

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2020

CONTROL  SCIENCES

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,
И. А. Калыев, академик РАН,
В. А. Левин, академик РАН,
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,
Е. А. Микрин, академик РАН,
П. П. Пархоменко, чл.-корр. РАН,
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,
Е. А. Федосов, академик РАН

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,
Л. П. Боровских, канд. техн. наук
(зам. гл. редактора),
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,
В. М. Вишневский, д-р техн. наук,
М. И. Гераськин, д-р экон. наук,
С. А. Краснова, д-р техн. наук,
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,
В. В. Кульба, д-р техн. наук,
А. Г. Кушнер, д-р физ.-мат. наук,
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,
А. С. Мандель, д-р техн. наук,
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,
А. И. Михальский, д-р биол. наук,
Д. А. Новиков, чл.-корр. РАН
(гл. редактор),
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук
(зам. гл. редактора),
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,
В. Ю. Рутковский, д-р техн. наук,
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,
Волгоград – А. А. Воронин, д-р техн. наук,
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольниковский,
д-р техн. наук,
Самара – В. Г. Засканов, д-р техн. наук,
Саратов – В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук,
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук

ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS¹,
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,
V. A. Levin, Academician of RAS,
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,
E. A. Mikrin, Academician of RAS,
P. P. Parkhomenko, Corr. Member of RAS,
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,
S. N. Vassilev, Academician of RAS

EDITORIAL BOARD

V. N. Afanasev, D. Sc. (Tech.),
F. T. Aleskerov, D. Sc. (Tech.),
N. N. Bakhtadze, D. Sc. (Tech.),
L. P. Borovskikh, Ph. D. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
V. N. Burkov, D. Sc. (Tech.),
P. Yu. Chebotarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
M. I. Geraskin, D. Sc. (Econ.),
M. V. Khlebnikov, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. A. Krasnova, D. Sc. (Tech.),
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),
A. G. Kushner, D. Sc. (Phys.-Math.),
O. P. Kuznetsov, D. Sc. (Tech.),
A. A. Lazarev, D. Sc. (Phys.-Math.),
V. G. Lebedev, D. Sc. (Tech.),
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Psych.),
A. S. Mandel, D. Sc. (Tech.),
R. V. Meshcheryakov, D. Sc. (Tech.),
A. I. Michalski, D. Sc. (Biol.),
D. A. Novikov, Corr. Member of RAS,
Editor-in-Chief,
F. F. Pashchenko, D. Sc. (Tech.),
Deputy Editor-in-Chief,
B. V. Pavlov, D. Sc. (Tech.),
L. B. Rapoport, D. Sc. (Phys.-Math.),
S. V. Ratner, D. Sc. (Econ.),
E. Ya. Rubinovich, D. Sc. (Tech.),
V. Yu. Rutkovskii, D. Sc. (Tech.),
A. D. Tsvirkun, D. Sc. (Tech.),
V. M. Vishnevsky, D. Sc. (Tech.),
I. B. Yadykin, D. Sc. (Tech.)

LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Kursk – S. G. Emelyanov, D. Sc. (Tech.),
Lipetsk – A. K. Pogodaev, D. Sc. (Tech.),
Perm – V. Yu. Stolbov, D. Sc. (Tech.),
Rostov-na-Donu, G. A. Ougolnitsky –
D. Sc. (Tech.),
Samara – V. G. Zaskanov, D. Sc. (Tech.),
Saratov – V. A. Tverdokhlebov, D. Sc. (Tech.),
Ufa – B. G. Ilyasov, D. Sc. (Tech.)
Vladivostok – O. V. Abramov, D. Sc. (Tech.),
Volgograd – A. A. Voronin, D. Sc. (Phys.-Math.),
Voronezh – S. A. Barkalov, D. Sc. (Tech.)

¹ Russian Academy of Sciences.



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор
чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

Заместители главного
редактора

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Редактор

Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.

Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: ru@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет и электронная версия
подготовлены

ИП Кишенкова Т. В.

Фото на четвертой странице обложки
В.М. Бабикова

Отпечатано в ООО «Авансд солишнз»

Заказ № РВ120

Подписано в печать

21.01.2020 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в RSCI на платформе
Web of Science и Перечень
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс
научного цитирования (РИНЦ).
На сайте Научной электронной
библиотеки (www.elibrary.ru) доступны
полные тексты статей.

Подписные индексы:

80508 и **81708** в каталоге Роспечати;

38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Анализ и синтез систем управления

Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В. Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата 3

Черешко А.А., Шундерюк М.М. Границы применимости алгоритмов усовершенствованного управления с прогнозирующей моделью в условиях неопределенности динамики объекта 17

Управление в социально-экономических системах

Еналеев А.К. Оптимальность согласованных механизмов в сетевых организационных структурах 24

Белов М.В. Согласованное управление многоэлементными динамическими организационными системами.

Ч. 1. Динамическая организационная система в составе одного центра и множества агентов 39

Подиновский В.В. Анализ решений в условиях неопределенности при нечисловом оценивании предпочтений и вероятностей 48

Шумов В.В. Расширение модели «наступление — оборона» 59

Управление техническими системами и технологическими процессами

Мелехин В.Б., Хачумов В.М. Управление эффективной реализацией технологических процессов механической обработки деталей в машиностроении 71

Управление подвижными объектами и навигация

Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости 83



CONTROL SCIENCES

Scientific Technical Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161

Published since 2003

FOUNDER

V. A. Trapeznikov Institute
of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences

Editor-in-Chief

D. A. Novikov, Corr. Member of RAS

Deputy Editors-in-Chief

L. P. Borovskikh, F. F. Pashchenko

Editors

N. E. Maksimova, L. V. Petrakova

Publisher Sensidat-Plus LLC

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,
Moscow 117997, Russia

☎ +7 (495) 334-92-00

✉ pu@ipu.ru

URL: <http://pu.mtas.ru>

Design layout and electronic version
prepared by SP Kishenkova T. V.

Printed by Advanced Solutions LLC

Order No. PB120

Approved for print on 21.01.2020

The Journal is registered by the Ministry
of Press, Broadcasting and Mass Media
of the Russian Federation
Registration certificate of
ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

The Journal is included in RSCI
(Russian Science Citation Index)
on the platform Web of Science
and in the list of peer-reviewed
scientific publications of the HAC

On the website of the Scientific electronic
library (www.elibrary.ru) full texts of articles
are available.

Subscription indexes:

80508 and **81708** in the catalogue
of Rospechat;

38006 in the joint catalogue
«Press of Russia»

Free price

© V. A. Trapeznikov Institute of Control
Sciences of Russian Academy of Sciences

CONTROL SCIENCES

1.2020

CONTENTS

Analysis and Synthesis of Control Systems

Kokunko, Ju.G., Krasnov, D.V., Utkin, A.V. Two Methods
of Synthesis of State and Disturbances Observers for an Unmanned
Aerial Vehicle 3

Chereshko, A.A., Shunderiyuk, M.M. Applicability Limits of Model-
Based Predictive Control Algorithms under Uncertain Control Object
Dynamics 17

Control in Social and Economic Systems

Enaleev, A.K. Optimality of the Incentive Compatible Mechanisms
in Network Organizational Structures 24

Belov, M.V. Incentive-Compatible Control in Dynamic Multi-Agent
Systems. Part 1. Contracts in Dynamic System with One Principal
and Multiple Agents 39

Podinovski, V.V. Analysis of Decisions under Uncertainty with Non-Numeric
Assessment of Preferences and Probabilities 48

Shumov, V.V. Expansion of the «Attack — Defense» Model 59

Control of Complex Technological Processes and Productions

Melekhin, V.B., Khachumov, V.M. Control of Effective Implementation
of Technological Processes for Mechanical Processing of Parts
in Mechanical Engineering 71

Moving Objects Control and Navigation

Galyaev, A.A., Lysenko, P.V., Yakhno, V.P. Moving Object Evasion
from Single Detector at Given Speed 83

ДВА МЕТОДА СИНТЕЗА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ И ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА¹

Ю.Г. Кокунько, Д.В. Краснов, А.В. Уткин

Аннотация. В рамках синтеза системы слежения для беспилотного летательного аппарата (БПЛА) при действии внешних неконтролируемых возмущений и неполных измерениях вектора состояния разработаны процедуры синтеза наблюдателей состояния и возмущений пониженного порядка нового типа, которые не требуют построения динамических моделей внешних воздействий. Подсистема наблюдения включает в себя двух наблюдателей состояния. Один из них дает оценки скоростей по измерениям координат центра масс БПЛА. Другой наблюдатель по измерениям ошибок слежения дает оценки смешанных переменных (функций от переменных состояния, внешних воздействий и их производных), по которым непосредственно формируется обратная связь. Отмечено, что реализация разработанных алгоритмов, не требующих перенастройки при изменении внешних воздействий, повысит функциональность системы управления БПЛА и ее надежность при отказе измерительных устройств. Эффективность предложенного подхода к синтезу следящей системы подтверждена результатами численного моделирования. Приведены результаты сравнительного анализа замкнутых систем со статической обратной связью (в предположении, что все внутренние и внешние переменные измеряются) и с динамической обратной связью с помощью двух подходов к решению задачи оценивания при действии внешних возмущений: наблюдателей с большими коэффициентами и с кусочно-линейными, ограниченными корректирующими воздействиями. Показано, что, несмотря на более простую настройку, в системах с линейными обратными связями целесообразно применять наблюдатели второго типа, а наблюдатели с большими коэффициентами будут востребованы в системах с заведомо ограниченным управлением.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, слежение, блочный подход, наблюдатель состояний и возмущений, большие коэффициенты, кусочно-линейные функции.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с автоматическим управлением — одно из наиболее перспективных направлений современной военной и гражданской авиации. В работах, посвященных синтезу систем автоматического управления летательными аппаратами, решение различных задач управления основано, как правило, на использовании информации обо всех составляющих вектора состояния. В большинстве исследо-

ваний задача наблюдения — оценки вектора состояния — не ставится и не решается, предполагается, что все переменные компоненты данного вектора измеряются. Системы при действии внешних возмущений или не рассматриваются, или в контур управления вводятся автономные динамические модели, имитирующие действие внешних возмущений [1—3]. Однако установка полного комплекта датчиков и применение генераторов внешних воздействий приводит к:

- увеличению стоимости, усложнению и утяжелению конструкции БПЛА;
- расширению динамической модели объекта управления (в частности, при синтезе требуется учитывать динамику измерительных устройств и

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00846А).

допускаемые ими погрешности, фильтровать шум измерения и увеличивать объем вычислений в реальном времени;

— снижению надежности, так как при выходе из строя датчиков или существенном изменении внешних воздействий, не учтенных в расширенной модели, система управления теряет работоспособность, что может привести к аварийной ситуации.

В целях повышения надежности в управляющих процессорах стратегически важных объектов следует применять либо алгоритмы управления в форме обратной связи по выходным переменным [4, 5], либо системы аналитического резервирования измерительных устройств, а именно, динамические подсистемы наблюдения, с помощью которых вычисляют текущие оценки переменных состояния на основе информации, полученной с помощью исправно работающих датчиков [6–8]. Однако в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений первый из этих методов становится несостоятельным, а проблема синтеза наблюдателей состояния требует привлечения и разработки специальных методов синтеза динамической обратной связи.

В данной работе в рамках блочного подхода [9–14] решается задача синтеза обратной связи, обеспечивающей вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и обеспечение его движения вдоль заданной кривой. Инвариантность выходных (регулируемых) переменных по отношению к внешним неконтролируемым возмущениям, а именно, свойство регулируемых переменных в определенном смысле не реагировать на внешние возмущения [15], в замкнутой системе обеспечивается с помощью комбинированного управления (по вектору состояния и внешним воздействиям) в условиях измерений всех переменных состояния объекта управления, внешних воздействий и их производных (см. § 1).

Основной результат работы заключается в разработке информационно-управляющей системы, а именно в процедурах синтеза наблюдателей состояния и возмущений пониженного порядка нового типа в предположении, что непосредственным измерениям подлежат только декартовы координаты центра масс БПЛА, текущие значения задающих воздействий (координат целевой траектории) известны; генераторы внешних возмущений и задающих воздействий в модель не вводятся. Как следствие, текущая информация о производных задающих воздействий отсутствует. В § 2 разработана двухконтурная подсистема динамических наблюдателей пониженного порядка, дающих текущие оценки неизмеряемых внутренних и внешних сигналов без использования их динамических моделей. Рассматриваются наблюдатели состоя-

ния и возмущений двух типов: с большими коэффициентами и кусочно-линейными, ограниченными корректирующими воздействиями, проводится их сравнительный анализ. В § 3 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов.

1. ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Рассматривается движение центра масс БПЛА в виде пространственного движения материальной точки, которое описывается нелинейной динамической системой шестого порядка с помощью траекторной системы координат [16–18]:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= V \cos \vartheta \cos \psi, \quad \dot{H} = V \sin \vartheta, \quad \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi, \\ \dot{V} &= (u_1 - \sin \vartheta)g + \eta_1(t), \quad \dot{\vartheta} = \frac{(u_2 - \cos \vartheta)g}{V} + \eta_2(t), \\ \dot{\psi} &= -\frac{gu_3}{V \cos \vartheta} + \eta_3(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где L — продольная дальность; H — высота; Z — боковое смещение; V — путевая скорость; ϑ — угол наклона траектории; ψ — угол курса; g — ускорение свободного падения; $u_1 = n_x$; $u_2 = n_y \cos \gamma$ и $u_3 = n_y \sin \gamma$ — управляющие воздействия, выраженные через продольную n_x и поперечную n_y перегрузки, а также угол крена γ вектора перегрузки, $|\gamma| < \pi$; $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ — вектор внешних неконтролируемых возмущений.

Введем обозначения для декартовых координат (выходных переменных) системы (1): $y_{11} = L$, $y_{12} = H$, $y_{13} = Z$. Данные переменные регулируемые и измеряемые. Учитывая, что в режиме полета $V(t) > 0$, $|\vartheta(t)| < \pi/2$, $|\psi(t)| < \pi$, выполним диффеоморфную замену локальных координат

$$\begin{aligned} y_{21} &= V \cos \vartheta \cos \psi, \quad y_{22} = V \sin \vartheta, \\ y_{23} &= -V \cos \vartheta \sin \psi \end{aligned} \quad (2)$$

и представим систему (1) в каноническом виде:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = fg + C(V, \vartheta, \psi)\eta(t) + B(\vartheta, \psi)u, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = g \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \\ \det B &\equiv g^3 \neq 0, \\ C &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -V \sin \vartheta \cos \psi & -V \cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta & V \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & V \sin \vartheta \sin \psi & -V \cos \vartheta \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для переменных системы (3) имеют место проектные ограничения:

$$|y_{1i}(t)| \leq Y_{1i}, \quad |y_{2i}(t)| \leq Y_{2i}, \quad |\dot{y}_{2i}(t)| \leq \bar{Y}_{2i}, \quad |u_i(t)| \leq U_i, \\ t \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (4)$$

Для системы (3) сформируем закон управления в форме комбинированной обратной связи (по вектору состояния и внешним воздействиям), обеспечивающий вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и его движение вдоль данной кривой, заданной параметрически в системе координат $y_1(t) = \text{col}(y_{11}, y_{12}, y_{13})$ в виде $y_{1d}(t) = \text{col}(y_{11d}, y_{12d}, y_{13d})$. Другими словами, требуется обеспечить стабилизацию ошибок слежения ($y_1 - y_{1d}$).

Для синтеза системы слежения воспользуемся блочным подходом [9–14]. Обозначим

$$e_1 = y_1 - y_{1d}, \quad e_2 = y_2 - \dot{y}_{1d} + K_1 e_1, \\ e_3 = C(V, \vartheta, \psi)\eta(t) - \ddot{y}_{1d}, \quad e_j = \text{col}(e_{j1}, y_{j2}, y_{j3}), \\ j = \overline{1, 3} \quad (5)$$

и представим систему (3) в блочной форме «вход — выход» относительно ошибок слежения:

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2,$$

$$\dot{e}_2 = K_1(-K_1 e_1 + e_2) + fg + e_3 + B(\vartheta, \psi)u, \quad (6)$$

где K_1 — некоторая диагональная матрица с положительными диагональными элементами, т. е. $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$, $k_{1i} > 0$, $i = 1, 2, 3$, а смешанные переменные e_3 (5) трактуются как внешние согласованные возмущения (т. е. возмущения, принадлежащие пространству управления, которые могут быть непосредственно скомпенсированы путем управления простым вычитанием при наличии их значений или оценок [11]).

В терминах системы (6) сформируем базовый (т. е. в условиях измерений всех параметров) закон комбинированного управления

$$u = -B^{-1}(\vartheta, \psi)(-K_1^2 e_1 + (K_1 + K_2)e_2 + e_3 + fg), \quad (7)$$

который обеспечивает замкнутую систему (6), (7) в виде

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -K_2 e_2$$

и экспоненциальную устойчивость ошибок слежения: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_{1i} = 0$, $i = \overline{1, 3}$. При выборе элементов

матриц K_j , $j = 1, 2$, регулятора нужно определить

допустимые диапазоны $\bar{k}_{ji} \leq k_{ji} \leq \bar{\bar{k}}_{ji}$, где нижние границы определяются желаемой скоростью сходимости ошибок слежения в заданные окрестности нуля на основе неравенств

$$|e_{2i}(t)| \leq |e_{2i}(0)|\exp(-k_{2i}T) \leq \Delta_{2i},$$

$$|e_{1i}(t)| \leq |e_{1i}(0)|\exp(-k_{1i}T) + \Delta_{2i}/k_{1i} \leq \Delta_{1i},$$

$$t \geq T > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Для реализации комбинированного управления (7) нужны текущие значения всех переменных состояния $y_1(t)$, $y_2(t)$ системы (1), задающих воздействий $y_{1d}(t)$ и их производных до второго порядка включительно $\dot{y}_{1d}(t)$, $\ddot{y}_{1d}(t)$, а также внешних возмущений $\eta(t)$. Ставится задача оценки сигналов, требуемых для синтеза обратной связи, с помощью динамических наблюдателей состояния в предположениях:

— непосредственным измерениям доступны только координаты центра масс $y_1(t)$ (шумы в измерениях отсутствуют), текущие значения $y_{1d}(t)$ известны, аналитический вид задающих воздействий $y_{1d}(t)$ не известен, как следствие, не имеется текущей информации об их производных, которые полагаются неизвестными ограниченными функциями времени;

— генераторы внешних воздействий, порождающие производные задающих воздействий и имитирующие внешние возмущения, не вводятся; эти сигналы полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными известными константами:

$$|\eta_i(t)| \leq N_i, \quad |\dot{\eta}_i(t)| \leq \bar{N}_i, \quad |y_{1id}^{(j)}(t)| \leq Y_{ji},$$

$$t \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (8)$$

В сделанных предположениях задача наблюдения может быть решена только с некоторой точностью [6–8]. Следовательно, требуется обеспечить сходимость ошибок оценивания в заданную окрестность нуля за заданное время $0 \leq t^* < T$. При назначении времени и точности оценивания надо учитывать, что замыкание обратной связи (7) через наблюдатель приведет во второй подсистеме к искажению матрицы коэффициентов системы $K_2 \approx \tilde{K}_2$ и к появлению вынужденной составляющей, обусловленной малыми, но незатухающими ошибками оценивания $\dot{e}_2 = -\tilde{K}_2 e_2 + \tilde{\eta}(t)$,

$\|\tilde{\eta}(t)\| \leq \delta$, $t > t^*$. Это несколько снизит точность следящей системы, а именно:

$$|e_{2i}(t)| \leq |e_{2i}(t^*)| \exp(-\tilde{k}_{2i}(T - t^*)) + \delta/\tilde{k}_{2i} \leq \tilde{\Delta}_{2i},$$

$$\tilde{\Delta}_{2i} > \Delta_{2i}, \quad t \geq T > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАБЛЮДЕНИЯ

Закон комбинированного управления (7) включает в себя смешанные переменные (5) системы (6) и переменные исходной системы (1) — угол наклона вектора скорости ϑ и угол курса ψ , требуемые для формирования матрицы $B^{-1}(\vartheta, \psi)$. Обе системы имеют регулярную форму относительно внешних возмущений, а именно, каждая из систем представлена в виде двух связанных подсистем, в одной из них (первое из уравнений (6), записанной относительно выходных переменных) внешние возмущения отсутствуют, а в другой (второе уравнение) присутствуют, и ранг матрицы B равен размерности этой подсистемы.

В таких системах имеется возможность с помощью наблюдателей специального вида получить оценки с заданной точностью неизмеряемых переменных состояния и внешних возмущений без использования их динамической модели [9—14, 18].

Потребностями базового закона управления (7) продиктована структура подсистемы наблюдения. При отсутствии в контуре управления генератора задающих воздействий целесообразно включить в подсистему наблюдения два наблюдателя: первый для оценивания скоростей y_2 , а второй для оценивания смешанных переменных (5). В данном параграфе представлены оригинальные методы синтеза наблюдателей состояния и возмущений пониженного порядка с целью сокращения расчетов в реальном времени. В отличие от стандартных наблюдателей пониженного порядка (*Luenberger observer* [19, 20]), для синтеза которых не учитывается подсистема, описывающая динамику измеряемых переменных, предлагается, наоборот, отбросить подсистему, описывающую динамику неизмеряемых переменных, а требуемые оценки получить с помощью корректирующих воздействий наблюдателя, которые являются функциями ошибок наблюдения измеряемых переменных.

