]. Соотношение кредит/залог имеет большее значение при оценке рисков ипотечного кредитования и производных секьюритизированных продуктов, чем коэффициент платежеспособности заемщика (платеж/доход), так как показывает долю заемных средств в стоимости жилья (чем ниже эта доля, тем выше вероятность покрытия безнадежной ссуды средствами от реализации залога и, следовательно, меньше кредитный риск). На основе компонентов кредитного риска, рассчитываемых банками в рамках продвинутого IRB-подхода с учетом собственных исторических данных о предоставленных кредитах, определяются ожидаемые потери по ипотечным ссудам, которые харак-

теризуют степень риска ипотечного кредитного портфеля.

Поскольку секьюритизация означает передачу кредитного риска контрагенту, ее влияние распространяется как на банк, продающий пул ипотечных кредитов, так и на специализированную организацию, приобретающую этот пул. Потенциальные риски покупателя состоят в возможном ухудшении кредитного качества заемщиков, что, в свою очередь, может быть обусловлено изменением их индивидуальных характеристик и/или макроэкономической ситуации, а также в снижении степени ликвидности и стоимости залога в результате колебания цен на рынке жилой недвижимости или нанесения ущерба. Банк-продавец может столкнуться с проблемой реализации низколиквидных ипотечных кредитов, особенно при дефиците ликвидности на денежном рынке, а его решение о продаже кредитов лучшего качества может спровоцировать ухудшение качества кредитного портфеля и снижение доходности. Выгоды секьюритизации для продавца заключаются, очевидно, в оперативном и стратегическом управлении риском, доходностью и ликвидностью.

В связи с тем, что количественное воздействие секьюритизации на показатели деятельности российских банков в опубликованных работах не изучено, данное исследование направлено на восполнение этого пробела с учетом результатов, полученных в предыдущих исследованиях.

2. МЕТОДОЛОГИЯ И БАЗА ИССЛЕДОВАНИЯ

В целях определения эффекта воздействия события на конкретный объект или процесс широко применяется метод *Propensity Score Matching* (PSM), суть которого состоит в следующем. Вначале производится балансировка выборки, т. е. формируется контрольная группа наблюдений по принципу максимальной схожести ее статистических характеристик с исследуемой группой наблюдений, затем рассчитываются средние значения целевых показателей отдельно для исследуемой и контрольной групп и сравниваются между собой путем нахождения разности между ними, размер которой характеризует эффект воздействия [27, 28]. Подбор контрольной группы осуществляется по индексу соответствия (балансирующему показателю), означающему вероятность попадания наблюдения в исследуемую группу. Индекс соответствия рассчитывается с помощью *logit*- или *probit*-моделей, показавших наибольшую прогнозную силу по сравнению с линейными вероятностными моделями.

В качестве усовершенствованного метода PSM применяется метод *Propensity Score Matching with*



Difference-in-Difference (PSM-DiD), который позволяет получить несмещенные оценки среднего эффекта воздействия в случае наличия прочих (ненаблюдаемых) факторов, влияющих на вероятность события [8, 28]. Воздействие прочих факторов устраняется посредством расчета временных разниц, т. е. путем сравнения значений целевых показателей до и после события для обеих групп (в нашем случае — до и после сделки секьюритизации).

Формула оценки среднего эффекта воздействия на объекты, подвергшиеся воздействию, *ATE* (*Average Treatment Effect on Treated*) в рамках PSM-DiD имеет вид:

$$ATE = E[\Delta Y_i(1)|S_i = 1, p(X_{i,t-1}) - \Delta Y_j(0)|S_j = 0, p(X_{j,t-1})],$$

где $\Delta Y_i(1)$, $\Delta Y_j(0)$ — временные разницы, при этом $\Delta Y_i(1) = Y_i(1)_{post} - Y_i(1)_{pre}$; $\Delta Y_j(0) = Y_j(0)_{post} - Y_j(0)_{pre}$; $S_i = 1$ — исследуемая группа банков (сделка секьюритизации осуществлена конкретным банком в определенный момент времени); $S_j = 0$ — контрольная группа банков; $Y_i(1)$ — целевой показатель деятельности банка для исследуемой группы; $Y_j(0)$ — целевой показатель деятельности банка для контрольной группы; $X_{i,t-1}$; $X_{j,t-1}$ — вектор наблюдаемых факторов секьюритизации; $p(X_{i,t-1})$; $p(X_{j,t-1})$ — вероятность проведения секьюритизации; E — знак математического ожидания.

Одно из условий применения метода PSM-DiD — независимость факторов секьюритизации от самого факта ее проведения, поэтому все факторы при оценке уровня *ATE* берутся с лагом в один квартал.

При проведении исследования авторы пользовались базой данных *Sbonds* [29], в которой содержится информация о датах и объемах сделок секьюритизации, и базой данных Банка России [30] по показателям деятельности банков. Период исследования: IV квартал 2012 г. — IV квартал 2017 г. включительно (квартальные данные). Выборка включает в себя 401 банк с капиталом более 1 млрд. руб., в том числе 32 оригинатора³, число наблюдений 7961 (исключены банки, по которым отсутствуют данные за все анализируемые кварталы).

³ Отобраны банки, проводящие, по данным *Sbonds*, сделки секьюритизации только ипотечных кредитов, в которых эмитентом ценных бумаг является специализированный ипотечный агент.

3. ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ЭФФЕКТА ВОЗДЕЙСТВИЯ СЕКЬЮРИТИЗАЦИИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ РОССИЙСКИХ БАНКОВ

На первом этапе применение метода PSM-DiD начинается с оценки *logit*-модели, показывающей вероятность проведения российскими банками секьюритизации в зависимости от факторов, влияющих на решение о ее проведении (детерминанты секьюритизации). Модель включает в себя детерминанты из числа тех, которые признаны существенными в предыдущих исследованиях, с учетом доступности данных по банковскому сектору РФ. Возможные спецификации модели на основе различных комбинаций детерминант относительно базовой спецификации представлены в табл. 1.

В качестве базовой рассматривается модель I. Для того чтобы определить, какой из показателей риска и доходности включить в модель, последовательно оценены шесть видов спецификаций — модели II—VII.

Во все спецификации добавлена переменная *Year Dummy* (бинарная переменная за пятилетний период наблюдения), чтобы показать робастность полученных результатов к добавлению новых регрессоров и учесть влияние временных факторов. Лучшей спецификацией по показателям *Log-Likelihood* (логарифмической функции правдоподобия) и R^2 (коэффициента детерминации) оказалась модель VI.

Из табл. 1 можно заключить, что на уровне значимости 1 % значимыми для принятия банками решения о проведении сделок секьюритизации становятся показатели стоимости активов, отношения депозитов к активам, доли розничных кредитов в кредитном портфеле и чистой процентной маржи, а на уровне значимости 5 % — стоимость фондирования. Таким образом банк с большей вероятностью проведет секьюритизацию, имея больший объем активов, большую долю депозитов и розничного кредитного портфеля, более высокую стоимость фондирования и более низкую чистую процентную маржу.

На основе модели VI, признанной по результатам исследования наилучшей, произведена балансировка выборки, которая означает подбор каждому наблюдению из исследуемой группы ближайшего наблюдения из контрольной группы по балансирующему показателю. Максимальная разница между i -м наблюдением из исследуемой группы и ближайшим к нему по балансирующему показателю j -м наблюдением из контрольной группы не превысила 0,01 или 1 п.п., т. е.:

$$p(X_{i,t-1}) - p(X_{j,t-1}) \leq 0,01.$$

Детерминанты ипотечной секьюритизации для российских банков

Переменные		Модель						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
Обозначение	Описание	Коэффициент регрессии						
$Ln(Assets)_{i,t-1}$	Логарифм совокупных активов	0,674*** (0,076)	0,677*** (0,076)	0,672*** (0,076)	0,637*** (0,076)	0,669*** (0,076)	0,673*** (0,079)	0,590*** (0,081)
$LA - to - Assets_{i,t-1}$	Доля ликвидных активов в активах	-5,027** (2,202)	-4,122* (2,189)	-4,758** (2,157)	-4,049* (2,160)	-4,987** (2,203)	-3,177 (2,208)	-5,487** (2,259)
$Loans - to - Assets_{i,t-1}$	Доля кредитов в активах	-3,296* (1,685)	-3,383** (1,709)	-3,085* (1,668)	-3,331** (1,652)	-3,256* (1,683)	-1,187 (1,810)	-2,606 (1,710)
$Deposits - to - Assets_{i,t-1}$	Доля депозитов в активах	2,588** (1,155)	2,342** (1,185)	2,673** (1,154)	2,858** (1,144)	2,625** (1,163)	3,404*** (1,176)	2,762** (1,216)
$Capital - to - Assets_{i,t-1}$	Доля капитала в активах	-3,917 (3,260)	-3,209 (3,284)	-4,620 (3,004)	-4,366 (3,079)	-4,173 (3,261)	-0,775 (3,457)	-3,705 (3,256)
$CL - to - Loans_{i,t-1}$	Доля розничных кредитов в совокупных кредитах	0,913 (0,693)	0,828 (0,693)	0,969 (0,699)	1,542** (0,722)	0,829 (0,684)	3,001*** (0,873)	1,195* (0,711)
$CA_{i,t-1}$	Достаточность капитала — отношение совокупного капитала к рисковым активам	2,350 (2,708)	1,213 (3,432)	2,785 (2,461)	2,399 (2,711)	2,186 (2,808)	0,757 (3,139)	1,646 (2,870)
$Costs - to - Liabilities_{i,t-1}$	Стоимость фондирования — отношение процентных расходов к обязательствам	23,359** (9,402)	21,250** (9,451)	24,093** (9,406)	25,524*** (9,332)	24,712*** (9,391)	24,276** (9,717)	32,737*** (9,990)
$NPL - to - Loans_{i,t-1}$	Доля необслуживаемых (просроченных) кредитов в совокупных кредитах	-1,530 (2,051)	—	—	—	-1,095 (1,945)	-0,274 (1,828)	-1,092 (1,989)
$ROA_{i,t-1}$	Рентабельность активов — отношение чистой прибыли к активам	-5,302 (4,087)	-5,128 (4,021)	-4,717 (4,287)	-5,972 (4,047)	—	—	—
$RWATA_{i,t-1}$	Доля рискованных активов в активах	—	1,845* (1,090)	—	—	—	—	—
$Charge - off_{i,t-1}$	Доля списанных с баланса безнадежных кредитов в совокупных кредитах	—	—	-1,916 (3,248)	—	—	—	—
$LLP - to - Loans_{i,t-1}$	Доля резервов на возможные потери по ссудам в совокупных кредитах	—	—	—	-15,851*** (6,037)	—	—	—

Переменные		Модель						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
Обозначение	Описание	Коэффициент регрессии						
$ROE_{i,t-1}$	Рентабельность капитала — отношение чистой прибыли к капиталу	—	—	—	—	-0,104 (0,110)	—	—
$NIM_{i,t-1}$	Чистая процентная маржа — отношение чистого процентного дохода к активам	—	—	—	—	—	-32,043*** (9,275)	—
$II-to-Income_{i,t-1}$	Доля процентного дохода в совокупном доходе	—	—	—	—	—	—	-5,868** (2,283)
Year Dummy		Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да
Число наблюдений		7961	7961	7961	7961	7961	7961	7961
Log-Likelihood		-243,126	-241,819	-243,241	-238,579	-243,575	-236,311	-239,918
Псевдо R^2		0,22	0,23	0,22	0,24	0,22	0,25	0,23

Источник данных: рассчитано авторами на основе данных Банка России.

Примечание. Все модели оцениваются с помощью модуля `psmatch2` статистического пакета Stata 14.2. Здесь и далее: *, **, *** соответствуют статистической значимости коэффициентов на уровнях 10, 5 и 1 % соответственно (в скобках представлены стандартные ошибки).

Таблица 2

Результаты T-теста на равенство средних значений показателей исследуемой и контрольной групп банков до и после балансировки выборки

Показатель	До балансировки			После балансировки		
	Исследуемая группа	Контрольная группа	Разность средних значений	Исследуемая группа	Контрольная группа	Разность средних значений
$Ln(Assets)_{i,t-1}$	5,407	2,572	2,836***	5,407	5,611	-0,203
$LA-to-Assets_{i,t-1}$	0,190	0,254	-0,064***	0,190	0,198	-0,008
$Loans-to-Assets_{i,t-1}$	0,695	0,643	0,052**	0,695	0,691	0,004
$Deposits-to-Assets_{i,t-1}$	0,692	0,639	0,052*	0,692	0,676	0,016
$Capital-to-Assets_{i,t-1}$	0,130	0,201	-0,071***	0,130	0,131	-0,001
$CL-to-Loans_{i,t-1}$	0,315	0,217	0,098***	0,315	0,290	0,025
$CA_{i,t-1}$	0,131	0,206	-0,075***	0,131	0,125	0,006
$Costs-to-Liabilities_{i,t-1}$	0,067	0,056	0,011***	0,067	0,066	0,001
$NPL-to-Loans_{i,t-1}$	0,067	0,076	-0,010	0,067	0,071	-0,004
$NIM_{i,t-1}$	0,036	0,048	-0,012***	0,036	0,034	0,002
Число наблюдений	52	7909	(7961)	52	52	(104)

Оценка среднего эффекта воздействия секьюритизации на показатели originатора

Показатели	Средние значения временных разниц показателей до и после секьюритизации		Разность средних значений
	Исследуемая группа	Контрольная группа	
<i>LA – to – Assets</i>	0,0072	–0,0077	0,0149* (1,920)
<i>CA</i>	0,0136	–0,0006	0,0142 (1,516)
<i>Costs – to – Liabilities</i>	0,0034	–0,0037	0,0071 (1,482)
<i>NPL – to – Loans</i>	0,0121	0,0006	0,0115* (1,863)
<i>ROA</i>	–0,0012	–0,0006	–0,0007 (–0,180)
<i>ROE</i>	0,0028	–0,0101	0,0128 (0,450)
<i>NIM</i>	–0,0022	0,0038	–0,0061** (–2,654)
Число наблюдений	52	52	104

Примечание. В скобках показана *t*-статистика проверки гипотезы равенства эффекта воздействия нулю, рассчитанная на основе бутстрапирования стандартных ошибок с использованием 1000 репликаций. Критические значения *t*-критерия Стьюдента при $n = 52$ составляют 1,675; 2,007 и 2,674 на 10, 5 и 1 % уровнях значимости, соответственно.

Для проверки балансировки выполнен *t*-тест на равенство средних значений показателей исследуемой и контрольной групп банков до и после балансировки (табл. 2).

Из табл. 2 видно, что до балансировки разница средних была статистически значимой для всех показателей, кроме *NPL*, в то время как после балансировки гипотеза о равенстве средних не отвергается, поэтому полученную выборку, состоящую из 52 наблюдений исследуемой группы и 52 наблюдений контрольной группы банков, можно считать сбалансированной.

Результаты оценки среднего эффекта воздействия методом PSM-DiD представлены в табл. 3, которая содержит средние значения временных разниц до и после секьюритизации для исследуемой и контрольной групп, а также разность этих средних значений.

Из табл. 3 можно сделать вывод, что секьюритизация увеличивает долю ликвидных активов на 149 базисных пунктов (б. п.), увеличивает долю просроченной задолженности на 115 б. п., снижает чистую процентную маржу на 61 б. п. и не влияет на остальные показатели.

Таким образом, рост доли ликвидных активов вследствие рефинансирования кредитного портфеля является основным эффектом секьюритизации. Увеличение доли просроченной задолженности можно объяснить включением originаторами в пул продаваемых кредитов ссуд лучшего

качества по сравнению с удерживаемыми на балансе. Снижение чистой процентной маржи произошло за счет сокращения процентного дохода, генерируемого проданными кредитами, и ухудшения качества кредитного портфеля, а воздействия на рентабельность активов и капитала не наблюдается, поскольку при секьюритизации процентные доходы замещаются комиссионными, получаемыми originатором за дальнейший мониторинг качества проданных кредитов. Секьюритизация не повлияла на достаточность капитала в силу того, что усиление риска кредитного портфеля компенсируется досозданием резервов на возможные потери по ссудам, снижающих уровень риска. Отметим тот факт, что секьюритизация не оказала влияния на стоимость фондирования — скорее всего, в связи с высокими транзакционными издержками секьюритизированных сделок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты оценки воздействия ипотечной секьюритизации на показатели деятельности крупнейших российских банков, применяющих этот финансовый инструмент, показали, что единственной существенной выгодой от ее проведения является рост ликвидных активов. Это свидетельствует о важной роли секьюритизации в управлении банковской ликвидностью, особенно в условиях ее структурного дефицита, который наблю-



дался на денежном рынке РФ в 2012—2016 гг., т. е. на протяжении большей части анализируемого периода. Риски ипотечной секьюритизации в этот период проявились в ухудшении качества кредитного портфеля банков-инициаторов сделок, что, в свою очередь, привело к сокращению чистой процентной маржи. Негативное влияние секьюритизации на качество кредитного портфеля подтверждает выводы предыдущих исследований о ее возможном вкладе в накопление и распространение системного риска.

В посткризисный период секьюритизация не принесла российским банкам выгод, связанных со снижением стоимости фондирования, регулятивным арбитражем и ростом рентабельности. Если повышения рентабельности банки могут ожидать от расширения кредитования в будущем за счет рефинансирования кредитного портфеля, то снижения стоимости фондирования можно достичь, совершенствуя механизм секьюритизации в сторону его упрощения для снижения транзакционных издержек.

Полученные результаты вносят определенный вклад в теорию финансовой устойчивости банков и могут быть полезны как самим банкам при принятии решения о проведении секьюритизации, так и органу надзора в регулятивных целях. В частности, практическую значимость для риск-менеджмента банков представляет вывод о возможности применения секьюритизации как источника ликвидности, альтернативного рефинансированию Центрального банка РФ. Несмотря на снижение доходности бизнеса и усиление кредитного риска, приток ликвидности позволяет банку перестроить структуру активов в зависимости от экономических условий и стратегии дальнейшего развития. В свою очередь, надзорному органу целесообразно принять во внимание тот факт, что российские банки не прибегают к секьюритизации как к средству регулятивного арбитража в целях соблюдения требований к достаточности капитала. Кроме того, для реализации потенциала секьюритизации в интересах повышения эффективности банковского бизнеса необходимы меры по совершенствованию ее механизма и снижению стоимости фондирования.

Выводы исследования позволяют предположить, что воздействие секьюритизации на ключевые показатели деятельности банков зависит от стадии кредитного цикла. Если в период экономического спада и структурного дефицита ликвидности она позволяет банкам трансформировать низколиквидные активы в высоколиквидные, то в периоды оживления и подъема может способствовать росту прибыли и рентабельности. Изучение этого аспекта будет положено в основу дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Casu, B., Sarkisyan, A.* Securitization. The Oxford Handbook of Banking. 2nd Ed. — Oxford: Oxford University Press, 2015.
2. URL: <https://www.afme.eu/reports/data/details/AFME-Q2-2019-Securitisation-Data-Report>
3. Статистический сборник «Сведения о рынке ипотечного жилищного кредитования в России» / Банк России. — 2017. — № 5. — С. 25, 58. — URL: https://cbr.ru/Collection/Collection/File/15723/Stat_digest_mortgage_05.pdf [Statisticheskii sbornik «Svedeniya o rynke ipotechnogo zhilishchnogo kreditovaniya v Rossii» / Bank Rossii. — 2017. — No. 5. — S. 25, 58. — URL: https://cbr.ru/Collection/Collection/File/15723/Stat_digest_mortgage_05.pdf (In Russian)]
4. Плановый федеральный проект «Ипотека» (утв. протоколом заседания проектного комитета по национальному проекту «Жилье и городская среда» от 21.12.2018 № 3). [Pasport federal'nogo proekta «Ipoteka» (utv. protokolom zasedaniya proektnogo komiteta po natsional'nomu proektu «Zhil'e i gorodskaya sreda» ot 21.12.2018. No. 3). (In Russian)]
5. *Kara, A., Altunbas, Y., Ozkan, A.* Securitisation and banking risk: what do we know so far? // Review of Behavioral Finance. — 2016. — Vol. 8, no. 1. — P. 2—16.
6. *Goderis, B., Marsh, J.W., Castelló, J.W., Wagner, W.* Bank behaviour with access to credit risk transfer markets // Bank of Finland Research Discussion Paper. — 2007. — No. 4. — P. 1—32.
7. *Mian, A., Sufi, A.* The consequences of mortgage credit expansion: evidence from the US mortgage default crisis // The Quarterly Journal of Economics. — 2009. — Vol. 124, no. 4. — P. 1449—1496.
8. *Sarkisyan, A., Casu, B., Clare, A., Thomas, S.H.* Securitization and bank performance // Journal of Money, Credit and Banking. — 2013. — Vol. 45, no. 8. — P. 1617—1658.
9. *Cardone-Riportella, C., Samaniego-Medina, R., Trujillo-Ponce, A.* What drives bank securitisation? The Spanish experience // Journal of Banking & Finance. — 2010. — Vol. 34, no. 11. — P. 2639—2651.
10. *Demyanyk, Y., Loutskina, E.* Mortgage companies and regulatory arbitrage // Journal of Financial Economics. — 2016. — Vol. 122, no. 2. — P. 328—351.
11. *Ngwu, F.N., Bavoso, V., Chen, Z.* Securitisation in BRICS: issues, challenges and prospects // Research in International Business and Finance. — 2017. — No. 42. — P. 1219—1227.
12. *Loutskina, E.* The role of securitization in bank liquidity and funding management // Journal of Financial Economics. — 2011. — Vol. 100, no. 3. — P. 663—684.
13. *López-Andión, C., Iglesias-Casal, I., López-Penabad, M.C., Maside-Sanz, J.M.* Securitization and financial solvency: empirical evidence from Portugal // European Journal of Finance. — 2018. — Vol. 25, no. 2. — P. 155—166.
14. *An, X., Deng, Y., Gabriel, S.* Asymmetric information, adverse selection, and the pricing of CMBS // Journal of Financial Economics. — 2011. — Vol. 100, no. 2. — P. 304—325.
15. *Agarwal, S., Chang, Y., Yavas, A.* Adverse selection in mortgage securitization // Journal of Financial Economics. — 2012. — Vol. 105, no. 3. — P. 640—660.
16. *Keys, B.J., Mukherjee, T., Seru, A., Vig, V.* Did securitization lead to lax screening? Evidence from subprime loans // The Quarterly Journal of Economics. — 2010. — Vol. 125, no. 1. — P. 307—362.
17. *Dell'Ariccia, G., Igan, D., Laeven, L.* Credit booms and lending standards: Evidence from the subprime mortgage market // Journal of Money, Credit and Banking. — 2012. — Vol. 44, no. 3. — P. 367—384.
18. *Ibanez, D.M.* Securitization and credit quality // IMF Working Paper. — 2016. — WP/16/221. — P. 1—41.
19. *Wu, B.* Asset securitization and rate of return: a study on letters of guarantee // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2018. — Vol. 490 (C). — P. 1551—1554.