2.1. Наблюдатель пониженного порядка

Первая задача состоит в получении оценок косинусов (синусов) углов наклона траектории ϑ и курса ψ , требуемых для формирования в законе управления (7) матрицы $B^{-1}(\vartheta, \psi)$. С этой целью первый наблюдатель предлагается построить на основе укороченной системы (3), а именно, $\dot{y}_1 = y_2$,

где переменные $y_1(t)$ измеряются, а $y_2(t)$ трактуются как внешние ограниченные возмущения с ограниченными производными (4). Обратим внимание, что традиционный, полноразмерный наблюдатель для оценивания y_2 строится на основе системы (3) и имеет шестой порядок [6], а за основу стандартного наблюдателя пониженного порядка принимается второе уравнение системы (3), преобразованное к специальному виду [19, 20]. В обоих случаях учитывается дифференциальное уравнение для оцениваемой переменной y_2 , правая часть которого содержит внешние возмущения.

В нашем случае наблюдатель «возмущений» (по сути, дифференциатор) будет иметь вид:

$$\dot{z}_0 = v_0(\varepsilon_0), \quad (9)$$

где $z_0 \in R^3$ — вектор состояния наблюдателя, $v_0 \in R^3$ — вектор корректирующих воздействий, $\varepsilon_0 = y_1 - z_0 \in R^3$ — вектор ошибок наблюдения. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации с заданной точностью ошибок наблюдения и их производных:

$$|\varepsilon_{0i}(t)| \leq \alpha, \quad t > t_{01} \geq 0, \quad |\dot{\varepsilon}_{0i}(t)| = |y_{2i}(t) - v_{0i}(t)| \leq \alpha,$$

$$t > t_0 > t_{01}, \quad t_0 < t^*, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

Тогда при $t > t_0$ корректирующие воздействия служат оценками «внешнего возмущения» $v_{0i}(t) = y_{2i}(t) \pm \alpha$ и используются для вычисления элементов матрицы $B^{-1}(\vartheta, \psi)$ в силу замены переменных (2):

$$\tilde{V} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2 + v_{03}^2}, \quad \sin \tilde{\vartheta} = \frac{v_{02}}{\tilde{V}}, \quad \cos \tilde{\vartheta} = \sqrt{1 - \frac{v_{02}^2}{\tilde{V}^2}},$$

$$\cos \tilde{\psi} = \frac{v_{01}}{\tilde{V} \cos \tilde{\vartheta}}, \quad \sin \tilde{\psi} = -\frac{v_{03}}{\tilde{V} \cos \tilde{\vartheta}} \quad (11)$$

при ограничении $v_{01}^2(t) + v_{03}^2(t) \neq 0$.

Для обеспечения заданной точности (10) нужно использовать корректирующие воздействия специального вида, обеспечивающие инвариантность по отношению к внешним согласованным возмущениям. Основу составляют наблюдатели с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующие в скользящем режиме (*sliding mode observer* [7, 9—11, 18]). Однако этот подход может оказаться неэффективным при реализации на бортовом компьютере в реальном времени, так как частые переключения трудно реализуемы в механических системах, а управление летательным ап-

паратом без механических элементов невозможно. Для сокращения расчетов, выполняемых в реальном времени, целесообразно применять наблюдатели с непрерывными корректирующими воздействиями. Рассмотрим два альтернативных варианта.

Первый метод. Самыми быстродействующими и простыми в реализации являются наблюдатели с линейными корректирующими воздействиями с большими коэффициентами:

$$v_{0i} = l_{0i} \varepsilon_{0i}, \quad l_{0i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (12)$$

В отличие от стандартных наблюдателей с большими коэффициентами (*high-gain observer* [8, 21, 22]), где для оценивания возмущений требуется расширить пространство состояний из-за динамической модели возмущений и соответственно увеличить динамический порядок наблюдателя (в данном случае воспользоваться системой (3) шестого порядка), в предлагаемом наблюдателе пониженного порядка (9) оценкой «возмущений» служат корректирующие воздействия (12). Для выбора коэффициентов наблюдателя, обеспечивающих заданную точность (10), применим второй метод Ляпунова для покомпонентного анализа виртуальной системы

$$\dot{\varepsilon}_{0i} = y_{2i} - v_{0i} = y_{2i} - l_{0i} \varepsilon_{0i}, \quad \ddot{\varepsilon}_0 = \dot{y}_2 - l_{0i} \dot{\varepsilon}_{0i}, \\ i = \overline{1, 3}.$$

Ограничения на получаемую траекторию предполагаются выполненными, что позволяет получить необходимые условия для выполнения ограничений, а достаточность принятых решений можно будет проверить на этапе моделирования.

Таким образом, потребуем, чтобы для слагаемых производной квадратичной формы $V_0 = V_{01} + V_{02} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{0i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_{0i}^2$ в силу ограничений (4) выполнялись оценки:

$$\dot{V}_{01} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{0i} (y_{2i} - l_{0i} \varepsilon_{0i}) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_{0i}| (Y_{2i} - l_{0i} |\varepsilon_{0i}|) < 0, \quad (13)$$

$$\dot{V}_{02} = \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_{0i} (\dot{y}_{2i} - l_{0i} \dot{\varepsilon}_{0i}) \leq \sum_{i=1}^3 |\dot{\varepsilon}_{0i}| (\bar{Y}_{2i} - l_{0i} |\dot{\varepsilon}_{0i}|) < 0, \\ i = \overline{1, 3}.$$

Неравенства (13) выполняются при $\varepsilon_{0i} > \alpha - \bar{\alpha}_i$, где $\bar{\alpha} \in (0, \alpha)$ и при выборе $l_{0i} > Y_{2i}/(\alpha - \bar{\alpha}_i)$,

$l_{0i} > \bar{Y}_{2i}/(\alpha - \bar{\alpha}_i)$, что обеспечивает соответственно сходимость переменных в окрестности нуля: $|\varepsilon_{0i}(t)| \leq \alpha$, $t > t_{01} \geq 0$, $|\dot{\varepsilon}_{0i}(t)| \leq \alpha$, $t > t_0 > t_{01}$. Заданная точность оценивания (10) обеспечивается при выборе больших коэффициентов в виде

$$l_{0i} > \frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}_i} \max\{Y_{2i}, \bar{Y}_{2i}\}, \quad i = \overline{1, 3},$$

где $\alpha - \bar{\alpha}_i > 0$, $\bar{\alpha}_i$ служит оценкой для области сходимости устойчивых собственных движений переменных $\varepsilon_{0i}(t)$, $\dot{\varepsilon}_{0i}(t)$ за заданное время при начальных условиях $\varepsilon_{0i}(0)$, которые можно установить произвольно с учетом ограничений (11): $v_{01}^2(t) + v_{03}^2(t) \neq 0$.

К недостаткам метода следует отнести в общем случае большие значения оценочных сигналов (12) в начальный момент времени, т. е. ошибка оценивания $|y_{2i}(t) - l_{0i} \varepsilon_{0i}(t)|$ в начальный момент времени сопоставима со значением большого коэффициента из-за ненулевых начальных значений ошибок наблюдения. Это известный факт теории *high-gain observer* [8, 21, 22], который подтверждается результатами моделирования. Обратим внимание, что в данном элементарном случае (9), (12) есть теоретическая возможность обеспечить $z_{0i}(0) = y_{1i}(0) \Rightarrow \varepsilon_{0i}(0) = 0$, так как сигналы $y_{1i}(t)$ измеряются, однако в силу ограничений (11) следует принимать $z_{0i}(0) \neq y_{1i}(0)$, чтобы избежать деления на нуль, что немедленно приводит к всплескам корректирующих воздействий. Для адекватного процесса управления требуется либо использовать в законе управления оценочные сигналы с небольшой задержкой после затухания быстрых движений, либо искусственно ограничивать эти сигналы в начале переходных процессов. Чтобы избежать указанных проблем, предлагается в наблюдателе «возмущений» сразу использовать всюду ограниченные, непрерывные корректирующие воздействия [12–14, 23].

Второй метод. Рассмотрим непрерывный аналог разрывных корректирующих воздействий в виде ограниченных, кусочно-линейных функций:

$$v_{0i} = M_{0i} \text{sat}(l_{0i} \varepsilon_{0i}), \quad M_{0i}, l_{0i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$M_{0i} \text{sat}(l_{0i} \varepsilon_{0i}) = \begin{cases} M_{0i} \text{sign} \varepsilon_{0i}, & |\varepsilon_{0i}| > 1/l_{0i}; \\ M_{0i} l_{0i} \varepsilon_{0i}, & |\varepsilon_{0i}| \leq 1/l_{0i}. \end{cases} \quad (14)$$

В отличие от воздействий (12) корректирующие воздействия (14) всюду ограничены и имеют два настраиваемых параметра. Амплитуды $M_{0i} > 0$ выбираются исходя из достаточных условий $\varepsilon_{0i} \dot{\varepsilon}_{0i} < 0$

так, чтобы при $|\varepsilon_{0i}(0)| > 1/l_{0i}$ обеспечить за конечное время попадание в линейную зону, а при $|\varepsilon_{0i}(0)| < 1/l_{0i}$ — не выйти из нее:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0i}(y_{2i} - M_{0i} \operatorname{sign} \varepsilon_{0i}) &\leq |\varepsilon_{0i}|(Y_{2i} - M_{0i}) < 0, \\ M_{0i} > |\varepsilon_{0i}(0)|/t_{01} + Y_{2i} &\Rightarrow |\varepsilon_{0i}(t)| \leq 1/l_{0i}, \\ t > t_{01}, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

При $t > t_{01}$ замкнутая виртуальная система представима в виде $\dot{\varepsilon}_{0i} = y_{2i} - M_{0i}l_{0i}\varepsilon_{0i}$, $\ddot{\varepsilon}_0 = \dot{y}_2 - M_{0i}l_{0i}\dot{\varepsilon}_{0i}$, $i = \overline{1, 3}$. Неравенства для выбора второго параметра, который играет роль большого коэффициента в малой окрестности нуля и при котором обеспечивается заданная точность оценивания (10), определяются аналогично оценкам (13) и имеют вид:

$$l_{0i} > \frac{1}{M_{0i}(\alpha - \bar{\alpha}_i)} \max\{Y_{2i}, \bar{Y}_{2i}\}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (15)$$

2.2. Наблюдатель смешанных переменных пониженного порядка

Наша цель состоит в создании системы автоматического управления БПЛА, поддерживающей различные рабочие режимы в условиях существенно меняющихся внешних условий без перенастройки параметров и структуры регулятора. Поэтому генераторы внешних воздействий в системе управления не вводятся, проблема оценивания внешних воздействий в отдельности не рассматривается. Вторая задача состоит в оценивании смешанных переменных (5) $e_3(t)$ — функций от переменных состояния и внешних воздействий, непосредственно фигурирующих в законе комбинированного управления (7), по измерениям ошибок слежения $e_1(t)$. Основой для построения второго наблюдателя служит система (6), где переменные $e_3(t)$ являются внешними ограниченными возмущениями с ограниченными производными, диапазоны их изменения определяются в силу выражения (8):

$$|e_{3i}(t)| \leq E_{30i}, \quad |\dot{e}_{3i}(t)| \leq E_{31i}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

В отличие от традиционных наблюдателей возмущений, где обязательно вводится динамическая модель возмущений, что в рассматриваемом случае приведет к построению наблюдателя девятого порядка [8, 21, 22], в нашем случае наблюдатель состояний и возмущений в этом смысле будет пониженный (шестого порядка), так как динамическая модель для смешанных переменных $e_3(t)$ в построения не вводится. Далее вновь рассматри-

ваются наблюдатели двух типов: с большими коэффициентами и с ограниченными sat-функциями.

Первый метод. Основой для построения стандартного наблюдателя с большими коэффициентами служит расширенная из-за уравнений динамики внешних возмущений модель объекта управления, преобразованная к каноническому виду [8, 21, 22]. Для систем, уже преобразованных к блочной форме с замкнутыми локальными связями (6), переход к канонической форме нецелесообразен. С целью остаться в рамках блочного подхода, предлагается оригинальный метод синтеза наблюдателя пониженного порядка с большими коэффициентами, но без корректирующих воздействий, с простой настройкой параметров, в котором реализуется принцип полной декомпозиции. Основу разработанного подхода составляет принцип построения наблюдателя Луенбергера пониженного порядка [19, 20], который в работе [7] был распространен на линейные и нелинейные системы при действии внешних возмущений и применялся для оценивания только переменных состояния с заданной точностью. В рамках развития этого подхода далее приведен алгоритм, в котором оценки возмущений $e_3(t)$, не представленных дифференциальными уравнениями, обеспечивают виртуальные корректирующие воздействия наблюдателя — линейные комбинации ошибок наблюдения измеряемых переменных.

Согласно работе [7] выполним невырожденную замену переменных

$$s_1 = e_1 \in R^3, \quad s_2 = -L_2 e_1 + e_2 \in R^3, \quad L_2 = \operatorname{diag}(l_{2i}),$$

$$l_{2i} > 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

представим систему (6) в виде

$$\dot{s}_1 = (L_2 - K_1)s_1 + s_2,$$

$$\dot{s}_2 = -(L_2 - K_1)^2 s_1 - (L_2 - K_1)s_2 + e_3 + fg + Bu$$

и на ее основе построим наблюдатель 6-го порядка без корректирующих воздействий с учетом измеряемых сигналов s_1 в виде:

$$\dot{z}_1 = (L_2 - K_1)z_1 + z_2 + L_1(s_1 - z_1),$$

$$L_1 = \operatorname{diag}(l_{1i}), \quad l_{1i} > 0, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\dot{z}_2 = -(L_2 - K_1)^2 s_1 - (L_2 - K_1)z_2 + fg + B(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})u,$$

$$z_{1,2} \in R^3, \quad (16)$$

где матрица $B(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})$ формируется из оценок (11), полученных с помощью наблюдателя (9).

Задача синтеза заключается в выборе больших коэффициентов $l_{1i}, l_{2i} > 0$, при которых с заданной точностью обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения $\varepsilon_j = s_j - z_j, j = 1, 2$, и их производных. С этой целью выполним покомпонентный анализ виртуальной системы

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= -(L_1 + K_1 - L_2)\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -(L_2 - K_1)\varepsilon_2 + \bar{\varepsilon}_3, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_1 &= -(L_1 + K_1 - L_2)\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_2 &= -(L_2 - K_1)\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\bar{\varepsilon}}_3,\end{aligned}\quad (17)$$

где $\bar{\varepsilon}_3 = e_3 + \Delta Bu$, $\Delta B = B(\vartheta, \psi) - B(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})$, $\bar{\varepsilon}_{3i} = e_{3i} + \varphi_i$, $|\varphi_i(t)| \leq \alpha \|u\| = F_i(\alpha)$, $t > t_0$,

$$|\bar{\varepsilon}_{3i}(t)| \leq \bar{E}_{3i}, \quad \bar{E}_{3i} = \text{diag}(\bar{E}_{3i}), \quad |\dot{\bar{\varepsilon}}_{3i}(t)| \leq \tilde{E}_{3i}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (18)$$

При $l_{1i} + k_{1i} > l_{2i}$, $l_{2i} > k_{1i}$, $i = \overline{1, 3}$, нулевое положение равновесия виртуальной системы устойчиво. Аналогично оценкам (13) имеют место оценки:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{2i}(t)| &\leq \frac{\bar{E}_{3i}}{l_{2i} - k_{1i}}, \quad t > t_{11} > t_0, \\ |\varepsilon_{1i}(t)| &\leq \frac{\bar{E}_{3i}}{(l_{1i} + k_{1i} - l_{2i})(l_{2i} - k_{1i})}, \quad t > t_1 > t_{11}, \\ |\dot{\varepsilon}_{2i}(t)| &\leq \frac{\tilde{E}_{3i}}{l_{2i} - k_{1i}}, \quad t > t_{21} > t_1, \\ |\dot{\varepsilon}_{1i}(t)| &\leq \frac{\tilde{E}_{3i}}{(l_{1i} + k_{1i} - l_{2i})(l_{2i} - k_{1i})}, \quad t > t_2 > t_{21}, \quad i = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Установим связь между внешним возмущением $\bar{\varepsilon}_3(t)$, измеряемой ошибкой наблюдения $\varepsilon_1(t) = s_1(t) - z_1(t)$ и производными переменных системы (17):

$$\bar{\varepsilon}_{3i} = (l_{1i} + k_{1i} - l_{2i})(l_{2i} - k_{1i})\varepsilon_{1i} + (l_{2i} - k_{1i})\dot{\varepsilon}_{1i} + \dot{\varepsilon}_{2i}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда следует, что переменные $v_i(t) = (l_{1i} + k_{1i} - l_{2i})(l_{2i} - k_{1i})\varepsilon_{1i}(t)$, $i = \overline{1, 3}$, которые можно трактовать как виртуальные корректирующие воз-

действия наблюдателя (16), служат оценкой внешнего возмущения для $t > t_2$ в следующем смысле:

$$\begin{aligned}|e_{3i}(t) + \varphi_i(t, \alpha) - v_i(t)| &\leq |(l_{2i} - k_{1i})\dot{\varepsilon}_{1i}(t) + \dot{\varepsilon}_{2i}(t)| \Rightarrow \\ \Rightarrow |e_{3i}(t) - v_i(t)| &\leq \tilde{E}_{3i} \left(\frac{1}{l_{1i} + k_{1i} - l_{2i}} + \frac{1}{l_{2i} - k_{1i}} \right) + \\ &+ F_i(\alpha) + \bar{\Delta}_i, \quad i = \overline{1, 3},\end{aligned}$$

где $\bar{\Delta}_i = l_{1i}\bar{\beta}_i/(l_{1i} + k_{1i} - l_{2i}) + (l_{2i} - k_{1i})\bar{\mu}_i$; $\bar{\beta}_i$ служит оценкой для области сходимости за заданное время устойчивых собственных движений переменных $\varepsilon_{2i}(t)$, $\dot{\varepsilon}_{2i}(t)$, а $\bar{\mu}_i$ — переменных $\dot{\varepsilon}_{1i}(t)$ системы (17) при выбранных начальных условиях; $\varepsilon(0)$ в данном случае можно установить желаемым образом, например, $\varepsilon_{1i}(0) = 0$.

Для оценивания смешанных переменных $e_{2i} = s_{2i} + l_{2i}e_{1i}$, e_{3i} с учетом $\|\tilde{\eta}(\alpha, \beta, \gamma)\| \leq \delta$ при $t > t^*$, $t_0 < t_1 < t_2 \leq t^* < T$ устанавливается заданная точность

$$|\varepsilon_{2i}(t)| = |s_{2i}(t) - z_{2i}(t)| \leq \beta, \quad |e_{3i}(t) - v_i(t)| \leq \gamma, \quad t > t_2,$$

которая обеспечивается при таком выборе параметров $l_{(1, 2)i}$:

$$\begin{aligned}l_{2i} &> \max \left\{ \frac{\bar{E}_{3i}}{\beta - \bar{\beta}_i}; \frac{\tilde{E}_{3i}}{\gamma - F_i(\alpha) - \bar{\Delta}_i} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_i} \right\} + k_{1i}, \\ l_{1i} &> l_{2i} + \frac{1}{\tilde{\Delta}_i - \bar{\Delta}_i} - k_{1i},\end{aligned}$$

$$0 < \bar{\beta}_i < \beta, \quad 0 < F_i(\alpha) + \bar{\Delta}_i < \gamma, \quad 0 < \Delta_i < \tilde{\Delta}_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Как уже было отмечено, основной недостаток наблюдателей с большими коэффициентами заключается в больших всплесках вначале переходных процессов, которые требуют искусственного ограничения оценивающих сигналов. Например, реализация комбинированного управления (7) в виде

$$\begin{aligned}u &= -B^{-1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})(-K_1^2 e_1 + (K_1 + K_2)E_2 \text{sat}(z_2 + L_2 e_1) + \\ &+ \bar{E}_3 \text{sat}(v) + fg),\end{aligned}\quad (19)$$

где $|e_{2i}(t)| \leq E_{2i}$, $E_2 = \text{diag}(E_{2i})$, $i = \overline{1, 3}$, обеспечит в замкнутой системе (1), (6), (9), (16) стабилизацию ошибок слежения с заданной точностью для $t > T > t^* > t_2$ без избыточного расхода ресурса управления. Далее представлен альтернативный метод оценивания, свободный от указанного недостатка.

Второй метод. Рассмотрим процедуру синтеза наблюдателя смешанных переменных, в которой реализуется принцип разделения движений с помощью ограниченных, кусочно-линейных корректирующих воздействий. Наблюдатель строится с учетом измеряемых сигналов e_1 как реплика системы (6) и имеет такой же, шестой, порядок:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -K_1 e_1 + z_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 &= -K_2^2 e_1 + K_1 z_2 + f g + \tilde{B} u + v_2,\end{aligned}\quad (20)$$

где $z_{1,2} \in R^3$ — вектор состояния, $v_{1,2} \in R^3$ — вектор корректирующих воздействий наблюдателя. Относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_j = e_j - z_j \in R^3$, $j = 1, 2$, получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{1i} &= \varepsilon_{2i} - v_{1i}, \quad \dot{\varepsilon}_{2i} = k_{1i} \varepsilon_{2i} + \bar{e}_{3i} - v_{2i}, \\ i &= \overline{1, 3},\end{aligned}\quad (21)$$

где переменные $\bar{e}_3 = e_3 + \Delta B u$ трактуются как внешние возмущения, ограниченные вместе со своими производными (18), динамическая модель возмущений в построения не вводится.

Аналогично воздействиям (14) введем непрерывные, ограниченные корректирующие воздействия

$$\begin{aligned}v_{1i} &= M_{1i} \text{sat}(l_{1i} \varepsilon_{1i}), \\ v_{2i} &= M_{2i} \text{sat}(l_{2i} v_{1i}) = M_{2i} \text{sat}(l_{2i} (\varepsilon_{2i} - \dot{\varepsilon}_{1i})), \\ M_{1i} \text{sat}(l_{1i} \varepsilon_{1i}) &= \begin{cases} M_{1i} \text{sign} \varepsilon_{1i} |\varepsilon_{1i}| > 1/l_{1i}, \\ M_{1i} l_{1i} \varepsilon_{1i} |\varepsilon_{1i}| \leq 1/l_{1i}; \end{cases} \\ M_{2i} \text{sat}(l_{2i} v_{2i}) &= \begin{cases} M_{2i} \text{sign} v_{1i} |v_{1i}| > 1/l_{2i}, \\ M_{2i} l_{2i} v_{1i} |v_{1i}| \leq 1/l_{2i}, \quad i = \overline{1, 3}. \end{cases}\end{aligned}$$

Задача синтеза сводится к стабилизации ошибок наблюдения и их производных (21) так, чтобы обеспечить заданную точность оценивания:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{2i}(t)| &= |e_{2i}(t) - z_{2i}(t)| < \beta \Rightarrow z_{2i}(t) = e_{2i}(t) \pm \beta, \\ t_1 &> t_0, \\ |e_{3i}(t) - v_{2i}(t)| &\leq \gamma \Rightarrow v_{2i}(t) = e_{3i}(t) \pm \gamma, \\ t_2 &> t_1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad t_0 < t_1 < t_2 \leq t^* < T.\end{aligned}\quad (23)$$

Из постановки задачи и априорных предположений (4), (8), (18) следует, что переменные системы (21), (22) и их производные будут ограничены при $t > 0$. Введем соответствующие обозначения

ния $|\varepsilon_{2i}^{(j)}(t)| \leq P_{ji}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{0, 2}$, которые далее детализируем.

Установим в первом блоке системы (21), (22) нулевые начальные условия $z_{1i}(0) = e_{1i}(0) \Rightarrow \varepsilon_{1i}(0) = 0$. Тогда переменные ε_{1i} сразу находятся в линейной зоне $|\varepsilon_{1i}(t)| \leq 1/l_{1i}$ и не выйдут из нее при $t \geq 0$ при выполнении условий:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1i}(\varepsilon_{2i} - M_{1i} \text{sign} \varepsilon_{1i}) &\leq |\varepsilon_{1i}|(P_{0i} - M_{1i}) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{1i} > P_{0i}.\end{aligned}\quad (24)$$

Для выбора больших коэффициентов $l_{1i} > 0$ применим второй метод Ляпунова для покомпонентного анализа виртуальной системы [23]:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{1i} &= \varepsilon_{2i} - M_{1i} l_{1i} \varepsilon_{1i}, \quad \dot{\varepsilon}_{1i} = \dot{\varepsilon}_{2i} - M_{1i} l_{1i} \dot{\varepsilon}_{1i}, \\ \ddot{\varepsilon}_{1i} &= \ddot{\varepsilon}_{2i} - M_{1i} l_{1i} \ddot{\varepsilon}_{1i}, \quad i = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

Тогда аналогично выражениям (13), (15) имеем:

$$\begin{aligned}l_{1i} &> \frac{\max\{P_{0i}, P_{1i}, P_{2i}\}}{M_{1i}(\mu - \bar{\mu})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{1i}(t)| \leq \mu, \quad t \geq 0; \\ |\dot{\varepsilon}_{1i}(t)| \leq \mu, \quad t > t_{11} > t_0; \\ |\ddot{\varepsilon}_{1i}(t)| \leq \mu, \quad t > t_1 > t_{11}, \quad i = \overline{1, 3}, \end{cases}\end{aligned}\quad (25)$$

где $0 < \bar{\mu} < \mu < \beta$, $\bar{\mu}$ служит оценкой для области сходимости устойчивых собственных движений производных $\ddot{\varepsilon}_{1i}$, $\ddot{\varepsilon}_{1i}$ за заданное время.

Если $\text{sign} v_{1i}(t) = \text{sign} \varepsilon_{1i}(t)$, $t \geq 0$, то совпадение знаков $\text{sign} v_{2i}(t) = \text{sign} \varepsilon_{2i}(t)$ может не иметь места при $0 \leq t \leq t_{11}$ и гарантируется только при $t > t_{11}$ вне окрестности $|\varepsilon_{2i}| \leq |\dot{\varepsilon}_{1i}| \leq \mu$. По этой причине на отрезке $[0, t_{11}]$ собственные движения второй подсистемы (21) в общем случае неустойчивы. Для сдерживания их роста целесообразно на данном интервале оставить второй блок системы (21) разомкнутым, а именно

$$v_{2i}(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{2i} = k_{1i} \varepsilon_{2i} + \bar{e}_{3i}, \quad t \in [0, t_{11}], \quad i = \overline{1, 3},$$

и только при любом $t > t_{11}$ подключить корректирующие воздействия (22) v_{2i} , обеспечивающие монотонную сходимость переменных $\varepsilon_{2i}(t)$ в заданную окрестность нуля (23).

Установим во второй подсистеме (21) начальные условия в виде $z_{2i}(0) = 0 \Rightarrow |\varepsilon_{2i}(0)| \leq E_{2i}$. Тогда для областей изменения переменных $\varepsilon_{2i}(t)$ и их производных справедливы оценки:

$$|\varepsilon_{2i}(t)| \leq \max\{E_{2i}, |\varepsilon_{2i}(t_{11})|\} = P_{0i},$$

$$|\varepsilon_{2i}(t_{11})| \leq \frac{\bar{E}_{3i} + (E_{2i}k_{1i} + \bar{E}_{3i})\exp(k_{1i}t_{11})}{k_{1i}},$$

$$|\dot{\varepsilon}_{2i}(t)| \leq k_{1i}P_{0i} + \bar{E}_{3i} + M_{2i} = P_{1i},$$

$$|\ddot{\varepsilon}_{2i}(t)| \leq k_{1i}P_{1i} + \tilde{E}_{3i} + M_{2i} = P_{2i} \quad \forall t \geq 0,$$

$$i = \overline{1, 3}. \quad (26)$$

На отрезке $[t_{11}, t_1]$ второй блок системы (21), (22) представим в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{2i} = k_{1i}\varepsilon_{2i} + \bar{e}_{3i} - M_{2i}\text{sign}(\varepsilon_{2i} - \dot{\varepsilon}_{1i}), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Неравенства для выбора амплитуд корректирующих воздействий M_{2i} , обеспечивающих попадание в линейную зону $|v_{1i}(t)| = |\varepsilon_{2i} - \dot{\varepsilon}_{1i}| \leq 1/L_{2i}$ и, следовательно, $|\varepsilon_{2i}(t)| \leq 1/L_{2i} + \mu$, за время $t_1 - t_{11}$, накладываются из достаточных условий:

$$\varepsilon_{2i}\dot{\varepsilon}_{2i} < 0 \Rightarrow M_{2i} > \frac{|\varepsilon_{2i}(t_{11})|}{t_1 - t_{11}} + P_{0i}k_{1i} + \bar{E}_{3i},$$

$$i = \overline{1, 3}. \quad (27)$$

При $t > t_1$ второе уравнение системы (21), (22) и соответствующие уравнения для производных представимы в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{2i} = k_{1i}\varepsilon_{2i} + \bar{e}_{3i} - M_{2i}I_{2i}(\varepsilon_{2i} - \dot{\varepsilon}_{1i}),$$

$$\ddot{\varepsilon}_{2i} = k_{1i}\dot{\varepsilon}_{2i} + \dot{\bar{e}}_{3i} - M_{2i}I_{2i}(\dot{\varepsilon}_{2i} - \ddot{\varepsilon}_{1i}),$$

$$i = \overline{1, 3}. \quad (28)$$

Аналогично оценкам (13) определим неравенства для выбора больших коэффициентов L_{2i} , обеспечивающих заданную точность оценивания (23). Для слагаемых производной квадратичной формы

$V_2 = V_{21} + V_{22} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{2i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_{2i}^2$ справедливы оценки:

$$\dot{V}_{21} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{2i}(k_{1i}\varepsilon_{2i} + \bar{e}_{3i} - M_{2i}I_{2i}(\varepsilon_{2i} - \dot{\varepsilon}_{1i})) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_{2i}|(\bar{E}_{3i} + M_{2i}I_{2i}\mu - (M_{2i}I_{2i} - k_{1i})|\varepsilon_{2i}|) < 0,$$

$$L_{2i} > \frac{\bar{E}_{3i}}{M_{2i}(\beta - \bar{\beta} - \mu)} + \frac{k_{1i}}{M_{2i}} \Rightarrow |\varepsilon_{2i}(t)| \leq \beta,$$

$$t > t_{21} > t_1, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$e_{3i} - v_{2i} = \dot{\varepsilon}_{2i} - k_{1i}\varepsilon_{2i} - \varphi_i(t) \Rightarrow |e_{3i} - v_{2i}| \leq$$

$$\leq |\dot{\varepsilon}_{2i}| + k_{1i}\beta + F_i(\alpha) \leq \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot{\varepsilon}_{2i}| \leq \gamma - k_{1i}\beta - F_i(\alpha) = \chi, \quad (29)$$

$$\dot{V}_{22} = \dot{\varepsilon}_{2i}\ddot{\varepsilon}_{2i} < 0, \quad L_{2i} > \frac{\tilde{E}_{3i}}{M_{2i}(\chi - \bar{\chi} - \mu)} + \frac{k_{1i}}{M_{2i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot{\varepsilon}_{2i}(t)| \leq \chi \Rightarrow |e_{3i}(t) - v_{2i}(t)| \leq \gamma,$$

$$t > t_2 > t_{21}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Неравенства (23) выполняются при выборе больших коэффициентов в виде

$$L_{2i} > \frac{1}{M_{2i}} \max \left\{ \frac{\bar{E}_{3i}}{\beta - \bar{\beta} - \mu}; \frac{\tilde{E}_{3i}}{\chi - \bar{\chi} - \mu} \right\} + \frac{k_{1i}}{M_{2i}},$$

$$i = \overline{1, 3}, \quad (30)$$

где $0 < \bar{\beta} + \mu < \beta$, $0 < \bar{\chi} + \mu < \chi$; $\bar{\beta}$ и $\bar{\chi}$ служат оценками областей сходимости устойчивых собственных движений переменных $\varepsilon_{2i}(t)$ и $\dot{\varepsilon}_{2i}(t)$ системы (28) за заданное время.

Базовый закон управления (7) в замкнутой системе (1) с наблюдателями (9), (20), (22) реализуется в виде

$$u = -B^{-1}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})(-K_1^2 e_1 + (K_1 + K_2)z_2 + v_2 + fg), \quad (31)$$

и, в отличие от закона управления (19), не требует искусственного ограничения оценочных сигналов.

Формализуем алгоритм настройки наблюдателя (20), (22).

Шаг 1. При выбранных коэффициентах регулятора K_1, K_2 , обеспечивающих заданную точность слежения $|e_{1i}(t)| \leq \Delta_{1i}$, $t \geq T > 0$, $i = \overline{1, 3}$, с учетом ограничения $\|\tilde{\eta}(\alpha, \beta, \gamma)\| \leq \delta$, $t > t^*$ устанавливаются требования к точности и времени оценивания (23), (25), (29).

Шаг 2. С учетом выражения (18) определяются оценки $|\varepsilon_{2i}(t_{11})|$, P_{0i} и выбираются амплитуды (24) M_{1i} , (27) M_{2i} , $i = \overline{1, 3}$.

Шаг 3. С учетом условий (27) вычисляются оценки (26) $|\varepsilon_{2i}^{(j)}(t)| \leq P_{ji}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 1, 2$, которые используются для определения больших коэффициентов (25) L_{1i} .

Шаг 4. С учетом внешних возмущений (18) определяются большие коэффициенты (30) L_{2i} .

Следует понимать, что представленные в данном параграфе неравенства для выбора параметров наблюдателей состояния и возмущений полу-

чены из достаточных условий устойчивости. Они определяют схему настройки, доказывают существование параметров, обеспечивающих заданную точность оценивания, но являются избыточными. На практике более адекватные (меньшие) оценки можно получить по результатам имитационного моделирования разработанных алгоритмов. С другой стороны, в данных построениях мы опираемся на максимальные оценки допустимых внешних воздействий (18), поэтому разработанные алгоритмы не требуют перенастройки при существенном изменении задающих воздействий и внешних возмущений в допустимых (учтенных) диапазонах.

2.3. Сравнительный анализ двух методов синтеза наблюдателей состояний и возмущений

В качестве основы для сравнения принимаются наблюдатели состояния и возмущений пониженного порядка нового типа, представленные в п. 2.2: с большими коэффициентами (16) и с кусочно-линейными корректирующими воздействиями (20), (22). Сначала сравним разработанные наблюдатели с их известными аналогами, а потом — друг с другом.

Предварительно отметим, что по сравнению со стандартным наблюдателем пониженного порядка (*Luenberger observer* [19, 20]), для синтеза которого не учитывается динамика измеряемых переменных, в данных наблюдателях, наоборот, не учитывается динамика неизмеряемых переменных.

По сравнению со стандартным наблюдателем с большими коэффициентами (*high-gain observer* [8, 21, 22]) преимущества наблюдателя (16) заключается в меньшем порядке (динамическая модель внешних возмущений не вводится) и блочной структуре, позволяющей единообразно рассматривать системы как с одним, так и с многими выходами, а также в отсутствии корректирующих воздействий и интуитивно понятной, более простой настройке.

По сравнению со стандартным наблюдателем на скользящих режимах (*sliding mode observer* [7, 9—11, 18]) преимущества наблюдателя (20), (22) состоит в два раза меньшем динамическом поряд-

ке, гладких оценочных сигналах и меньшем времени счета.

Преимущества наблюдателя с большими коэффициентами (16) по сравнению с наблюдателем (20), (22): более простая настройка; число настраиваемых параметров в два раза меньше; полная декомпозиция процедуры синтеза, не требующая оценки области изменения ошибок наблюдения. К основному недостатку следует отнести большие всплески в начале переходных процессов, что требует дополнительных мер для ограничения оценочных сигналов. Учитывая, что настройка наблюдателей выполняется в режиме off-line, в системах с линейным (неограниченным) стабилизирующим управлением целесообразно применять наблюдатели со всюду ограниченными корректирующими воздействиями.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink с применением метода интегрирования Эйлера с переменным шагом. Для системы (3) с начальными условиями $y_1(0) = \text{col}(0; 100; 1)$ при действии внешних возмущений $\eta_1(t) = 0,2\sin t$, $\eta_2(t) = 0,24\sin t$, $\eta_3(t) = 0,9\cos t$ ставилась задача вывода центра масс БПЛА на пространственную траекторию

$$\begin{aligned} y_{1d}(t) &= 9\sin(t/9), & y_{2d}(t) &= t + 100, \\ y_{3d}(t) &= 9\cos(t/9). \end{aligned} \quad (32)$$

При синтезе базового закона управления (7) были приняты параметры регулятора $K_1 = \text{diag}(5, 1; 5, 3; 5, 1)$, $K_2 = \text{diag}(5, 4; 5, 2; 5, 1)$.

При моделировании системы с измерениями $y_1(t)$, $y_{1d}(t)$ и наблюдателями с большими коэффициентами (9) и (12), (16) были приняты такие параметры наблюдателей: $L_0 = \text{diag}(280; 280; 280)$, $L_1 = \text{diag}(1500; 1400; 1300)$, $L_2 = \text{diag}(1200; 1100; 1000)$.

В табл. 1 представлены области и время сходимости соответствующих ошибок оценивания.

Таблица 1

Параметры сходимости ошибок оценивания наблюдателей с большими коэффициентами

i	$ y_{2i}(t) - v_{0i}(t) \leq \alpha_p, t \geq t_{0i}$		$ e_{2i} - (z_{2i} + L_{2i}e_{1i}) \leq \sigma_p, t > t_{1i}$		$ e_{3i}(t) - v_i(t) \leq \gamma, t \geq t_{2i}$	
	α_i	t_{0i} [с]	σ_i	t_{1i} [с]	γ_i	t_{2i} [с]
1	0,05	0,664	0,05	0,595	0,05	16,185
2	0,05	0,678	0,05	0,675	0,05	16,430
3	0,05	0,590	0,05	0,567	0,05	16,800

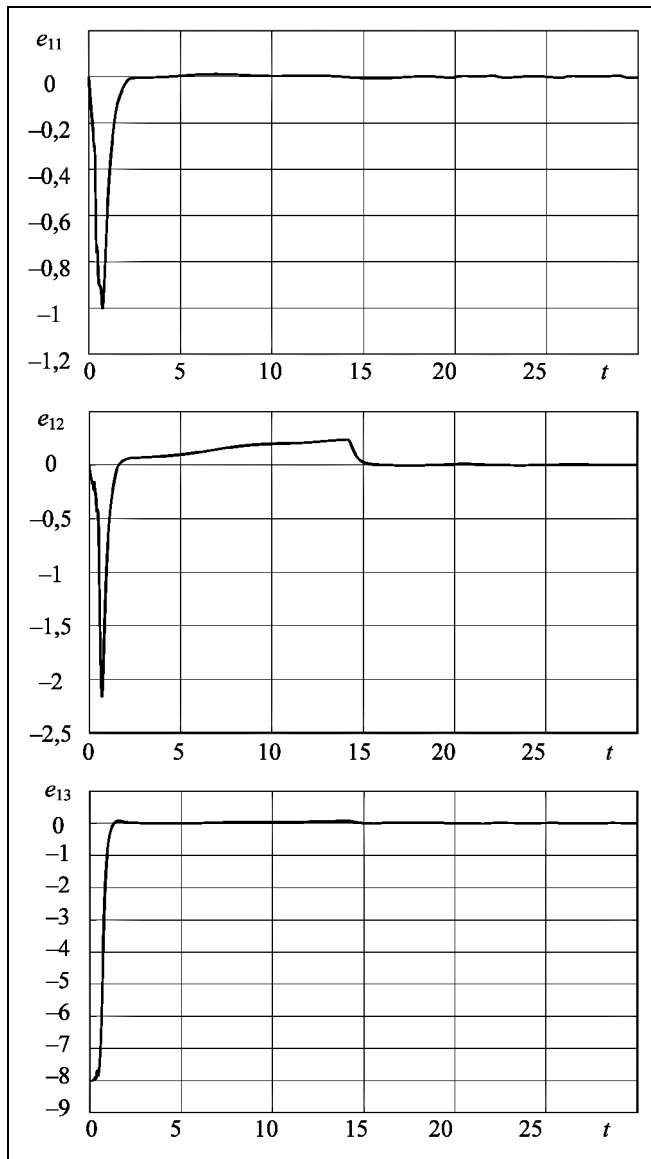


Рис. 1. Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - y_{1id}(t)$ [м], $i = \overline{1, 3}$, t [с] в замкнутой системе с наблюдателями с большими коэффициентами

На рис. 1 для соответствующей замкнутой системы (3), (9), (12), (16) с управлением (19) показаны графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - y_{1id}(t)$ [м], $i = \overline{1, 3}$, t [с]. Заметим, что в этом случае закон управления (19) без ограничений, а именно, в виде $u = -B^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi})(-K_1^2 e_1 + (K_1 + K_2)(z_2 + L_2 e_1) + v + fg)$ физически нереализуем, так как вначале переходного процесса наблюдается краткий, но сильный всплеск, а перегрузки достигают $10^8 g$.

При моделировании системы с измерениями сигналов $y_1(t)$, $y_{1d}(t)$ и наблюдателями с кусочно-линейными корректирующими воздействиями

ми (9) и (14), (20) и (22) были приняты параметры $L_0 = \text{diag}(280; 280; 280)$, $M_0 = \text{diag}(8; 8; 8)$; $L_1 = \text{diag}(10; 10; 10)$, $M_1 = \text{diag}(17; 80; 27)$, $L_2 = \text{diag}(25; 25; 25)$, $M_2 = \text{diag}(11; 48; 11)$. В табл. 2 представлены области и время сходимости соответствующих ошибок оценивания.

На рис. 2 для соответствующей замкнутой системы (3), (9), (14), (20), (22) с управлением (31) показаны графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - y_{1id}(t)$ [м], $i = \overline{1, 3}$, t [с].