20. *Столбов М.И.* Теория финансового акселератора и российский ипотечный рынок // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2012. — № 1 (13). — С. 79–98. [*Stolbov, M.I.* Financial Accelerator Theory and the Russian Mortgage Market // Journal of the New Economic Association. — 2012. — No. 1 (13). — P. 79–98. (In Russian)]
21. *Ермилова М.И.* Банковская ипотека как источник финансирования жилищного рынка // Деньги и кредит. — 2017. — № 4. — С. 40–43. [*Ermilova, M.* Bank's Mortgage Loans as a Russian Housing Market Funding Source // Russian Journal of Money and Finance. — 2017. — No. 4. — P. 40–43. (In Russian)]
22. *Языков А.Д., Цыганов А.А.* Существенные факторы риска при выдаче ипотечного кредита // Деньги и кредит. — 2017. — № 8. — С. 40–44. [*Yazykov, A., Tsyganov, A.* Issuing a Mortgage Loan: Significant Risk Factors // Russian Journal of Money and Finance. — 2017. — No. 8. — P. 40–44. (In Russian)]
23. *Карминский А.М., Лозинская А.М., Ожегов Е.М.* Методы оценки потерь кредитора при ипотечном жилищном кредитовании // Экономический журнал ВШЭ. — 2016. — Т. 20, № 1. — С. 9–51. [*Karminsky, A. Lozinskaia, A., Ozhegov, E.* Estimation Methods of Creditor's Loss in Residential Mortgage Lending // HSE Economic Journal. — 2016. — Vol. 20, no. 1. — P. 9–51. (In Russian)]
24. *Basel II: International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework — comprehensive version* / Bank for International Settlements, BCBS. — June 2006. — URL: <https://www.bis.org/publ/bcbs128.pdf>
25. *Положение* Банка России от 06.08.2015 № 483-П «О порядке расчета величины кредитного риска на основе внутренних рейтингов». [*Polozhenie* Banka Rossii ot 06.08.2015 No. 483-P «O poriyadke rascheta velichiny kreditnogo riska na osnove vnutrennikh reitingov». (In Russian)]
26. *High-level summary of Basel III reforms* / Bank for International Settlements, BCBS. — Dec 2017. — P. 2–6. — URL: https://www.bis.org/bcbs/publ/d424_hlsummary.pdf
27. *Austin, P.* An introduction to propensity score methods for reducing the effects of confounding in observational studies // *Multivariate Behavioral Research*. — 2011. — Vol. 46, no. 3. — P. 399–424.
28. *Impact evaluation in practice*. 2nd ed. / P.J. Gertler, et al. — Washington: World Bank Publications, 2016. — 367 p.
29. URL: <http://cbonds.ru/>
30. URL: <http://www.cbr.ru/credit/main.asp>
- Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Ключковым.*
- Поступила в редакцию 23.10.2019, после доработки 06.01.2020. Принята к публикации 03.02.2020.*
- Хасянова Светлана Юрьевна** — канд. экон. наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Россия, ✉ shasyanova@hse.ru,
- Самсонов Михаил Евгеньевич** — Государственная Корпорация «Агентство по страхованию вкладов», Москва, Россия, ✉ mesamsonov@mail.ru.

THE ESTIMATION MODEL OF THE MORTGAGE SECURITIZATION EFFECT ON BANKING BUSINESS

S.Yu. Khasyanova^{1, #}, M.E. Samsonov²

¹National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

²The State Corporation Deposit Insurance Agency, Moscow, Russia

✉ shasyanova@hse.ru

Abstract. The paper is devoted to the development of the mortgage securitization market in Russia. The aim of the study is to assess the average effect of mortgage securitization transactions on the performance of Russian banks that executed such transactions in the period from 2012 to 2018. The Propensity Score Matching methodology, which is applied for assessing the effect of the event on a particular object or a process, was used in this research. The data was collected from the Cbonds database that contains information on the dates and volumes of securitization transactions in the Russian Federation, while bank performance indicators were gathered from the Bank of Russia database. The results demonstrated that the main positive effect of securitization for Russian banks in the analyzed period was the growth of liquid assets, whereas the negative ones were a lower yield of the loan portfolio and its quality deterioration. Unlike foreign practices, securitization did not bring Russian banks the benefits associated with a reduction in funding costs and increased profitability. The outcome of the research contributes to the theory of banks financial stability and could be useful, both for banks when deciding on securitization and for supervisors for regulatory purposes. The practical value for the risk management of banks is represented by the conclusion concerning the use of securitization as a source of liquidity in the context of a structural liquidity deficit. The potential power of securitization with regard to the banking efficiency enhancement could be released by regulatory measures aimed at improving its mechanism.

Keywords: banking sector, mortgage lending, mortgage securitization, liquidity, credit risk, profitability, financial soundness, systemic risk.

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ УГРОЗЫ ДЛЯ БЕСПИЛОТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ В СРЕДЕ «УМНОГО ГОРОДА¹»

В.Г. Промыслов, К.В. Семенов, Е.Ф. Жарко

Аннотация. Представлена комплексная модель кибербезопасности системы беспилотных транспортных средств (БТС) в среде «умного города». Рассмотрены проблемы описания информационных потоков в реальной системе БТС с помощью дискреционных моделей безопасности. Введено понятие безопасной передачи данных для задания специальных типов информационного обмена между активами в системе. Предложены методы классификации активов с учетом информационной связанности активов в рамках моделей Биба и Белла — Лападулы для целостности и конфиденциальности соответственно. Обсуждена комплексность понятия «целостность» в контексте обеспечения кибербезопасности системы и подчеркнута важность его расширения на оборудование и методы обработки данных. Отмечено, что такой подход позволяет перенести основное внимание на анализ и ликвидацию уязвимостей системы и строить ее защиту, основываясь на ее внутренних свойствах. Рассмотрены динамические методы синтеза архитектуры кибербезопасности транспортных систем с БТС. Показано, что динамические методы позволяют уменьшить вычислительную сложность моделирования системы с БТС. Для выбранного БТС анализ проведен не на полном графе безопасности, а на некотором его индуцированном подграфе. При этом вершины (активы) в полном графе безопасности исключены из рассмотрения, при условии, что они находятся на большом «расстоянии» от актива, для которого проводится анализ. Предложены формулы расчета «расстояний» в графе безопасности. Приведены примеры анализа и синтеза архитектуры кибербезопасности для БТС.

Ключевые слова: кибербезопасность, беспилотное транспортное средство, «умный город», архитектура кибербезопасности, классификация, кластеризация, граф безопасности, модель «take-grant».

ВВЕДЕНИЕ

Применение беспилотных транспортных средств (БТС) рассматривается в мире не только как способ повышения экономической эффективности транспортных перевозок, но и как технология повышения безопасности и эффективности дорожного движения [1]. Правительство России разработало проекты нормативных документов, определяющих методы обеспечения безопасности беспилотного транспорта на дорогах [2]. Беспилотным транспортным средством предлагается считать высоко или полностью автоматизированное транспортное средство, функционирующее без вмешательства

человека (в беспилотном режиме). Проблемы безопасности, а также нравственные и юридические проблемы, связанные с применением как автономных роботов в общем случае, так и выводением БТС на дороги общего пользования активно обсуждаются на экспертном уровне [3, 4]. Одна из ключевых характеристик БТС — реализация функции обмена информацией с другими участниками движения и инфраструктурой «умного города», что позволяет БТС получать информацию не только от собственных встроенных сенсоров, но и других объектов [5]. Это обеспечивает расширение условного «поля зрения» БТС за границы доступного для изолированного БТС и, в конечном счете, повышает его безопасность и эффективность его применения.

В контексте информационного обмена БТС можно выделить несколько типов связей: между

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-06044, гл. 3 и 4.

транспортными средствами (Б2Б), БТС — инфраструктура (Б2И), БТС — пешеход (Б2П) и др.

Отметим, что возможностью передавать и получать информацию в реальном времени будут обладать не только БТС, но и обычные транспортные средства с водителем. Предполагается, что к 2025 г. начнут эксплуатироваться автоматизированные беспилотные транспортные системы в рамках ограниченных территорий, а на дорогах общего пользования начнут появляться беспилотные автомобили [6]. Такова новая реальность интеллектуальных транспортных систем.

Указанные возможности приведут к появлению инновационных решений для пассивной и активной безопасности дорожного движения, вспомогательных услуг для водителей, «умной мобильности» и услуг управления движением.

Следует учитывать, что применение большинства современных технологий имеет двойственный характер. Они служат как средства повышения безопасности, однако и сами по себе могут индуцировать новые угрозы окружающим. Наличие обширных каналов обмена информацией БТС с различными активами в системе приводит к появлению угроз и уязвимостей в сфере информационной и кибербезопасности (ИБ). Термин «кибербезопасность» имеет широкий смысл и часто интерпретируется для промышленных систем как «Действия, необходимые для предотвращения неавторизованного использования, отказа в обслуживании, преобразования, рассекречивания, потери прибыли от/или повреждения критических систем или информационных объектов» [7]. Однако в настоящей работе кибербезопасность рассматривается более узко, как свойство объекта не быть опасным для окружающей среды при его функционировании во всех режимах работы [8].

Применяемая в БТС технология информационного обмена в значительной степени зависит от компьютерных технологий управления объектом и технологий беспроводной и мобильной связи для обмена данными между объектами. Все относящиеся к ним угрозы и уязвимости, а также атаки с их применением могут влиять на функционирование БТС [9, 10] и ставят под угрозу безопасность других участвующих в транспортном движении субъектов. Существуют и специфические угрозы интеллектуальным транспортным средствам, к которым относится и БТС, угрозы приведены в работах [11–13].

Необходимо оценивать уязвимости в системе и уметь противостоять угрозам ИБ, чтобы реализовать потенциал взаимодействия БТС со средой «умного города» и другими участниками движения.

В настоящей работе приведен обзор текущих проблем обеспечения информационной безопасности БТС, анализируется ее влияние на функци-

онирование БТС и других субъектов в среде «умного города». Рассмотрены методы анализа и управления информационной безопасностью БТС на основе расширенной дискреционной модели доступа и предложен механизм учета динамического характера поведения системы. Приведены примеры, иллюстрирующие предложенный подход.

1. КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ В ПРИМЕНЕНИИ К БЕСПИЛОТНЫМ ТРАНСПОРТНЫМ СРЕДСТВАМ

Для описания ИБ в системе «БТС — умный город» рассмотрим комплексную аналитическую модель ИБ системы, аналогичную предложенной в работе [14] для промышленных систем управления.

Определение 1. Комплексная аналитическая модель информационной безопасности БТС — это совокупность компонентов $ICM = \langle DM, R \rangle$, где компонент DM (*data model*) задает порядок обмена информацией между активами. Набор операторов R задает опциональное правило ранжирования активов в модели DM . Активы в модели представляют собой идентифицированные как важные в смысле ИБ объекты системы. ♦

В качестве комплексной аналитической модели информационной безопасности БТС принята расширенная дискреционная модель безопасности «take-grant» («брать-давать») [15], которая применяется для задания информационных связей. Решеточная модель доступа, предложенная в работе [16], описывает архитектуру кибербезопасности в системе.

Под термином «архитектура кибербезопасности» будем понимать связанную с ИБ структуру системы как системы систем, включая основные функции, класс и границы каждой системы, а также взаимосвязь или независимость систем, приоритетность целей ИБ, действующих в системе и порядок взаимодействия между активами.

Далее рассмотрим компоненты модели подробнее.

1.1. Модель обмена информацией

В дискреционной модели безопасности компонент $DM = \langle G^*, OP \rangle$, где $G^* = \langle \{G_i | i = 1, N\} \rangle$ — все возможные состояния системы, которые описываются ориентированным графом $\{A_i\}$ соответствует активам, ребра, соответственно, задают бинарные отношения между $\langle A, \{\rightarrow, \leftarrow\} \rangle$.

Представим информационную модель системы «умный город плюс БТС» в виде графа (графа безопасности), отражающего физическую природу описываемой системы. Свойства такого графа приведены в табл. 1.

В модели графы служат для описания отношений доступа между объектами и субъектами поли-



тики безопасности. В рамках данной модели ИБ описывается в виде графа безопасности G , где G — это конечный помеченный ориентированный взвешенный мультиграф, описывающий состояние системы: $G = G(A, E)$, где A — множество вершин, E — множество ребер.

В графе выделяются два типа вершин: один соответствует субъекту, другой — объекту, которые отражают активные и пассивные активы моделируемой системы.

Наличие ребра, направленного из вершины A к вершине B , означает, что A имеет некоторое право (права) доступа к B . Обычно стандартными считаются такие права доступа: чтение r (*read*), запись w (*write*) — в части передачи информации, взятие t (*take*), выдача g (*grant*) — в части передачи прав. Отношения, связанные с передачей прав доступа $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \cup \{t, g\}$, принято называть отношениями «де-юре», а $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \cup \{w, r\}$ — отношениями «де-факто». Для отношений «де-факто» введен набор элементарных преобразований для описания передачи информации (*Post, Pass, Spy, Find*) и модификации графа — добавления и удаления вершин и ребер (*Create, Delete*).

Достоинство модели «take-grant» заключается в ее вычислительной эффективности.

Начальный граф доступа G_0 , задаваемый формальной моделью безопасности, может быть трансформирован последовательным применением элементарных правил в новый граф G' (трансформация обозначается как $G_0 \mapsto G'$). Информационная

безопасность системы рассматривается в смысле возможности получения каким-либо субъектом прав доступа к определенному объекту (в начальном состоянии такие права отсутствуют) при определенной кооперации субъектов путем последовательного изменения состояния системы на основе выполнения элементарных команд. Рассматриваются условия санкционированного, т. е. законного получения прав доступа, и «похищения» прав доступа.

Базовым отношением на графе, употребляемым при моделировании, является отношение *can_know*. Следуя работе [15], приведем условия, при которых субъект может осуществить доступ типа $\{r, w, t, g\}$ к активу для указанного выше набора прав доступа и элементарных правил преобразования графа.

Определение 2. Отношение *can_know* $f(x, y, G_0)$ верно тогда и только тогда, когда существует последовательность графов безопасности G_0, G_1, \dots, G_n такая, что $G_0 \mapsto G_n$, и в графе G_n либо существует ребро (x, y) , обозначаемое как w , либо существует ребро (y, x) , обозначаемое как r , и если ребро явное, то его начало — субъект. ♦

При моделировании системы нужно учитывать особенности отношений: все операции являются обратно симметричными операциями, если они выполняются между субъектами [17]. Например, для отношений $\{w, r\}$, если субъект A может прочесть данные от субъекта B , то это означает, что актив B может записать в A . Сопряженную вторую часть таких симметричных отношений называют неявными отношениями. В такой модели инфор-

Таблица 1

Соответствие физических свойств системы «БТС — инфраструктура умного города» ее представлению в виде графа безопасности

Физическое свойство системы	Свойство графа $G(A, E)$
В процессах передачи информации существуют источник и получатель	Направленность отношений
Имеются разные типы объектов (активные и пассивные)	Вершины могут соответствовать как объектам, так и субъектам, следовательно, в общем случае вершины окрашены
Имеются различные виды отношений между активами	Ребра могут относиться к разным типам, например: передача прав на управление БТС, передача информации между БТС и другими активами, получение команд управления. Следовательно, ребра графа в общем случае окрашены
В общем случае, в системе, включающей в себя БТС, есть иерархия, как-то: диспетчеры, объекты дорожной инфраструктуры, централизованные системы управления движением, сами БТС и пр.	В графе выделяется подмножество вершин $\hat{A} \subset A \in G(A, E)$, на котором можно ввести отношение порядка
Наличие в системе барьеров на пути передачи информации (шлюзов, брандмауэров и др.)	Граф, вообще говоря, не транзитивен, т. е. из отношения порядка между вершинами $a_1 \leq a_2$, не следует, что эти вершины соединены ребром $(a_1, a_2) \in E$
Реальные системы содержат конечное число элементов	Граф конечен
Двойственность, симметричность отношений между активами	Граф может содержать циклы
Активы, взаимодействующие с БТС, и отношения, возникающие между ними и БТС, зависят от времени	Граф динамически обновляемый

мация о субъекте может быть получена двояко: либо если субъект A , интересующийся субъектом B , имеет отношения типа r с субъектом B , либо если субъект B имеет отношения w с субъектом A .

Неявная запись означает, что если субъект A имеет отношения типа r с субъектом B , то чтение информации от B может рассматриваться как передача (запись) информации от B в A . Неявное чтение несколько более абстрактно. Проиллюстрируем его примером: представим, что актив B не содержит никакой информации до начала записи в него информации от A . После завершения записи B будет содержать только ту информацию, которую передал ему A , так как A очевидно знает, что он передавал. Следовательно, A будет иметь полное знание об информации в B , как если бы он ее прочитал.

В настоящей работе основное внимание уделено применению дискреционной модели к анализу свойств ИБ, связанных с передачей в виде чтения и записи информации между активами в системе (отношений «де факто»), а не прав на нее (отношений «де юре»).

Дискреционная модель позволяет описывать разнообразные сценарии поведения систем БТС и допускает различные способы отображения объектов и отношений реальной системы в модель. В нашем случае мы принимаем способ представления системы с БТС в дискреционной модели в соответствии с табл. 2.

Симметрия отношений «де факто» в дискреционной модели приводит к тому, что невозможно организовать обмен информацией между активами по чтению без нарушения целостности или записи без нарушения конфиденциальности (модели Биба и модель Белла — Лападулы соответственно) [18, 19] между различными уровнями системы, если в процессе передачи информации учувствуют только субъекты.

Это ограничение в некоторых случаях можно обойти [14, 17], вводя несимметричные отноше-

ния или используя промежуточные объекты в цепи. Далее мы проведем рассуждения в рамках модели Биба, так как в основном ИБ систем управления технологическими объектами нацелена на сохранение целостности, а не конфиденциальности (см., например, п. 5.2 ГОСТа [7] или работу [20]). Анализ модели Белла — Лападулы может быть проведен аналогичным путем.

Модель Биба определяет, что граф доступа безопасный, если актив с более низким уровнем безопасности не может осуществить запись в актив с более высоким уровнем ИБ и изменить в нем информацию.

Определим, что передача информации в безопасном виде означает, что на пути передачи информации установлены определенные барьеры безопасности. Если на пути передачи информации барьеров между активами не установлено, то будем говорить о простой передаче информации. Мы не конкретизируем вид этих барьеров, так как он зависит от реализации моделируемой системы, однако далее, в § 3, мы приведем примеры архитектуры, обеспечивающей безопасную передачу информации.

Ребра r , w в графе доступа относятся к одному из двух типов: простая передача информации \mapsto , безопасная передача информации \dashv .

Запись $a \mapsto b$ означает, что информация от актива a передается активу b простым способом.

Запись $a \dashv b$ означает, что информация от актива a передается активу b безопасным способом.

Определение 3. Будем называть операции чтения $\left(\frac{r}{\mapsto}\right)$ и записи $\left(\frac{w}{\dashv}\right)$ антисимметричными, если

$a \left(\frac{w/r}{\dashv}\right) b \not\Rightarrow b \left(\frac{r/w}{\mapsto}\right) a$, иными словами, если операция записи/чтения из a в b не приводит к возможности чтения/записи из b в a .

Определение 4. Назовем передачу информации безопасной, если из отношения $a \dashv b \not\Rightarrow a \mapsto b$, т. е.

Таблица 2

Сопоставление активов и связей между активами в системе с БТС с компонентами модели (типы активов и отношения)

Актив	Вид связи между активами	Тип актива	Возможные типы отношений в модели
Оператор	Доступ к управлению и информации. Передача управления другому оператору	Субъект	t, g
БТС	Доступ к управлению и информации	Субъект	r
Облачная инфраструктура	Доступ к информации/удаленное управление	Субъект	r, w
Пассивный элемент облачной инфраструктуры (базы данных и пр.)	Доступ к информации	Объект	r, w
GPS	Доступ к информации	Объект	r
Дорожная инфраструктура («умные» светофоры, знаки и др.)	Доступ к информации	Объект	r



передача информации не нарушает целостности актива b . ♦

В определении 4 необходимо конкретизировать смысл термина «целостность». Исторически, наиболее часто употребляемое определение целостности в контексте промышленных систем управления приведено в ГОСТ [7]: «Целостность — свойство, гарантирующее, что данные не были изменены, уничтожены или потеряны из-за несанкционированных действий или случайно на протяжении жизненного цикла.» Это определение, аналогично подходу стандарта ИСО [21], сужает проблему ИБ до вопроса целостности данных в информационных системах. Такое допущение оправдано для систем, основные функции которых состоят в хранении и обработке данных. Для систем управления физическими объектами основная функция — это управление собственно объектом. Целесообразно расширить понятие целостности на оборудование и методы. В таком виде этот термин трактуется в ГОСТ [22]: «Свойство защиты корректности и полноты имущественных объектов». В отличие от первого определения [7], такое определение расширяет понятие целостности на материальные средства, в том числе на их защитные механизмы и методы, которые в отличие от самих данных являются внутренними свойствами защищаемой системы, что позволяет собственнику реализовать эффективные меры по сохранению целостности методов. В этом контексте нарушение целостности данных не критично, если оно не приводит к нарушению критических свойств объекта. Например, если система получит неправильные данные от скомпрометированного источника, но в результате не сформируется неверная команда управления и система останется в физически безопасном состоянии, то зачастую можно пренебречь нарушением целостности информации. «Безопасная передача» трактуется как отсутствие нарушений безопасности функционирования объекта.

Примером безопасной передачи может служить замена записи информации активом a в актив b на операцию чтения активом b из актива a при условии, что приняты меры, обеспечивающие нарушение симметричности операций r и w по отношению к требуемому свойству кибербезопасности.

Расширение модели «take-grant» несимметричными отношениями типа «де факто» позволяет описывать случаи безопасной передачи информации при условии приоритета сохранения целостности, например, в реальной системе, принадлежащие, кроме основного «прямого» потока команд между активами на разных уровнях в направлении «сверху вниз», существуют дополнительные «обратные» потоки данных в виде диагностической информации, сигналов квитирования и др.

1.2. Характеристики информационной безопасности

Рассмотрим ИБ системы с БТС как задачу поддержания в заданных пределах значений рисков, связанных с возможным нарушением доступности, целостности или конфиденциальности. Набор характеристик для описания каждого из свойств ИБ может варьироваться в зависимости от свойств анализируемой системы.

В работе [14] предложен набор характеристик активов с учетом их функциональных, информационных, технологических и других свойств. Далее мы ограничимся рассмотрением только информационных свойств активов, т. е. характеристик, отражающих связи актива с другими активами в системе и возможные пути распространения атаки при нарушении конфиденциальности, целостности и доступности информации, ассоциированной с активом.

Определим множество Q_j информационных свойств актива $a_j \in A$ как $Q_j = \{C_j, I_j, T_j\}$, где C_j , I_j и T_j — множества характеристик конфиденциальности, целостности и доступности. В рамках нашей (упрощенной) модели ИБ далее не рассматриваются свойства, связанные с конфиденциальностью и доступностью, т. е. $Q_j = \{I_j\}$.

Исходя из модели Биба, примем, что более важными в смысле организации защиты считаются активы системы, имеющие доступ к большему числу других активов по отношению w . Тогда задача нахождения важных активов во многом аналогична, например, задаче нахождения лидера (наиболее влиятельного лица) в социальных графах (см., например, работу [23]) или применению метрик цикломатической сложности (точек ветвления) для программного обеспечения при оценке его надежности, когда наиболее критичным модулем программы считается модуль с наивысшей цикломатической сложностью [24].

Для системы, описываемой графом безопасности G_0 , определим количественную характеристику I_j информационных свойств актива для целостности как степень вершины по исходящим ребрам для транзитивного замыкания графа G_0 по выбранному отношению доступа w .

В общем случае, при учете функциональных и иных свойств актива, а также среды передачи информации в характеристике I_j могут учитываться веса активов (вершин графа) и связей между ними (ребер графа).

Однако отметим, что при рассмотрении характеристик конфиденциальности в ИБ можно учесть, что в моделях Биба и Белла — Лападуллы разрешенные потоки информации противоположны друг другу, что позволяет выразить характеристику C_j через характеристику I_j [25, гл. 5].

2. ПРИМЕРЫ ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА АРХИТЕКТУРЫ БЕЗОПАСНОСТИ В РАМКАХ ДИСКРЕЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Данный параграф носит прикладной характер и демонстрирует читателю применение комплексной модели на практике. Его содержание может быть полезно проектировщикам систем управления с БТС, у которых нет опыта описания систем с помощью дискреционных моделей ИБ.

Приведем два простых примера моделей систем БТС в среде «умного города», где рассматривается проблема синтеза архитектуры кибербезопасности. Первый из них — базовый и демонстрирует особенности трансформации отношений и активов при описании реальной системы дискреционной моделью. Второй пример иллюстрирует применение безопасных связей в процессе разделения системы на информационные зоны.

2.1. Пример модели с разделением доступа при управлении беспилотными транспортными средствами из локальных пунктов управления

Пусть необходимо описать двухуровневую систему удаленного управления БТС с центральным и двумя локальными пунктами управления (ПУ), причем центральный ПУ может при необходимости вмешиваться в работу всех БТС системы, а локальный — только в работу тех БТС, управление которыми ему делегировано.

Покажем, как при моделировании реальных систем с БТС следует учитывать наличие неявных связей между субъектами (см. п. 1.1). Рассмотрим модель с графом безопасности (рис. 1, *а*) с вершинами: *CC* — центральный ПУ, *C1* и *C2* — два локальных ПУ, которым центральный ПУ делегировал полномочия (отношения типа «де юре») на

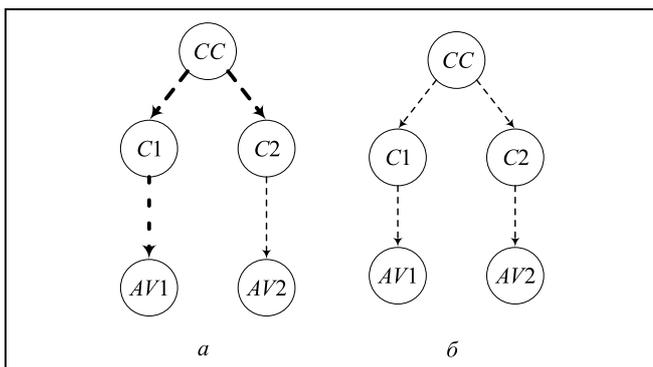


Рис. 1. Граф безопасности для системы управления с двумя БТС *AV1* и *AV2*: *а* — с общим доступом из локальных пунктов управления *C1* и *C2*; *б* — с отдельным доступом из локальных пунктов управления и с сохранением управления из общего центра. Полу жирным выделен путь, по которому локальный пункт управления *C2* может получить управление БТС *AV1*

управление БТС *AV1* и *AV2* соответственно. Отношения, на рисунке относящиеся к разным типам, здесь и далее обозначены разными линиями: *g*, *w* и *r* — штриховыми, пунктирными и сплошными соответственно. В изображенном графе субъекты *C1*, *C2* и *CC* объединены в единый сегмент (остров) отношениями «де юре» [15], поэтому каждый из локальных ПУ имеет доступ ко всем ресурсам системы. В таком графе безопасности обособленное управление БТС из локальных ПУ осуществляться не может, а значит, что либо модель неверно описывает архитектуру кибербезопасности системы, либо архитектура кибербезопасности (когда локальные пункты управления разделяют полномочия от общего центра) изначально одноуровневая.

Один из возможных вариантов графа безопасности, моделирующего обособленное управление с общим центром, приведен на рис. 1, *б*. По сравнению с графом безопасности (см. рис. 1, *а*) отношения «де юре» заменены отношениями «де факто». Замена отношений отражает характер управления, при котором полномочия заменяются директивами от центрального ПУ к локальному. Этот простой пример показывает, что прямая трансляция отношений реального мира в модель без учета смысловой составляющей языка модели может привести к созданию систем управления с изначально уязвимой архитектурой безопасности.

2.1. Пример модели системы с обособленным управлением и единым информационным пространством

Рассмотрим систему с БТС, содержащую все активы, указанные в табл. 2, но ограничимся случаем, когда в системе есть только два БТС и минимальное число других активов. Пусть каждое БТС (рис. 2) получает информацию от дорожных сенсоров *RS*, системы позиционирования *GPS* и облачной структуры, где выделена облачная среда выполнения программ *CL* и база данных *DB*. Внешнее управление БТС осуществляют программы, функционирующие в облачной структуре, или операторы. Мы полагаем, что данный пример может иллюстрировать подход к описанию архитектуры безопасности централизованного/облачного управления БТС на территории «умного предприятия». Каждое из БТС через облачное хранилище получает информацию от другого БТС, операторы имеют равные права на управление каждым из БТС.

Анализ графа безопасности для БТС показывает, что каждое из БТС может не только получать информацию о состоянии другого БТС в системе, но и непосредственно влиять на второе БТС, передавая информацию о дорожной обстановке оператору или в хранилище данных. Представленная архитектура безопасности одноуровневая, где все БТС находятся в одной зоне безопасности. Комп-

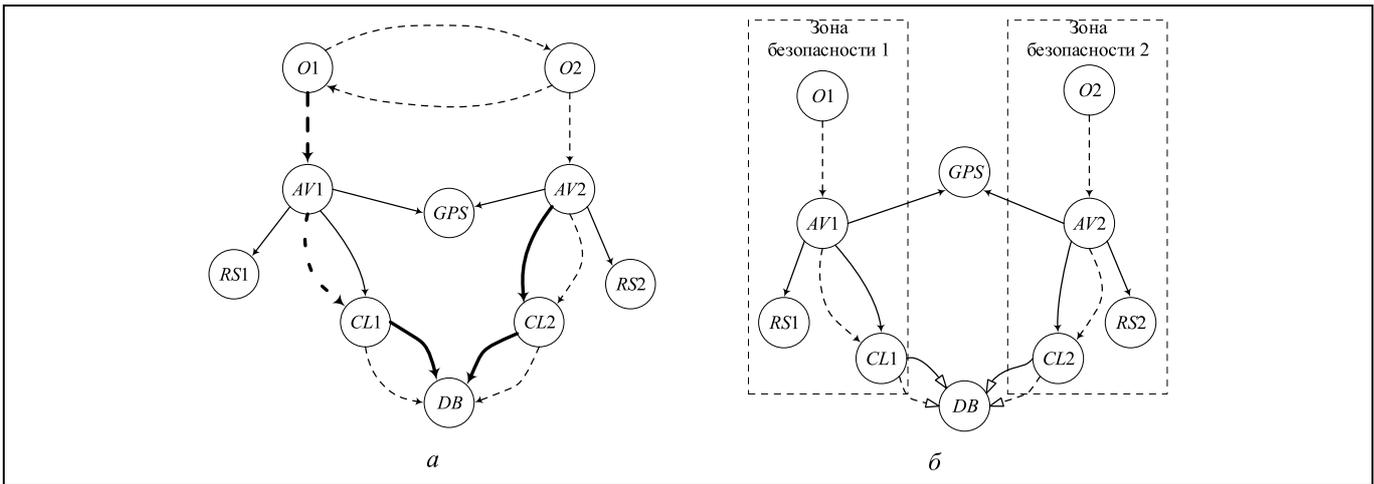


Рис. 2. Граф безопасности системы «умного предприятия»: *a* — с единой зоной по управлению BTS *AV1* и *AV2*; *б* — с отдельным управлением операторами *O1* и *O2* для BTS *AV1* и *AV2* и единым информационным пространством. «Безопасные» отношения выделены незакрашенными стрелками. Утолщенными линиями выделены пути передачи информации от *O1* к *AV2* в незащищенной системе

рометация любого актива-субъекта (например, потеря целостности в результате записи в него ложной информации) дает потенциальную возможность скомпрометировать все остальные активы. Атака, направленная из одного BTS на другой BTS, может проводиться двумя способами: либо через общее облачное хранилище, либо через оператора, когда BTS представляет для него ложную информацию, по которой оператор принимает ложное решение по управлению другим транспортным средством. Пример возможного пути нарушения целостности в результате посылки команды управления оператором BTS *AV1* для BTS *AV2* без согласия второго оператора приведен на рис. 2, *a*. Всего же в данном графе есть более 20 путей нарушения целостности между BTS.

Предположим, что необходимо обеспечить обособленное управление для обоих BTS от своих операторов (аналогично предыдущему примеру), но сохранив у BTS возможность обмениваться информацией (чтением) в режиме единого информационного пространства для всей системы. Для этого есть несколько решений. Так, аналогично предыдущему примеру, можно обеспечить независимость по отношению «де юре» операторов, а также сделать безопасным доступ к базе данных с применением несимметричных отношений, введенных в п. 1.1.

Один из практических способов реализации несимметричного доступа к базе данных — это изоляция данных с разграничением прав доступа, когда каждому BTS в хранилище доступны только «собственные» данные, а данные других BTS не доступны. Модифицированный таким образом граф безопасности с указанием зон безопасности по отношению *w* приведен на рис. 2, *б*.

3. ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ БЕСПИЛОТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Рассмотрим проблему анализа ИБ для BTS в структуре «умного города». Среда «умного города», в которой функционирует BTS, постоянно изменяется. Из динамического характера транспортных систем очевидно, что граф безопасности такой системы зависит от времени и сам тоже динамический. В графе меняется как число BTS в системе, так и связи BTS с другими активами, и его можно рассматривать как пример динамической сети [9].

Соответственно, для сохранения референтности модели граф безопасности должен обновляться по любому событию, связанному со значимым изменением реальной системы, а его свойства ИБ должны пересчитываться. Наличие в моделируемой системе множества активов и отношений приводит к построению графа, решение задач ИБ для которого требует большого объема расчетов. Например, как показывает проведенный нами анализ реальных данных системы BTS компании «Waymo» [26], в каждый момент времени на «близком» расстоянии от BTS в «интенсивной» городской среде находится около десятка объектов, а в пределах «видимости» — более сотен. Для уменьшения вычислительной сложности предлагается для конкретного BTS проводить анализ не на общем графе безопасности, а на некотором его индуцированном подграфе, который назовем актуальным графом безопасности для данного BTS. При этом вершины (активы) в общем графе безопасности исключаются из рассмотрения, если они находят-

ся на большом «расстоянии» от актива, для которого проводится анализ.

Пусть $V(G)$ — множество вершин, а $E(G)$ — множество ребер общего графа безопасности G . Для оценки «расстояния» между активами введем характеристику, основанную на физической и информационной «удаленности» вершин графа друг от друга.

Определение 5. Назовём отклонением $d(v_i, v_j) = d_{ij}$ между вершинами v_i и v_j графа $G = \{V, U\}$ характеристику кратчайшего пути, соединяющего вершины по заданному отношению ИБ, рассчитываемую по формуле:

$$d_{ij} = k_1 \sum_{l=1}^M w_l^{ij} + k_2 S_{ij}$$

где w_l^{ij} — вес l -го ребра, входящего в кратчайший путь между активами i и j , $w_l^{ij} \sim \tau$, τ — задержка прохождения сигнала между активами (один из способов оценки задержки см. в работе [27]); S_{ij} — длина минимальной физически реализуемой траектории между активами i и j , если оба актива — физические, и ноль — если хотя бы один из активов чисто информационный; k_1, k_2 — размерные нормировочные коэффициенты. ♦

Подчеркнем отличия введенного нами отклонения на графе безопасности от «обычного» геометрического расстояния. Первое отличие связано с информационной составляющей отклонения. При исследовании информационной зависимости допускается наличие петель в графе и полагается, что расстояние между вершинами v_i и v_j равно длине кратчайшего цикла, проходящего через вершину, т. е. в общем случае $d(v_i, v_j) \neq 0$.

Второе отличие связано с тем, что кратчайшая траектория между БТС, находящимися в точках v_1 и v_2 , в общем случае не является отрезком прямой (v_1, v_2) , так как два БТС могут находиться на изолированных проезжих частях и быть разделены рельефом, зданиями, объектами инфраструктуры и т. п.

Третье отличие состоит в том, что в транспортной системе путь между точками v_1 и v_2 в прямом и обратном направлении также может быть различен: $d(v_i, v_j) \neq d(v_j, v_i)$.

Поэтому только в специальных случаях введенное нами отклонение может обладать теми же свойствами, что и метрика в топологическом смысле этого слова.

Таблица 3

Формулы расчета отклонения в зависимости от цели атаки

Цель атаки	Формула расчета отклонения
Нанесение физическо-го вреда БТС со стороны другого актива	Для БТС i : $d_{ij} = k_2 S_{ij}$, $k_1 = 0$. При этом БТС i в некий момент времени будет находиться в безопасном состоянии по отношению к данной угрозе со стороны актива j , если $S_{ij} \geq L_i > 0$, где L_i — длина траектории между физическими объектами, при которой БТС i способно осуществить маневр, предотвращающий столкновение. Значение L_i зависит от многих факторов, например, от плотности потока, средней скорости, типа транспортного средства, погоды и пр. Очевидно, что физический актив j , для которого в данный момент времени выполняется данное условие, можно удалить из графа безопасности
Получение конфиденциальной информации о БТС	В данном случае мы имеем дело с чисто информационным воздействием, когда $k_2 = 0$. Пусть существует W_i — длина информационного пути, при которой возможно гарантированное детектирование кибератаки на актив и изоляция атакующего. Тогда все активы j графа безопасности, для которых $\sum_{l=1}^M w_l^{ij} > W_i$, где l — номер ребра в пути, можно исключить из рассмотрения и построить таким образом актуальный граф безопасности
Срыв задания БТС	Под срывом задания БТС мы имеем в виду недопущение прибытия БТС в конечную точку маршрута. Причиной срыва задания может быть как физической, так и информационная атака (например, передача ложной информации о ситуации на маршруте, ложных координат и т. п.). Возможность проведения такой информационной атаки простыми средствами была недавно продемонстрирована [28]. Пусть существуют L_i — длина пути между физическими объектами, при которой БТС способно осуществить маневр, предотвращающий физическое повреждение, и W_i — длина информационного пути, при которой возможно гарантированное детектирование кибератаки и изоляция атакующего. Тогда в актуальный граф безопасности для рассматриваемой задачи войдут вершины v_i и b_j , удовлетворяющие условиям $\begin{cases} \sum_{l=1}^M w_l^{ij} \leq W_i \\ S_{ij} \leq L_i \end{cases}$



Определение 6. Назовем $\mathcal{G}_i^\Sigma(t)$ актуальным графом безопасности для БТС i , если $\forall t > 0$ $\mathcal{G}_i^\Sigma(t) \subset G_0(t)$, $v_i \in \mathcal{G}_i^\Sigma(t)$, а также:

$$\begin{cases} \forall v_j \in \mathcal{G}_i^\Sigma(t): d_{ij} \leq D = \text{const}, \\ \forall v_j \notin \mathcal{G}_i^\Sigma(t): d_{ij} > D. \end{cases} \blacklozenge$$

Иными словами, актуальный граф безопасности получается из общего графа безопасности удалением вершин $v_j \in V$ и инцидентных этим вершинам ребер, для которых отклонение от вершины v_i больше заданного порогового значения, определяемого видом решаемой задачи. Возможные формулы расчета отклонения между активами для отдельных задач приведены в табл. 3.

Итак, мы предлагаем такой подход к анализу ИБ БТС в динамической среде «умного города»:

1) построение графа безопасности системы с БТС с помощью табл. 2;

2) переход от общего графа безопасности к актуальному графу безопасности для конкретного БТС в соответствии с областью и целью анализа ИБ (см. табл. 3);

3) анализ информационной безопасности БТС на актуальном графе с помощью дискреционной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема оценки информационной и кибербезопасности (ИБ) для беспилотных транспортных средств (БТС). Для решения этой проблемы предложен метод моделирования архитектуры ИБ с применением дискреционных моделей. Основное внимание при моделировании уделено свойству ИБ «целостность», которое имеет более высокую значимость для промышленных систем управления по сравнению с другими свойствами безопасности [7, 20]. Для анализа целостности рассмотрен подход, учитывающий информационные характеристики актива, т. е. его связи с другими активами в системе и возможные пути распространения атаки при нарушении конфиденциальности, целостности и доступности информации, ассоциированной с активом. В качестве количественной характеристики информационных свойств актива для целостности введена степень вершины по исходящим ребрам для результата транзитивного замыкания графа безопасности по отношению доступа по записи.

Рассмотрена проблема уменьшения пространства поиска при анализе путей в графе безопасности путем перехода от «общего» графа безопасности к индуцированному подграфу — «актуальному» графу безопасности. Для построения актуального

графа безопасности введена характеристика, основанная на физической и информационной удаленности вершин графа друг от друга. Для некоторых практических случаев предложены формулы расчета этой характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *The United Nations Economic Commission for Europe (UNECE)*. — URL: http://www.unecce.org/trans/theme_its.html
2. *Паспорт федерального проекта «Общесистемные меры развития дорожного хозяйства»*. — URL: <https://sudact.ru/law/pasport-federalnogo-proekta-obshchesistemnye-mery-razvitiia-dorozhnogo/> [*Passport of the Federal Project «System-wide Measures for Road Development» (In Russian)*]
3. *Коробеев А.И., Чучаев А.И.* Беспилотные транспортные средства: новые вызовы общественной безопасности // *Lex Russica*. — 2019. — Т. 2. [*Korobeev, A.I., Chuchaev, A.I. Unmanned Vehicles: New Challenges to Public Safety // Lex Russica*. — 2019. — Vol. 2. (In Russian)]
4. *Басан Е.С., Басан А.С., Макаревич О.Б., Бабенко Л.К.* Исследование влияния активных сетевых атак на группу мобильных роботов // *Вопросы кибербезопасности*. — 2019. — № 1 (29). — С. 35–44. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vliyaniya-aktivnyh-setevykh-atak-na-gruppu-mobilnyh-robotov> [*Basan, E.S., Basan, A.S., Makarevich, O.B., Babenko, L.K. Studying the Impact of Active Network Attacks on a Mobile Robots Group // Voprosy Kiberbezopasnosti*. — 2019. — No. 1 (29). — S. 35–44.]
5. URL: https://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/connected-car-market-102580117.html?gclid=EAIaIQobChMIh6mR9e-C5gIVysqyCh0k4QiTEAAYASAAEgIs6_D_BwE
6. URL: <https://www.leslivresblancs.fr/livre/filieres-specialisees/automobile/vehicules-autonomes-et-connectes>
7. *ГОСТ Р МЭК 62443-1-1—2009*. Ч. 1-1. Терминология, концептуальные положения и модели. — М.: Стандартинформ 2013. [*GOST R IEC 62443-1-1—2009. Part 1-1. Terminology, Conceptual Provisions and Models*. — Moscow: Standartinform, 2013. (In Russian)]
8. *Алпеев А.С.* Терминология безопасности: кибербезопасность, информационная безопасность // *Вопросы кибербезопасности*. — 2014 — № 5. — С. 39–42. [*Alpeev, A. Terminology of Isecurity: Cybersecurity, Information Security*. — 2014. — No. 5. — P. 39–42. (In Russian)]
9. *Fok, E.* An Introduction to Cybersecurity Issues in Modern Transportation Systems // *Inst. Transportation Engineers J.* — 2013. — Vol. 83, no. 7. — P. 18–21.
10. *Bhattacharjee, D.* Unmanned Aerial Vehicles and Counter Terrorism Operations // *SSRN Electronic Journal*. — 2015. — 10.2139/ssrn.2608969.
11. *Hamida, E.B., Noura, H., Znaidi, W.* Security of Cooperative Intelligent Transport Systems: Standards, Threats Analysis and Cryptographic Countermeasures // *Electronics*. — 2015. — Vol. 4. — P. 380–423, doi: 10.3390/electronics4030380
12. *Security Cyber Security and Resilience of Intelligent Public Transport Good practices and recommendations*. — ENISA (European Union Agency for Network and Information Security), December 2015.
13. *Hong, J.* Cyber Security Issues in Connected Vehicle of Intelligent Transport System // *Indian Journal of Science and Technology*. — June 2016. — Vol. 9 (24), doi: 10.17485/ijst/2016/v9i24/96027
14. *Промыслов В.Г., Семенов К.В., Шумов А.С.* // Синтез архитектуры кибербезопасности для систем управления атомных электростанций. — Проблемы управления. — 2019. — № 3. — С. 61–71. [*Promyslov, V.G., Semenov, K.V., Shumov, A.S. Security Model for Instrumentation and Control Systems for Nuclear Power Plants // Control Sciences*. — 2019. — No. 3. — P. 61–71. (In Russian)]

15. *Bishop, M.* Computer Security: Art and Science. — Boston: Addison Wesley, 2003. — 1136 p.
16. *Denning, E.* A Lattice Model of Secure Information Flow // Communications of the ACM. — 1976. — Vol. 19, iss. 5. — P. 236–243.
17. *Lockman, A., Minsky, N.* Unidirectional Transport of Rights and Take-Grant Control // IEEE Trans. on Software Engineering. — November 1982. — Vol. 8, no. 6. — P. 597–604, doi: 10.1109/TSE.1982.236020
18. *Biba, K.J.* Integrity Considerations for Secure Computer Systems / MTR-3153, The Mitre Corporation, April 1977.
19. *Bell, D.E., La Padula, L.J.* Secure Computer System: Mathematical Foundations // MITRE Technical Report MTR-2547, vol. 1. — MITRE Corporation, Bedford, Mass, 1973.
20. *Бабаяев Д.И., Полятыкин А.Г., Промыслов В.Г., Тимофеев М.Ю.* Управление архитектурой кибербезопасности АСУТП АЭС // Проблемы управления. — 2018. — № 3. — С. 47–55. [*Babaev, D.I., Poletikin, A.G., Promyslov, V.G., Timofeev, M.Yu.* Managing the Cybersecurity Architecture of Automated Process Control Systems of Nuclear Power Plants // Control sciences. — 2018. — No. 3. — P. 47–55. (In Russian)]
21. *ISO/IEC 27000.* Information Technology — Security Techniques — Information Security Management Systems — Overview and Vocabulary. — 2018.
22. *ГОСТ Р МЭК 62443-3-3.* Сети промышленной коммуникации. Безопасность сетей и систем. Ч. 3-3. Требования к системной безопасности и уровни безопасности. — 2016. [*GOST R IEC 62443-3-3.* Industrial Communication Networks. Security of Networks and Systems. Part 3-3. System Security Requirements and Security Levels. — 2016. (In Russian)]
23. *Newman, M.E.J.* The Structure and Formation of Complex Networks // SIAM Review. — 2003. — Vol. 45, no. 2. — P. 167–256.
24. *Антонов А.В., Жарко Е.Ф., Промыслов В.Г.* Проблемы оценки надежности и качества программного обеспечения в автоматизированных системах управления технологическими процессами // Надежность. — 2015. — № 4 (55). — С. 82–96. [*Antonov, A.V., Zharko, E.F., Promyslov, V.G.* Problems of Evaluation of Software Dependability and Quality in Industrial Automation and Control Systems // Reliability. — 2015. — No. 4 (55). — P. 92–96.
25. *Jaeger, T.* Operating System Security (Synthesis Lectures on Information Security, Privacy, and Trust). — Morgan and Claypool Publishers, 2008. — 218 p.
26. *URL:* <https://waymo.com/open/data/>
27. *Байбулатов А.А., Промыслов В.Г.* Аппроксимация огибающей в приложениях «Network calculus» // Проблемы управления. — 2016. — № 6. — С. 59–64. [*Baybulatov, A.A., Promyslov, V.G.* The Approximation of Envelope in «Network Calculus» Applications // Control Sciences. — 2016. — No. 6. — P. 59–64. (In Russian)]
28. *Hern, A.* Berlin Artist Uses 99 Phones to Trick Google into Traffic Jam Alert // The Guardian, 03 Feb 2020. — URL: <https://www.theguardian.com/technology/2020/feb/03/berlin-artist-uses-99-phones-trick-google-maps-traffic-jam-alert>

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.В. Кульбой.

Поступила в редакцию 22.01.2020, после доработки 17.02.2020.
Принята к публикации 23.03.2020.

Промыслов Виталий Георгиевич — канд. физ.-мат. наук,
✉ v1925@mail.ru,

Семенов Кирилл Валерьевич — канд. физ.-мат. наук,
✉ semenkovk@mail.ru,

Жарко Елена Филипповна — канд. тех. наук, ✉ zharko@ipu.ru,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

SECURITY THREAT ASSESSMENT METHODS FOR UNMANNED VEHICLES IN A SMART CITY

V.G. Promyslov¹, K.V. Semenov², E.Ph. Zharko³

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ v1925@mail.ru, ²✉ semenkovk@mail.ru, ³✉ zharko@ipu.ru

Abstract. This paper presents a comprehensive cybersecurity model for autonomous vehicles (AV) system in framework of the smart city. We consider a problem of information flow description for a real AV system in the frame of discretionary security models. The definition of safe data transfer for some types of information exchange between the system assets is presented. Some techniques for asset classification in frame of Biba and Bell-LaPadula models taking into account information links between the assets are introduced. We discuss the complexity and ambiguousness of the «integrity» definitions in relation to cybersecurity provision and emphasize the significance of its extension to the equipment and data processing methods. This approach is considered to shift the focus to the system analysis and system vulnerability removal and to develop the protection upon the system internal properties. Dynamical methods of cybersecurity architecture synthesis for transport systems with AVs are considered. The methods are shown to lessen computational complexity of system modelling. Instead of analyzing the complete security graph, one may analyze an induced subgraph for a given AV. The vertices (assets) of full security graph are excluded from the consideration if they are at a great «distance» from the analyzed AV. Formulae for the distance calculation are provided for some cases. Some examples of cybersecurity architecture analysis and synthesis for autonomous vehicles are presented.

Keywords: cybersecurity, autonomous vehicles, smart city, security architecture, classification, clustering, security graph, take-grant model.

Funding. The study (Sections 3 and 4) was performed with partial financial support of Russian Foundation of Basic Research, project no. 19-29-06044.

ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЙ НЕБЛОКИРУЕМЫЙ ТРЕХМЕРНЫЙ РАЗРЕЖЕННЫЙ ГИПЕРКУБ

В.С. Подлазов

Аннотация. Предложена системная сеть в виде неблокируемого отказоустойчивого трехмерного обобщенного p -ичного гиперкуба с одним процессором в каждом узле гиперкуба. В любой неблокируемой сети данные между абонентами передаются с наименьшими задержками по прямым каналам без промежуточной буферизации. Отмечено, что сети с топологией обобщенного гиперкуба имеют наименьшие длины прямых каналов и наименьшие задержки передачи. Разработана структура этого гиперкуба на базе сетей с топологией квазиполного графа, которая позволяет разминивать число абонентов на число разных прямых каналов между любыми абонентами и задавать каналную и узловую отказоустойчивость сети. Даны параметры квазиполных графов, существующих при любой p -ичности гиперкуба. В результате предложена структура сети в виде разреженного p -ичного гиперкуба с числом узлов несколько меньшим, чем в обычном p -ичном гиперкубе. Разреженный гиперкуб разработан как отказоустойчивая системная сеть для однокристалльного процессора-ускорителя с несколькими сотнями ядер. Разработаны процедура и алгоритм прокладки бесконфликтных прямых каналов посредством динамической локальной самомаршрутизации пакетов, при котором узлы не взаимодействуют друг с другом и используют только расширенную маршрутную информацию из пакетов.

Ключевые слова: системная сеть, квазиполный граф, обобщенный гиперкуб, каналная отказоустойчивость, коммутационные свойства, неблокируемая сеть, бесконфликтные прямые каналы, локальная динамическая самомаршрутизация.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает серию работ автора по созданию самомаршрутизируемых неблокируемых системных сетей для многопроцессорных вычислительных систем [1–3]. Эти сети обладают наибольшим быстродействием, так как передача данных в них ведется по прямым каналам без промежуточной буферизации.

Исходно эти сети имели топологию квазиполного графа или орграфа [1, 2] и обладали квадратичной зависимостью числа узлов от их степени. Самомаршрутизация в этих сетях статическая, при которой любой источник самостоятельно прокладывает весь бесконфликтный путь к приемнику для произвольной перестановки пакетов данных между узлами. Главный недостаток этих сетей — малое число узлов в них. Топологию квазиполного орграфа имели сети в виде 2-мерного обобщенного гиперкуба и 2-мерного полного мультикольца [2].

Обобщенный r -мерный p -ичный гиперкуб [4] со степенью узлов $m = rp$ и числом узлов $N = p^r$

применяется как системная сеть в некоторых современных многопроцессорных вычислительных системах [5]. В работе [3] на базе 2-мерного гиперкуба был построен неблокируемый 3-мерный p -ичный гиперкуб, для которого был предложен алгоритм динамической локальной самомаршрутизации. Он позволяет параллельно прокладывать бесконфликтные пути при произвольной перестановке пакетов данных между узлами на основе только локальной информации в промежуточных узлах без взаимодействия между ними.

Полное r -мерное p -ичное мультикольцо также имеет $N = p^r$ узлов со степенью $m = rp$. В работе [3] на базе 2-мерного мультикольца было построено неблокируемое 3-мерное p -ичное мультикольцо, алгоритм динамической локальной самомаршрутизации в котором имел те же свойства, что и в гиперкубе. Эта работа была ориентирована на проектирование сетей для однокристалльных процессоров-ускорителей с кольцевыми каналами типа *Cell*, *Xion Phy* или ПС2100, в которых необходимо иметь сотни и тысячи ядер.

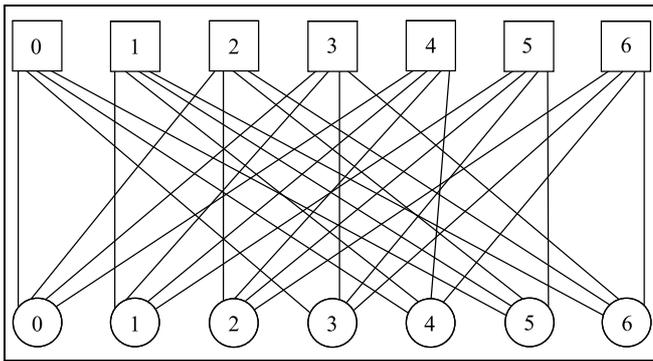


Рис. 1. Квазиполный граф с $N=7$, $p=4$ и $\sigma=2$: квадраты — коммутаторы

К сожалению, сети с топологией квазиполных орграфов не имеют изначальных (врожденных) свойств обеспечения их отказоустойчивости. Тогда как сети с топологией квазиполного графа такими свойствами обладают — в них возможно создание конфигураций с несколькими (двумя, тремя и более) разными путями между любыми двумя узлами. Поэтому в работе [3] была поставлена задача создания на базе p -ичного квазиполного графа отказоустойчивой 3-мерной неблокируемой сети с числом узлов $R = O(p^3)$ и с наличием σ разных прямых путей между узлами.

В настоящей статье предлагается структура расширенного по каналам 3-мерного p -ичного гиперкуба, который образует неблокируемую системную сеть с канальной отказоустойчивостью заданного порядка. Для этой сети предложен алгоритм динамической самомаршрутизации пакетов, который прокладывает бесконфликтные пути на основе расширенной маршрутной информации локально по узлам сети.

Структура работы. Во Введении обосновывается актуальность построения отказоустойчивых неблокируемых гиперкубов, так как ранее построенные неблокируемые гиперкубы и мультикольца не обладали канальной отказоустойчивостью. В § 1 вводятся такие основные понятия, как *квазиполный граф*, *плоская сеть* и *бесконфликтная самомаршрутизация*. В § 2 дается новое основное понятие данной статьи, а именно *3-мерный разреженный гиперкуб из плоских сетей*. Даются структуры гиперкуба и составляющих его плоских сетей. В § 3 объясняется, как в построенном гиперкубе осуществляется *отказоустойчивая самомаршрутизация* по разным путям через плоские сети. В § 4 объясняется, как в такой топологии сети организуется *неблокируемая самомаршрутизация*. Обоснование неблокируемости требует введения дополнительных параллельных каналов в структуру гиперкуба и рассмотрения методов разрешения на

их основе двух типов возникающих конфликтов. Наконец, в § 5 описывается алгоритм неблокируемой самомаршрутизации, который можно непосредственно реализовывать в коммутаторах сети. Алгоритм использует передаваемую в пакетах маршрутную информацию *динамически* локально по узлам, т. е. в процессе прокладки бесконфликтных путей. В Заключении отражены основные результаты статьи.

1. НЕБЛОКИРУЕМАЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВАЯ СЕТЬ С ТОПОЛОГИЕЙ КВАЗИПОЛНОГО ГРАФА

Квазиполный граф представляет собой минимальный двудольный граф, одну долю которого составляют узлы-абоненты, а другую — узлы-коммутаторы (рис. 1). Степень всех узлов в каждой доле одинакова и равна p . Число вершин в каждой доле N , перенумерованных от 0 до $N-1$, задается равенством $N = p(p-1)/\sigma + 1$ [6], где σ задает число разных путей между любыми двумя абонентами. Каждый такой путь имеет длину в 2 ребра через один и только один коммутатор. Каждое ребро представляет собой две встречных дуги — от абонента к коммутатору и обратно.

Схемы соединений между коммутаторами и абонентами задаются, например, в табл. 1. В каждой строке первая ячейка задает номер коммутатора, а остальные ячейки — номера абонентов, связанных с данным коммутатором ребром в виде дуплексного канала (двух встречных симплексных каналов).

Если объединить одноименные коммутатор и абонента квазиполного графа в одном сетевом узле, то мы получим *плоскую сеть* $ПС(N, p, \sigma)$. Она является неблокируемой сетью с бесконфликтной статической самомаршрутизацией и обладает $(\sigma-1)$ -канальной отказоустойчивостью при $\sigma > 1$ (рис. 2).

Самомаршрутизация в $ПС(N, p, \sigma)$ осуществляется по схеме соединений (см. табл. 1) с помощью номеров узлов абонента-источника и абонента-приемника. В таблице находятся номера комму-

Таблица 1

Схемы соединений в двух квазиполных графах

Коммутаторы	$N=7, p=3, \sigma=1$			$N=7, p=4, \sigma=2$			
	Абоненты			Абоненты			
0	0	6	4	0	5	4	3
1	1	0	5	1	6	5	4
2	2	1	6	2	0	6	5
3	3	2	0	3	1	0	6
4	4	3	1	4	2	1	0
5	5	4	2	5	3	2	1
6	6	5	3	6	4	3	2

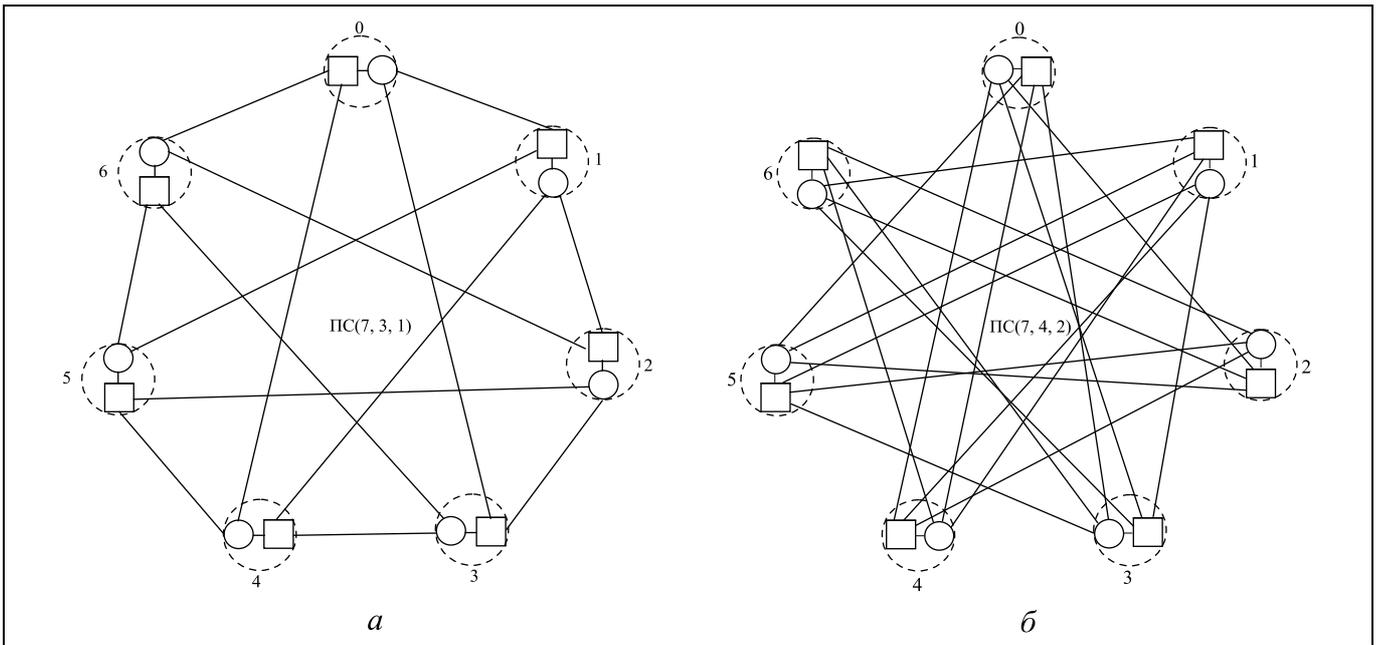


Рис. 2. Неблокируемые сети: а — $PC(7, 3, 1)$; б — $PC(7, 4, 2)$

таторов, связанных дуплексными каналами с абонентами-приемниками. Среди этих коммутаторов находится тот, который связан таким же каналом с абонентом-источником. По свойствам квазиполных графов таких коммутаторов σ .

На самом деле, каждая таблица соединений представляет собой одну из неполных уравновешенных симметричных блок-схем $BD(N, p, \sigma)$, исследуемых в комбинаторике [7]. Они существуют и, тем более, построены не для всех значений па-

раметров p и σ . В табл. 2 приведены значения N для блок-схем при малых значениях этих параметров. Пустые клетки отмечают блок-схемы, которые не существуют по определению. Прочерки в клетках отмечают блок-схемы, которые не могут существовать по теории, а перечеркнутые значения отмечают блок-схемы, которые еще не построены.

Необходимость построения отказоустойчивых сетей $PC(N, p, \sigma)$ требует некоторого эффективного заполнения пустых клеток в табл. 2. Для этого в работе [8] были предложены и построены 1-расширенные блок-схемы $BD(N^*, p, \sigma|\sigma + 1)$, задающие таблицы соединений для 1-расширенных плоских сетей $PC(N^*, p, \sigma|\sigma + 1)$, в которых малая часть абонентов связаны $\sigma + 1$ разными путями, а остальные — точно σ разными путями. Значения N и N^* числа узлов в упомянутых блок-схемах приведены в табл. 3, где последние выделены подчеркиванием.

Таблица 2

Число элементов в блок-схемах $BD(N, p, \sigma)$

σ	p									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	11	21	31	—	57	73	91	111	133
2	4	7	11	16	—	—	37	—	56	—
3	3	5	—	11	15	—	25	31	45	—

Таблица 3

Число элементов N в блок-схемах $BD(N, p, \sigma)$ и N^* в 1-расширенных блок-схемах $BD(N^*, p, \sigma|\sigma + 1)$

σ	p									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7	11	21	31	<u>39</u>	57	73	91	<u>95</u>	133
2	4	7	11	<u>15</u>	<u>21</u>	<u>27</u>	37	42	<u>51</u>	63
3	3	5	<u>7</u>	<u>11</u>	<u>15</u>	<u>19</u>	<u>23</u>	<u>29</u>	<u>36</u>	<u>43</u>

2. ТРЕХМЕРНЫЙ РАЗРЕЖЕННЫЙ ГИПЕРКУБ ИЗ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ

Пусть имеется сеть из N узлов с номерами (x_1, x_2, \dots, x_N) , где $x_i \in [0, Np - 1]$. Следом $t(x_i)$ узла x_i считается остаток от деления его номера на N . Такая сеть считается плоской, если в ней любые два узла со следами $t(x_i)$ и $t(x_j)$ объединяются такими же ребрами (учетом абонентов и коммутаторов), как узлы с теми же следами в сети $PC(N, p, \sigma)$.

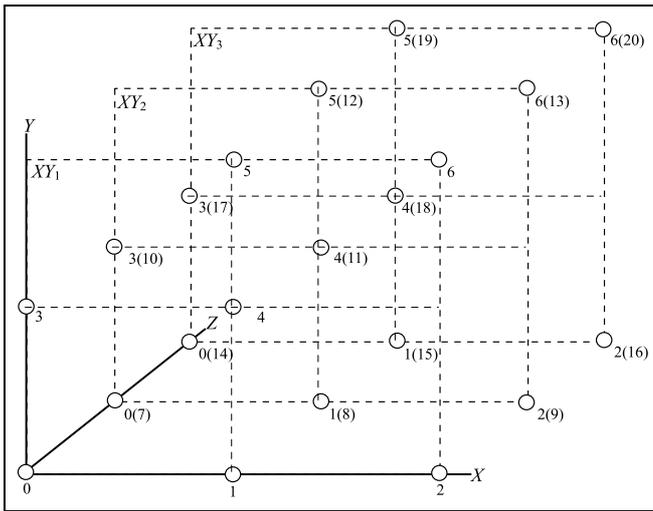


Рис. 3. Разреженный троичный гиперкуб с плоскими сетями на плоскостях XY_i

Иначе говоря, плоскими мы считаем сети, изоморфные сети $ПС(N, p, \sigma)$.

Шаблон T плоской сети с номерами узлов (x_1, x_2, \dots, x_N) мы называем набор (множество) их следов $T = \{t(x_1), t(x_2), \dots, t(x_N)\}$.

Построим *трехмерный p -ичный гиперкуб* [3], каждая плоскость XY и XZ которого содержит плоские сети из p узлов, с единым шаблоном T сетей $ПС(N, p, \sigma)$ или $ПС(N^*, p, \sigma|\sigma + 1)$. Не снижая общности, построение будем вести на примере $ПС(7, 3, 1)$ (см. табл. 1), в которой номера узлов и их следы совпадают. В дальнейшем всегда будем применять обозначение $ПС(N, p, \sigma)$, даже если используется $ПС(N^*, p, \sigma|\sigma + 1)$.

Будем размещать на вертикальных плоскостях $XY_i, 1 \leq i \leq p$, гиперкуба плоские сети, узлы которых имеют номера $x_{(j+iN)}, 0 \leq j \leq p-1$, и размещены на плоскостях одинаково по следам j . В результате мы получим *разреженный гиперкуб* с $R = Np$ узлами (рис. 3). На рис. 3 узлы на вертикальных плос-

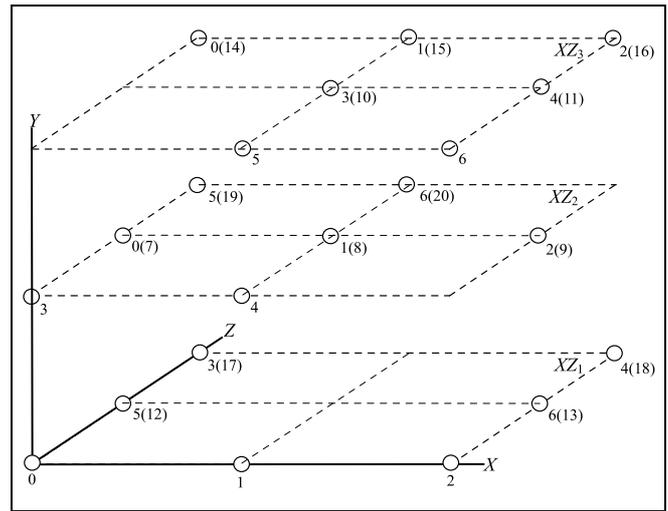


Рис. 4. Разреженный троичный гиперкуб из плоских сетей на плоскостях XY_i и XZ_j

костях обозначаются как $j(x_{(j+iN)})$, а штриховые линии только выделяют вертикальные плоскости (это не ребра между узлами).

Теперь перераспределим узлы между горизонтальными плоскостями $XZ_j, 1 \leq j \leq p$, не меняя их принадлежность к вертикальным плоскостям XY_i (рис. 4), так чтобы во всех них (как XY_p , так и XZ_j) были плоские сети из N узлов, т. е. с шаблоном сети $ПС(N, p, \sigma)$. На рис. 4 штриховые линии оконтуривают горизонтальные плоскости (это не ребра между узлами).

Процедура перераспределения узлов при $\sigma = 1$ состоит в следующем. Все узлы плоских сетей на вертикальных плоскостях XY разбиваются на p групп с номерами g . Первая группа состоит из x узлов, а остальные — из y узлов, где $x + y(p-1) = N$ (левая часть табл. 4 при $p = 3$). Такое разбиение d по группам будем задавать парой (x, y) , которая при $\sigma = 1$ является парой $(p, p-1)$. Номера узлов группы g в плоскостях XY сдвигаются циклически на $g-1$ ячеек вправо, образуя при этом таблицы плоских сетей на плоскостях XZ (правая часть табл. 4).

При произвольном p плоские сети в плоскостях XZ строятся аналогично (табл. 5).

Построение плоских сетей для плоскостей XZ при $\sigma > 1$ осуществляется аналогично. В табл. 6 приведен пример для $p = 4$ и $\sigma = 2$. Здесь первая группа состоит из одного узла, а остальные — из двух узлов, т. е. разбиение d по группам задается парой $(1, 2)$.

Разбиение d по группам для остальных сетей $ПС(N, p, 2)$ задается табл. 7, а для сетей $ПС(N, p, 3)$ — табл. 8.

Таблица 4

Размещение $ПС(7, 3, 1)$ по плоскостям XY и XZ

T	g	XY_1	XY_2	XY_3	g	XZ_1	XZ_2	XZ_3
0		0	7	14		0	7	14
1	1	1	8	15	1	1	8	15
2		2	9	16		2	9	16
3	2	3	10	17	2	17	3	10
4		4	11	18		18	4	11
5	3	5	12	19	3	12	19	5
6		6	13	20		13	20	6



В заключение данного параграфа рассмотрим табл. 9, задающую число узлов в построенных трехмерных разреженных гиперкубах. В ней подчеркнутые значения относятся к гиперкубам, построенным на 1-расширенных плоских сетях

ПС(N^* , p , $\sigma|\sigma + 1$), в которых $N^* < N$. Остальные значения задаются формулой $R(p, \sigma) = N(p, \sigma)p$, т. е. $R(p, 1) = p^3 - p^2 + p$, $R(p, 2) = p^3/2 - p^2/2 + p$ и $R(p, 3) = p^3/3 - p^2/3 + p$.

Таблица 5

Размещение ПС($N, p, 1$) по плоскостям XZ

T	g	XZ_1	XZ_2	XZ_3	XZ_4	...	XZ_p
0	1	0	N	$2N$	$3N$...	$(p-1)N$
\dots $p-1$		\dots $p-1$	\dots $N+p-1$	\dots $2N+p-1$	\dots $3N+p-1$	\dots	\dots $(p-1)N+p-1$
p	2	$(p-1)N+p$	p	$N+p$	$2N+p$...	$(p-2)N+p$
\dots $2p-2$		\dots $(p-1)N+2p-2$	\dots $2p-2$	\dots $N+2p-2$	\dots $2N+2p-2$	\dots	\dots $(p-2)N+2p-2$
$2p-1$	3	$(p-2)N+2p-1$	$(p-1)N+2p-1$	$2p-1$	$N+2p-1$...	$(p-3)N+2-1p$
\dots $3p-3$		\dots $(p-2)N+3p-3$	\dots $(p-1)N+3p-3$	\dots $3p-3$	\dots $N+3p-3$	\dots	\dots $(p-3)N+3p-3$
$3p-2$	4	$(p-3)N+3p-2$	$(p-2)N+3p-2$	$(p-1)N+3p-2$	$3p-2$...	$(p-4)N+3p-2$
\dots $4p-4$		\dots $(p-3)N+4p-4$	\dots $(p-2)N+4p-4$	\dots $(p-1)N+4p-4$	\dots $4p-4$	\dots	\dots $(p-4)N+4p-4$
...
$(p-1)^2+1$	p	p^2+N-1	p^2+2N-1	p^2+3N-1	p^2+4N-1	...	p^2-1
\dots p^2-p		\dots p^2-p+N	\dots p^2-p+2N	\dots p^2-p+3N	\dots p^2-p+4N	\dots	\dots p^2-p

Таблица 6

Размещение ПС(7, 4, 2) по плоскостям XY и XZ

T	g	XY_1	XY_2	XY_3	XY_4	g	XZ_1	XZ_2	XZ_3	XZ_4
0	1	0	7	14	21	1	0	7	14	21
1	2	1	8	15	22	2	22	1	8	15
2		2	9	16	23	23	2	9	16	
3	3	3	10	17	24	3	17	24	3	10
4		4	11	18	25	18	25	4	11	
5	4	5	12	19	26	4	12	19	26	5
6		6	13	20	27	13	20	27	6	

Таблица 7

Размещение по группам для плоских сетей, изоморфных ПС($N, p, 2$)

p	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	7	11	<u>15</u>	<u>21</u>	<u>27</u>	37	<u>42</u>	<u>51</u>	<u>63</u>
d	(1, 2)	(3, 2)	(3, 2)	(3, 3)	(6, 3)	(5, 4)	(6, 4)	(1, 5)	(8, 5)

Таблица 8

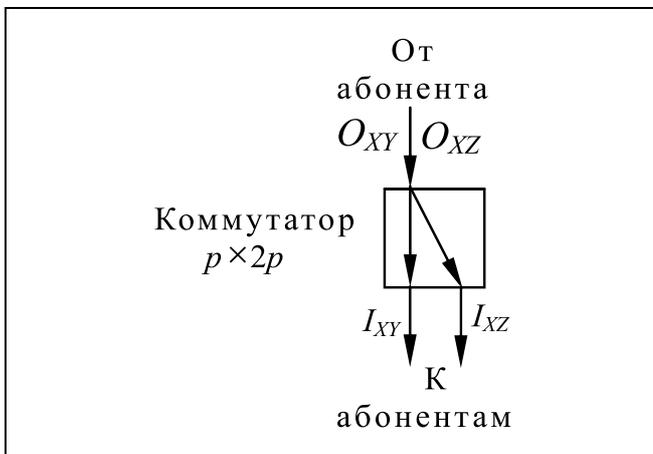
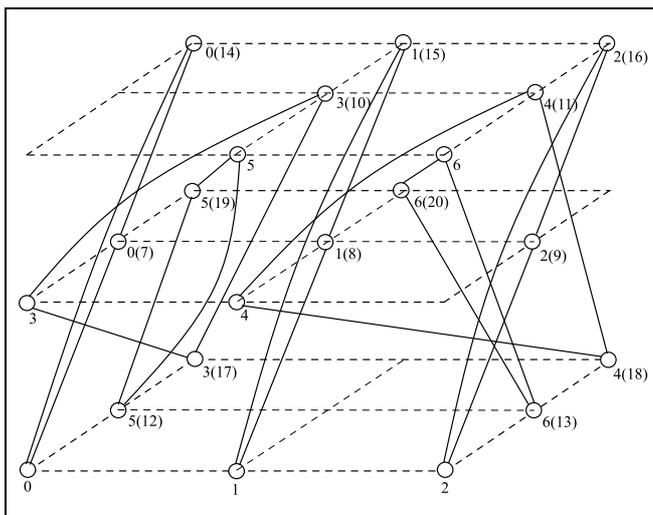
Размещение по группам для плоских сетей, изоморфных ПС($N, p, 3$)

p	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	5	<u>7</u>	11	15	<u>19</u>	<u>23</u>	<u>29</u>	<u>36</u>	<u>43</u>
d	(2, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(3, 2)	(5, 2)	(7, 2)	(2, 3)	(6, 3)	(10, 3)

Число узлов $R(p, \sigma)$ в трехмерных разреженных гиперкубах

σ	p									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	21	44	105	186	<u>273</u>	456	657	910	<u>1045</u>	1596
2	12	28	55	<u>90</u>	<u>147</u>	<u>216</u>	333	<u>420</u>	<u>561</u>	<u>756</u>
3	9	20	<u>35</u>	66	105	<u>152</u>	<u>207</u>	<u>290</u>	<u>396</u>	<u>516</u>

Пути между любыми абонентами в плоскостях XU и XZ состоят из двух дуг, проходящих через промежуточный коммутатор (рис. 5) — выходная дуга O от абонента-источника к коммутатору и входная дуга I от коммутатора к абоненту-прием-


 Рис. 5. Структура коммутатора узла в плоскостях XU и XZ

 Рис. 6. Секущие ребра M_{YZ} в трюичном гиперкубе

нику. Выходная дуга принадлежит обеим плоскостям и может обозначаться как O_{XY} или O_{XZ} , в зависимости от контекста (способа маршрутизации). В дальнейшем употребляется обозначение O_{XY} .