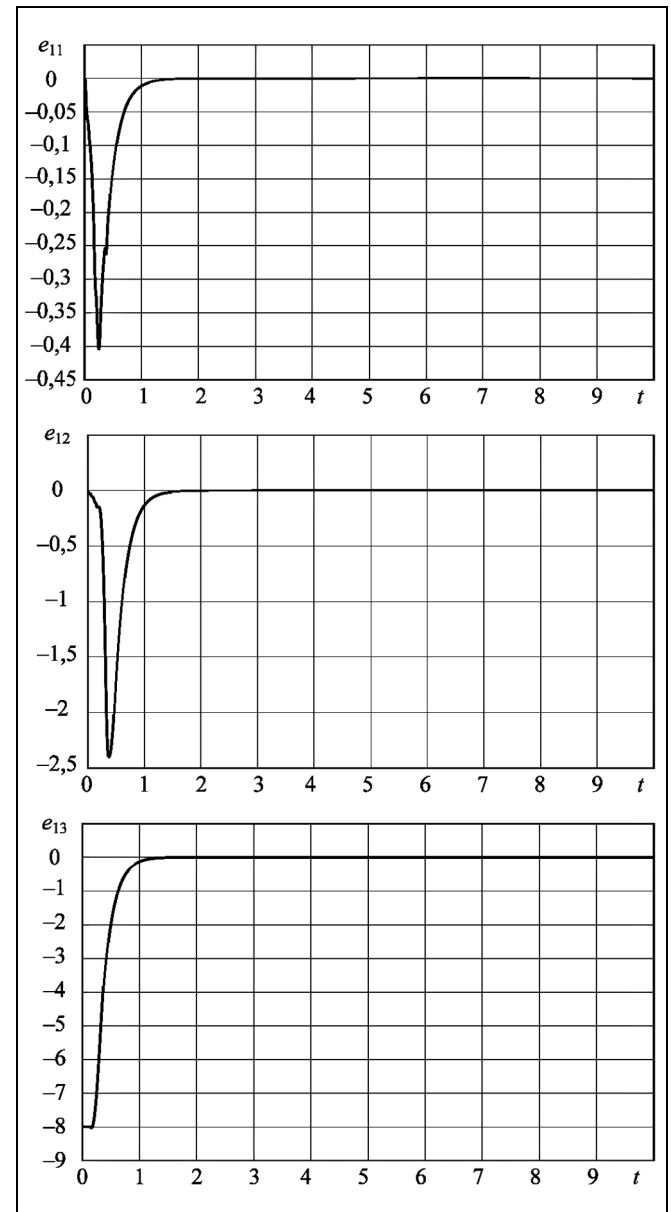


Рис. 2. Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - y_{1id}(t)$ [м], $i = \overline{1, 3}$, t [с] в замкнутой системе с наблюдателями с кусочно-линейными корректирующими воздействиями

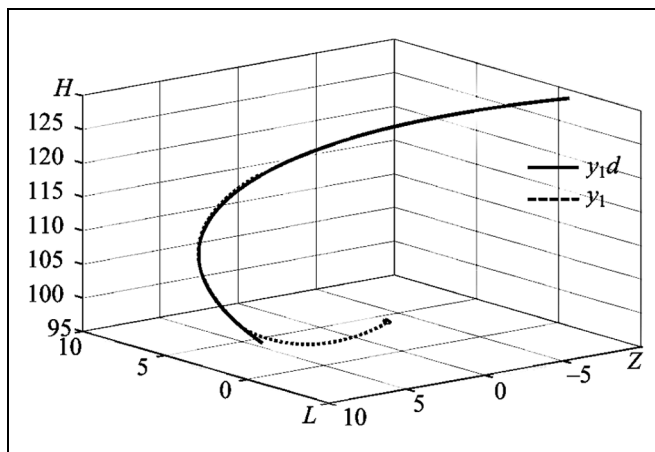


Рис. 3. Графики движения БПЛА с наблюдателями с большими коэффициентами

На рис. 3 и 4 показаны графики отслеживания центром масс $y_1(t)$ (пунктирная линия) заданной пространственной траектории $y_{1d}(t)$ (32) для замкнутых систем с наблюдателями обоих типов, единицы измерения по всем осям представлены в метрах.

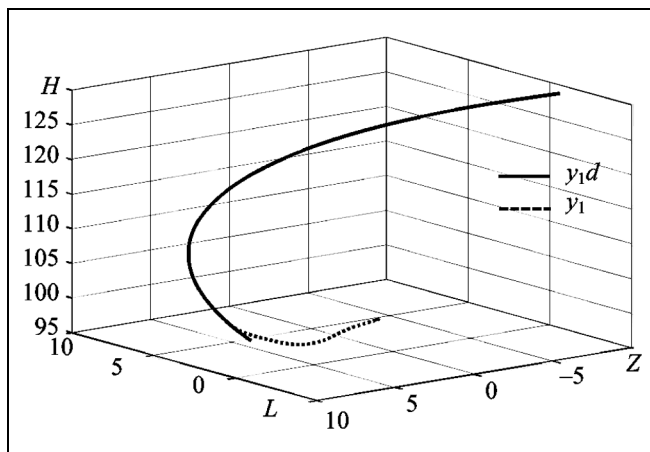


Рис. 4. Графики движения БПЛА с наблюдателями с ограниченной коррекцией

В табл. 3 представлены оценки сходимости ошибок слежения для замкнутых систем с наблюдателями обоих типов.

Исходя из представленных данных, можно сделать вывод о том, что наблюдатели с ограниченными, кусочно-линейными корректирующими

Таблица 2

Параметры сходимости ошибок оценивания наблюдателей с ограниченной коррекцией

i	$ y_{2i}(t) - v_{0i}(t) \leq \alpha_i, t \geq t_{0i}$		$ e_{2i} - z_{2i}(t) \leq \beta_i, t \geq t_{1i}$		$ e_{3i}(t) - v_i(t) \leq \gamma_i, t \geq t_{2i}$	
	α_i	t_{0i} [с]	β_i	t_{1i} [с]	γ_i	t_{2i} [с]
1	0,01	0,40	0,01	0,51	0,05	14,04
2	0,01	0,45	0,05	0,50	0,05	14,18
3	0,01	0,37	0,01	0,49	0,05	14,15

Таблица 3

Параметры сходимости ошибок слежения

Закон управления в замкнутой системе (3)	Максимальное абсолютное отклонение [м] ошибок слежения от нуля, $t \geq 0$	Время переходного процесса T [с]: $ e_{1i}(t) \leq 0,01, t > T$	Ошибка стабилизации [м] в установившемся режиме, $t > T$ [с]
Управление (19) и наблюдатели с большими коэффициентами (9) и (12), (16)	$ e_{11}(0,3) = 0,35$ $ e_{12}(0,28) = 1,72$ $ e_{13}(0,2) = 8,09$	4,5 14,3 54,6	$ e_{11}(t) \leq 10^{-3}, t > 60$ $ e_{12}(t) \leq 0,6 \cdot 10^{-3}, t > 60$ $ e_{13}(t) \leq 2,1 \cdot 10^{-3}, t > 60$
Управление (31) и наблюдатели с ограниченной коррекцией (9) и (14), (20) и (22)	$ e_{11}(0,27) = 0,40$ $ e_{12}(0,37) = 2,40$ $ e_{13}(0,17) = 8,04$	1,0 1,5 1,5	$ e_{11}(t) \leq 0,6 \cdot 10^{-4}, t > 20$ $ e_{12}(t) \leq 0,8 \cdot 10^{-4}, t > 20$ $ e_{13}(t) \leq 0,7 \cdot 10^{-4}, t > 20$

ми воздействиями более эффективны в разработанной следящей системе с базовым законом управления (7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат данной работы — процедуры синтеза наблюдателей состояния и возмущений пониженного порядка нового типа, не требующие расширения пространства состояний построения динамической модели внешних возмущений. Построение данных наблюдателей на основе преобразованных систем существенно упрощает структуру регулятора, так как оцениванию подлежат смешанные переменные, по которым формируется обратная связь. Реализация разработанных алгоритмов, не требующих перенастройки при изменении внешних воздействий, повысит функциональность системы управления БПЛА и ее надежность при отказе измерительных устройств.

Рассмотрены наблюдатели двух типов: с большими коэффициентами и с ограниченными, кусочно-линейными корректирующими воздействиями. По результатам сравнительного анализа можно сделать вывод о том, что, не смотря на более простую настройку, в системах с линейными обратными связями целесообразно применять наблюдатели второго типа, а наблюдатели с большими коэффициентами будут востребованы в системах с заведомо ограниченным управлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Современные направления синтеза систем автоматического управления ЛА // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 2. — С. 126—136. [Andrievski, B.R., Fradkov, A.L., Trends in the Automatic Control in Aerospace // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2004. — Vol. 43, no. 2. — P. 278—287.]
2. Колесников А.А., Кобзев В.А. Динамика полета и управление: синергетический подход. — Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009. — 198 с. [Kolesnikov, A.A., Kobzev, V.A. Dinamika poleta i upravlenie: sinergeticheskii podkhod. — Taganrog: TTI YUFU, 2009. — 198 s. (In Russian)]
3. Gerasimov, D.N., Paramonov, A.V., Nikiforov, V.O. Algorithm of Multiharmonic Disturbance Compensation in Linear Systems with Arbitrary Delay: Internal Model Approach // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. — 2016. — Vol. 16, no. 6. — P. 1023—1030.
4. Do, K.D., Liang, Z.P. and Pan, J. On Global Tracking Control of a VTOL Aircraft without Velocity Measurements // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2003. — Vol. 48, no. 12. — P. 2212—2217.
5. Wang, X., Liu, J. and Cai, K.-Y. Tracking Control for VTOL Aircraft with Disable IMUs. Int. Journal of Systems Science. — 2010. — Vol. 41, no. 10. — P. 1231—1239.
6. Голубев А.Е., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 7. — С. 3—42. [Golubev, A.E., Krishchenko, A.P., Tkachev, S.B. Stabilization of Nonlinear Dynamic Systems Using the System State Estimates Made by the Asymptotic Observer // Automation and Remote Control. — 2005. — Vol. 66, iss. 7. — P. 1021—1058.]
7. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006. — 272 с. [Krasnova, S.A., Utkin, V.A. Kaskadnyi sintez nablyudatelei sostoyaniya dinamicheskikh sistem. — M.: Nauka, 2006. — 272 s. (In Russian)]
8. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — М.: Физматлит, 2007. — 224 с. [Korovin, S.K., Fomichev, V.V. Nablyudateli sostoyaniya dlya lineinykh sistem s neopredelennost'yu. — M.: Fizmatlit, 2007. — 224 s. (In Russian)]
9. Дик В.В., Краснова С.А., Ткачев С.Б. Аналитическое резервирование систем летательного аппарата // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2013. — № 6. — С. 211—226. [Dik, V.V., Krasnova, S.A., Tkachev, S.B. Analiticheskoe rezervirovanie sistem letatel'nogo apparata // Nauka i obrazovanie: ehlektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie [Science and Education]. — M.: BMSTU. — 2013. — № 6. — S. 211—226. (In Russian)]
10. Краснова С.А., Мысик Н.С. Синтез инвариантной системы управления продольным движением летательного аппарата // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 10. — С. 104—116. [Krasnova, S.A. and Mysik, N.S. Design of Invariant Control System for Longitudinal Motion of Flight Vehicle // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, no. 10. — P. 2100—2111.]
11. Краснова С.А., Уткин А.В. Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений // Проблемы управления. — 2014. — № 6. — С. 22—30. [Krasnova, S.A., Utkin, A.V. Analysis and Synthesis of Minimum Phase Nonlinear SISO Systems under External Unmatched Perturbations // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 9. — P. 1665—1675.]
12. Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. — 2015. — № 5. — С. 27—36. [Krasnova, S.A., Utkin, A.V. Sigma Function in Observer Design for States and Perturbations // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 9. — P. 1676—1688.]
13. Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. — 2017. — Вып. 69. — С. 29—49. [Krasnov, D.V., Utkin, A.V. Synthesis of a Multifunctional Tracking System in Conditions of Uncertainty // Automation and Remote Control. — 2019. — Vol. 79, no. 12. — P. 345—357.]
14. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 12. — С. 26—53. [Krasnova, S.A., Utkin, V.A., Utkin, A.V. Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 12. — P. 2120—2140.]
15. Уткин В.А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 11. — С. 73—94. [Utkin, V.A. Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // Automation and Remote Control. — 2001. — Vol. 62, no. 11 — P. 1825—1843.]
16. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 51—64. [Kanatnikov, A.N., and Krishchenko, A.P. Terminal control of spatial motion of flying vehicles // Journal

- of Computer and System Sciences. — 2008. — Vol. 47, no. 5. — P. 718–731.]
17. Канатников А.Н., Лю В., Ткачев С.Б. Путьевые координаты в задаче следования вдоль пространственного пути // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 10. — С. 5–19. [Kanatnikov, A.N., Liu, W., Tkachev, S.B. Path Coordinates in 3D Path Following Problem // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2018. — Vol. 10, no. 3. — P. 265–275.]
 18. Alizadeh, G., Chasemi, K. Control of quadrotor using sliding mode disturbance observer and nonlinear $H\infty$ // International Journal of Robotics (Theory and Applications). — 2015. — Vol. 4, no. 1. — P. 38–46.
 19. Luenberger, D.B. Observers of multivariable systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11, no. 2. — P. 190–197.
 20. Afri, C., Andrieu, V., Bako, L. and Dufour, P. State and Parameter Estimation: A Nonlinear Luenberger Observer Approach // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2017. — Vol. 62, no. 2. — P. 973–980.
 21. Khalil, H.K., Praly, L. High-gain observers in nonlinear feedback control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 2014. — Vol. 24, no. 6. — P. 993–1015.
 22. Rodriguez-Mata, A.E., Flores, G., Martinez-Vásquez, A.H., et al. Discontinuous High-Gain Observer in a Robust Control UAV Quadrotor: Real-Time Application for Watershed Monitoring // Mathematical Problems in Engineering. — 2018. — Article ID 4940360. — P. 1–10. <https://doi.org/10.1155/2018/4940360>.
 23. Бабин В.А., Дик В.В., Краснова С.А. Допредельные реализации разрывных корректирующих воздействий наблюдателя, функционирующего в скользящем режиме // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ–2014). Москва, 2014. — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 374–390. [Babin, V.A., Dik, V.V., Krasnova, S.A. Dopredel'nye realizatsii razryvnykh korrektruyushchikh vozdeystvii nablyudatelya, funktsioniruyushchego v skol'zyashchem rezhime // XII Vseros. soveshchanie po problemam upravleniya (VSPU–2014). Moscow, 2014. Trudy. — М.: IPU RAN, 2014. — S. 374–390. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.
- Поступила в редакцию 19.02.2019, после доработки 15.07.2019.
Принята к публикации 29.07.2019.
- Кокунько Юлия Георгиевна** — математик,
✉ juliakokunko@gmail.com,
- Краснов Дмитрий Валентинович** — инженер-программист,
✉ dim93kr@mail.ru,
- Уткин Антон Викторович** — канд. техн. наук,
✉ utkin-av@rambler.ru.
- Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

TWO METHODS OF SYNTHESIS OF STATE AND DISTURBANCES OBSERVERS FOR AN UNMANNED AERIAL VEHICLE

Ju.G. Kokunko[#], D.V. Krasnov, A.V. Utkin

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#]✉ juliakokunko@gmail.com

Abstract. As part of the synthesis of a tracking system for an unmanned aerial vehicle (UAV) under the influence of external uncontrolled disturbances and incomplete measurements of the state vector, the procedures have been developed for the synthesis of state observers and low-order disturbances of a new type, which do not require the building of dynamic models of external influences. The observation subsystem includes two state observers. The first observer gives estimates of velocities based on measurements of the UAV's center of mass coordinates. By using measurements of tracking errors, the second observer gives estimates of mixed variables (state functions, external influences and their derivatives), on which feedback is formed directly. It is noted that implementation of the algorithms developed, which do not require reconfiguration when external influences change, will increase the functionality of the UAV control system and its reliability in case of failure of measuring devices. The effectiveness of the proposed approach to the synthesis of the tracking system is confirmed by the results of numerical modeling. The results of modeling are presented (comparative analysis of closed systems with static feedback (assuming that all internal and external variables are measured) and with dynamic feedback using two approaches to solving the problem of evaluation under the influence of external disturbances: observers with large coefficients and with piecewise linear, limited corrective actions). It is shown that, despite the simpler setup, in systems with linear feedback it is advisable to use observers of the second type, and observers with large coefficients will be in demand in systems with obviously limited control.

Keywords: unmanned aerial vehicle, tracking, block approach, state and disturbances observer, high gains, piecewise linear functions.

Funding. The work is performed with partial financial support of Russian Foundation of Basic Research (project No. 18-01-00846A).

ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ АЛГОРИТМОВ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

А.А. Черешко, М.М. Шундерюк

Аннотация. Отмечено, что усовершенствованное управление технологическими процессами (ТП) включает в себя широкий спектр математических методов и программно-алгоритмических средств, применение которых позволяет повысить рентабельность производства благодаря более эффективной компенсации внешних воздействий на ТП, автоматическому подбору и поддержанию оптимального режима. Указано, что управление многосвязными объектами на основе прогнозирующей модели ТП — магистральное направление усовершенствованного управления на протяжении последних 30-ти лет. Исследована робастность алгоритмов с прогнозирующей моделью по отношению к точности принятой модели. Под «робастностью» понимается возможность достижения цели управления в условиях неопределенности. Сформирован критерий применимости управления, позволяющий судить о правильности работы алгоритма управления. В выполненном исследовании модель задана в виде передаточной функции линейного объекта с запаздыванием. Определены граничные условия для параметров передаточной функции, нарушение которых приводит к дестабилизации объекта управления либо недостаточно быстрому достижению цели управления. Приведены результаты численного расчета трехмерных областей параметров модели, внутри которых обеспечивается выполнение критерия применимости управления. Даны границы актуальности полученных результатов.

Ключевые слова: усовершенствованное управление технологическим процессом, управление на основе прогнозирующей модели, робастность алгоритма усовершенствованного управления, прогнозирующая модель, передаточная функция линейного объекта, устойчивость объекта управления, критерий применимости управления, область робастности.

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении последних 25 лет усовершенствованное управление (УУ) технологическими процессами (в мировой практике принят термин APC — Advanced Process Control) является одним из ведущих направлений промышленной автоматизации. Число успешных внедрений систем усовершенствованного управления технологическими процессами (СУУТП) в России приближается к 100 и интерес к таким системам продолжает расти. Основная область применения СУУТП — нефтепереработка, но успешные внедрения имеются и в нефтехимии, производстве удобрений, обогащении полезных ископаемых. Об успешных внедрениях СУУТП можно узнать из работ [1, 2].

Усовершенствованное управление охватывает множество методов и подходов, основанных на достижениях современной математической теории управления. Наибольшее практическое распространение получили алгоритмы УУ на основе прогнозирующей модели технологическими процессами (Model Predictive Control — MPC) [3–6]. Поэтому далее под термином УУ будет подразумеваться именно это направление.

Прогнозирующая модель технологического процесса (ТП) в алгоритмах УУ необходима для предсказания поведения ТП в будущем. На каждом временном такте СУУТП прогнозирует поведение ТП и вырабатывает необходимые корректирующие воздействия на ТП. Прогнозирующая модель реализована в СУУТП в виде модельной матрицы,

описывающей динамические характеристики ТП. Элементами модельной матрицы могут быть, например, передаточные функции, описывающие зависимости между управляющими и контролируемыми переменными СУУТП. Управляющие переменные (MV — от англ. *manipulated variables*) — это параметры ТП, которыми манипулирует СУУТП для поддержания контролируемых переменных (CV — от англ. *controlled variables*) в заданных диапазонах или на заданных значениях (уставках). Для идентификации параметров передаточных функций разработчик СУУТП применяет математические методы, основанные на статистической обработке данных, полученных в ходе испытаний, реакций ТП на ступенчатые воздействия (так называемого пошагового тестирования).

Нередко при идентификации параметров прогнозирующей модели разработчик СУУТП не может определить точное значение того или иного коэффициента передаточной функции — ему доступен только интервал, в пределах которого лежит «истинное» значение. Неопределенность значений коэффициентов может быть вызвана несколькими факторами. К примеру, на ТП воздействуют ненаблюдаемые возмущения, такие, как изменения погодных условий, состава сырья, теплотворной способности топлива и т. п. Динамические характеристики ТП могут изменяться в зависимости от технологического режима. Имеют место и погрешности измерений. Поэтому разработчик для определения значений коэффициентов передаточных функций, пригодных для использования в СУУТП, прибегает к усреднению нескольких полученных результатов. В ходе опытной эксплуатации СУУТП значения коэффициентов передаточных функций при необходимости корректируются.

Важное свойство алгоритма УУ с прогнозирующей моделью состоит в его робастности. Под робастностью алгоритма подразумевается достижение цели управления при неточной прогнозирующей модели ТП. В настоящей работе формулируется критерий применимости управления, выполнение которого гарантирует, с одной стороны, устойчивость управления, а с другой — достаточно высокую скорость достижения цели управления. Определяется область робастности УУ, т. е. максимально допустимое расхождение прогнозирующей модели и модели ТП, при котором выполняется критерий применимости. Даются рекомендации по построению прогнозирующей модели ТП, в частности, по уменьшению неопределенности выбора коэффициентов передаточной функции внутри доверительного интервала, полученного при идентификации модели.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу УУ в следующей постановке. Математическая модель ТП (объекта управления) задается в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

где x — вектор состояний размерности n , а u — вектор управления размерности m . На компоненты векторов состояний и управления могут быть наложены ограничивающие условия, например, в виде

$$x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u_{j\min} \leq u_j \leq u_{j\max}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Будем считать, что цель управления заключается в обеспечении равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - r_x(t)\| = 0.$$

Здесь заданная векторная функция $r_x(t)$ определяет желаемую динамику объекта. Качество управления при этом будет оцениваться посредством целевой функции $J(x(t), u(t))$, заданной на управляемых траекториях движения объекта. Задача оптимального управления — достичь минимума функционала J при соблюдении всех требуемых ограничений.

Для решения задачи УУ применяется прогнозирующая модель ТП. В СУУТП она имеет вид модельной матрицы, элементами которой являются передаточные функции. В нашем случае передаточные функции описывают зависимости между управляющими (MV) и контролируемыми (CV) переменными. Пример модельной матрицы размерности 3×3 представлен на рис. 1.

Алгоритм УУ включает в себя следующие основные действия.

1. Оценивание вектора состояния $x(t)$ реального объекта.

2. Решение оптимизационной задачи $J(x(t), u_{\text{пр}}(t), T_p, T_c) \rightarrow \min$, где T_p — горизонт прогнозирования, T_c — горизонт управления, $u_{\text{пр}}$ — прогнозируемое управление.

3. Применение найденного оптимального управления в качестве программного на отрезке $t \in [t, t + \delta]$, где δ — интервал дискретизации системы.

4. Замена времени t на $t + \delta$ и повторение операций 1—3.