3. МАРШРУТИЗАЦИЯ В ТРЕХМЕРНОМ РАЗРЕЖЕННОМ ГИПЕРКУБЕ

Построенный разреженный гиперкуб не является полностью связным, так как в нем нет путей между частью абонентов, которые находятся в разных вертикальных и горизонтальных плоскостях, например, между абонентами O и 11 на рис. 6.

Для преодоления этого недостатка можно дополнительно проложить ребра между узлами плоскостей XZ , которые имеют одинаковый след (см. рис. 6). Такие ребра мы назовем секущими M_{YZ} , так как они пересекают плоскости XU и XZ и образуют полный граф между узлами с одинаковыми следами. При этом дуплексные каналы, соответствующие секущим ребрам, прокладываются только между коммутаторами узлов.

Теперь любой кратчайший путь, который не покрывается плоскостями XU и XZ , можно представить как трехдуговой, состоящий из дуг ребер O_{XY} , M_{YZ} и I_{XZ} . Пусть узел абонента-источника находится в плоскости XU_i , а узел абонента-приемника — в плоскости XZ_j . Первое ребро O_{XY} находится в плоскости XU_i и проходит от абонента-источника в коммутатор первого промежуточного узла. Второе ребро M_{YZ} проходит от плоскости XU_i к плоскости XZ_j — от коммутатора первого промежуточного узла к коммутатору второго промежуточного узла. Третье ребро I_{XZ} находится в плоскости XZ_j и проходит от коммутатора второго промежуточного узла к абоненту-приемнику.

Такая маршрутизация основывается на том факте, что в качестве промежуточных узлов выбираются узлы с одинаковыми следами в плоскостях XU_i и XZ_j . Сначала находятся следы номеров узлов абонента-источника и абонента-приемника. Затем находится след промежуточного узла как при саммаршрутизации в $PC(N, p, \sigma)$ (см. § 1) между

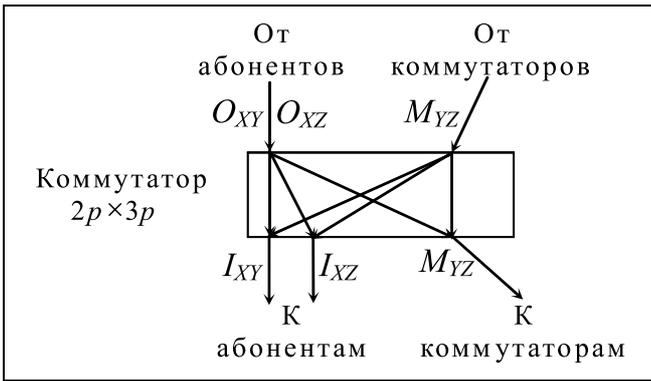


Рис. 7. Структура коммутатора узла в разреженном гиперкубе

источником и приемником с найденными следами. Затем по следу промежуточного узла восстанавливаются номера первого и второго промежуточных узлов в плоскостях XY_i и XZ_j .

Рассмотрим пример маршрутизации в разреженном гиперкубе, построенном на базе ПС(7, 3, 1) (см. табл. 1 и рис. 2). Пусть узлы абонента-источника и абонента-приемника имеют номера 0 и 11 со следами 0 и 4. Они лежат (см. рис. 6) в разных плоскостях — XY_1 и XZ_3 соответственно. В сети ПС(7, 3, 1) путь от источника в узле 0 к приемнику в узле 4 осуществляется через коммутатор в узле 0. Поэтому первый и второй промежуточные узлы имеют след 0 — это узлы с номерами 0 и 14 в плоскостях XY_1 и XZ_3 . Поэтому трехдуговой путь содержит внутриузловую дугу от источника к коммутатору в узле 0, дугу секущего ребра между коммутаторами в узлах 0 и 14 (рис. 7) и дугу от коммутатора в узле 14 к приемнику в узле 11.

Важно подчеркнуть, что при $\sigma > 1$ рассмотренный способ маршрутизации по следам сохраняет наличие σ разных путей между любыми источниками и приемниками, так как они проходят через промежуточные узлы с разными следами.

Как уже показывалось в § 1, кратчайшие пути между любыми абонентом-источником и абонентом-приемником, узлы которых расположены на одной вертикальной или горизонтальной плоскости, являются двухдуговыми — от абонента-источника к промежуточному коммутатору и от него к абоненту-приемнику. Поэтому кратчайший путь между ними не содержит никаких секущих ребер. Как следствие, двухдуговые и трехдуговые пути не могут иметь конфликтов между собой — конфликтовать могут только трехдуговые пути на секущих ребрах.

В заключение данного параграфа отметим, что для прокладки кратчайших двухдуговых и трехдуговых путей коммутатор каждого узла должен иметь схему, представленную на рис. 7.

4. НЕБЛОКИРУЕМОСТЬ В РАЗРЕЖЕННОМ ТРЕХМЕРНОМ ГИПЕРКУБЕ

Аналогичными маршрутными свойствами обладает и 3-мерный p -ичный гиперкуб, построенный на базе квазиполного орграфа [3]. Главное отличие 3-мерного разреженного гиперкуба от обычного 3-мерного гиперкуба, построенного в данной работе на базе квазиполного графа $BD(N, p, \sigma)$, — это возможность иметь σ разных кратчайших путей между любыми двумя абонентами. Однако по своим маршрутным свойствам эти гиперкубы очень близки.

В работе [3] стандартный 3-мерный p -ичный гиперкуб удалось сделать неблокируемым благодаря увеличению числа межузловых ребер и применению динамической локальной самомаршрутизации пакетов. Неблокируемость в стандартном 3-мерном p -ичном гиперкубе достигалась в работе [3] путем утроения числа вертикальных ребер измерения Y и удвоения числа горизонтальных ребер измерения Z . Будем применять аналогичный метод и в настоящей работе с заменой вертикальных ребер на секущие ребра.

Рассмотрим кратчайший трехдуговой путь от источника в узле s к приемнику в узле d через промежуточные узлы t и i (рис. 8). Первая дуга от источника s в первый промежуточный узел t является дугой ребра O_{XY} . Через узел t могут проходить пути от разных источников, которые в качестве вторых дуг используют дуги ребер M_{YZ} . Если каждую дугу использует только один путь через узел i , то он является бесконфликтным и остается таковым на последней дуге ребра I_{XZ} .

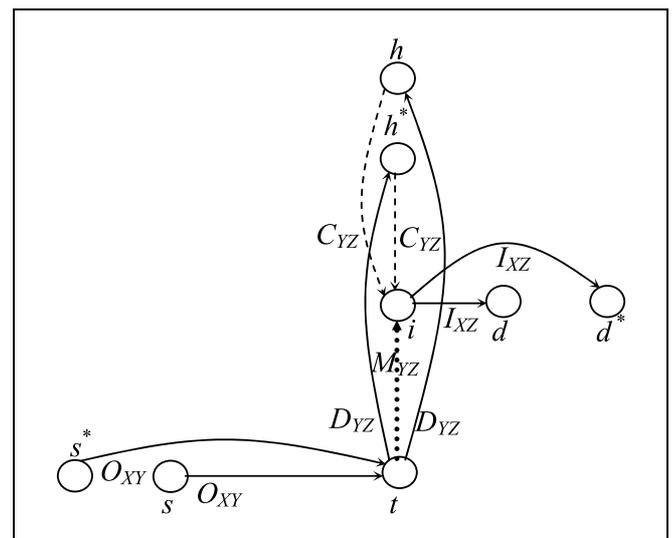
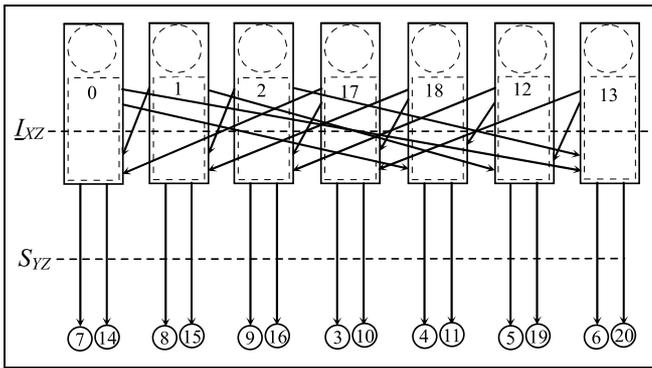


Рис. 8. Конфликт первого типа и его разрешение


 Рис. 9. Дуги наборов I_{XZ} и S_{YZ}

Будем задавать дуги ребер O_{XY} и M_{YZ} номерами портов m_1 и m_2 ($0 \leq m_1, m_2 \leq p - 1$), из которых они выходят. Для дуг M_{YZ} эти порты нумеруются в порядке возрастания длин дуг, задаваемых следующим образом. Пусть дуга M_{YZ} проходит из плоскости XZ_i в плоскость XZ_j , тогда ее длина $L(i, j) = j - i$, если $(j - i) \geq 0$, и $L(i, j) = p + (j - i)$, если $(j - i) < 0$.

Ситуация, при которой на одну дугу M_{YZ} претендуют несколько путей, считается конфликтом первого типа. При его возникновении один из этих путей имеет приоритет и проходит по дуге M_{YZ} , а остальные остаются конфликтными в узле t . Такой конфликт имеет место, если на прохождение через узел t претендуют несколько путей (рис. 9) из разных узлов-источников s и s^* . Здесь и далее для краткости мы обозначаем только два таких узла, которых на самом деле может быть любое число от 2 до $p - 1$. На рис. 8 конфликтная дуга обозначена полужирным пунктиром, так как она при последующем разрешении конфликта не используется.

Для разрешения конфликта необходимо использовать в каждом узле дуги еще $p - 1$ ребер D_{YZ} и C_{YZ} , которые дублируют ребра M_{YZ} и обозначены на рис. 8. Использование этих дуг позволяет избежать повторных конфликтов между дугами текущих ребер. Порты выходных дуг M_{YZ} , D_{YZ} и C_{YZ} в описании дальнейшей маршрутизации нумеруются одинаково.

Конфликт разрешается таким образом: по заведомо разным дугам D_{YZ} из узла t прокладываются пути в разные вспомогательные узлы h и h^* (без заливки на рис. 6) и осуществляется возврат из них в узел i по встречным дугам ребер C_{YZ} . Если на дугах C_{YZ} нет конфликтов, то проложенные пути бесконфликтные. Они останутся бесконфликтными и

на последних дугах I_{XZ} от коммутатора узла i к приемникам в узлах d и d^* .

Заведомо разными являются те дуги D_{YZ} , которые выходят из тех же по номерам портов, что и дуги O_{XY} из узлов s и s^* в узел t . Пусть конфликтная дуга M_{YZ} из узла t в узел i выходит из порта с номером u , а дуга D_{YZ} — из порта с номером v . Тогда в качестве возвратной дуги из узла h в узел i выбирается дуга C_{YZ} с номером $w = |v - u|$. Такая дуга всегда найдется, так как ребра C_{YZ} образуют полный граф.

Однако и на дугах C_{YZ} могут возникать конфликты второго типа. Каждый из них происходит в том случае, если на проход через узел i на втором этапе претендуют несколько путей из разных узлов t и t^* после первого этапа (рис. 10) и после возникновения конфликта первого типа. Для его разрешения в каждом узле потребуется иметь еще два набора дуг. Первый набор I_{XZ} содержит дуги между коммутаторами узлов, плоских сетей на плоскостях XZ_j , $1 \leq j \leq p - 1$. Эти дуги являются копиями дуг I_{XZ} , но проложены между коммутаторами узлов (см. рис. 9). Второй набор S_{YZ} содержит секущие дуги из коммутаторов узлов со следом t к приемникам в других узлах с тем же следом (рис. 10). Дуги S_{YZ} являются копиями дуг M_{YZ} , D_{YZ} и C_{YZ} , но проложены от коммутаторов к абонентам.

Конфликт второго типа разрешается следующим образом (см. рис. 10). Из промежуточного узла h пути прокладываются по тем дугам I_{XZ} , которые равны дугам I_{XZ} к приемникам. Все эти дуги I_{XZ} различны, так как они завершают прямые пути из узла i . Поэтому различны и дуги I_{XZ} , а пути про-

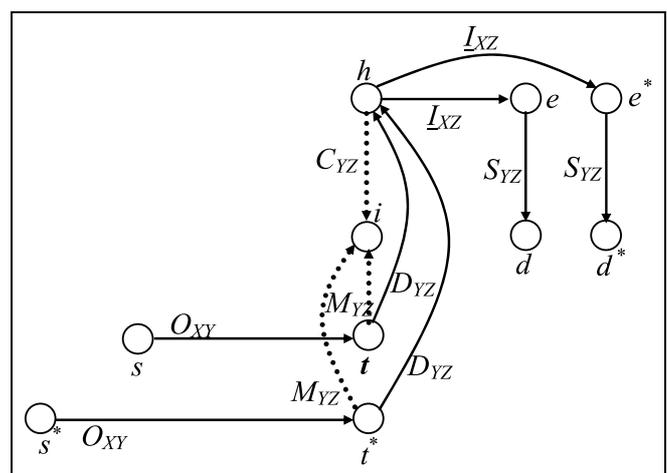


Рис. 10. Конфликт второго типа и его разрешение

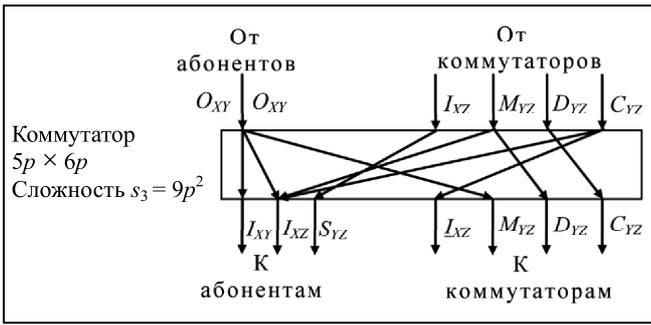


Рис. 11. Структура коммутатора узла в неблокируемом разреженном гиперкубе

кладываются в разные вспомогательные узлы e и e^* , из которых они завершаются бесконфликтно по разным дугам S_{YZ} .

В рассмотренном разреженном гиперкубе внутриузловой коммутатор должен иметь структуру, представленную на рис. 11.

5. ПРОТОКОЛ САМОМАРШРУТИЗАЦИИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГИПЕРКУБЕ

Самомаршрутизация в 3-мерном разреженном гиперкубе осуществляется как червячная маршрутизация путем прокладки бесконфликтного прямого пути между любыми источником и приемником через промежуточные коммутаторы. Она осуществляется путем посылки пилотного пакета, содержащего маршрутную информацию, с фиксацией прямого пути в промежуточных коммутаторах. Пакет данных передается по прямому пути без задержек на его буферизацию в промежуточных узлах.

Сначала представим процедуру самомаршрутизации в терминах дуг плоскостей XY , XZ и секущих плоскость YZ ребер, считая, что исходный маршрут имеет вид $O_{XY}M_{YZ}I_{XZ}$.

Процедура динамической самомаршрутизации

1. Если дуга O_{XY} отсутствует, то путь прокладывается по локальной дуге в узле s от источника к коммутатору. Переход к п. 3.

Если дуга O_{XY} присутствует, то путь прокладывается от источника в узле s по дуге O_{XY} к коммутатору узла t . Переход к п. 2.

2. Если дуги M_{YZ} и I_{XZ} отсутствуют, то путь прокладывается по локальной дуге в узле t от коммутатора к источнику. Конец алгоритма.

3. Если дуга M_{YZ} отсутствует, а дуга I_{XZ} присутствует, то путь прокладывается по дуге I_{XZ} от ком-

мутатора узла t к приемнику в узле d . Выход из процедуры.

Если дуга M_{YZ} присутствует, а дуга I_{XZ} отсутствует (узлы t и d совпадают), то путь прокладывается по дуге M_{YZ} от коммутатора узла t к приемнику по локальной дуге. Выход из процедуры.

Если дуги M_{YZ} и I_{XZ} присутствуют, то проверяется наличие конфликта на дуге M_{YZ} . Если конфликта нет, то путь прокладывается по дуге M_{YZ} от коммутатора узла t к коммутатору узла i . Переход к п. 4.

Если на дуге M_{YZ} конфликт имеет место, то путь прокладывается по уникальной для узла дуге D_{YZ} (разной для разных путей) от коммутатора узла t к коммутатору узла h . Переход к п. 5.

4. Путь прокладывается по дуге I_{XZ} от коммутатора узла i к абоненту в узле-приемнике d . Выход из процедуры.

5. Проверяется наличие конфликта на возвратной дуге C_{YZ} из узла h .

Если конфликта нет, то путь прокладывается по дуге C_{YZ} от коммутатора узла h к коммутатору узла i . Переход к п. 4.

Если же конфликт имеет место, то переход к п. 6.

6. Путь прокладывается по дуге I_{XZ} от коммутатора узла h к коммутатору узла e . Переход к п. 7.

7. Путь прокладывается по дуге S_{YZ} от коммутатора узла e к приемнику в узле d . Выход из процедуры.

Теперь представим алгоритм локальной самомаршрутизации в терминах путевой информации, которая содержится в пилотном пакете для червячной маршрутизации. Этот алгоритм конкретизирует процедуру самомаршрутизации, так как учитывает значения номеров портов коммутаторов, передаваемых в заголовках пакетов.

Путевую информацию будем представлять номерами портов выходных дуг в каждом узле, которые должны составлять прямой путь. Они задаются числами от 0 до $p - 1$. Номер 0 задает либо внутриузловую дугу в узле-источнике и в узле-приемнике, либо отсутствие дуги между коммутаторами разных узлов. Таким образом, выходные дуги O_{XY} задаются как числа $m_1, 0 \leq m_1 \leq p - 1$, секущие дуги M_{YZ} задаются как числа $m_2, 0 \leq m_2 \leq p - 1$, и дуги I_{XZ} задаются как числа $m_3, 0 \leq m_3 \leq p - 1$.

Любой кратчайший путь задается тремя числами m_1, m_2 и m_3 . Для прокладки прямого пути пилотный пакет должен содержать пять чисел m_1, m_2, m_3 и m_2^*, m_3^* , где $m_2^* = m_1$, а $m_3^* = |m_2 - m_2^*|$. Эти числа вычисляются каждым источником заранее.

Прямой путь прокладывается по следующему алгоритму.

Алгоритм динамической самомаршрутизации

Шаг 1. Если $m_1 = 0$, то путь прокладывается по локальной дуге в узле абонента-источника к коммутатору. Переход к шагу 3.

Если $m_1 > 0$, то путь прокладывается от абонента-источника по дуге $O_{XY}(m_1)$. Переход к шагу 2.

Шаг 2. Если $m_2 = 0$ и $m_3 = 0$, то путь прокладывается по локальной дуге в узле абонента-приемника от коммутатора к абоненту. Выход из алгоритма.

Шаг 3. Если $m_2 = 0$ и $m_3 \neq 0$, то путь прокладывается по дуге $I_{XZ}(m_3)$ к абоненту-приемнику. Выход из алгоритма.

Если $m_2 \neq 0$ и $m_3 = 0$, то путь прокладывается по дуге $M_{YZ}(m_2)$ к коммутатору узла абонента-приемника и по локальной дуге к абоненту-приемнику. Выход из алгоритма.

Если $m_2 > 0$, то проверяется наличие конфликта на дуге $M_{YZ}(m_2)$. Если конфликта нет, то путь прокладывается по этой дуге $M_{YZ}(m_2)$. Переход к шагу 4.

Если $m_2 > 0$ и имеет место конфликт, то путь прокладывается по дуге $D_{YZ}(m_2^*)$. Переход к шагу 5.

Шаг 4. Путь прокладывается по дуге $I_{XZ}(m_3)$ к абоненту-приемнику. Выход из алгоритма.

Шаг 5. Проверяется конфликтность пути по дуге $S_{YZ}(m_3^*)$.

Если конфликта нет, то путь прокладывается по дуге $S_{YZ}(m_3^*)$. Переход к шагу 4.

Если же конфликт имеет место, то переход к шагу 6.

Шаг 6. Путь прокладывается по дуге $I_{XZ}(m_3)$. Переход к шагу 7.

Шаг 7. Путь прокладывается по дуге $S_{YZ}(m_3^*)$. Выход из алгоритма.

Отметим, что прокладка прямых путей по приведенному алгоритму может содержать до четырех этапов. Однако передача всех пакетов данных по прямым путям осуществляется за один скачок. Последнее свойство позволяет утверждать, что неблокируемый гиперкуб практически (по задержкам передачи) имеет единичный диаметр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая структура трехмерного неблокируемого отказоустойчивого гиперкуба на базе плоских сетей с топологией квазиполного графа. Такой гиперкуб назван *разреженным* p -ичным гиперкубом, так как он содержит меньше узлов, чем неблокируемый 3-мерный p -ичный гиперкуб [3], но позволяет изменять число узлов на чис-

ло разных каналов между ними, что обеспечивает его канальную отказоустойчивость. Передача данных в разреженном гиперкубе осуществляется по прямым каналам между абонентами, что обеспечивает его наибольшее быстродействие. Внутриузловой коммутатор в разреженном гиперкубе имеет в $9/8$ раз большее число портов, чем в неблокируемом гиперкубе или мультикольце [3, 9].

Построенный неблокируемый разреженный гиперкуб может иметь несколько сотен абонентов (процессорных ядер) при двух-трех разных прямых каналах между ними. Наличие нескольких каналов не только обеспечивает отказоустойчивость данного гиперкуба, но и открывает возможность дальнейшего повышения его быстродействия путем их параллельного применения.