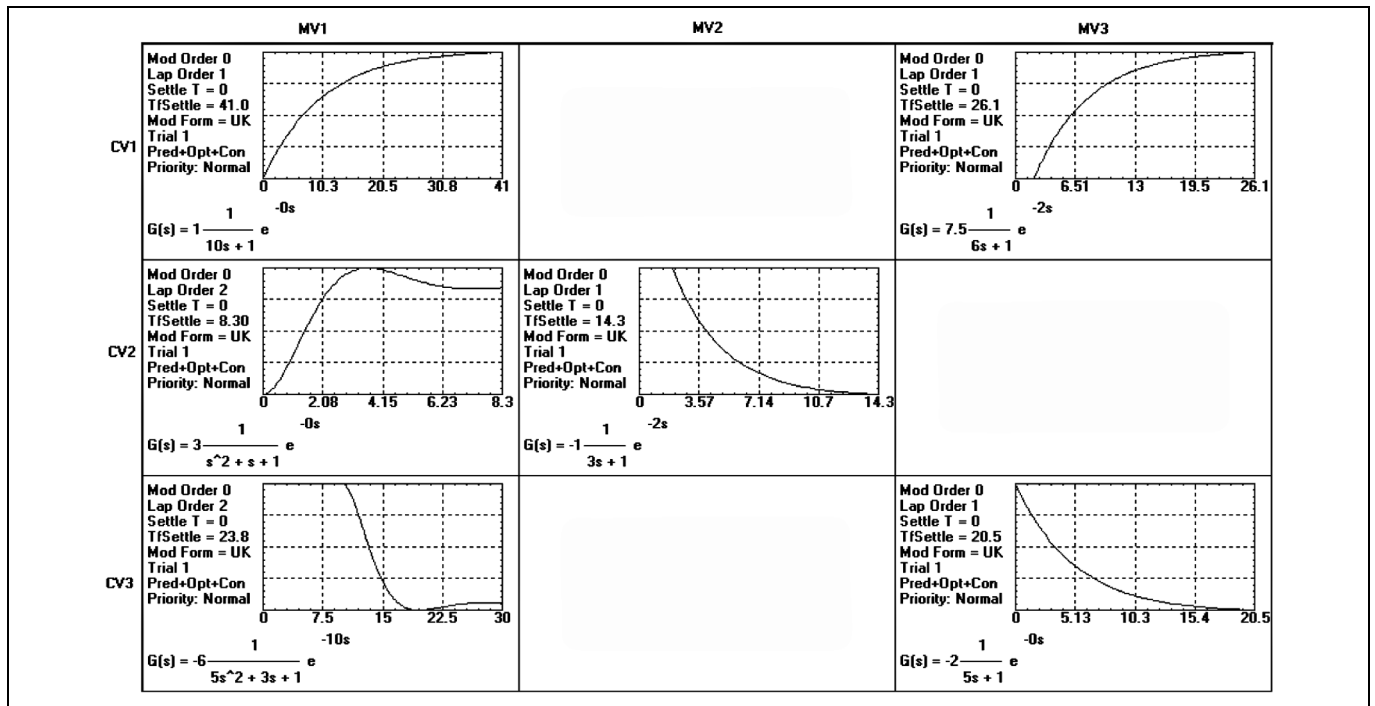


Рис. 1. Модельная матрица технологического процесса

Решение задачи УУ проиллюстрировано на рис. 2.

В задачах УУ наиболее распространенный вид целевой функции J — квадратичный функционал

$$J = \int_0^{\infty} [(x(t) - r(t))^T R(x(t) - r(t)) + \lambda^2 u^T(t) Q u(t)] dt,$$

где $r(t)$ — задающий сигнал, R и Q — диагональные матрицы с весовыми коэффициентами. Первое слагаемое под интегралом «штрафует» целевую функцию при отклонении от задающего сигнала. Второе слагаемое не позволяет совершать большие шаги по управляющим переменным.

В случае, если целевая функция задана в виде квадратичного функционала, а прогнозирующая модель — линейная, задача поиска оптимального управления сводится к задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями.

Для расчета области робастности представим задачу УУ в дискретном виде (в таком виде она решается и в СУУТП):

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k], \quad x[0] = x_0,$$

$$J[k] = \sum_{i=1}^p w_i (x[k+i|k] - r[k+i|k])^2 + \sum_{i=1}^c r_i \Delta u[k+i-1|k]^2 \rightarrow \min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]},$$

$$u_{\min} \leq u[k+i-1|k] \leq u_{\max}, \quad i = 1, \dots, c,$$

$$-\Delta u_{\max} \leq \Delta u[k+i-1|k] \leq \Delta u_{\max}, \quad i = 1, \dots, c,$$

$$x_{\min} \leq x[k+i|k] \leq x_{\max}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Здесь c и p — соответственно горизонты управления и прогнозирования, выраженные в числе шагов по времени; обозначение $x[i|j]$ читается как «значение x в момент времени i , определенное в момент времени j ».

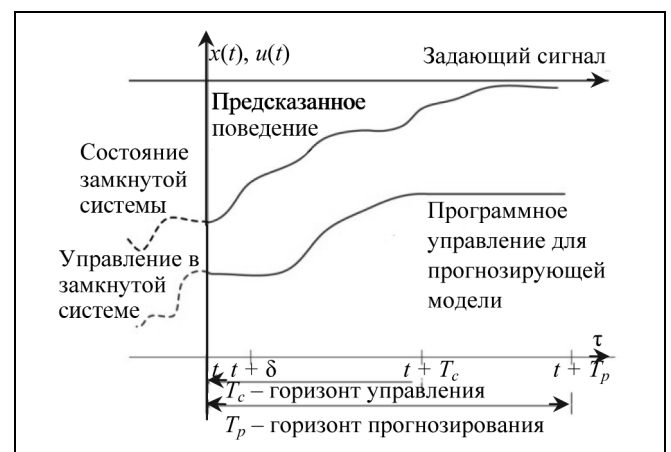


Рис. 2. Решение задачи усовершенствованного управления на горизонтах управления и прогнозирования

При дискретной постановке задачи УУ на каждом временном такте k с учетом модельной матрицы ТП оценивается вектор состояния $x[k]$ на заданном горизонте прогнозирования. Путем решения задачи линейно-квадратичного программирования находится оптимальный вектор управления $u[k]$ на заданном горизонте управления, доставляющий минимум функционалу $J[k]$ и удовлетворяющий всем требуемым ограничениям. Далее найденное оптимальное управление реализуется на одном временном такте, и задача поиска решения повторяется.

2. КРИТЕРИЙ ПРИМЕНИМОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

Для УУ пока не существует методов, позволяющих аналитически оценить область робастной устойчивости по коэффициентам прогнозирующей модели. В литературе, однако, представлены многочисленные рекомендации, как путем модификации имеющегося неустойчивого контроллера получить устойчивый [7, 8]. В настоящей работе такой подход рассматриваться не будет, поскольку цель исследования заключается именно в оценке робастности УУ при рассогласовании параметров модели и ТП.

Перед тем, как рассчитывать область робастности УУ, необходимо ввести критерий применимости, позволяющий судить о правильности работы алгоритма УУ. Рассмотрим одномерный объект управления, динамические характеристики которого — коэффициенты линейной передаточной функции со временем запаздывания (K , T , τ). Под ошибкой управления далее понимается разность $x(t) - r(t)$.

Будем считать, что критерий применимости выполняется, если при смещении задания контро-

лируемой переменной с нулевого значения на величину D :

- решение задачи УУ асимптотически устойчиво и стремится к D ;
- не позднее времени $10T$ ошибка управления всегда не превышает $0,05D$ (пятипроцентная сходимость);
- возможное перерегулирование не выходит за определенные рамки (пятнадцатипроцентная сужающаяся воронка на временной оси от 0 до $10T + \tau$) (рис. 3).

Область значений коэффициентов передаточной функции, внутри которой выполняется критерий применимости, будем называть областью робастности алгоритма УУ.

Пример управления, для которого выполняется критерий применимости, представлен на рис. 3. Жирной горизонтальной линией обозначена уставка (D), затухающей кривой — динамика параметра ТП, наклонная прямая и штриховые линии обозначают допустимые границы изменения параметра ТП, t^* — время попадания значений параметра ТП в пятипроцентную «трубку».

Проверим, насколько сильно можно ошибиться в коэффициентах передаточной функции прогнозирующей модели без ущерба для стабильной работы алгоритма УУ. Для этого проведем симуляцию процесса УУ. В качестве одномерного объекта управления примем апериодическое звено первого порядка с добавлением времени чистого запаздывания. Коэффициенты передаточной функции, вообще говоря, могут быть произвольными. Добавление времени чистого запаздывания вносит нелинейность в процесс, в связи с чем построенная область робастности будет зависеть от соотношения T/τ . Приведем пример симуляции алгоритма УУ, при котором для коэффициентов передаточной функции объекта выполняется соотношение $T/\tau = 1$:

$$F(s) = \frac{1}{10s + 1} e^{-10s}.$$

В качестве передаточной функции прогнозирующей модели СУУТП выступит функция

$$\hat{F}(s) = \frac{K'}{T's + 1} e^{-\tau's}.$$

Интервал дискретизации алгоритма УУ зададим равным 1 мин. Для целевой функции выберем выражение

$$J = \min_{u[k|k], \dots, u[k+p-1|k]} \sum_{i=1}^p (x[k+i|k] - r[k+i|k])^2 + \sum_{i=1}^c \Delta u[k+i-1|k]^2.$$

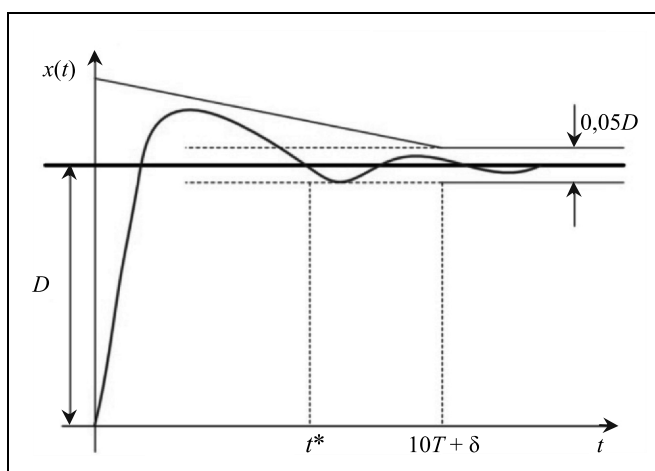


Рис. 3. Управление технологическим процессом, для которого выполняется критерий применимости

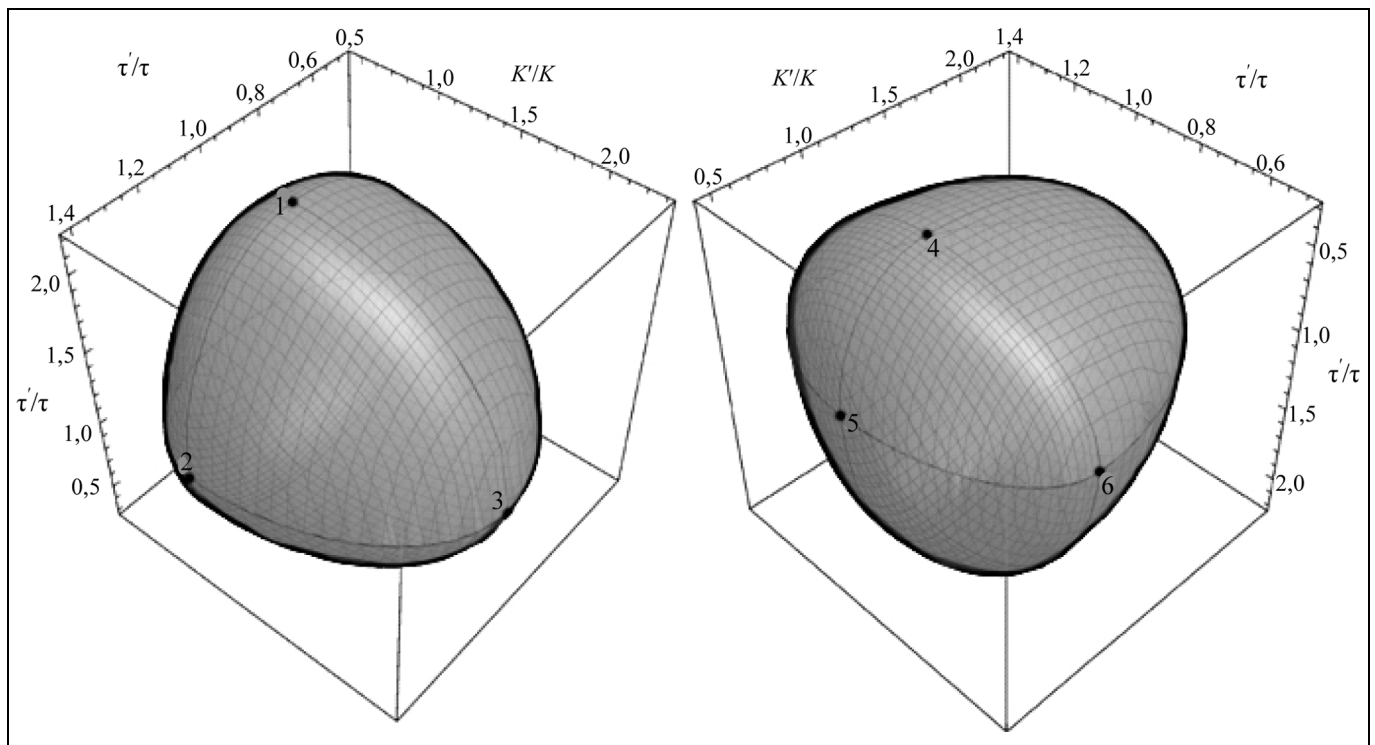


Рис. 4. Область робастности алгоритма усовершенствование управления

Для проведения расчетов была написана программа, имитирующая процесс УУ с учетом всех вышеперечисленных условий. Для идентификации области робастности УУ в программе задавались коэффициенты прогнозирующей модели K' , T' , τ' и наблюдался результат управления. Путем автоматического перебора подобрано 2000 значений, находящихся на границе области робастности УУ, а также проведена аппроксимация полученной зависимости. В результате расчетов получена область робастности УУ в трехмерном пространстве с осями $\frac{K'}{K}$, $\frac{T'}{T}$, $\frac{\tau'}{\tau}$, изображения которой приведены на рис. 4 (расчет проведен в среде Wolfram Mathematical). Цифрами 1—6 отмечены граничные точки, координаты которых приведены в таблице.

По совокупности всех тестов получены интервалы для коэффициентов передаточных функций прогнозирующей модели и объекта, внутри которых выполняется критерий применимости: $0,55 < K'/K < 2,3$; $0,3 < T'/T < 2,2$; $0,5 < \tau'/\tau < 1,41$.

Каждое из перечисленных условий справедливо, только если значения остальных параметров полагаются точными.

Область робастности алгоритма УУ (см. рис. 4) заметно несимметрична по отклонению параметра модели от точного значения. Рассмотрим поведе-

ние УУ на границах построенной области робастности:

- уменьшение коэффициента усиления K в прогнозирующей модели ведет к дестабилизации контура управления, при этом увеличение коэффициента усиления ведет только к увеличению времени регулирования, однако не ведет к дестабилизации контура;
- уменьшение времени релаксации T в прогнозирующей модели ведет к дестабилизации контура управления, при этом увеличение времени релаксации в пределах истинного значения приводит к увеличению времени регулирования, однако не ведет к дестабилизации контура;
- уменьшение или увеличение коэффициента чистого запаздывания τ ведет к дестабилизации контура управления.

Координаты граничных точек области робастности алгоритма УУ

№	K	T	τ
1	1	22	10
2	1	10	14,1
3	2,3	10	10
4	1	3	10
5	0,55	10	10
6	1	10	5

Важно, что для каждого коэффициента существует «безопасное» направление, в котором возможная ошибка приводит к меньшим последствиям для контура управления. Как правило, результатом идентификации модели объекта являются доверительные интервалы для коэффициентов передаточной функции, внутри которых находятся точные значения. Исходя из полученной области робастности, при идентификации прогнозирующей модели для СУУТП рекомендуется (в рамках доверительного интервала) при выборе:

- коэффициента усиления стремиться его максимизировать;
- времени релаксации стремиться это время увеличить;
- времени запаздывания стремиться его уменьшить.

3. ГРАНИЦЫ АКТУАЛЬНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как отмечалось, область робастности построена при условии выполнения равенства $T/\tau = 1$. Промышленные объекты, как правило, проектируются таким образом, чтобы соотношение T/τ было не меньше 1, т. е. $T > \tau$. Это подтверждается соответствующим опытом внедрения СУУТП на различных производствах.

Численная проверка показывает, что при стремлении соотношения T/τ к бесконечности область незначительно расширяется и при $\tau = 0$ получается двумерная область, изображенная на рис. 5.

По мере уменьшения T/τ область робастности сужается и в пределе вырождается в точку: $K'/K = 1$, $T'/T = 1$, $\tau'/\tau = 1$.

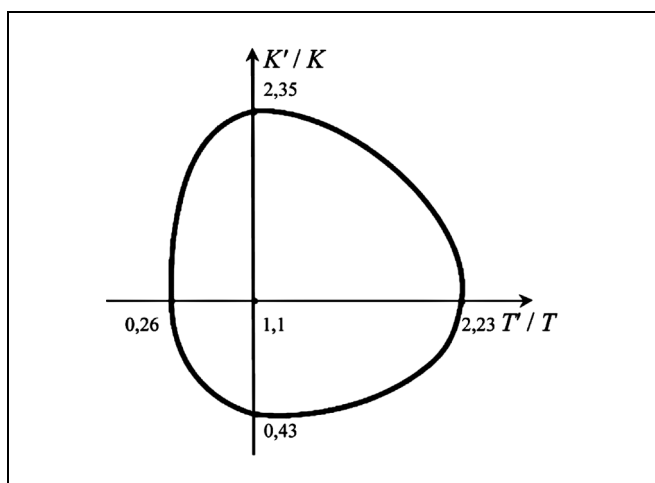


Рис. 5. Двумерная область робастности алгоритма усовершенствованного управления ($\tau = 0$)

Полученные результаты актуальны только для объектов с линейными характеристиками, не обладающими неминимально-фазовыми характеристиками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С 1990-х гг. усовершенствование управления стабильно занимает важную нишу в промышленной автоматизации. Его алгоритмы основаны на применении прогнозирующей модели для предсказания поведения технологического процесса в будущем. Для построения прогнозирующей модели разработчик системы усовершенствования управления технологического процесса выполняет статистический анализ его данных, полученных во время пошагового тестирования. Рассогласование между параметрами прогнозирующей модели и параметрами технологического процесса, как правило, увеличивается со временем. Показано, что алгоритмы усовершенствования управления робастны по отношению к коэффициентам прогнозирующей модели, что позволяет адекватно управлять технологическим процессом даже при заметном рассогласовании. На основе построенной области робастности даны рекомендации по идентификации коэффициентов передаточных функций. Интересным развитием данной темы может стать обобщение полученных выводов на многомерные объекты с неминимально-фазовыми характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логунов П.Л., Шаманин М.В., Кнеллер Д.В. и др. Усовершенствованное управление ТП: от контура регулирования до общезаводской оптимизации // Автоматизация в промышленности. — 2015. — № 4. — С. 3—10. [Logunov, P.L., Shamanin, M.V., Kneller, D.V., et al. Usovershenstvovannoe upravlenie TP: ot kontura regulirovaniya do obshchezavodskoi optimizatsii // Avtomatizatsiya v promyshlennosti. — 2015. — No. 4. — S. 3—10. (In Russian)]
2. Файрузов Д.Х., Бельков Ю.Н., Кнеллер Д.В., Торгашов А.Ю. Система усовершенствованного управления установкой первичной переработки нефти: создание, внедрение, сопровождение // Автоматизация в промышленности. — 2013. — № 8. — С. 3—14. [Fairuzov, D.Kh., Bel'kov, Yu.N., Kneller, D.V., Torgashov, A.Yu. Sistema usovershenstvovannogo upravleniya ustanovkoi pervichnoi pererabotki nefiti: sozdanie, vnedrenie, soprovozhdenie // Avtomatizatsiya v promyshlennosti. — 2013. — No. 8. — S. 3—14. (In Russian)]
3. Tatjevsky, P. Advanced Control of Industrial Processes: Structures and Algorithms. — London: Springer, 2010. — 332 p.
4. Дозорцев В.М., Кнеллер Д.В. APC — усовершенствованное управление технологическими процессами // Датчики и системы. — 2005. — № 10. — С. 56—62. [Dozortsev, V.M., Kneller, D.V. APC — usovershenstvovannoe upravlenie tekhnologicheskimi protsessami // Datchiki i sistemy. — 2005. — No. 10. — S. 56—62. (In Russian)]

5. Zhe Wu, Junfeng Zhang, Zhihao Zhang and etc. — Economic model predictive control of stochastic nonlinear systems. — American Institute of Chemical Engineers AIChE J. — 2018. — No. 64. — P. 3312–3322.
6. Shuyou Yu, Ting Qu, Rolf Findeisen, Hong Chen. Model predictive control for uncertain nonlinear systems subject to chance constraints. — 2016 IEEE 55th Conference Decision and Control (CDC). — P. 2751–2756.
7. Kothare, M.V., Balakrishnan, V., Morari, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. — Automatica. — 1996. — No. 32 (10). — P. 1361–1379.
8. Morari, M., Zafiriou, E. Robust Process Control. — Englewood Hills, N.J.: Prentice Hall, 1989. — 488 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 21.05.2019, после доработки 03.07.2019.

Принята к публикации 08.07.2019.

Черешко Алексей Анатольевич —

✉ Alexey.Chereshko@Honeywell.com,

Шундериук Михаил Мирославович — канд. физ.-мат. наук,

АО «Хоневелл», г. Москва, Россия.

APPLICABILITY LIMITS OF MODEL-BASED PREDICTIVE CONTROL ALGORITHMS UNDER UNCERTAIN CONTROL OBJECT DYNAMICS

A.A. Chereshko[#], M.M. Shunderyuk

Honeywell Inc., Moscow, Russia

[#]✉ Alexey.Chereshko@Honeywell.com

Abstract. It is noted that advanced process control (APC) comprises a wide variety of mathematical methods and software algorithmic tools, application of which allows to increase the production profitability through more effective compensation of external impact on the process, automatic selection and maintenance of an optimal mode. It is also noted that model predictive control (MPC) of the multi-loop objects has been the mainstream of APC over the past 30 years. The robustness is examined of MPC algorithms with regard to model accuracy. The term «robustness» is understood as the ability of attaining the control aim under conditions of uncertainty. Control applicability criterion is formulated allowing to conclude about the correctness of the control algorithm. The model in the study is specified in a form of a transfer function of a linear object with time delay. Boundary conditions are determined for transfer function parameters, the violation of which leads to the control object destabilization or to the sluggish control. The results are given of the numerical calculation of 3D-domains of the model parameters, within which the control applicability criterion is met. The validity range of the results obtained is given.

Keywords: advanced process control (APC), model predictive control (MPC), robustness of advanced control algorithm, predictive model, transfer function of linear object, stability of control object, control applicability criterion, domain of robustness.



Новые издания ИПУ РАН

Кульба В.В., Сиротюк В.О. Формализованная методология повышения эффективности и качества патентных информационных фондов и опыт ее использования при формировании и развитии евразийского патентно-информационного пространства. — М.: ИПУ РАН, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-91450-238-3.

Сомов С.К. Сохранность информации в распределенных системах обработки данных. — М.: ИПУ РАН. — 2019. — 254 с. — ISBN 978-5-91450-235-2.

Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. — М.: ИПУ РАН, 2019. — 408 с. — ISBN 978-5-91450-236-6.

Проблемы управления безопасностью сложных систем: материалы XXVII Междунар. конф., 18 дек. 2019 г., Москва / под общ. ред. А.О. Калашникова, В.В. Кульбы. — М.: ИПУ РАН. — 2019. — 459 с. — ISBN 978-5-91450-241-3.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ СОГЛАСОВАННЫХ МЕХАНИЗМОВ В СЕТЕВЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУРАХ¹

А.К. Еналеев

Аннотация. Рассмотрены задачи построения оптимальных механизмов управления системой связанных между собой агентов в условиях неполной информированности управляющего органа (центра) о параметрах агентов. Связи агентов этой системы представлены в виде ориентированного графа, не содержащего контуров. Агенты имеют собственные цели и передают центру информацию о своих параметрах, которую они могут намеренно искажать, если им это выгодно. Центр управляет поведением агентов. Поведение агентов заключается в сообщении центру информации о своих параметрах и выборе своих состояний. От выбранного каким-либо агентом состояния зависят возможности выбора состояний последующих агентов. Структура предшествования агентов определяется заданным ориентированным графом. Управление центра заключается в выборе механизма, включающего в свой состав процедуры планирования в виде функций, зависящих от полученной от агентов информации, и системы стимулирования. Система стимулирования состоит из функций штрафов за отклонение состояния агента от плана и функций поощрения агентов за выбор состояния. Построены оптимальные механизмы, при которых агенты не заинтересованы манипулировать сообщаемой центру информацией и реализацией планов. Определены условия согласования, обеспечивающие такое поведение агентов без уменьшения оптимального значения целевой функции центра. Результаты исследования могут применяться для управления реализацией сложных проектов или сборочных производств.

Ключевые слова: иерархия, сетевая структура, разработка механизма, оптимизация, согласование, равновесие, устойчивость, неманипулируемость.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система, состоящая из управляющего органа (далее — центра) и нескольких подчиненных ему агентов. Задача центра — путем выбора управляющих воздействий влиять на агентов, добиваясь желаемого их поведения. Центр имеет ограниченную информацию о параметрах агентов, но может запрашивать информацию о значениях этих параметров у самих агентов. Агенты, помимо сообщений центру о значениях их параметров, выбирают также свои состояния. Множество допустимых состояний агента может зависеть

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта № 17-20-05216.

от состояний некоторых других агентов. Таким образом, состояния некоторых агентов определяют множество допустимых состояний рассматриваемого агента и, по существу, представляют собой входные параметры. Такая взаимосвязь агентов образует сеть, описывающую структуру отношений предшествования при выборе состояний агентами. На практике такие системы могут описывать процессы изготовления деталей и сборки из них сложного изделия. В рассматриваемой далее модели будем предполагать наличие интересов у агентов, зависящих от выбираемых в системе состояний. Ставится задача выбора центром механизма управления сетью агентов для достижения заданной цели. Под механизмом управления понимается совокупность процедур планирования, поощрения и штрафов, посредством выбора которых центр воздействует на интересы агентов.

Модель исследуется с помощью терминологии, понятий и методов теории активных систем [1–4]. В этой теории принято называть подчиненных центру агентов активными элементами системы. Поскольку авторы работ [5–7] и многих других публикаций в рамках этой теории при рассмотрении аналогичных моделей оперируют понятием «агент», будем пользоваться этим термином.

Модели сетевых активных систем исследовались в работах [8, 9] для случая полной информированности центра о моделях агентов. Для случая неполной информированности центра задача построения оптимальных комплексных механизмов управления, включающих в свой состав процедуру планирования, функции штрафов и поощрений, распределения общего фонда поощрения между агентами для системы, в которой агенты связаны друг с другом только общим фондом поощрения, была рассмотрена в статье [10]. Отметим, что задачи синтеза неманипулируемых механизмов управления в многоагентных активных системах изучены достаточно полно только для задач распределения ресурсов и активной экспертизы [4–7, 11]. В работе [11] представлен подробный обзор и анализ исследований в этой области.

В предлагаемой работе приводится обобщение результатов этих исследований активной системы при наличии технологических связей между агентами, образующих сетевую структуру без контуров. Результаты исследования моделей организационных механизмов в системах, состоящих из агентов, связанных друг с другом сетевой структурой, могут быть применены на практике при разработке организационных механизмов, стимулирующих выполнение комплекса связанных между собой работ и проектов.

1. МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Модель

Рассматриваемая модель расширяет и обобщает модели, описанные в статьях [10, 12, 13]. Пусть система состоит из центра и n связанных между собой агентов, где $n > 1$. Для $n = 1$ исследование было проведено в статьях [12, 13]. Обозначим y_i состояние i -го агента, которое он выбирает из множества допустимых состояний $Y_i = Y_i(\bar{y}^i)$, где $\bar{y}^i = y_j, j \in J^i$, — набор состояний агентов с номерами из множества J^i . Здесь J^i — множество номеров агентов, от состояний которых зависит множество допустимых состояний i -го агента. Заметим, что если множество Y_i допустимых состояний i -го агента не зависит от состояний других агентов, то $J^i = \emptyset$. Рассматриваемая модель системы взаи-

модействующих друг с другом агентов представима в виде ориентированного графа, в котором агентам сопоставлены вершины графа, а связям между агентами, определяемым множествами J^i , — дуги этого графа. Будем предполагать, что агенты связаны между собой таким образом, что в соответствующем графе нет контуров. Показано, что в сети без контуров можно так перенумеровать и упорядочить вершины, что $j < i$, если $j \in J^i$ [14]. Поэтому будем считать, что агенты пронумерованы так, что множество допустимых состояний i -го агента может зависеть только от состояний агентов с меньшими номерами. Такая нумерация вершин называется правильной [14]. Заметим, что в системе присутствуют агенты, по крайней мере агент с номером $i = 1$, множество допустимых состояний которых не зависит от состояний других агентов, и номера этих агентов равны $i = 1, \dots, n^0$, где $n^0 < n$, и для $i \leq n^0$ имеет место $J^i = \emptyset$. Будем называть эти агенты начальными. В системе имеются также агенты, по крайней мере агент с номером n , от состояния которых не зависит множество допустимых состояний ни одного агента. Будем называть такие агенты конечными. Пусть номера этих агентов начинаются с номера n^* , $n^0 \leq n^* \leq n$.

Обозначим $f_i(x_i, y_i, r_i)$ целевую функцию i -го агента. Здесь x_i — назначаемый центром i -му агенту план из множества его допустимых состояний $Y_i = Y_i(\bar{x}^i)$, где $\bar{x}^i = (x_j, j \in J^i)$ — набор планов, соответствующий набору состояний $\bar{y}^i = (y_j, j \in J^i)$, r_i — параметр, характеризующий i -го агента, A_i — множество допустимых значений параметра r_i , $i = 1, \dots, n$. Примем, что целевые функции агентов представимы в виде $f_i(x_i, y_i, r_i) = s_i(x_i, y_i) - \zeta_i(y_i, r_i)$, где $\zeta_i(y_i, r_i)$ — функции затрат агентов при выборе ими состояний y_i ; $s_i(x_i, y_i) = \sigma_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i)$ — функции стимулирования за выбор агентом состояния y_i при плане x_i . Пусть $\sigma_i(y_i)$ — функции поощрения за выбор состояния y_i , а $\chi_i(x_i, y_i)$ — функции штрафов за отклонение состояния y_i от плана x_i ; $0 \leq \sigma_i(y_i) \leq g_i$, где g_i — заданный центром фонд поощрения i -го агента. Сначала будем считать, что g_i являются параметрами, а в конце статьи рассмотрим расширение задачи, когда они являются управлениями центра. Примем $\chi_i(x_i, y_i) \geq 0$, $\chi_i(y_i, y_i) = 0$. Предположим, что функции $\sigma_i(y_i)$ полунепрерывны сверху, а $\chi_i(x_i, y_i)$ — полунепрерывны снизу.

Можно воспользоваться следующей интерпретацией: показатели состояния y_i характеризуют в некотором содержательном смысле уровень качества выполненных агентом работ либо некоторый

другой скалярный показатель эффективности агента. Поэтому примем, что множества допустимых состояний описываются отрезками $Y_i = Y_i(\bar{y}^i) = [y_i^L, y_i^U(\bar{y}^i)]$, где y_i^L и $y_i^U = y_i^U(\bar{y}^i)$ представляют собой соответственно нижние и верхние границы допустимых значений состояний агентов. Аналогично, предполагая, что параметр r_i представляет собой некоторую внутреннюю обобщенную характеристику агента, например, показатель производительности, примем $r_i \in [r_i^L, r_i^U]$. Здесь индексы «L» и «U» означают заданные нижние и верхние границы отрезка $A_i = [r_i^L, r_i^U]$. Предположим, что функции $y_i^U = y_i^U(\bar{y}^i)$ не убывают по своим аргументам.

Пусть функции затрат $\zeta_i(y_i, r_i)$ дважды дифференцируемы по y_i , дифференцируемы по r_i и существуют производные $\zeta_{yy}''(y, r)$ и $\zeta_{yy}'(y, r)$. Предположим, что $\zeta_y'(y, r) > 0$, $\zeta_{yy}''(y, r) > 0$, $\zeta_r'(y, r) < 0$, $\zeta_{yr}''(y, r) < 0$ при всех допустимых значениях аргументов. В этих неравенствах для простоты записи индекс i опущен.

Неравенства $\zeta_y'(y, r) > 0$ и $\zeta_{yy}''(y, r) > 0$ свидетельствуют о возрастании функции затрат и ее выпуклости. Неравенство $\zeta_r'(y, r) < 0$ указывает на монотонность снижения затрат по параметру r_i . Неравенство $\zeta_{yr}''(y, r) < 0$ отражает известные в микроэкономике условия Спенса — Мирлиса и характеризует упорядоченность агентов по возможным значениям параметра r_i , когда с увеличением r_i снижается темп роста затрат, связанных с увеличением y_i .

Обозначим целевую функцию центра $\hat{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = \sum_{i=1, \dots, n} \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) / \Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i)$, где $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ — показатель эффективности состояния y_i i -го агента при заданных значениях входных показателей $\bar{y}^i$ и плане x_i , $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i)$ — функции нормировки, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$ и $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) = \Phi_i(x_i, y_i, r_i)$ при $i = 1, \dots, n$. Для общности здесь введена зависимость целевой функции центра от параметров $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$. Функции нормировки выбираются центром, исходя из желания, например, рассматривать «удельную эффективность» по отношению к максимальной эффективности при каждом значении параметра r_i по каждому слагаемому. Примерами

функций нормировки могут служить $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) = \max_{x_i \in Y_i(\bar{y}^i, r_i)} \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, x_i, r_i)$ или $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) \equiv 1$. В первом случае нормирующая функция характеризует максимальное значение составляющей $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ при безусловном выполнении плана и известном значении параметра r_i . Во втором случае имеем $\hat{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) = \sum_{i=1, \dots, n} \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$.

Предположим, что

$$\Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) \geq \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) \geq 0. \quad (1)$$

Условия (1) означают наличие потерь центра в размере $\Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) - \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ при невыполнении плана, так как его целевую функцию можно представить в виде $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) = \Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) - [\Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i) - \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)]$. Условиям (1) можно дать и такую интерпретацию: для заданного реализованного состояния y_i «выигрыш» центра не уменьшается при назначении плана $x_i = y_i$.

Планы x_i устанавливаются центром в соответствии с некоторыми выбранными им процедурами планирования $\pi_i(\cdot)$, где $\pi_i(\cdot)$ отображает множество A в множество Y_i ; $\pi_i: A \rightarrow Y_i$, где $A = \prod_{i=1}^n A_i$ — декартово произведение множеств A_i . Будем предполагать, что отображения $\pi_i(\cdot)$ кусочно-непрерывны.

Набор процедур планирования $x_i = \pi_i(\cdot)$ и функций стимулирования $s_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, определяет механизм функционирования $\mu = \{\pi_i(\cdot), s_i(\cdot, \cdot)\}_1^n$.

Опишем порядок функционирования системы и предположения об информированности центра и агентов.

Агенту с номером i известно точное значение параметра r_i , а центру известны только множества A_i допустимых значений этих параметров. Функционирование рассматриваемой активной системы описывается следующим порядком ходов. На первом шаге центр выбирает механизм μ и сообщает его агентам, на втором шаге агенты сообщают центру оценки ρ_i параметров r_i , $\rho_i \in A_i$. На основании полученных оценок ρ_i от всех агентов в соответствии с процедурой планирования центр назначает и сообщает агентам планы $x_i = \pi_i(\bar{\rho})$, где

$\bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)$. Затем агенты в последовательности ходов, определяемой нумерацией агентов и упорядоченной сетевой структурой связей между ними, выбирают состояния y_i , стремясь максимизировать по y_i свои целевые функции $f_i(x_i, y_i, r_i)$, $i = 1, \dots, n$. Предполагается, что в момент принятия решений агент i знает выборы, сделанные агентами, от которых зависят его возможности.

Функцию предпочтения агента после выбора им своего состояния обозначим $\varphi_i(x_i, \bar{y}^i, r_i) = \max_{y_i \in Y_i(\bar{y}^i)} f_i(x_i, y_i, r_i)$.

Функцию предпочтения центра, вычисляемую после выбора всеми агентами своих состояний, обозначим $\Psi^\mu(\bar{x}, \bar{r}) = \inf_{\bar{y} \in Z^\mu(\bar{x}, \bar{r})} \hat{\Phi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r})$, где

$Z^\mu(\bar{x}, \bar{r})$ — множество рациональных стратегий агентов при выборе состояний y . Множество $Z^\mu(\bar{x}, \bar{r})$ определяется следующим образом.

Будем предполагать выполнение «слабого условия благожелательности агентов», при котором множество рациональных стратегий для агентов с номерами $i = 1, \dots, n^0$ имеет вид:

$$Z_i(x_i, r_i) = \begin{cases} \{x_i\}, \text{ если } x_i \in \arg \max_{y_i \in Y_i} f_i(x_i, y_i, r_i), \\ \arg \max_{y_i \in Y_i} f_i(x_i, y_i, r_i) \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

а для агентов с номерами $i = n^0 + 1, \dots, n$ при заданных входных состояниях $\bar{y}^i$ принимает вид:

$$Z_i(x_i, \bar{y}^i, r_i) = \begin{cases} \{x_i\}, \text{ если } x_i \in \arg \max_{y_i \in Y_i(\bar{y}^i)} f_i(x_i, y_i, r_i), \\ \arg \max_{y_i \in Y_i(\bar{y}^i)} f_i(x_i, y_i, r_i) \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что на момент выбора i -м агентом состояния y_i набор входных состояний $\bar{y}^i$ и план ему известны. Поэтому выбор агентом состояния $y_i \in Z_i(x_i, \bar{y}^i, r_i)$ является доминантной стратегией агента.

Благожелательность агентов означает, что из равновыгодных для агента состояний он выберет состояние, равное плану. На практике центр может это обеспечить, выплачивая небольшое дополнительное вознаграждение агенту в случае выполнения плана.

Множества рациональных решений агентов в сетевой структуре. Вследствие наличия связей между агентами в рассматриваемой сети структура множества рациональных стратегий агентов при выборе состояний довольно сложная и требует детального описания. Для построения конструкций, позволяющих дать такое описание, заметим, что для конечных агентов возможна произвольная их нумерация, начиная с номера n^* и выше, $n^* \leq n$. Поэтому будем рассматривать все перестановки номеров конечных агентов. Число таких перестановок равно $(n - n^* + 1)!$

Пусть задана некоторая перестановка конечных агентов $N^* = (i_{n^*}^*, i_{n^*+1}^*, \dots, i_n^*)$. Рассмотрим первый конечный агент $i^*(1) = i_{n^*}^*$ в перестановке N^* , $i^*(1) \geq n^*$. Для этого агента определим все номера агентов $J^{i^*(1)}$, чьи состояния являются входящими для агента $i^*(1)$. Затем для всех агентов с номерами из $J^{i^*(1)}$ определим номера агентов, состояния которых являются входящими для всех агентов из множества $J^{i^*(1)}$. Обозначим соответствующее множество таких агентов $L(J^{i^*(1)})$. Для всех агентов из множества $L(J^{i^*(1)})$ повторяем процедуру, т. е. определяем номера всех агентов, чьи состояния являются входящими для агентов с номерами из $L(J^{i^*(1)})$. В результате получаем номера агентов $L(L(J^{i^*(1)}))$. Продолжаем выполнение процедуры до тех пор, пока агенты, чьи состояния являются входящими, не окажутся начальными, т. е. с номерами не больше, чем n^0 . Обозначим множество номеров этих начальных агентов $I_{i^*(1)}^0$. Таким образом, для агента с номером $i^*(1)$ формируется подсеть исходной сети, определяющая зависимость состояния этого агента от состояний других агентов. Обозначим эту подсеть $L^{i^*(1)}$.

Опишем структуру подсети $L^{i^*(1)}$ для конечного агента с номером $i^*(1)$, где $i^*(1) \geq n^*$. Рассмотрим для подсети $L^{i^*(1)}$ множество начальных агентов $I_{i^*(1)}^0$. В соответствии с построением подсети $L^{i^*(1)}$ в множество $I_{i^*(1)}^0$ включены, быть может, не все номера начальных агентов, $I_{i^*(1)}^0 \subset (1, \dots, n^0)$, а только номера тех агентов, состояния которых являются входными для агентов, на вход которых поступают состояния лишь начальных агентов. Зная множество $I_{i^*(1)}^0$, построим множество номеров агентов $I_{i^*(1)}^1 = I_{i^*(1)}^1(I_{i^*(1)}^0)$ из подсети $L^{i^*(1)}$ такое, что $I_{i^*(1)}^1$ содержит номера агентов, соединенных дугами только с агентами из множества $I_{i^*(1)}^0$.

Следующее множество $I_{i^*(1)}^2 = I_{i^*(1)}^2(I_{i^*(1)}^0, I_{i^*(1)}^1)$ включает в себя номера агентов, соединенных дугами с агентами только из множеств $I_{i^*(1)}^0$ и $I_{i^*(1)}^1$. Затем по аналогии строится множество $I_{i^*(1)}^3 = I_{i^*(1)}^3(I_{i^*(1)}^0, I_{i^*(1)}^1, I_{i^*(1)}^2)$ и т. д., $I_{i^*(1)}^k = I_{i^*(1)}^k(I_{i^*(1)}^0, I_{i^*(1)}^1, \dots, I_{i^*(1)}^{k-1})$ до тех пор, пока для некоторого $k = k^*(1)$ множество $I_{i^*(1)}^{k^*(1)}$ не будет включать в себя единственный номер конечного агента, равный $i^*(1)$, т. е. $I_{i^*(1)}^{k^*(1)} = \{i^*(1)\}$.