Область применимости данного разреженного гиперкуба — системная сеть в многоядерном однокристальном процессоре-ускорителе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С.* Метод инвариантного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем. Идеальная системная сеть // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 166—176. [Karavay, M.F., Podlazov, V.S. An Invariant Extension Method for System Area Networks of Multicore Computational Systems. An Ideal System Network // Automation and Remote Control. — 2010. Vol. 71. — No. 12. — P. 2644—2654.]
2. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С.* Распределенный полный коммутатор как «идеальная» системная сеть для многопроцессорных вычислительных систем // Управление большими системами. — 2011. — Вып. 34. — С. 92—116. [Karavai, M.F., Podlazov, V.S. Raspredeleennyi polnyi kommutator kak «ideal'naya» sistemnaya set' dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh sistem // Upravlenie bol'shimi sistemami. — 2011. — No. 34. — S. 92—116. (In Russian)]
3. *Подлазов В.С.* Бесконфликтная самомаршрутизация для трехмерного обобщенного гиперкуба // Проблемы управления. — 2018. — No. 3. — С. 26—32. [Podlazov, V.S. Beskonfliktnaya samomارشrutizatsiya dlya trekhmernogo obobshchennogo giperkuba // Control Sciences. — 2018. — No. 3. — P. 26—32. (In Russian)]
4. *Bhuyan, L.N., and Agrawal, D.P.* Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network // IEEE Trans. on Computers. — 1984. — Vol. C-33, no 4. — P. 323—333.
5. *Alverson, R., Froese, E., Kaplan, L., and Roweth, D.* Cray[®] XC[™] Series Network. — URL: <https://www.cray.com/sites/default/files/resources/CrayXCNetwork.pdf>
6. *Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С.* Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем) // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 2. — С. 153—170. [Karavay, M.F., Parkhomenko, P.P., Podlazov, V.S. Combinatorial methods for constructing bipartite uniform minimal quasicomplete graphs (symmetrical block designs // Automation and Remote Control. — 2009. — Vol. 70, no. 2. — P. 312—327.]
7. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — Гл. 10—12. [Hall, M. Combinatorial Theory. — Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1967. — Ch. 10—12.]



8. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С.* Расширенные блок-схемы для идеальных системных сетей // Проблемы управления. — 2012. — № 4. — С. 45–51. [*Karavay, M.F., Podlazov, V.S.* Rasshirennye blok-skhemy dlya ideal'nykh sistemnykh setei // Control Sciences. — 2012. — No. 4. — P. 45–51. (In Russian)]
9. *Подлазов В.С.* Бесконфликтная самомаршрутизация для трехмерного полного мультикольца // Проблемы управления. — 2018. — № 4. — С. 54–60. [*Podlazov, V.S.* Conflict-Free Self-Routing for a Three-Dimensional Complete Multiring // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 80, no. 5. — P. 936–945.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

*Поступила в редакцию 9.09.20, после доработки 2.12.2019.
Принята к публикации 2.12.2019.*

Подлазов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук,
✉ podlazov@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

FAULT-TOLERANT NON-BLOCKING THREE-DIMENSIONAL SPARSE HYPERCUBE

V.S. Podlazov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
✉ podlazov@ipu.ru

Abstract. A system network is proposed in the form of a non-blocking fault-tolerant three-dimensional generalized p -ary hypercube with a single processor in each node of the hypercube. In any non-blocking network, data between processors is transmitted over direct channels with the lowest latencies and without intermediate buffering. Networks with the topology of a generalized hypercube have the smallest lengths of direct channels and the smallest transmission delays. The structure of this hypercube based on networks with the topology of a quasi-complete graph is developed, which allows exchanging the number of processors for the number of different direct channels between any processors and setting the channel and node fault tolerance of the network. The parameters of quasi-complete graphs that exist for any p -identity of a hypercube are given. As a result, a network structure is proposed in the form of a sparse p -ary hypercube with a number of nodes slightly smaller than in a regular p -ary hypercube. The sparse hypercube is designed as a fault-tolerant system network for a single-chip processor accelerator with several hundred cores. A procedure and an algorithm for the laying of conflict-free direct channels through dynamic local packet self-routing has been developed, in which the nodes do not interact with each other and use only extended routing information from the packets.

Keywords: system network, quasi-complete graph, generalized hypercube, channel fault tolerance, switching properties, non-blocking network, conflict-free direct channels, local dynamic self-routing.



Новые издания ИПУ РАН

Кульба В.В., Сиротюк В.О. Формализованная методология повышения эффективности и качества патентных информационных фондов и опыт ее использования при формировании и развитии евразийского патентно-информационного пространства. — М.: ИПУ РАН, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-91450-238-3.

Сомов С.К. Сохранность информации в распределенных системах обработки данных. — М.: ИПУ РАН. — 2019. — 254 с. — ISBN 978-5-91450-235-2.

Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. — М.: ИПУ РАН, 2019. — 408 с. — ISBN 978-5-91450-236-6.

Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXVII Междунар. конф., 18 дек. 2019 г., Москва / под общ. ред. А.О. Калашникова, В.В. Кульбы. — М.: ИПУ РАН. — 2019. — 459 с. — ISBN 978-5-91450-241-3.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ ЦЕЛИ В ЗАДАЧЕ «АТАКУЮЩИЕ — ЦЕЛЬ — ЗАЩИТНИКИ»¹

М.Э. Бузиков, А.А. Галеев

Аннотация. Задача «атакующие — цель — защитники» сформулирована и формализована в виде конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией. Предложен метод оценки вероятности выживания цели при известных оценках динамических возможностей атакующих и получены рекуррентные соотношения для ее вычисления, на основе которых произведены численные оценки вероятности выживания цели при оптимальном поведении игроков. Защитникам в игре приписываются три различные роли: роль ложной цели, роль сопровождающего цели и роль перехватывающего атакующего. Проанализировано поведение вероятности выживания как функции параметров задачи «атакующие — цель — защитники». Полученные оценки вероятности могут служить эвристической оценкой качества структуры динамической системы, а полученные оптимальные стратегии — эвристиками для решения дифференциальной игры «атакующие — цель — защитники». Оптимальные стратегии содержат приказы для участников игры с указанием их текущей роли. Средствами языка «Python» разработан программный модуль, позволяющий вычислять вероятность выживания цели по известным параметрам задачи.

Ключевые слова: атакующие-цель-защитники, ложные цели, конечно-шаговая игра, антагонистическая игра, неполная информация, динамическое программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Формализация и математический анализ задач коллективного преследования одной цели при наличии защитников вызывают существенные трудности. В настоящее время подобные задачи решены или исследованы лишь для некоторых частных случаев: для одного атакующего, одного защитника и одной цели в случае простых движений [1–3]; для одного атакующего и одной цели в случае наличия ограничений на маневр [4, 5], для нескольких атакующих и одной цели [6–8]. Возникающие оптимизационные задачи крайне сложны даже в этих частных случаях.

В настоящей работе предложены методы оценки вероятности выживания цели, если известны самые огрубленные динамические возможности атакующих, цели и защитников. Такие динамические возможности возникают из решения игр ка-

чества [1, 2, 9], когда имеется дискретное число исходов игры (победа или поражение, например). В работах [1, 2], например, игра качества решается построением разбиения пространства игры на две области: если начальные условия игры принадлежат первой области, то игра заканчивается победой атакующего; второй области — выигрывают цель и защитник, т. е. защитник успеет перехватить атакующего. Предваряя решение игры качества, авторы [1, 2] решают игру степени (оптимизационную задачу поиска траекторий с заданным вещественным функционалом качества). Анализ решений игры степени позволяет в их случае свести решение игры качества к задаче поиска геометрического места точек в пространстве игры.

В работах [1, 2] роль защитника состоит в том, чтобы перехватить атакующего либо препятствовать его движению в сторону цели. Популярный сценарий использования защитников состоит в исполнении ложной цели [10, 11], поэтому в настоящей работе полагается, что защитники не только могут перехватывать атакующих, но и быть ложными целями.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН.



В случае многих защитников и атакующих управление динамики системы может менять свой вид в процессе эволюции. Так, например, при перехвате одним защитником одного атакующего падает размерность пространства состояний системы, так как далее события происходят без двух участников. Такие качественные изменения могут быть рассмотрены как шаг некоторой многошаговой игры двух игроков, в которой игроки выбирают некоторые действия из конечных множеств действий, пытаясь увеличить свой конечный выигрыш [12]. Предложенный в настоящей работе метод позволяет не только оценить вероятность выживания цели, но и получить макроинструкции по управлению. Такие макроинструкции состоят из «приказов» участникам игры придерживаться некоторой роли на определенных этапах. Полученные оценки вероятности могут быть полезны в виде показателя качества структуры динамической системы при применении оптимальных стратегий поведения игроков на практике [13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем называть цель и защитников убегающими. Каждый защитник может играть роль ложной цели (ЛЦ), перехватывающего атакующего (ПА) и сопровождающего цель. Атакующие видят цель всегда, но не видят защитников, если защитники не стали ЛЦ. Шаг игры состоит в том, чтобы со стороны убегающих назначить ЛЦ и ПА, а со стороны атакующих — выбрать цели для преследования. Назначая роли ЛЦ, убегающие вынуждают атакующих делиться на группы. Предполагается, что образованные группы могут лишь дальше делиться на группы, а их участники не могут переходить в уже существующие группы. В начале игры убегающим известно число атакующих, а атакующим — число убегающих.

Пусть число убегающих $N \in \mathbb{N}$, а число атакующих $M \in \mathbb{N}^0$. Пусть $D \in \mathbb{N}$ — максимальное число групп, на которые могут поделиться убегающие на каждом шаге игры (число делений), причем $D \leq N$; $T \in \mathbb{N}^0$ — максимальное число шагов игры, т. е. время, за которое атакующие догонят цели; $p \in (0, 1)$ — вероятность промаха защитника при назначении на роль ПА, которая постоянна в течение всей игры. Параметры D , T и p известны убегающим и атакующим.

Будем считать, что если $M = 0$ (цель никто не атакует), то вероятность выживания цели равна единице; если $M \geq 1$ и $N = 1$ (атакована цель без защитников) или $M \geq 1$ и $T = 0$ (атакующие догнали убегающих), то вероятность выживания цели рав-

на нулю. Описанные условия являются терминальными. Будем называть игру тривиальной, если она начинается из терминальных условий.

Опишем первый шаг нетривиальной игры (последующие шаги могут отличаться информацией о знании текущих параметров задачи со стороны атакующих). В начале шага убегающие выбирают $n \in \{0, \dots, \min(N - 1, M)\}$ ролей ПА для защитников. Эти защитники в роли ПА перехватывают $m \in \{0, \dots, n\}$ атакующих и далее игра происходит без n защитников и m атакующих. Затем убегающие делятся на $i \in \{1, \dots, \min(N - n, D)\}$ групп таким способом, что назначают $i - 1$ роль ЛЦ защитникам. Следующие действия убегающие и атакующие производят одновременно: убегающие выбирают численный состав групп, выбирая индекс k , которым нумеруются возможные численные составы групп, и номер группы $j \in \{1, \dots, i\}$, в которой будет находиться цель, а догоняющие, фиксируя индекс k' , выбирают свой численный состав групп. В итоге, группу j убегающих атакует группа $j' \in \{1, \dots, i\}$ атакующих, возможно, пустая. На этом первый шаг заканчивается и в его конце возникает задача для следующего шага игры для группы, в которой находится цель (остальные группы убегающих и атакующих выходят из игры, так как по условию участникам запрещено менять группы и в них нет цели).

Значения индексов n , i , j , k назначаются убегающими, k' — атакующими. Индексы m и j' в ходе игры принимают свои значения случайным образом. Всюду далее употребление индексов n , i , j , k и k' ассоциировано с описанными выше действиями игроков, а пометка « o » означает, что фиксировано оптимальное значение индекса. Критерием служит вероятность выживания цели: убегающие максимизируют, а атакующие минимизируют эту вероятность.

Будем различать два типа игр в зависимости от того, знают ли атакующие в начале второго шага игры, какое число убегающих они преследуют. Если атакующим известно это число, то такую игру будем обозначать как (N, M, D, T, p) , если неизвестно, то $(N, M, D, T, p)^*$. Будем считать, что (N, M, D, T, p) — игра с полной информацией, так как все значения параметров игры для всех игроков полагаются известными в течение игры, а в игре $(N, M, D, T, p)^*$ неполнота информации для атакующих появляется со второго шага, поскольку им становится неизвестно точное число убегающих в группе цели. Далее будет показано, что оптимальные поведения и значения этих игр существуют и совпадают. Значение критерия этих игр, т. е. выигрыш убегающих, будем обозначать как $v(N, M, D, T, p)$ и $v^*(N, M, D, T, p)$ соответственно. В про-

цессе решения игры $(N, M, D, T, p)^*$ может возникнуть игра, когда атакующие не знают числа убегающих уже на первом шаге. Такую игру мы будем обозначать как $(N, M, D, T, p)^\#$, а ее значение, если оно существует, как $v^\#(N, M, D, T, p)$.

Подыгрой нетривиальной игры (N, M, D, T, p) будем называть всякую игру (N', M', D, T', p) , у которой $N' \leq N$, $M' \leq M$ и $T' \leq T$. Подыгрой нетривиальной игры $(N, M, D, T, p)^*$ будем называть всякую игру $(N', M', D, T', p)^\#$, у которой $N' \leq N$, $M' \leq M$ и $T' \leq T$.

2. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ ЦЕЛИ

Вероятность перехватить m атакующих n защитниками в роли ПА подчиняется биномиальному закону распределения. Обозначим

$$b_{nm}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Лемма 1. Пусть в нетривиальной игре (N, M, D, T, p) существует равновесие и $A_{nm}(N, M, D, T, p)$ — вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после назначения убегающими n ролей ПА и m перехваченных ими атакующих на первом шаге. Тогда значение этой игры вычисляется как

$$v(N, M, D, T, p) = \max_{n \in \{0, \dots, \min(N-1, M)\}} \sum_{m=0}^n b_{nm}(p) \times A_{nm}(N, M, D, T, p). \quad (1)$$

Доказательство. Согласно определению условной вероятности величина $b_{n^0 m}(p) A_{n^0 m}(N, M, D, T, p)$ представляет собой вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков и назначении убегающими n^0 ролей ПА и m перехваченных ими атакующих в игре (N, M, D, T, p) на первом шаге, где $m \in \{0, \dots, n^0\}$. Согласно формуле полной вероятности

$$v(N, M, D, T, p) = \sum_{m=0}^{n^0} b_{n^0 m}(p) A_{n^0 m}(N, M, D, T, p),$$

что эквивалентно выражению (1) в силу определения числа n^0 . Лемма доказана. ♦

Далее нам понадобится операция разбиения числа $s \in \mathbb{N}^0$ на сумму $i \in \mathbb{N}$ чисел, не меньших числа $r \in \mathbb{N}^0$ [14]. Само разбиение представляет собой кортеж из i элементов. Например, для $s = 6$, $i = 3$ и $r = 1$ кортеж $(1, 2, 3)$ является разбиением, так как $6 = 1 + 2 + 3$. Кортежи, у которых слева есть значения большие, чем справа, не будем считать за разбиения, т. е. $(3, 2, 1)$ не является разбиением

числа 6, так как $3 > 2$ и 3 стоит левее 2. Обозначим как p_{ri}^s число таких разбиений (такое обозначение корректно, так как множество указанных разбиений конечно).

Зададим порядок на множестве разбиений по следующему правилу: $(a_1, \dots, a_i) < (b_1, \dots, b_i)$ тогда и только тогда, когда найдется $j \in \{1, \dots, i\}$ при котором $a_j < b_j$ и $(a_1, \dots, a_{j-1}) = (b_1, \dots, b_{j-1})$. Например, $(1, 2, 3) < (2, 2, 2)$, так как $a_1 < b_1$; $(1, 1, 4) < (1, 2, 3)$, так как $a_2 < b_2$ и $a_1 = b_1$. Множество разбиений с указанным отношением порядка включает в себя свою точную нижнюю грань. Перенумеруем множество разбиений индексом $k \in \{1, \dots, p_{ri}^s\}$, начиная с точной нижней грани. Обозначим j -й элемент k -го разбиения как p_{rijk}^s .

Проиллюстрируем процесс вычисления p_{ri}^s и p_{rijk}^s на примере. Пусть $s = 6$, $i = 3$ и $r = 1$. Выпишем все разбиения по порядку: $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$. Число разбиений равно 3, поэтому $p_{13}^6 = 3$.

$$(p_{1311}^6, p_{1321}^6, p_{1331}^6) = (1, 1, 4),$$

$$(p_{1312}^6, p_{1322}^6, p_{1332}^6) = (1, 2, 3),$$

$$(p_{1313}^6, p_{1323}^6, p_{1333}^6) = (2, 2, 2).$$

Лемма 2. Пусть в нетривиальной игре (N, M, D, T, p) и всякой ее подыгре существует равновесие и $E_{nmijkk'}(N, M, D, T, p)$ — вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после первого шага, при условии назначения убегающими n ролей ПА и m перехваченных ими атакующих, назначения $i - 1$ -й роли ЛЦ убегающими, выбора j -й группы для цели, k -го разбиения на группы убегающими и k' разбиения атакующими на первом шаге, где $k \in \{1, \dots, p_{1i}^{N-n}\}$, $k' \in \{1, \dots, p_{0i}^{M-m}\}$. Тогда

$$E_{nmijkk'}(N, M, D, T, p) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{i} v(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ijk'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T-1, p), \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим игры

$$(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ijk'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T-1, p), \quad (3)$$

где $j' \in \{1, \dots, i\}$. Число p_{1ijk}^{N-n} представляет собой количество убегающих назначенных после деления $N - n$ убегающих на i групп в j -ю группу убегающих, если выбрано k -е разбиение (число убегающих $N - n$, так как n



защитников назначены на роль ПА). Числа $p_{0ij'k'}^{M-m}$ представляют собой числа атакующих в группах, которые будут преследовать i групп убегающих, если выбрано k' -е разбиение (число атакующих $M - m$, так как m атакующих перехвачены защитниками в роли ПА). Число $\min(D, p_{1ijk}^{N-n})$ является максимальным возможным числом делений для семейства задач (3), так как убегающие не могут поделиться на число групп большее, чем D (по условиям задачи) и p_{1ijk}^{N-n} (их число). Так как в j -й группе находится цель, то задачи (3) представляют собой подзадачи для игры (N, M, D, T, p) после назначения n ролей ПА, перехвата m атакующих ими, деления на i групп, помещения цели в j -ю группу, выбор k -го разбиения по группам убегающими и k' -го атакующими и назначения j' -й группы атакующих на атаку j -й группы. Так как атакующие не знают число j , то группа j' назначается случайным образом на одну из i групп, поэтому вероятность погони j' -й группы атакующих за j -й группой убегающих есть $1/i$. По формуле полной вероятности получаем выражение (2). Лемма доказана. ♦

Всюду далее подразумевается, что $k \in \{1, \dots, p_{1i}^{N-n}\}$, $k' \in \{1, \dots, p_{0i}^{M-m}\}$.

Лемма 3. Пусть в играх $(N + 1, M, D, T, p)$ и (N, M, D, T, p) существует равновесие, тогда

$$v(N + 1, M, D, T, p) \geq v(N, M, D, T, p). \quad (4)$$

Доказательство. Сначала покажем, что указанное неравенство выполняется, если (N, M, D, T, p) — тривиальная игра. Если игра тривиальна по причине $M = 0$, то

$$1 = v(N + 1, 0, D, T, p) \geq \alpha = v(N, 0, D, T, p) = 1;$$

если по причине $T = 0$ и $M \geq 1$, то

$$0 = v(N + 1, M, D, 0, p) \geq v(N, M, D, 0, p) = 0;$$

если по причине $N = 1$ и $M \geq 1$, то

$$v(2, M, D, T, p) \geq v(1, M, D, T, p) = 0,$$

а это верно в силу того, что вероятность $v(2, M, D, T, p)$ неотрицательна. В случае нетривиальной игры достаточно рассмотреть неоптимальную стратегию игры $(N + 1, M, D, T, p)$ убегающих, которая состоит в том, что убегающие придерживаются оптимальной стратегии для игры (N, M, D, T, p) , помещая «дополнительного» защитника в ту же группу, где находится цель. Если вероятность выживания цели в такой игре α , то

$$v(N + 1, M, D, T, p) \geq \alpha v(N, M, D, T, p).$$

Лемма доказана. ♦

Неравенство (4) нетрудно обобщить на случай натуральных $N_2 \geq N_1$:

$$v(N_2, M, D, T, p) \geq v(N_1, M, D, T, p). \quad (5)$$

Лемма 4. Пусть в игре (N, M, D, T, p) и всякой ее подыгре существует равновесие, тогда при оптимальной стратегии убегающие выбирают распределение по группам, в котором во всех группах по од-

ному убегающему, кроме, возможно, одной, причем цель принадлежит этой самой группе.

Доказательство. Заметим, что $p_{1ijk}^{N-n} \leq N - n - i + 1$, так как для разбиения числа $N - n$ на сумму i натуральных слагаемых как минимум $i - 1$ единица уйдет на оставшееся $i - 1$ число. Пользуясь выражениями (2) и (5), можно записать:

$$\begin{aligned} & \sum_{j'=1}^i \frac{1}{i} v(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T - 1, p) \leq \\ & \leq \sum_{j'=1}^i \frac{1}{i} v(N - n - i + 1, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, N - n - i + 1), \\ & \quad T - 1, p). \end{aligned}$$

Поскольку в правую часть не входят j и k , можно записать:

$$\begin{aligned} E_{nmij^o(n,i)k^o(n,i)k'}(N, M, D, T, p) &= \sum_{j'=1}^i \frac{1}{i} v(N - n - i + 1, \\ & \quad p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, N - n - i + 1), T - 1, p), \end{aligned}$$

причем оптимальный выбор чисел $j = j^o(n, i)$ и $k = k^o(n, i)$ для убегающих обусловлен равенством

$$p_{1ijk}^{N-n} = N - n - i + 1,$$

которое и означает, что убегающие помещают в одну из групп цель и максимально возможное для данных i и n число убегающих. Лемма доказана. ♦

Указанное разложение числа $N - n$ на сумму $i - 1$ -й единицы и числа $N - n - i + 1$ обладает тем свойством, что k для него равно единице. Действительно, так как нумерация множества разбиений начиналась с точной нижней грани, а разбиение $(1, \dots, 1, N - n - i + 1)$ и представляет собой точную нижнюю грань множества разбиений числа $N - n$ на сумму i натуральных слагаемых, то $k^o(n, i) = 1$. В свою очередь, поскольку наибольшее из слагаемых разбиения всегда стоит на последнем месте, то $j^o(n, i) = i$.

Предложение 1. Значение $v(N, M, D, T, p)$ нетривиальной игры (n, m, N, T, p) существует и вычисляется по рекуррентной схеме

$$\begin{aligned} v(N, M, D, T, p) &= \\ &= \max_{n \in \{0, \dots, \min(N-1, M)\}} \sum_{m=0}^n b_{nm}(p) A_{nm}(N, M, D, T, p), \\ A_{nm}(N, M, D, T, p) &= \\ &= \max_{i \in \{1, \dots, \min(N-n, D)\}} B_{nmi}(N, M, D, T, p), \\ B_{nmi}(N, M, D, T, p) &= \\ &= \min_{k' \in \{1, \dots, p_{0i}^{M-m}\}} C_{nmik'}(N, M, D, T, p), \end{aligned}$$

$$C_{nmik}(N, M, D, T, p) = \sum_{j'=1}^i \frac{1}{i} v(N - n - i + 1, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, N - n - i + 1), T - 1, p).$$

Доказательство. Поскольку j и k назначаются одновременно с назначением k' , а при оптимальной игре, в силу леммы 4, j и k полностью определяются значениями n и i , поиск оптимальных стратегий в искомой игре сводится к поиску оптимальных стратегий в конечно-шаговой антагонистической игре с полной информацией последовательного выбора n , i и k' на каждом шаге. Так как любая конечно-шаговая игра с полной информацией имеет абсолютное равновесие (subgame perfect equilibrium) по Нэшу в чистых стратегиях [12], то значение соответствующей игры существует. В силу лемм 1 и 2, а также определения оптимальности, приведенная рекуррентная схема дает значение этой игры, а значит и искомой конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией. Предложение доказано. ♦

Предложение 1 получено с помощью того же приема, что и при применении рекуррентного метода, описанного в работе [15]: оптимальное значение критерия задачи выражено через оптимальное значение критерия подзадач. В этом случае для эффективного получения численных оценок значения игры можно воспользоваться методом динамического программирования [16].

Лемма 5. Пусть в играх $(N + 1, M, D, T, p)^\#$ и $(N, M, D, T, p)^\#$ существует равновесие, тогда

$$v^\#(N + 1, M, D, T, p) \geq v^\#(N, M, D, T, p). \quad (6)$$

Доказательство. Так как терминальные условия у игр (N, M, D, T, p) и $(N, M, D, T, p)^\#$ совпадают, то доказательство леммы 2 полностью переносится на неравенство (6). Лемма доказана. ♦

Как и в случае (5), справедливо обобщение при $N_2 \geq N_1$:

$$v^\#(N_2, M, D, T, p) \geq v^\#(N_1, M, D, T, p). \quad (7)$$

Лемма 6. Пусть в нетривиальной игре $(N, M, D, T, p)^\#$ и всякой ее подыгре существует равновесие и $E_{nmijkk'}^*(N, M, D, T, p)$ — вероятность выживания цели в случае оптимального поведения игроков после первого шага, при условии назначения убегающими n ролей ПА и t перехваченных ими атакующих, назначения i — 1-й роли ЛЦ убегающими, выбора j -й группы для цели, k -го разбиения на группы убегающими и k' разбиения атакующими на первом шаге. Тогда

$$E_{nmijkk'}^*(N, M, D, T, p) = \sum_{j'=1}^i \frac{1}{i} v^\#(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T - 1, p). \quad \blacklozenge$$

Доказательство этой леммы повторяет доказательство леммы 2, но только теперь нужно рассмотреть игры

$$(p_{1ijk}^{N-n}, p_{0ij'k'}^{M-m}, \min(D, p_{1ijk}^{N-n}), T - 1, p)^\#,$$

так как после первого шага атакующие не знают числа убегающих в группе цели.