Рассмотрим последовательность выборов агентами состояний в подсети $L^{i^*(1)}$ в соответствии с построенной структурой множеств $(I_{i^*(1)}^0, I_{i^*(1)}^1, I_{i^*(1)}^2, \dots, I_{i^*(1)}^{k^*(1)})$. Сначала зафиксируем некоторые состояния $\tilde{y}_i \in Z_i(x_i, r_i)$ для $i \in I_{i^*(1)}^0$, затем для агентов с номерами $i \in I_{i^*(1)}^1$ фиксируем состояния $\tilde{y}_i \in Z_i(x_i, \tilde{y}_{i^*(1)}^1, r_i)$, где $\tilde{y}_{i^*(1)}^1 = (\tilde{y}_j, j \in I_{i^*(1)}^0)$, затем для агентов с номерами $i \in I_{i^*(1)}^2$ фиксируем состояния $\tilde{y}_i \in Z_i(x_i, \tilde{y}_{i^*(1)}^2, r_i)$, где $\tilde{y}_{i^*(1)}^2 = (\tilde{y}_j, j \in I_{i^*(1)}^1)$, и т. д., пока на шаге $k^* = k^*(1)$ не зададим состояние $\tilde{y}_{i^*}$ для агента с номером $i^*(1)$, удовлетворяющее условию $\tilde{y}_{i^*(1)}^{k^*(1)} \in Z_{i^*(1)}(x_{i^*(1)}, \tilde{y}_{(k^*(1)-1)i^*(1)}^{k^*(1)}, r_{i^*(1)})$, где $\tilde{y}_{(k^*(1)-1)i^*(1)}^{k^*(1)} = (\tilde{y}_j, j \in I_{i^*(1)}^{k^*(1)-1})$. Совокупность состояний $(\tilde{y}_{0i^*}^i, \tilde{y}_{1i^*}^i, \dots, \tilde{y}_{(k^*(1)-1)i^*(1)}^{i^*(1)}, \tilde{y}_{i^*}^{i^*(1)})$, где $i^* = i^*(1)$, $k^* = k^*(1)$, назовем набором рациональных стратегий агентов, входящих в подсеть $L^{i^*(1)}$ для первого конечного агента с номером $i^*(1)$ из перестановки N^* .

Рассмотрим второго агента с номером $i^*(2) = i_{n^*+1}^{i^*(2)}$ из перестановки N^* . Для этой перестановки и конечного агента с номером $i^*(2)$ построим подсеть $L^{i^*(2)}$ по схеме, приведенной выше для подсети $L^{i^*(1)}$, и соответствующую совокупность множеств $I_{i^*(2)}^k = I_{i^*(2)}^k(I_{i^*(2)}^0, I_{i^*(2)}^1, \dots, I_{i^*(2)}^{k-1})$. Для агентов, которые принадлежат обоим подсетям, $L^{i^*(1)}$ и $L^{i^*(2)}$, оставим значения состояний, зафиксированных при рассмотрении набора рациональных стратегий для подсети $L^{i^*(1)}$. Для агентов из множества $L^{i^*(2)} \setminus L^{i^*(1)}$, т. е. принадлежащих подсети $L^{i^*(2)}$, но не входящих в подсеть $L^{i^*(1)}$, выберем

и зафиксируем некоторое состояние $\tilde{y}_i \in Z_i(x_i, r_i)$, если $i \in I_{i^*(2)}^0$, и $\tilde{y}_i \in Z_i(x_i, \tilde{y}_{ki^*(2)}^i, r_i)$, если $\tilde{y}_{ki^*(2)}^i = (\tilde{y}_j, j \in I_{i^*(2)}^k)$, где $1 \leq k = k^*(2)$. Таким образом, мы зафиксировали некоторые рациональные стратегии для подсетей $L^{i^*(1)}$ и $L^{i^*(2)}$ в перестановке конечных агентов N^* . Затем повторяем описанные операции для подсети $L^{i^*(3)}$, в результате чего фиксируются стратегии для совокупности подсетей $L^{i^*(1)}, L^{i^*(2)}, L^{i^*(3)}$. Аналогичные действия для последующих конечных агентов для перестановки N^* приводят нас в конце концов к определению фиксированного рационального выбора состояний всеми агентами всей сети в рассматриваемой перестановке конечных агентов. Описанный выбор фиксированных состояний $\tilde{y}_i$ всеми агентами сети определяет некоторую «траекторию» связанных состояний. Изменяя выбор состояний из множеств, описываемых условиями (2) и (3), мы получим множество возможных рациональных траекторий при установленной нумерации конечных агентов, определяемой перестановкой N^* . Объединив множество рациональных траекторий, полученных для всевозможных перестановок конечных агентов, мы получим множество $Z(\bar{x}, \bar{r})$ всех рациональных выборов агентами своих состояний. Изменяя описанную фиксацию рациональных стратегий агентов в рамках множеств, описываемых условиями (2) и (3), получаем множество $\bar{Z}_{N^*}(\bar{x}, \bar{r})$ всех рациональных выборов агентов сети для заданной перестановки N^* конечных агентов.

Примечание 1. Обратим внимание на то, что для описания множества рациональных стратегий агентов при выборе состояний достаточны лишь требования компактности множеств допустимых состояний агентов. ♦

Определим теперь выбор рациональных стратегий агентов при сообщении центру данных о значениях параметров r_i . Заметим, что при выборе своей стратегии по сообщению оценки r_i агенту

не известны ни значения входных состояний $\bar{y}^i$, ни значения планов. Для выбора своей стратегии r_i агенту необходимо сформировать какой-либо прогноз этих параметров в зависимости от стратегий других агентов. Даже при небольшом числе агентов в рассматриваемой системе такой прогноз становится для агента трудновыполнимой вычислительной задачей. В общем случае это крайне осложняет возможность описания множеств рациональных сообщений агентов в системе. Поэтому целесообразно рассмотреть такие механизмы, при которых рациональные стратегии являются доминантными, т. е. стратегии агентов, выбор которых

не зависит от стратегий других агентов. Существование таких стратегий и эффективность механизма для них, вообще говоря, не очевидны.

Далее в статье будут рассмотрены условия существования равновесий в доминантных стратегиях, при которых каждому агенту выгодно сообщать достоверную информацию о его параметре независимо от выбора остальных агентов.

Аналогично тому, как вводилось условие благожелательности агентов по отношению к центру при выборе состояний, примем *слабое условие благожелательности* агентов при сообщении ими в центр оценок ρ_i . Оно формулируется так: $\rho_i = r_i$, если

$r_i \in \arg \max_{\rho_i \in A_i} \phi_i(\pi_i(\rho_i, \bar{\rho}_{-i}), \bar{y}^i, r_i)$ при всех допустимых $\bar{\rho}_{-i}, \bar{y}^i$, где $\bar{\rho}_{-i} = (\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_n)$ — сообщения всех агентов, кроме i -го, $i = 1, \dots, n$, $\bar{\rho} = (\rho_i, \bar{\rho}_{-i})$. Это условие означает, что если сообщение достоверной информации обеспечивает агенту не меньший выигрыш по сравнению с выигрышем при сообщении другой информации, то агент будет сообщать достоверную информацию $\rho_i = r_i$.

Для механизма функционирования μ определим показатель его эффективности

$$k(\mu, \bar{r}) = \inf_{\bar{\rho} \in R(\bar{r})} \Psi^\mu(\pi(\bar{\rho}), \bar{r}), \quad (4)$$

где $R(\bar{r}) = R(\bar{r}, \mu)$ — множество рациональных стратегий агентов при выборе ими сообщений $\bar{\rho}$ о параметрах $\bar{r}$. Как уже упоминалось, в качестве множества $R(\bar{r})$ рассматривается множество всех доминантных стратегий. Понятно, что если $R(\bar{r}) = \emptyset$, то выражение (4) теряет смысл.

Сосредоточимся на задачах построения так называемых правильных механизмов μ_{cor} , обеспечивающих выполнение планов и сообщение достоверной информации (неманипулируемость) как доминантных стратегий, т. е. $Z^\mu(\bar{x}, \bar{r}) = \{\bar{x}\}$ и $R(\bar{r}) = \{\bar{r}\}$.

Для правильных механизмов μ_{cor} выражение для критерия эффективности существенно упрощается (по сравнению с выражением (4)):

$$k(\mu_{cor}, \bar{r}) = \hat{\Phi}(\pi(\bar{r}), \pi(\bar{r}), \bar{r}). \quad (5)$$

1.2. Постановка задачи

Поставим задачу определения механизма μ^* , оптимального для любых значений параметров $\bar{r} \in A$ при заданном множестве неопределенности A . Назовем ее задачей определения равномерно опти-

мального механизма на множестве A : требуется определить механизм μ^* такой, что

$$\forall \bar{r} \in A: K(\mu^*) \geq \sup_{\mu \in M} k(\mu, \bar{r}) - \varepsilon. \quad (6)$$

Как отмечалось в работах [1–6, 12, 13], привлекательны именно правильные механизмы, которые мотивируют агентов выбирать состояния, совпадающие с планами, и сообщать достоверную информацию центру о своих параметрах. Обозначим множество таких механизмов M_{cor} . То, что множество M_{cor} не пусто, показано в упомянутых работах. Для рассматриваемого случая сетевой структуры примером, показывающим, что множество M_{cor} непустое, служит задание агентам фиксированных планов $x_i \in Y_i$ независимо от сообщаемых оценок ρ_i и «сильных» штрафов, обеспечивающих выполнение этих планов.

Достоинство таких механизмов состоит еще и в том, что критерий эффективности правильного механизма существенно упрощается, так как вместо выражения (4) достаточно рассматривать более простое выражение (5). Таким образом, рассматриваемая задача (6) для множества правильных механизмов M_{cor} приобретает вид: определить механизм μ_{cor}^* , такой, что

$$\forall \bar{r} \in A: K(\mu_{cor}^*) \geq \sup_{\mu \in M_{cor}} \hat{\Phi}(\pi(\bar{r}), \pi(\bar{r}), \bar{r}) - \varepsilon. \quad (7)$$

Требование правильности механизмов может, вообще говоря, существенно сузить множество допустимых механизмов и привести к потерям в их эффективности. В связи с этим возникает задача определения условий, которым должно удовлетворять исходное множество M допустимых механизмов, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} \forall \bar{r} \in A: \sup_{\mu \in M} k(\mu, \bar{r}) = \\ = \max_{\mu \in M \cap M_{cor}} \hat{\Phi}(\pi(\bar{r}), \pi(\bar{r}), \bar{r}) = K(\mu^*). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что соотношение (8) подразумевает в том числе определение условий, при которых обеспечивается достижимость максимума в средней части равенства (8).

Выражение (8) означает, что существует оптимальный на множестве M механизм μ^* , принадлежащий множеству правильных механизмов: $\mu^* \in M \cap M_{cor}$.

Пусть множество M допустимых механизмов $\mu = (g(\cdot), \pi(\cdot), \sigma(\cdot), \chi(\cdot, \cdot))$, где $g(\cdot) = (g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$, $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_n(\cdot))$, $\sigma(\cdot) = (\sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_n(\cdot))$, $\chi(\cdot, \cdot) = (\chi_1(\cdot, \cdot), \dots, \chi_n(\cdot, \cdot))$, описывается следующими соотношениями:

— функции поощрения удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq \sigma_i(y_i) \leq g_i, \quad (9)$$

где g_i — заданные фонды поощрения, $i = 1, \dots, n$;

— приросты функций штрафов при фиксированном плане ограничены «показателями максимального роста штрафов» [13]

$$\chi_i(x_i, y_i') - \chi_i(x_i, y_i) \leq u_i(y_i, y_i'), \quad (10)$$

где $u_i(y_i, y_i')$ — заданные показатели максимального роста штрафов, удовлетворяющие «неравенству треугольника», $x_i, y_i, y_i' \in Y_i = Y_i(\bar{y}^i)$;

— процедуры планирования $\pi_i(\cdot)$ представляют собой кусочно-непрерывные отображения

$$\pi_i: A \rightarrow Y_i(\bar{y}^i), \quad (11)$$

где $A = \prod_{i=1}^n A_i$.

Постановка задачи: определить механизм μ^* , удовлетворяющий условиям (8)—(11).

2. СОГЛАСОВАННОСТЬ ПРАВИЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ СЕТИ АГЕНТОВ

Для обеспечения правильности механизмов, т. е. выполнения планов и сообщения агентами неискаженной информации о параметрах, требуется определить условия, которым должны удовлетворять компоненты механизма. Такими условиями служат условия максимального и совершенного согласования.

2.1. Максимальное согласование

Условия максимального согласования впервые были рассмотрены в работах [2, 3]. Опишем эти условия для рассматриваемой сетевой модели.

Если $x_i \in P_i(\bar{y}^i, r_i) = \{x_i \in Y_i(\bar{y}^i) | f_i(x_i, y_i, r_i) \leq f_i(x_i, y_i, r_i), \forall y_i \in Y_i(\bar{y}^i)\}$ и выполняется приведенное выше слабое условие благожелательности (2) и (3), то i -й агент будет выполнять назначаемый ему план, $y_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Множество $P_i(\bar{y}^i, r_i)$ определяет «выгодные» для i -го агента планы при условии выбора агентами с номерами $i = 1, \dots, n-1$ «входных» состояний $\bar{y}^i$, поэтому $P_i(\bar{y}^i, r_i)$ будем называть *множеством согласованных планов* с интересами агента для состояний $\bar{y}^i$.

Чем шире эти множества, тем больше у центра возможности назначить план, который будет выполняться. Поэтому условием *максимального со-*

гласования при заданной целевой функции агента называется условие «максимального размера» множества $P_i(\bar{y}^i, r_i)$, при котором множество всех выбираемых i -м агентом состояний будет совпадать с выполняемыми планами. Это условие формулируется так: $x_i \in P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i) = \bigcup_{y \in Y_i(\bar{y}^i)} Z_i(y, r_i, \bar{y}^i)$. Ин-

декс «МС» в обозначении множества согласованных планов означает «максимальное согласование» (англ. *maximum compatibility*).

Определение 1. Будем говорить, что система стимулирования агента максимально согласована, если выполняется условие максимального согласования. ♦

Показано [3], что для *максимальной согласованности* достаточно выполнения условий *сильной согласованности* для целевых функций агентов. Для рассматриваемой здесь модели с выделенной функцией штрафов в целевой функции агентов это условие формулируется как требование выполнения «неравенства треугольника» для функций штрафов [2, 3]: $\chi_i(x_i, y_i') + \chi_i(y_i', y_i) \leq \chi_i(x_i, y_i)$ при всех допустимых значениях аргументов.

Так как выбираемое агентом состояние $y_i^* \in P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)$, то выбором плана $x_i = y_i^*$ всегда можно, без уменьшения значения функции $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ в силу предположения (1), обеспечить выбор активным элементом состояния $y_i^* = x_i$, т. е. функцию предпочтения центра достаточно рассматривать в области определения $x_i \in P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)$, а следовательно, достаточно рассматривать только те процедуры планирования $\pi_i(\cdot)$, значения которых принадлежат множеству $P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)$.

Из результатов, изложенных в статье [13] следует, что для принятой модели агента множество согласованных планов можно представить в виде отрезка $P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i) = [y_i^L, x_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)]$, и в силу того, что $Y_i = Y_i(\bar{y}^i) = [y_i^L, y_i^U(\bar{y}^i)]$, где $y_i^U(\bar{y}^i)$, — неубывающая по всем аргументам функция, верхняя граница этого отрезка $x_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)$ является неубывающей функцией.

2.2. Совершенное согласование

Условия сообщения достоверной информации исследовались во многих работах (см., например, обзор в автореферате [11]). В рамках исследований по теории активных систем такие условия представлены в работах [1, 15].

Условия «*совершенного согласования*» [15] применительно к рассматриваемой здесь модели сете-

вой структуры связей агентов формулируются таким образом:

$$\begin{aligned} \forall \bar{p} \in A: \varphi_i(\pi_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}), \rho_i, \bar{y}^i) = \\ = \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i}) \cap Y_i(\bar{y}^i)} \varphi_i(x, \rho_i, \bar{y}^i). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь верхний индекс PC означает аббревиатуру от словосочетания «perfect compatibility». В выражении (12) $X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i})$ обозначает специально подбираемое центром компактное множество планов, не зависящее от сообщения i -го агента ρ_i . Ниже при построении оптимальной PC-процедуры планирования будет осуществляться выбор соответствующего множества $X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i})$. Заметим, что множество $X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i})$ может зависеть от набора планов $\bar{x}^i$ вместо набора состояний $\bar{y}^i$ предшествующих агентов, поскольку планы $\bar{x}^i$ и выбор состояний $\bar{y}^i$ также не зависят от сообщения i -го агента из-за отсутствия в рассматриваемой сети контуров.

Определение 2. Будем называть $\pi_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p})$ *совершенно согласованной процедурой планирования* для системы с сетевой структурой связей агентов, если выполняются условия (12). ♦

Применение процедуры планирования, удовлетворяющей условиям (12), совместно со *слабым условием благожелательности* в механизме обеспечивает сообщение агентами достоверной информации [15]. Таким образом, выражение (12) описывает класс процедур планирования, обеспечивающих сообщение неискаженной информации, а подбор множества $X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i})$ определяет конкретную такую процедуру. Показано [15], что оптимальная процедура планирования для случая равновесия в доминантных стратегиях содержится в множестве процедур, удовлетворяющих условиям (12).

Рассмотрим теперь объединение условий максимального и совершенного согласований (MPC). Оно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall \bar{p} \in A: \varphi_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{y}^i, \bar{p}), \rho_i, \bar{y}^i) = \\ = \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i)} \varphi_i(x, \rho_i, \bar{y}^i). \end{aligned} \quad (13)$$

Обратим внимание, что в выражении (13), в отличие от условий (12), i -му агенту назначается план, максимизирующий его функцию предпочте-

ния на множестве, зависящем от его сообщения ρ_i . Этот факт делает необоснованным прямое применение теоремы о достаточности условия совершенного согласования [15] для обеспечения сообщения агентом достоверной информации. Тем не менее, для рассматриваемой здесь модели ниже формулируется условие достоверности сообщаемой информации и выполнения плана.

Теорема 1. Механизм для рассматриваемой модели сетевой структуры, в котором для всех агентов сети применяются MPC-процедуры планирования (13), является правильным.

Доказательство. Отметим, что множества $P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i)$ удовлетворяют соотношению

$$P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i^1) \subseteq P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i^2), \text{ если } r_i^1 \leq r_i^2. \quad (14)$$

Справедливость этого соотношения, с учетом принятых предположений о свойствах функций затрат агентов, непосредственно следует из леммы 2, доказанной в статье [13].

Пусть $\rho_i < r_i$. Сравним максимальные значения целевой функции агента при сообщениях ρ_i и r_i . Вследствие соотношения (14) имеет место:

$$\begin{aligned} \forall \bar{p} \in A: \varphi_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{y}^i, \bar{p}), \rho_i, \bar{y}^i) = \\ = \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i)} \varphi_i(x, \rho_i, \bar{y}^i) \leq \\ \leq \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i)} \varphi_i(x, r_i, \bar{y}^i) = \\ = \varphi_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{y}^i, \bar{p}), r_i, \bar{y}^i). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\rho_i > r_i$, тогда $P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i) \subseteq P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i)$.

Предположим, что $\Delta = P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i) \setminus P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i) \neq \emptyset$.

Пусть существует план $x^* \in \Delta$, такой, что $\varphi_i(x^*, \rho_i, \bar{y}^i) =$

$= \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i)} \varphi_i(x, \rho_i, \bar{y}^i)$. Рассмотрим макси-

мальное значение целевой функции агента при этом плане: $\varphi_i(x^*, \bar{y}^i, r_i) = f_i(x^*, y_i^*, r_i) = \max_{y_i \in Y_i(\bar{y}^i)} f_i(x^*, y_i, r_i)$.

В силу условия максимальной согласованности справедливо $y_i^* \in P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i)$, а это означает, что $\varphi_i(x^*, \bar{y}^i, r_i) \leq$

$\leq \varphi_i(y_i^*, \bar{y}^i, r_i)$. Таким образом, при сообщении агентом достоверной информации r_i и при плане, равном y_i^* , выигрыш агента больше, чем при плане x^* . Следовательно при сообщении достоверной информации план, удовлетворяющий условию MPC, обеспечивает большее значение функции предпочтения агента, чем при завышенной оценке $\rho_i > r_i$. ♦

Учитывая совпадение выбираемого i -м агентом состояния с планом, условие MPC можно переписать также в виде:

$$\forall \rho \in A: f_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{y}^i, \rho), \rho_i) = \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{y}^i, \rho_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, \rho_i)} f_i(x, x, \rho_i).$$

Примечание 2. Вместо $\bar{y}^i$ в выражении (14) можно подставить $\bar{x}^i$. Чтобы обосновать это, рассмотрим произвольного конечного агента i^* . Поскольку для начальных агентов при выполнении условий MPC механизм является правильным, мы, рассматривая агенты с номерами из множества $I_{i^*}^1$ при выполнении условий MPC, получаем правильный механизм для этих агентов. Рассуждая аналогично, получаем правильные механизмы для агентов с номерами $I_{i^*}^2 = I_{i^*}^2(I_{i^*}^0, I_{i^*}^1)$ и так далее $I_{i^*}^k = I_{i^*}^k(I_{i^*}^0, I_{i^*}^1, \dots, I_{i^*}^{k-1})$ до тех пор, пока для некоторого $k = k^*$ множество $I_{i^*}^{k^*}$ не будет включать в себя единственный номер конечного агента, равный i^* т. е. $I_{i^*}^{k^*} = \{i^*\}$. Очевидно, в этой последовательности агентов состояния каждого агента совпадают с планами. ♦

Таким образом, условие MPC (13) можно записать также в виде:

$$\begin{aligned} \forall \bar{\rho} \in A: \varphi_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{x}^i, \bar{\rho}), \rho_i, \bar{x}^i) &= \\ &= \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{x}^i, \bar{\rho}_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{x}^i, \rho_i)} \varphi_i(x, \rho_i, \bar{x}^i) \\ \text{или } \forall \rho \in A: f_i(\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{x}^i, \rho), \rho_i) &= \\ &= \max_{x \in X_i^{\text{PC}}(\bar{x}^i, \rho_{-i}) \cap P_i^{\text{MC}}(\bar{x}^i, \rho_i)} f_i(x, x, \rho_i). \end{aligned}$$

Для случая одного агента показано [13], что процедуры планирования $\pi_i^{\text{MPC}}(\cdot)$ для принятых свойств функций затрат в модели агента представляют собой неубывающие функции параметров ρ_i на отрезке A_i . Этот факт переносится и на рассматриваемый случай связанных агентов, так как i -й агент не влияет на выбор планов $\bar{x}^i$. Таким образом, $\pi_i^{\text{MPC}}(\bar{x}^i, \bar{\rho})$ является неубывающей функцией параметра ρ_i на отрезке A_i .