Доказательство леммы 4 опирается только на леммы 2 и 3, поэтому оно справедливо не только для игры (N, M, D, T, p) , но и для игры $(N, M, D, T, p)^\#$, так как справедливы леммы 5 и 6.

Предложение 2. Значения и оптимальные стратегии игр (N, M, D, T, p) и $(N, M, D, T, p)^\#$ совпадают.

Доказательство. В силу леммы 4 для обеих игр $k = 1$ и $j = i$ при оптимальной стратегии игры. Число i известно атакующим на каждом шаге в обеих играх (так как атакующие видят все ЛЦ), поэтому при оптимальной игре убегающих атакующие обладают одинаковой информированностью о составе преследуемых групп в обеих задачах. Предложение доказано. ♦

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИГРЫ

Средствами языка «Python» был разработан программный модуль, позволяющий по заданным N, M, D, T и p вычислять вероятность выживания цели $v(N, M, D, T, p)$ с помощью предложения 1.

Фиксируем параметры $D = 3, T = 2, p = 0,5$. Выбор $D = 3$ можно интерпретировать как то, что каждая группа в течение шага может разделиться максимум на три группы, которые продолжают дви-

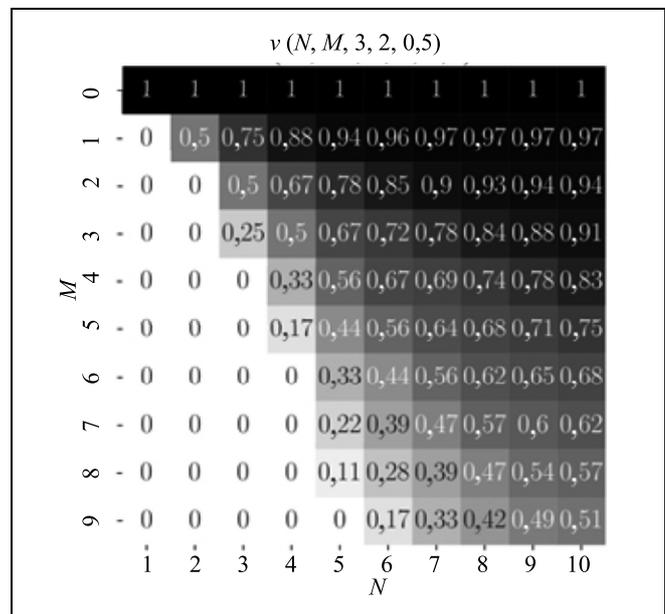


Рис. 1. Тепловая карта вероятности выживания цели в зависимости от числа убегающих N и числа атакующих M



гаться влево, вперед и вправо. Выбор $T = 2$ означает, что через два шага атакующие догонят убегающих (расстояние между ними станет нулевым). Тепловая карта для вероятности выживания цели в этом случае представлена на рис. 1 в виде матрицы, столбцы и строки которой обозначают число атакующих и число убегающих, а на пересечении находится значение критерия игры. Нетрудно видеть, что на данной карте (как и на любой другой) выполняется не только неравенство (4), но также справедливо и утверждение о том, что $v(N, M, D,$

$T, p)$ не возрастает по аргументу M . В ходе вычисления элемента такой матрицы можно извлекать оптимальные значения индексов n, i, j, k и k' для каждого шага. Пример оптимальной стратегии для $N = 7$ и $M = 6$ приведен на рис. 2.

На рис. 3 изображены графики зависимости вероятности выживания цели от вероятности перехвата защитником в роли ПА. Каждый излом на графике обусловлен сменой стратегии (с ростом p убегающим становится выгодно назначать больше ролей ПА). При $N = 5$ график имеет участок, где

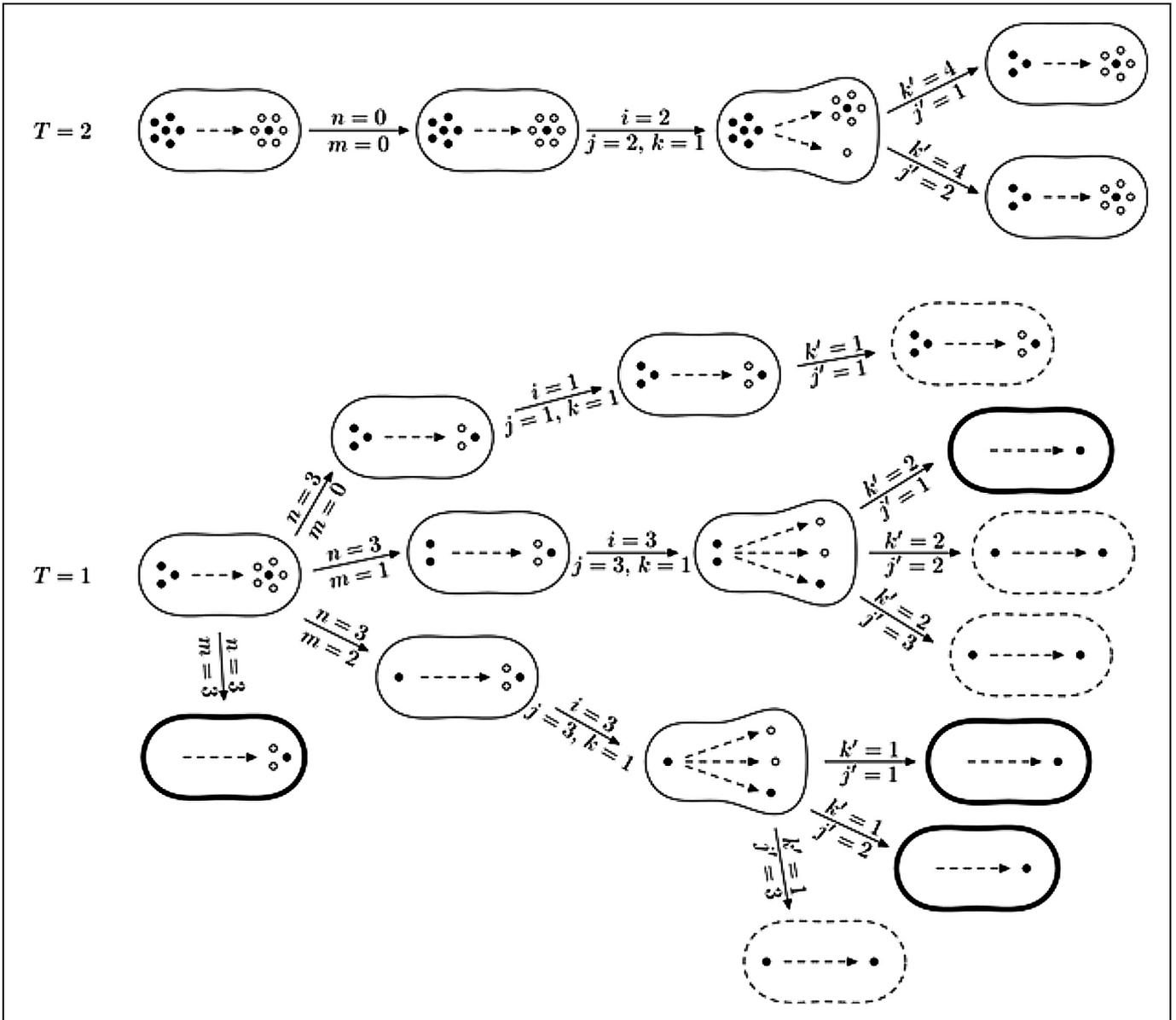


Рис. 2. Оптимальные стратегии убегающих и атакующих в игре (7; 6; 3; 2; 0,5): овалами обведены сложившиеся конфигурации атакующих (слева) и убегающих (справа); атакующие и цель — черные точки, защищающиеся — белые; подписи сплошных стрелок указывают оптимальный выбор индексов игроками внутри шага игры; штриховые овалы заключают в себя проигрышные ситуации для убегающих, а выделенные жирно — выигрышные

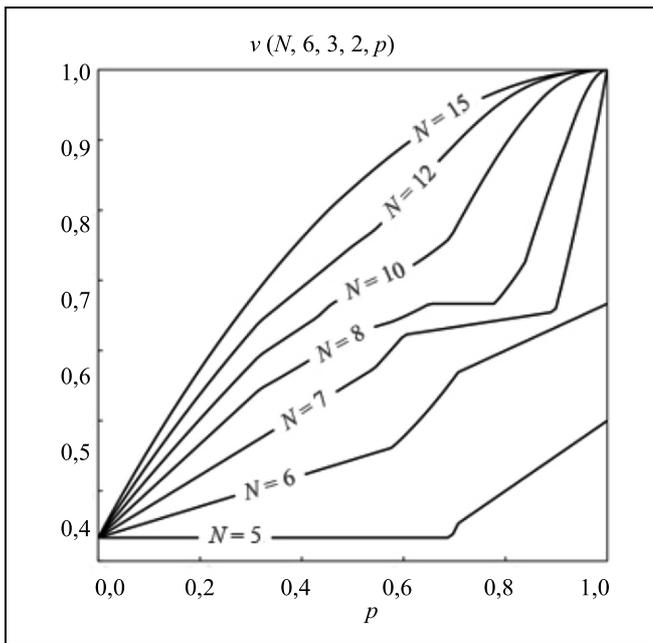


Рис. 3. Зависимость вероятности выживания цели от вероятности перехвата атакующего защитником в роли перехватывающего атакующего: изломы соответствуют сменам стратегий

значение вероятности выживания цели постоянно. В этой области назначение ролей ПА не происходит вообще. С помощью этого графика для $N = 5$ можно оценить пороговое значение вероятности $p_{\min} \approx 0,7$, выше которого имеет смысл решать задачу исполнения роли ПА защитником. Для $N \geq 6$ ее имеет смысл решать всегда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача «атакующие — цель — защитники» как конечно-шаговая антагонистическая игра с неполной информацией. Получен рекурсивный алгоритм нахождения вероятности выживания цели и оптимальных стратегий атакующих, цели и защитников при заданной вероятности промаха защитника по атакующему. Разработан программный модуль и выполнено численное моделирование для некоторых частных случаев.

Поскольку реальные динамические системы для класса задач «атакующие — цели — защитники» обычно подчинены системам дифференциальных уравнений и управление в них входит в виде некоторой функции позиций игроков и времени, полученные в конечно-шаговой антагонистической игре с неполной информацией оптимальные стратегии не могут быть напрямую применены для получения оптимального управления в таких системах. Однако полученные результаты могут быть

применены для получения субоптимальных решений в последовательности задач оптимизации, когда вместо соответствующей дифференциальной игры решаются подзадачи исполнения ролей (перехватить атакующего, разойтись с ложной целью и др.).

Дальнейшее развитие результатов работы состоит в получении решения задачи «атакующие — цель — защитники» как дифференциальной игры и сравнении решений с полученными оптимальными стратегиями для рассмотренной конечно-шаговой антагонистической игры с неполной информацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pachter, M., Garcia, E., Casbeer, D.W. Toward a Solution of the Active Target Defense Differential Game // *Dyn. Games Appl.* — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 165–216.
2. Garcia, E., Casbeer, D.W., Pachter, M. Pursuit in the Presence of a Defender // *Ibid.*, no. 3. — P. 652–670.
3. Rubimovich, E.Ya. Missile—Target—Defender Problem with Incomplete a Priori Information // *Ibid.* — P. 851–857.
4. Теория управления (дополнительные главы): учеб. пособие / под ред. Д.А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 552 с. [Teoriya upravleniya (dopolnitel'nye glavy): ucheb. posobie / pod red. D.A. Novikova. — Moscow: LENAND, 2019. — 552 p. (In Russian)]
5. Pachter, M., Coates, S. The Classical Homicidal Chauffeur Game // *Dyn. Games Appl.* — 2019. — Vol. 9, no. 3. — P. 800–850.
6. Salimi, M., Ferrara, M. Differential game of optimal pursuit of one evader by many pursuers // *Int. J. Game Theory.* — 2019. — Vol. 48, no. 2. — P. 481–490.
7. Salimi, M., Ibragimov, G.I. Pursuit-evasion differential game with many inertial players // *Math. Probl. Eng.* — Sept. 2009. doi.org/10.1155/2009/653723.
8. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. — 197 с. [Grigorenko, N.L. Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami. — Moscow: Izd-vo Moskovskogo un-ta, 1990. — 197 s. (In Russian)]
9. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с. [Isaacs, R. Differential Games: A Mathematical Theory with Application to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 1965. — 416 p.]
10. Rubimovich, E.Ya. Two Targets Pursuit-Evasion Differential Game with a Restriction on the Targets Turning // *IFAC-PapersOnLine.* — Berlin: Elsevier, 2018. — 51-32. — P. 503–508.
11. Рубинович Е.Я. Дифференциальная игра поочередного преследования с критерием «промах по истинной цели» // *Изв. Южного Федерального ун-та. Технические науки.* — 2019. — № 1 (203). — С. 165–177. [Rubimovich, E.Ya. Differentsial'naya igra poocherednogo presledovaniya s kriteriem «promakh po istinnoi tseli» // *Izv. Yuzhnogo Federal'nogo un-ta. Tekhnicheskie nauki.* — 2019. — No. 1 (203). — P. 165–177. (In Russian)]
12. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высш. шк., Кн. дом «Университет», 1998. — 304 с. [Petrosyan, L.A., Zenkevich, N.A., Semina, E.A. Teoriya igr. — Moscow: Vyssh. shk., Kn. dom «Universitet», 1998. — 304 p. (In Russian)]
13. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // *Управление большими системами.* — 2012. — Вып. 37. —



- С. 25–62. [Novikov, D.A. Hierarchical Models of Combat // Large-Scale Systems Control. — 2012. — No. 37. — P. 25–62. (In Russian)]
14. Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982. — 256 с. [Andrews, G.E. The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 2. — London: Addison-Wesley Publishing Co., 1976. — 255 p.]
15. Ховард Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1964. — 193 с. [Howard, R.A. Dynamic Programming and Markov Processes. — Cambridge: MIT Press, 1960. — 136 p.]
16. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л. Алгоритмы: построение и анализ / 2-е изд. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. — 1296 с. [Cormen, T.H., et al. Introduction to algorithms, 2nd ed. — Cambridge: MIT Press, 2001. — 1180 p.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 21.01.2020, после доработки 5.03.2020.
Принята к публикации 18.03.2020.

Бузиков Максим Эмонаевич — аспирант,
✉ me.buzikov@physics.msu.ru,

Галяев Андрей Алексеевич — чл.-корр. РАН, д-р техн. наук,
✉ galaev@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

TARGET SURVIVAL PROBABILITY ESTIMATION FOR THE ATTACKERS — TARGET — DEFENDERS PROBLEM

M.E. Buzikov¹, A.A. Galayev²

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ me.buzikov@physics.msu.ru, ²✉ galaev@ipu.ru

Abstract. The attackers-target-defenders problem is formulated and formalized as a positional antagonistic game with incomplete information. A method of target survival probability estimation with known estimates of the dynamic capabilities of attackers is proposed. Recurrence expressions for its calculation are obtained. Corresponding numerical target survival probability estimations with optimal behavior of the players are made. Defenders in the game are assigned three different roles: the role of a false goal, the role of a goal accompanying, and the role of an intercepting attacker. Survival probability considered as function of the attackers-target-defenders problem parameters is analyzed. The obtained probability estimations could be used as heuristic estimations of quality for corresponding dynamic system. Obtained optimal strategies could be considered as heuristics for the corresponding attackers-target-defender differential game. Optimal strategies contain orders for players indicating their current role. Using the Python language, a software module was developed that allows to calculate the survival probability of a target based on known task parameters.

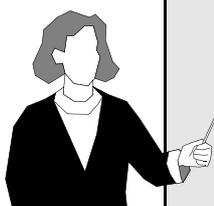
Keywords: attackers-target-defenders, false targets, positional game, antagonistic game, incomplete information, dynamic programming.

Funding. The work was performed with partial financial support of Presidium of Russian Academy of Sciences.



Читайте в следующем номере

- ✓ **Бызов Л.Г., Губанов Д.А., Козицин И.В., Чхартишвили А.Г.** Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей
- ✓ **Еремин В.В., Бауэр В.П., Райков А.Н.** Управление конкурентоспособностью в системе цифровых платформ
- ✓ **Корепанов В.О.** Константное поведение в деловых играх распределения ресурса: устойчивость к дизайну игр и модель





ДВЕНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ» MLSD'2019

В Москве, начиная с 2007 г., на базе Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН ежегодно проводится международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD)», целью которой является обмен результатами исследований по приоритетным направлениям фундаментальной прикладной науки об управлении. К настоящему времени сложился организационный регламент MLSD. Выработана публикационная политика, ориентированная на размещение докладов и статей участников конференции в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ, а также в международной реферативной базе данных Scopus. Рабочие языки конференции — русский и английский. Практически сформировалась структура научной программы конференции, которая охватывает следующие направления.

1. Проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, госхолдинги и госкорпорации.

2. Методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами.

3. Управление развитием цифровой экономики. Проектные офисы и ситуационные и прогнозно-аналитические центры, институты развития крупномасштабных систем.

4. Имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем.

5. Нелинейные процессы и вычислительные методы в задачах управления крупномасштабными системами.

6. Управление развитием банковских и финансовых систем.

7. Управление топливно-энергетическими, инфраструктурными и другими системами.

8. Управление транспортными системами.

9. Управление развитием авиационно-космических и других крупномасштабных организационно-технических комплексов.

10. Управление развитием региональных, городских и муниципальных систем.

11. Управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности.

12. Информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами.

13. Методология, методы и программно-алгоритмическое обеспечение обработки и интеллектуального анализа больших массивов информации.

14. Мониторинг в управлении развитием крупномасштабных систем.

15. Управление развитием крупномасштабных систем здравоохранения, медико-биологических систем и технологий.

16. Управление развитием социальных систем.

Конференция проходит три дня. Первый рабочий день открытия конференции отводится пленарному заседанию. В его программу обычно включается не менее 20 докладов приглашенных академиков и чл.-корреспондентов РАН, профессоров и ведущих сотрудников высшей школы и научно-исследовательских институтов РАН. Пленарные заседания всегда вызывают повышенный интерес. На них приглашаются все участники конференции. В течение следующих двух дней ведется активная работа в 16-ти секциях, соответствующих перечисленным выше тематическим направлениям.

Двенадцатая международная конференция MLSD'2019 проходила с 1 по 3 октября. На ее открытии с приветственным словом выступил директор Института проблем управления чл.-корр. РАН *Дмитрий Александрович Новиков*. В своем обращении к участникам он подчеркнул значимость развития фундаментальной теории междисциплинарного управления, методов математического моделирования и согласованного управления жизненными циклами организационно-технических систем. Затем выступил председатель программного комитета, д-р техн. наук *Анатолий Данилович Цвиркун*. В своем кратком вступительном докладе он отметил непрерывный рост численности участников конференции MLSD 2007—2019, приход новых ведущих аналитиков и практиков управления, повышение интереса к совместному обсуждению проблем и новых методов и инструментов



глобального управления. Кроме того, А.Д. Цвиркун призвал участников обратить внимание на необходимость более глубокой и тщательной подготовки авторских текстов к электронной публикации и регистрации в базах научного цитирования. В заключение А.Д. Цвиркун как модератор открыл пленарное заседание MLSD'2019.

Пленарные доклады, представленные на MLSD'2019, тесно связаны с решением задач, поставленных в национальном проекте «Цифровая экономика 2024». В совокупности они представляют многоаспектный подход к переводу управления развитием крупномасштабных систем на перспективные принципы самоорганизации и интеллектуализации.

Концептуальным основам управления инновационным развитием крупномасштабных систем в рыночных условиях мировой экономики посвящены пленарные доклады:

- чл.-корр. РАН *В.И. Сулов, Д.А. Доможиров* (Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, г. Новосибирск), канд. экон. наук *Н.М. Ибрагимов* (Новосибирский государственный университет) «Равновесные состояния и коалиционная устойчивость межрегиональных экономических систем: влияние открытости»;
- д-р экон. наук *О.С. Сухарев* (Институт экономики РАН, г. Москва) «Структурная политика и модели индустриализации».

Большой интерес слушателей вызвали новые разработки цифровых технологий и платформенных решений для управления развитием крупномасштабных систем, представленные в следующих четырех пленарных докладах.

В докладе д-ров техн. наук *А.Д. Цвиркуна, В.К. Акинфиева* (ИПУ РАН, г. Москва), канд. экон. наук *М.В. Коротеева* (Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва) «Модели пространственного развития с учетом фактора рыночного ценообразования» представлена перспективная схема «сквозной» цифровой технологии, основанная преимущественно на математическом моделировании. Авторами предложен подход к построению комплекса инвестиционных моделей, направленных на развитие производственно-транспортных систем. Предложенный способ математической формализации позволяет задать множество вариантов развития и динамику потребления продукта для разных элементов системы, рассматриваемых на уровне географически распределенных локальных рынков потребления услуг и продуктов производящих компаний. Совместное решение задач оптимизации сводится к игре, в которой выбор искомым переменных должен удовлетворять некоторым условиям равновесия. Компании-игроки одновременно принимают решение об уровне ин-

вестиций и уровне производства. Данная модель дополняется разработкой метода нейроэволюционного моделирования для анализа и выбора поведения экономических систем во время кризисных периодов.

Доклад д-ра техн. наук *Ф.И. Ерешко*, кандидата физ.-мат. наук *И.И. Гасанова, М.А. Горелова* (Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, г. Москва) развивает тему развития теоретико-игровых моделей цифровых платформ. Авторы утверждают, что основой принятия решений в экономике станут вычислительные, или цифровые, платформы, отражающие отдельные функциональные отрасли. Рассматривается управление производственными системами, имеющими аддитивный характер. Проводится сравнение централизованного и децентрализованного управлений, предлагается парадигма гибридного управления. В рамках теории иерархических игр исследуется вопрос создания и управления коалицией игроков.

Доклад д-ра экон. наук *В.Г. Варнавского* (ИПУ РАН, г. Москва) посвящен анализу понятийного аппарата управления транспортно-логистической инфраструктурой в условиях глобализации. На этой основе автор дает обзор трансконтинентальной торговли товарами обрабатывающей промышленности, анализирует инвестиционные процессы в транспортно-логистической инфраструктуре основных стран мира, также выделяет процесс контейнеризации морских портов как главную составляющую международной торговли и глобальных цепочек создания стоимости.

Реализация проектов национального масштаба требует разработки новой фундаментальной науки интеллектуального проектного управления. Этому вопросу посвящен пленарный доклад д-ра техн. наук *А.Н. Райкова* (ИПУ РАН, г. Москва), д-ров экон. наук *В.П. Бауэра, С.Н. Сильвестрова*, канд. физ.-мат. наук *Б.Б. Славина* (Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва), д-ра техн. наук *А.А. Зацаринного, К.К. Колина* (Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва), д-ра психол. наук *В.Е. Лепского* (Институт философии РАН, г. Москва), д-ра физ.-мат. наук *Г.Г. Малинецкого* (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва), канд. техн. наук *З.К. Авдеевой* (ИПУ РАН, г. Москва) «Система распределенных ситуационных центров развития как инструмент государственного стратегического целеполагания в цифровой экономике». В докладе отмечается, что из-за высокой изменчивости технологической среды и нестабильности общественно-политического дискурса реализация постановки государственных стратегических целей и стратегического государ-

ственного управления невозможна без вовлечения гражданского общества. Этот контроль не должен ограничиваться краудсорсингом, который нельзя применять для рейтингования решений. Такой контроль требует применения сетевых технологий, включая коллективный и искусственный интеллект.

Заседания секций 1–6 стали продолжением обсуждения проблем проектирования цифровых платформ управления.

В программу заседания секции 1 включено 27 докладов, связанных с разработкой новых принципов, моделей и инструментальных средств оптимизации и управления инновационным развитием и экономической интеграцией предприятий в условиях рыночного ценообразования. В докладах (всего 21 доклад) секции 2 рассматриваются проблемы финансового анализа и оценки современного состояния национальных инновационных систем; принципы сопровождения и управления жизненным циклом инвестиционных проектов и программ. На секции 3 (11 докладов) вниманию участников заседания предложены решения в этой области развития проектных офисов и перевода классических ситуационных и прогнозно-аналитических центров в разряд институтов развития крупномасштабных систем. Программа секции 4 включает в себя 36 докладов, представляющих эффективные комбинации комплексирования различных принципов моделирования (в том числе оптимизационный, имитационный, поточный, системный, декомпозиционный и др.), намечающие алгоритмическую структуру информационных технологий поддержки принятия управленческих решений. Ключевым вопросом, обсуждаемым на секции 5 (всего 13 докладов), стало обеспечение функциональной устойчивости объектов и процессов, динамическое поведение которых носит нелинейный характер. Предложенные математические модели позволяют проектировать соответствующие адекватные схемы самоорганизации и алгоритмы автоматического управления, основанные на идентификации динамики сложных процессов по экспериментальным данным.

Инновационная экономика стимулирует развитие банковских и финансовых технологий, в том числе связанных с поддержкой проектов развития отраслевого, регионального, национального и транснационального уровня. В связи с этим все большую актуальность приобретают технологии оценки качества и управления рисками банковских и финансовых услуг, базирующиеся на применении искусственного интеллекта. Данная проблематика представлена в 32 докладах секции 6.

Теоретическую базу современного развития топливно-энергетических систем закладывают следующие два пленарных доклада.

В докладе акад. РАН *С.П. Филиппова*, канд. техн. наук *Дильман М.Д.* (Институт энергетических исследований РАН, г. Москва) «Возобновляемая энергетика: системные эффекты» подробно рассматривается проблема компенсации негативных последствий от внедрения солнечных и ветровых электростанций. Стохастический характер таких электрогенераций порождает внеплановые остановки теплофикационных, а также энергоблоков атомных электростанций, и как следствие, к росту эксплуатационных рисков.

В докладе чл.-корр. РАН *Н.И. Вороняя*, канд. техн. наук *С.В. Подковальникова* (Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск) «От локальных электроэнергетических систем к глобальному энергетическому объединению: концепция, технологии, проблемы» анализируются объективные тенденции объединения электроэнергетических систем. Рассматриваются вопросы создания Глобального Энергетического Объединения, включающего в себя Евро-Азиатский электроэнергетический суперпул. В докладе формулируются требования к развитию ЕЭС России в связи с ее важной интегрирующей ролью в суперпуле.

Более подробному анализу проблем развития топливно-энергетических инфраструктурных и других систем посвящено заседание секции 7, программа которого включает 31 доклад. Их основное тематическое направление — цифровая трансформация энергетики.

Актуальные проблемы управления транспортными системами освещались в докладах д-ра экон. наук *В.Н. Лившица* и д-ра техн. наук *В.В. Цыганова*, сделанных в разные годы на пленарных и секционных заседаниях MLSD. По определению д-ра экон. наук *В.Н. Лившица*, под крупномасштабным транспортным проектом понимается такое предполагаемое изменение транспортной системы (на одном или нескольких видов транспорта), которое существенно влияет на технические и социально-экономические характеристики транспортной системы страны либо ее крупных регионов. Исходя из этого определения, приоритетными становятся проекты по созданию новых видов транспорта, повышению скоростей движения, мощности и грузоподъемности транспортных единиц, освоением сложных трасс наземного, воздушного, водного и подземного пространства, создания мощных искусственных сооружений (автомобильных и железных дорог, мостов, тоннелей, каналов и др.).

В работах д-ра техн. наук *В.В. Цыганова* детализировались проблемы планирования развития инфраструктуры Сибири, Дальнего Востока, Арктической зоны России. В его пленарном докладе на MLSD'2019 рассматриваются научно-технические инфраструктурные аспекты обоснования условий комплексного развития Сибири, Дальнего Востока



и Арктической зоны России путем создания международных транспортно-логистических коридоров между Европой и Азией на основе Северного морского пути, Транссибирской и Байкало-Амурской железных дорог. В докладе отмечается, что разработанные модели и методы применены для разработки планов развития транспортной инфраструктуры этого макрорегиона на период до 2050 г. Продолжению анализа и обсуждения технологических принципов решения транспортных проблем посвящены 34 доклада секции 8.

Пленарный доклад д-ров техн. наук *В.П. Кутахова* (Институт имени Н.Е. Жуковского, г. Москва), *Г.М. Алакоза*, канд. техн. наук *С.И. Пляскоты* (АНО «СИП РИА», г. Москва), д-ра техн. наук *А.И. Аюпова* (филиал ПАО «Компания «Сухой» «ОКБ Сухого», г. Москва) посвящен изложению теоретических основ витасистемного подхода к созданию бесконфликтных интеллектуальных платформ перспективных аэрокосмических комплексов. Специфику предлагаемого подхода составляет трансдисциплинарное управление всем многообразием ресурсов, ориентированное на комплексное решение смежных задач, включая поддержку координатно-временного и навигационного позиционирования, роботизацию авиационно-космических систем, создание многоэшелонных систем, охватывающих воздушный, космический информационный компоненты и наземные исполнительные устройства. Более детально рассмотрению этих проблем посвящены 15 докладов, представленных на секции 9.

В пленарном докладе чл.-корр. РАН *В.Л. Шульца*, д-ра техн. наук *В.В. Кульбы*, кандидатов техн. наук *А.Б. Шелкова*, *И.В. Чернова* (ИПУ РАН, г. Москва) «Методы эффективного управления социально-экономическим развитием Арктических территорий» изложены результаты анализа основных направлений повышения эффективности управления социально-экономическим развитием Арктической зоны Российской Федерации. Выполнен анализ основных особенностей Арктической зоны России как сложного крупномасштабного и пространственно-распределенного объекта управления. Приведена базовая формализованная модель группового управления сложными социально-экономическими системами. Изложены результаты анализа эффективности применения сценарного подхода для оценки результативности группового управления развитием Арктической зоны Российской Федерации. Дальнейшему подробному рассмотрению проблем интеллектуализации и цифровизации региональных, городских и муниципальных систем посвящены 19 докладов секции 10.

Среди актуальных современных проблем управления особое место занимает обеспечение безопасности и ресурсосбережения в крупномасштаб-

ных высокорисковых системах. Данные системы уязвимы для вредоносных атак, нарушающих конфиденциальность информации, в том числе изменение или уничтожение информации. Следствием могут стать сбои критически важных подсистем или системы в целом, приводящие к крупным финансовым потерям и тяжелым техногенным катастрофам. Значительные уязвимости систем рассматриваемого класса связаны со сложностью процесса междисциплинарного сопровождения и большим числом пользователей-участников этого процесса. Известные недостатки классических формальных моделей управления доступом (дискреционных, мандатных, ролевых) делают актуальными фундаментальные исследования и разработки методов сопровождения глобального эксплуатационного процесса. Приоритетное направление решения этой проблемы состоит в разработке политики, стратегий и методов многоуровневого управления доступом к критическим ресурсам на основе формализованных экспертных и математических моделей. Данная проблема раскрывается в пленарном докладе д-ра техн. наук *А.Г. Полетыкина* «Новые возможности для проектирования систем супервизорного управления АЭС», а также в 14 докладах, представленных на секции 11.

Рассмотренные выше подходы и методы разработки цифровых платформ отраслевого и регионального уровня поддерживают развитие новых архитектурных принципов киберфизического управления, основанного на организации сетей Интернета вещей разных модификаций. В связи с этим огромную важность приобретают разработки инструментальных средств цифровой аналитики (технологий, активов, алгоритмов, облачных сервисов и др.). Решению этих задач посвящены заседания 36 докладов секции 12, 18 докладов секции 13 и 24 доклада секции 14. Представленные 29 докладов на секции 15 наглядно демонстрируют возможности широкого внедрения киберфизических принципов управления в медицину и здравоохранение.

Проектирование цифровых платформ управления развитием крупномасштабных систем объективно требует разработки теоретического подхода к проблеме системного анализа. Этой проблеме посвящены следующие три пленарных доклада.

Доклад д-ра техн. наук *В.А. Ирикова* (МФТИ, г. Москва) «Методическое, кадровое и ресурсное обеспечение практики прорывного развития» позволяет уточнить суть и содержание проблем модернизации методического обеспечения сложившейся практики управления развитием, направленной на снижение потерь и ускорение достижения конечных социально-экономических результатов.

Доклад д-ра экон. наук *В.Н. Лившица*, кандидатов экон. наук *Т.И. Тищенко*, *М.П. Фроловой* (ФИЦ

ИУ РАН, г. Москва), *С.В. Лившиц* (ЦЭМИ РАН, г. Москва) «Системная оценка эффективности крупномасштабных мероприятий в нестационарной российской экономике» рассматривает важнейшие особенности системного анализа инвестиционных проектов, реализуемых в процессе перехода от централизованно-плановой к рыночной системе хозяйствования.

В докладе д-ра техн. наук *В.В. Баранова* (Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва) «Структурный анализ процессов устойчивого развития систем социальной среды» предлагается концепция, аксиоматика и конструктивный аппарат устойчивого управляемого развития социальной среды. Устойчивость связывается с разрешимостью конфликтов устойчивым компромиссом.

Практическая реализация системного подхода к управлению развитием крупномасштабных систем не представляется возможной без опоры на новые технологии управления социальными системами. Разработке этой тематики посвящены заседания двух подсекций: 16.1. Механизмы управления развитием социально-экономических систем (25 докладов) и 16.2. Управление развитием социально-экономических систем сетевой структуры (26 докладов).

На заключительном заседании конференции MLSD'2019 с подведением итогов выступил д-р техн. наук *А.Д. Цвиркун*. Он отметил, что двенадцатая международная конференция MLSD'2019 стала самой многочисленной за весь прошедший период. В работе конференции участвовали 776 человек, опубликовано 411 тезисов и 172 статьи, по результатам конкурсного отбора 149 статей были

включены в сборник, рекомендованный программным комитетом к включению в электронную библиотеку Scopus IEEE.

На заключительном заседании конференции принята резолюция, которая

отмечает:

- соединение значительного числа специалистов, относящихся к разным научным школам и направлениям научно-практической деятельности, способствует более тесному и содержательному сотрудничеству в решении общезначимых современных проблем управления;
- открытый и конструктивный характер обсуждения актуальных проблем, глубину теоретического анализа и практическую значимость докладов, представленных на конференции;

одобряет:

- ежегодное проведение конференций по управлению развитием крупномасштабных систем, которое играет значительную консолидирующую роль в развитии междисциплинарного подхода к развитию методов, моделей и средств управления в современной экономике;
- регламент конкурсного отбора публикаций работ участников конференции.

*А.Д. Цвиркун, председатель Оргкомитета
И.А. Степановская, секретарь Оргкомитета*

Цвиркун Анатолий Данилович — д-р техн. наук,
✉ tsvirkun@ipu.ru,

Степановская Ираида Александровна — канд. техн. наук,
✉ irstepan@ipu.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

XII INTERNATIONAL CONFERENCE «MANAGEMENT OF LARGE-SCALE SYSTEM DEVELOPMENT» MLSD'2019

A.D. Tsvirkun, I.A. Stepanovskaya[#]

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#] ✉ irstepan@ipu.ru

Abstract. Scientific results of participants of the conference that took place in October of 2019 are presented. Among the thematic directions (sections) of the conference were management problems of large-scale system development in different areas, such as banking and finances, infrastructure and transport, healthcare and society, etc.; methods and tools for managing investment projects and programs; management of development of a digital economy; simulation and optimization in the problems of development management of large-scale systems; nonlinear processes and computing methods in the problems of management of large-scale systems; managing the development of regional, urban and municipal systems; management of objects of nuclear power and other objects of increased danger; information support and software management systems for large-scale production. Almost eight hundred authors presented 411 theses and 172 papers.

Keywords: conference, large-scale systems, digital economy.



Евгений Анатольевич МИКРИН

Российская академия наук с пригорбием сообщила, что в ночь с 4 на 5 мая 2020 года от коронавируса на 65 году жизни скончался выдающийся российский ученый, генеральный конструктор пилотируемых программ РФ, генеральный конструктор ОАО РКК «Энергия» им. С.П. Королева, академик РАН, член президиума РАН, руководитель секции машиностроения и процессов управления ОЭММПУ РАН Евгений Анатольевич Микрин.



Это огромная, невозполнимая потеря для российской науки, для науки и техники в целом.

Всю свою жизнь академик Е.А. Микрин посвятил развитию космической отрасли. Он был всемирно признанным специалистом в области теории и практики управления космическими объектами и механическими системами в космосе.

В течение ряда лет он был генеральным конструктором пилотируемых программ РФ и генеральным конструктором ОАО РКК «Энергия» им. С.П. Королева. При его руководстве и непосредственном участии ежегодно совершенствовались математика систем управления модификаций космического корабля типа «Союз», были разработаны исследовательские модули «Заря», «Звезда» МКС и многие другие.

Он автор многих основополагающих работ по управлению и космической механике. Удостоен многих наград и научных премий.

Создатель научной школы в области управления движением перспективных космических аппаратов, Е.А. Микрин много лет заведовал кафедрой в МГТУ им. Н.Э. Баумана и МФТИ.

В конце 1990-х годов под руководством Е.А. Микрина в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН была создана неформальная группа сотрудников, основная цель которой состояла в разработке теоретических основ проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов. Группой был опубликован ряд коллективных монографий, основная из которых «Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов» под редакцией д-ра техн. наук Е.А. Микрина. Данная книга является примером системного рассмотрения основных проблем создания информационно-управляющих систем жесткого реального времени. На основе единой методологии разработаны методы и средства формализации, алгоритмы и программы проектирования оптимальных модульных систем обработки данных реального времени, реализация которых обес-

печивает синтез программного и информационного обеспечения бортового и наземного комплекса управления космическими аппаратами, их комплексную отработку и испытания. Результаты исследований, как отмечал академик Б.Е. Черток, «были использованы в качестве оптимальных методических технических решений при создании бортовых комплексов управления МКС и других космических аппаратов. Успешная реализация кос-

мических программ доказывает исключительную практическую ценность предлагаемого научного труда». Одновременно был опубликован ряд научных статей в различных журналах, в том числе и в журнале «Проблемы управления», членом редсовета которого Е.А. Микрин был много лет.

В 2007 году Президиум РАН присудил Е.А. Микрину (совместно с сотрудниками ИПУ РАН В.В. Кульбой и Б.В. Павловым) премию им. академика Б.Н. Петрова за цикл работ «Модели и методы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов». В удостоенной премии цикле работ обобщены результаты многолетних научных исследований, анализа и опыта практического применения, совершенствования методов проектирования и эксплуатации информационно-управляющих систем жесткого реального времени специального класса объектов — космических аппаратов.

Блестящий ученый и педагог, академик Е.А. Микрин по праву пользовался высочайшим заслуженным авторитетом и уважением. Среди его неоспоримых заслуг фундаментальные труды и исследования, крупная научная школа, плеяда талантливых учеников.

Все свое время, энергию и талант он посвятил космосу — коварная болезнь подстерегла его в служебной командировке на Байконуре. Улетающий в космос космический корабль — так символично завершилась его непрерывная работа в российской космической отрасли.

Ушел из жизни человек огромного таланта, ответственности и доброты. Его никогда не забудут те, кто когда-либо общался с ним, и нам всегда будет не хватать этого обаятельного и мудрого человека. Светлая память о нем навсегда сохранится в наших сердцах — тех, кто знал и высоко ценил этого яркого, необыкновенного человека.

*Сотрудники Института проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
Редсовет, редколлегия, редакция*

Павел Павлович ПАРХОМЕНКО

9.02.1923—5.05.2020

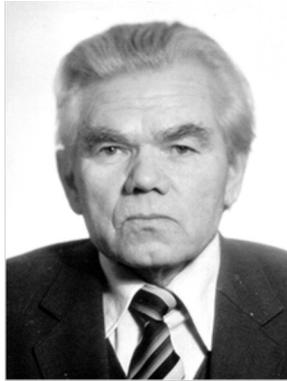
Ушел из жизни Павел Павлович Пархоменко — один из старейших сотрудников и крупнейших ученых Института проблем управления РАН. Ветеран Великой Отечественной войны П.П. Пархоменко принадлежит к тому поколению ученых, которое своими трудами и умением организовывать научные коллективы создали широкую известность Институту как переводной организации в науке управления.

Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН Павел Павлович Пархоменко родился в семье служащего на Украине в г. Нежин.

В Советских Вооруженных силах служил с 1939 года, окончил полковую школу, стал сержантом. В составе советских войск освобождал Бессарабию. Прошел боевой путь от Днепра до Буга. В 1944 году, участвуя в боях около реки Буг в составе 75-й гвардейской стрелковой дивизии 1-го Белорусского фронта, получил тяжелое ранение. После излечения в госпитале демобилизован. Награжден орденами «Отечественной войны» 1-й и 2-й степени, медалью «За победу над Германией».

Павел Павлович Пархоменко — видный специалист в области теории дискретных устройств и систем, комбинаторики и технической диагностики. В начале 1960-х годов был главным инициатором рождения новой научной дисциплины в СССР — технической диагностики (и впоследствии — отказоустойчивости). Им сформулирован сам предмет технической диагностики, ее основные понятия и задачи, определены ее место и связь с теорией управления и контроля, теорией надежности и прогнозирования. Он развил основы теории вопросников, что расширило круг задач по оптимизации процедур диагностирования. В 1959 году защитил кандидатскую диссертацию «Машинизация процессов анализа устройств релейного действия», в 1969 году — докторскую диссертацию «Методы и средства технической диагностики и вопросы синтеза структур релейных устройств». В 1970 году ему присвоено звание профессора по специальности «Техническая кибернетика». П.П. Пархоменко получены фундаментальные результаты в области анализа и синтеза дискретных устройств, теории и методов построения тестов, синтеза структур многопроцессорных вычислительных систем, организации их диагностики и отказоустойчивости, теории комбинаторных симметричных блок-схем и ее применения в коммутации и системах локального управления, в методологии технической диагностики.

С 1969 года он был длительное время организатором, душой и научным руководителем ежегодных школ-семинаров, а также организатором регулярных всесоюзных совещаний по технической диагностике. Популярность этих школ среди специалистов по надежности и технической диагностики всей страны



была огромной. Каждая школа насчитывала почти полторы сотни слушателей. Здесь проходили апробацию и оттачивались новые идеи. Рождались важнейшие новые подходы в цифровом моделировании, построении тестов цифровых и аналоговых объектов, в разработке теории отказоустойчивости и надежности. Проведено 18 школ, почти 100 «выпускников» школы-семинара защитили кандидатские диссертации, а более 20 стали докторами наук. Проведено шесть всесоюзных совещаний по технической диагностике и отказоустойчивости. В стране значительно выросли публикационная активность по

проблемам технической диагностики и понимание важности решения этих проблем на соответствующих предприятиях. В ряде технических вузов стали читаться курсы по технической диагностике.

П.П. Пархоменко принимал активное участие в разработке ряда государственных стандартов по надежности технических средств, в частности, по терминологии и по технической диагностике. Павел Павлович пользовался огромным авторитетом среди сотрудников Института. Им подготовлено 20 кандидатских наук. Автор и соавтор более 100 научных работ, в том числе двух монографий; одна из них — широко известная двухтомная «Основы технической диагностики».

Он был членом двух докторских диссертационных советов, председателем секции технических средств автоматики и вычислительной техники Ученого совета ИПУ РАН, заместителем главного редактора журнала «Автоматика и телемеханика», членом редсовета журнала «Проблемы управления».

Родина высоко оценила успешную научную и научно-общественную работу П.П. Пархоменко — он награжден орденом Трудового Красного Знамени и Большой медалью ВДНХ.

Руководя сравнительно молодежным коллективом, Павел Павлович никогда не отставал от своих сотрудников, в свободное от работы время — катался с ними на горных лыжах, играл в волейбол, участвовал в институтских спортивных олимпиадах... Совершенно естественно, что в Институте Павел Павлович пользовался огромным уважением, поскольку его высокие научные и организаторские способности органически сочетались с такими определяющими его чертами, как коммуникабельность, порядочность, приветливость, чувство юмора.

Память о Павле Павловиче, выдающемся ученом и человеке, навсегда сохранится в наших сердцах.

*Сотрудники Института проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
Редсовет, редколлегия, редакция*



АЛГОРИТМЫ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

В Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН разработаны уникальные алгоритмы определения взаимного пространственного расположения и угловой ориентации подвижных объектов на основе измерений параметров низкочастотного магнитного поля.

Алгоритмы позволяют:

зная свойства источника поля, располагаемого на одном объекте — дипольные моменты $\{M_1, M_2, M_3\}$ трех излучателей, работающих на разных частотах, измеряя вектор напряженности магнитного поля индукционным магнитометром, располагаемым на другом объекте, и выделяя поле каждого из излучателей в отдельности (векторы напряженности $\{H_1, H_2, H_3\}$),

определить:

- взаимное пространственное расположение объектов — параметры радиус-вектора R в системе координат источника (x, y, z) ;
- взаимное угловое расположение объектов — коэффициенты матрицы ориентации системы координат измерителя (x', y', z') относительно системы координат излучателя (x, y, z) .

Алгоритмы могут быть применены для решения задач:

- управления движением при взаимодействии подвижных объектов;
- навигации в замкнутом пространстве;
- контроля взаимного расположения буксируемых объектов.

Алгоритмы применяются на практике для определения взаимного расположения двух компонент аэроэлектро-разведочной геофизической системы «ЭКВАТОР» («ГеоТехнологии», Россия)

Институт проблем управления

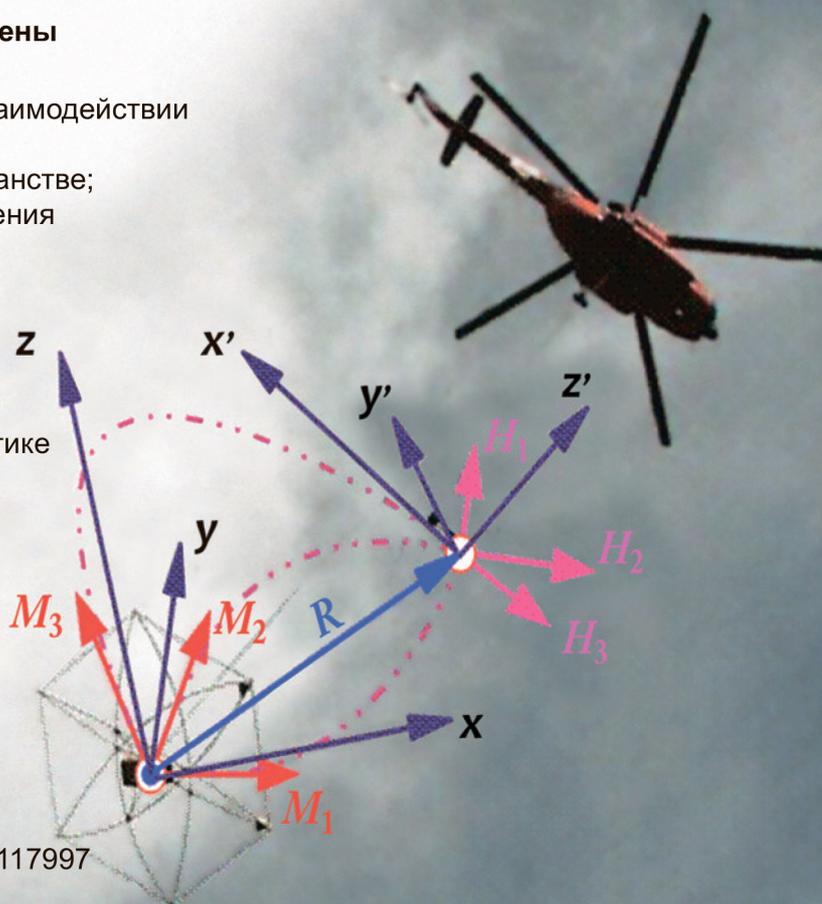
им. В. А. Трапезникова РАН

Профсоюзная ул., д. 65, Москва, 117997

✉ avolkovitsky@yandex.ru,

✉ karshak@mail.ru,

☎ (495) 334-90-80



Материал подготовлен канд. техн. наук А.К. Волковицким, канд. физ.-мат. наук Е.В. Каршаковым