2.3. Структура правильного механизма

Рассмотрим случай, когда фонды поощрения $g = (g_1, \dots, g_n)$ для всех агентов заданы и фиксированы. Для этого случая исследуем возможность

построения согласованных механизмов для агентов последовательно в порядке их нумерации.

Далее будем предполагать, что функции $\Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ непрерывны, не убывают по каждой компоненте из $\bar{y}^i$ и строго квазивогнуты по y_i при всех $r_i \in A_i$.

Каждой составляющей $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ целевой функции центра поставим в соответствие неотрицательное число γ_i и рассмотрим систему неравенств

$$\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, x_i, r_i) \geq \gamma_i \Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) \quad (15)$$

при $i = 1, \dots, n$, где $x_i \in Y_i(\bar{y}^i)$.

Пусть $\gamma_i = \gamma_i(\bar{y}^i, g_i)$ таково, что неравенство (15) разрешимо на множестве $Y_i(\bar{y}^i)$ при $\forall r \in A$, тогда множество всех точек (x_i, r_i) , удовлетворяющих этому неравенству, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} Q_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) &= \{(x_i, r_i) | q_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) \leq x_i \leq q_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i), \\ & r_i \in A_i, x_i \in Y_i(\bar{y}^i)\}, \end{aligned}$$

где $q_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ и $q_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ — непрерывные функции [12, 13].

Рассмотрим функции $\bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) = \max_{r_i^L \leq p \leq r_i} q_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, p)$ и $\underline{q}_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) = \min_{r_i \leq p \leq r_i^U} q_i^{2\text{MC}}(\gamma_i, \bar{y}^i, p)$, где $q_i^{2\text{MC}}(\gamma_i, \bar{y}^i, p) = \min[q_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, p), x_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, p)]$.

По построению $\bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ и $\underline{q}_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ — неубывающие и непрерывные по r_i функции. Если $Q_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) \neq \emptyset$, то $\bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) \leq \underline{q}_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ при всех $r_i \in A_i$.

Обозначим $N_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ множество неубывающих непрерывных функций $\pi_{\gamma_i}(\bar{y}^i, \bar{r})$, отображающих множество A в множество $P_i^{\text{MC}}(\bar{y}^i, r_i)$ и удовлетворяющих неравенствам (15). Множество $N_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) &= \{\pi_{\gamma_i}(\bar{y}^i, \bar{r}) | \bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) \leq \\ & \leq \pi_{\gamma_i}(\bar{y}^i, \bar{r}) \leq \underline{q}_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i), r_i \in A_i\}. \end{aligned}$$

Если $\gamma^1 > \gamma^2$, то $N_i(\gamma^1, \bar{y}^i, r_i) \subseteq N_i(\gamma^2, \bar{y}^i, r_i)$.

Множества $N_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i)$ определяют для каждого i класс непрерывных неубывающих функций, принимающих значения из множества $P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i) \subseteq [y_i^L, x_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)]$ и обеспечивающих достижения уровня γ_i для функции $\Phi_i(x_i, x_i, r_i)$. Среди них будем выбирать процедуру планирования, удовлетворяющую условиям МРС, т. е. принимающую значения из множества $P_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i) \cap X_i^{PC}(\bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})$. Определим вид множества $X_i^{PC}(\bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})$.

Пусть γ_i такое, что $N_i(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i) \neq \emptyset$. Обозначим $\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{r}_{-i}) = \underline{q}_i^2(\gamma_i, \bar{y}^i, r_1, \dots, r_{i-1}, r_i^L)$ и вместо множества $X_i^{PC}(\bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})$, фигурирующего в условиях совершенного согласования (13), установим множество $X_i^{PC}(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}) = [\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}), y_i^U]$, зависящее от параметра γ_i .

Будем рассматривать процедуры планирования вида

$$\pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \rho_i, \bar{\rho}_{-i}) = \begin{cases} \eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}), & \text{если } r_i^L \leq \rho_i \leq \beta_i, \\ \bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, \rho_i), & \text{если } \beta_i < \rho_i \leq r_i^U, \end{cases} \quad (16)$$

где $\beta_i = r_i^U$, если $\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^{i-1}, \rho_{-i}) \geq \bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i^U)$, либо $\beta_i = \beta_i(\gamma_i, \bar{y}^{i-1}, \bar{\rho}_{-i})$ определяется из решения уравнения $\bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, \beta_i) = \eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})$, если $\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}) < \bar{q}_i^1(\gamma_i, \bar{y}^i, r_i^U)$.

По построению процедура (16) является неубывающей и непрерывной функцией по ρ_i .

Показано [12], что для процедуры планирования вида (16) существует функция $\tilde{r}_i(\gamma_i, \bar{y}^i, x_i)$, обратная функции (16), принимающая значения в множестве $A_i = [r_i^L, r_i^U]$ и определенная по x_i на отрезке $[y_i^L, x_i^{MC}(\bar{y}^i, r_i)]$, за исключением, быть может, счетного числа точек.

Рассмотрим для фиксированных (не зависящих от сообщений ρ) значений фондов $g = \{g_1, \dots, g_n\}$ механизм, включающий в свой состав процедуры

планирования, функции штрафов и поощрения, удовлетворяющие условиям допустимости механизма (9)–(11) и условиям МРС (13).

В качестве процедуры планирования этого механизма примем $\pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho})$, определяемую выражением (16), при этом функции штрафов совпадают с показателями их максимального роста

$$\chi_i(x_i, y_i) = u_i(x_i, y_i), \quad (17)$$

в качестве функции поощрения выберем

$$\sigma_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } y_i^L \leq x_i \leq \eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}), \\ \int_{\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})}^{x_i} \zeta'_{it}(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, \bar{y}^i, t)) dt & \\ \text{при } \eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}) < x_i \leq \pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}, r_i^U), \\ \hat{g}_i & \text{при } \pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}, r_i^U) < x_i \leq y_i^U, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\hat{g}_i = \int_{\eta_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i})}^{\pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho}_{-i}, r_i^U)} \zeta'_{it}(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, \bar{y}^i, t)) dt \leq g_i. \quad (19)$$

Примечание 3. В выражениях (8), (19) $\zeta'_{it}(t, \tilde{r}_i(\gamma_i, \bar{y}^i, t))$ обозначает частную производную по первой переменной t функции затрат i -го активного элемента.

Теорема 2. Механизм, определяемый выражениями (16)–(19), удовлетворяет условиям МРС.

Доказательство того, что процедура планирования $\pi_i(\gamma_i, \bar{y}^i, \bar{\rho})$ удовлетворяет условиям МРС (13) при выборе функций штрафов (17) и функций поощрения (18), проверяется подстановкой в целевые функции агентов и проверкой необходимых и достаточных условий их максимума. Для случая одного агента доказательство этого утверждения приведено в статье [13]. Для рассматриваемого здесь случая нескольких агентов доказательство аналогично.

В соответствии с примечанием 2 вместо $\bar{y}^i$ можно подставить $\bar{x}^i$.

Примечание 4. В выражениях (16)–(19) параметры γ_i зависят от значений g_i из-за необходимости выполнения условия (19).

3. ОПТИМАЛЬНОСТЬ СОГЛАСОВАННЫХ МЕХАНИЗМОВ В СИСТЕМЕ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

3.1. Случай фиксированных фондов поощрения агентов

Пусть фонды поощрения g_i фиксированы. В этом случае, очевидно, из механизма исключается процедура распределения фонда поощрения, т. е. рассматриваемый механизм включает в свой состав только процедуру планирования, систему функций штрафов и функций поощрения. Рассмотрим последовательную процедуру формирования оптимального механизма для всей системы, начиная с первого агента, в порядке их нумерации.

Оптимальный механизм для случая, когда целевая функция центра равна только i -й составляющей $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, x_i, r_i)/\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i)$, назовем i -оптимальным механизмом. Тогда 1-оптимальный механизм формируется, когда первый агент — единственный в системе. Решение такой задачи получено в работах [12, 13].

Отметим, что параметр $\gamma_1 = \gamma_1(\mu_1, g_1)$ при заданном механизме μ_1 зависит от размера выделенного, в рассматриваемом случае фиксированного, фонда g_1 . В этом случае 1-оптимальный механизм $\mu_1^* = \mu_1^*(g_1)$ представляет собой решение оптимизационной задачи

$$K_1(\mu_1^*) = \max_{\mu_1 \in M_1} \gamma_1(\mu_1, g_1),$$

когда процедура планирования, функции штрафов и поощрения определяются как

$$\begin{aligned} \pi_1(\gamma_1, \rho_1) &= \begin{cases} \eta_1(\gamma_1), & \text{если } r_1^L \leq \rho_1 \leq \beta_1, \\ \bar{q}_1(\gamma_1), & \text{если } \beta_1 < \rho_1 \leq r_1^U, \end{cases} \\ \chi_1(x_1, y_1) &= u_1(x_1, y_1), \\ \sigma_1(x_1) &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } y_1^L \leq x_1 \leq \eta_1(\gamma_1), \\ \int_{\eta_1(\gamma_1)}^{x_1} \zeta'_{1t}(t, \tilde{r}_1(\gamma_1, t)) dt & \text{при } \eta_1(\gamma_1) < x_1 \leq \pi_1(\gamma_1, r_1^U), \\ \bar{g}_1 & \text{при } \pi_1(\gamma_1, r_1^U) < x_1 \leq y_1^U, \end{cases} \\ \hat{g}_1 &= \int_{\eta_1(\gamma_1)}^{\pi_1(\gamma_1, r_1^U)} \zeta'_{1t}(t, \tilde{r}_1(\gamma_1, t)) dt \leq g_1. \end{aligned}$$

Здесь $M_1 = M_1(g_1)$ — множество допустимых механизмов, заданное выражениями (9) и (11) при $i = 1$.

Механизм μ_1^* является правильным. Учитывая, что при таком механизме агенты мотивированы сообщать достоверную информацию и выполнять планы, $\rho_1 = r_1$ и $y_1 = x_1^* = \pi_1(\gamma_1^*, r_1)$, где γ_1^* — оптимальное значение составляющей $\Phi_1(x_1^*, x_1^*, r_1)/\Phi_1^0(r_1)$ критерия эффективности механизма для $\forall r_1 \in A_1$,

$$\gamma_1^* = \gamma_1^*(\mu_1^*, g_1) \geq \Phi_1(x_1^*, x_1^*, r_1)/\Phi_1^0(r_1). \quad (20)$$

Затем, зная состояние $y_1 = x_1^*$ и, следовательно, зависимость по r_2 множества $Y_2 = Y_2(x_1^*, r_2)$ при вычисленном значении x_1^* , по той же схеме определим оптимальный механизм для второго агента и т. д. по индукции.

Для i -го агента ($i = 2, \dots, n$) задача определения i -оптимального механизма $\mu_i^* = \mu_i^*(g_i)$ имеет вид:

$$K_i(\mu_i^*) = \max_{\mu_i \in M_i} \gamma_i(\bar{x}^{*i}, \mu_i, g_i) \quad (21)$$

при условиях (9)—(11), при этом, в силу выполнения условий МРС, $\bar{y}^i = \bar{x}^{*i}$, где $\bar{x}^{*i} = (x_j^*, j \in J^i)$ — оптимальные планы агентов, предшествующих в сети i -му агенту, и $\bar{\rho}^i = \bar{r}^i = (r_j, j \in J^i)$, M_i — множество допустимых механизмов, заданное выражениями (9)—(11).

По аналогии с выражением (20) обозначим γ_i^* оптимальное значение составляющей $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)/\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i)$ нормированной целевой функции центра для $\forall r_i \in A_i$, $\gamma_i^* = \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, g_i) \geq \Phi_i(x_i^*, \bar{x}^{*i}, x_i^*, r_i)/\Phi_i^0(\bar{x}^{*i}, r_i)$ при условии $\bar{y}^{i-1} = \bar{x}^{*i-1}$.

Лемма. Значения показателей эффективности $\gamma_i^* = \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i)$ при нормирующих функциях $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) = 1$ не убывают по $x_j^{*(i)}$ (i) и g_j , где $x_j^{*(i)}$ (i) — j -я компонента набора $\bar{x}^{*i}$ входов i -го агента, $i = 2, \dots, n$; $j = 1, \dots, i-1$.

Доказательство. Покажем, что если $x_j^{(i)} < x_j^{*(i)}$, то

$$\gamma_i^* = \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i) \leq \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i), \quad (22)$$

где $\bar{x}^{*i} = (x_s^{*(i)})$ при $\forall s \in J^i$, $\bar{x}^i = (x_j^{(i)}, j \in J^i, x_s^{*(i)})$ при $\forall s \in J^i \setminus J$, μ_i^* — оптимальный механизм при входе $\bar{x}^i$, γ_i^* — значение показателя эффективности при механизме μ_i^* и входе $\bar{x}^i$.

Так как в i -оптимальном механизме для i -го агента процедура планирования удовлетворяет условиям МРС, то для нее справедливо выражение (13). При входе $\bar{x}^i$ построение оптимальной МРС-процедуры планирования по сути предполагает выбор в условиях (13) подмножества, $X_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i})$, такого, что $X_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^i, \rho_i) \neq \emptyset$. Отметим, что

$$P_i^{MC}(\bar{x}^i, \rho_i) \subseteq P_i^{MC}(\bar{x}^{*i}, \rho_i) \quad (23)$$

поскольку $Y_i(\bar{x}^i) \subseteq Y_i(\bar{x}^{*i})$, поэтому $y_i^U = y_i^U(\bar{y}^i)$ не убывают по своим аргументам. Из выражения (23) следует, что если $X_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^i, \rho_i) \neq \emptyset$, то $X_i^{PC}(\bar{x}^{*i}, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^{*i}, \rho_i) \neq \emptyset$, где $X_i^{PC}(\bar{x}^{*i}, \bar{p}_{-i}) = X_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i})$.

Пусть множество $\hat{X}_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) = \hat{X}_i^{PC}(\gamma_i^*, \bar{x}^i, \bar{p}_{-i})$ является тем множеством совершенно согласованных планов в условиях (13), при котором выбран оптимальный механизм μ_i^* и, соответственно, реализуется значение показателя эффективности γ_i^* . Рассмотрим это же множество, но для условия совершенного согласования при входе $x_j^{*(i)}$, а именно $\forall \rho \in A: f_i(\pi_i^{MPC}(\bar{x}^{*i}, \bar{p}), \rho_i) = \max_{x \in X_i^{PC}(\bar{x}^{*i}, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^{*i}, \rho_i)} f_i(x, \rho_i)$. Так как $\hat{X}_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^i, \rho_i) \subseteq \hat{X}_i^{PC}(\bar{x}^{*i}, \bar{p}_{-i}) \cap P_i^{MC}(\bar{x}^{*i}, \rho_i)$, то выбором $X_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) = \hat{X}_i^{PC}(\bar{x}^i, \bar{p}_{-i}) \cap Y_i(\bar{x}^i)$ при входе $x_j^{*(i)}$ обеспечивается $\gamma_i^*(\bar{x}^i, \mu_i^*, g_i) \leq \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i)$, т. е. выражение (22) справедливо. Следовательно, $\gamma_i^* = \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i)$ не убывают по $x_j^{*(i)}$.

Неубывание функции $\gamma_i^* = \gamma_i^*(\bar{x}^{*i}, \mu_i^*, g_i)$ по g_i следует из выражения (19). На самом деле, при увеличении g_i ограничение (19) для допустимых механизмов ослабляется. ♦

Теорема 3. Если функции $\Phi_i(y_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ непрерывны, возрастают по y_i и каждой компоненте из множества $\bar{y}^i$ при $i = 1, \dots, n^* - 1$, то оптимальный механизм $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$ при фиксированных фондах поощрения $g = (g_1, \dots, g_n)$ при нормирующих функциях $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) \equiv 1, i = 1, \dots, n$, определяется из последовательности решения задач (21) в порядке нумерации агентов. Эффективность оптимального механизма $K(\mu^*) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^*$.

Доказательство. При заданном фонде g_i план и выбираемое первым агентом состояние не зависят от механизма и, соответственно, от выбираемых состояний всех других агентов. Поэтому максимальное значение γ_1^* не зависит от выбранного механизма для последующих агентов. В силу предположения о том, что функция $\Phi_1(y_1, y_1, r_1)$ не убывает по y_1 , и свойства [13], по которому процедура планирования $x_1 = \pi_1(\gamma_1^*, \rho_1)$ не убывает по ρ_1 , при оптимальном механизме первому агенту назначаются максимальные МРС-планы для всех допустимых ρ_1 при заданном фонде g_1 . Следовательно, на вход последующих агентов поступает наибольшее из возможных значений x_1 при каждом значении параметра ρ_1 . Аналогичные рассуждения применимы для второго агента, учитывая, что функции $\Phi_2(x_2, y_1, y_2, r_2)$ и $y_2^U = y_2^U(y_1)$ не убывают по своим аргументам, максимальное значение γ_2^* достигается при наибольших значениях $y_1 = x_1 = \pi_1(\gamma_1^*, \rho_1)$ и не зависит от выбора механизма последующих агентов. С учетом того, что функции $\Phi_i(x_i, \bar{y}^i, y_i, r_i)$ и $y_i^U = y_i^U(\bar{y}^i)$ не убывают по своим аргументам, продолжая подобные рассуждения для $i < n^*$, приходим к тому, что при заданном фонде g_i максимальное значение γ_i^* достигается при наибольших значениях $y_j = x_j = \pi_j^*(\gamma_j^*, \rho_j)$, где $j = 1, \dots, i - 1$. Для $i \geq n^*$ i -оптимальный механизм и, соответственно, максимальное значение γ_j^* определяется также при максимальных значениях $y_j = x_j = \pi_j^*(\gamma_j^*, \rho_j)$. ♦

Примечание 5. Рассмотренный механизм обладает свойством «стабильности» в процессе функционирования системы в том смысле, что если в процессе деятельности агентов (последовательности выбора ими состояний) какой-либо, например, i -й агент «не выполнит» план, $y_i < x_i$, то назначив $x_i = y_i$, по описанной схеме можно пере- считать оптимальный правильный механизм для последующих агентов с номерами $i + 1, \dots, n$.

Примечание 6. Для варианта $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) = \max_{x_i \in Y_i(\bar{y}^i, r_i)} \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, x_i, r_i)$ построить оптимальный механизм системы в виде последовательного формирования механизмов для агентов, как сформулировано в теореме 2, вообще говоря, не удастся.

3.2. Распределение общего фонда поощрения

Рассмотрим теперь задачу определения оптимальных механизмов, предусматривающих процедуру распределения фонда поощрения G . В этом случае индивидуальные фонды поощрения g_i агентов задаются центром в соответствии с процедурами $g_i^*(\cdot)$ распределения суммарного фонда G , где

$\bar{g}(\cdot) = (g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$ отображает множество $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ в симплекс, задаваемый неравенством

$$\sum_{i=1}^n g_i(\cdot) \leq G \quad (24)$$

и условием неотрицательности фондов $g_i(\bar{p})$.

Теперь механизм функционирования $\mu = \{g_i(\cdot), \pi_i(\cdot), s_i(\cdot, \cdot)\}_1^n$ описывается набором процедур планирования $x_i = \pi_i(\cdot)$, распределением фонда поощрения $g_i(\cdot)$ и функциями стимулирования $s_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Задача нахождения оптимального механизма задается условиями (5)–(10), и дополнительными ограничениями (24).

Включение процедуры распределения фондов $\bar{g}(\cdot) = (g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$ в состав механизма приводит к необходимости прогнозирования агентами назначаемых им не только планов, но и фондов поощрения в зависимости от сообщаемых оценок. Если план i -го агента зависит непосредственно от сообщаемой им оценки и плана входов $\bar{x}^{i-1}$ предшествующих агентов, то выделяемый i -му агенту фонд зависит уже от стратегий всех агентов в сети. Прогноз i -м агентом влияния сообщаемой информации p_i на выделяемый ему фонд $g_i(\bar{p})$ представляет для агента сложную вычислительную задачу, а воздействие на фонд $g_i(\bar{p})$ от манипулирования сообщаемой информацией p_i может оказаться пренебрежительно малым при наличии достаточно большого числа агентов в сети (по предварительным оценкам², $n > 5$). Кроме того, манипулирование сообщениями может привести к назначению агенту «невыгодного» плана в условиях МРС-планирования. В связи с этим примем гипотезу о «слабом влиянии» сообщения отдельного агента на размер выделяемого ему фонда поощрения, согласно которой он при выборе своего сообщения не учитывает его влияние на фонд поощрения, а только учитывает влияние оценки на назначаемый ему план. Оценка числа агентов, при котором правомерно принятие гипотезы слабого влияния, требует отдельного исследования, но выходит за рамки данной статьи.

² На примерах простых моделей для задачи распределения ограниченного ресурса показана справедливость гипотезы слабого влияния сообщения отдельного активного элемента на цену ресурса при таких же количественных оценках числа активных элементов [1].

В этом случае задачу распределения фонда G можно свести к оптимизационной задаче выбора параметров распределения $g = (g_1, \dots, g_n)$ для рассмотренного выше оптимального механизма при заданном распределении фондов. Ограничимся рассмотрением именно этой задачи: определить механизм $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$ такой, что

$$K(\mu^*(g^*)) = \sum_{i=1}^n K_i(\mu_i^{i*}(g^{i*})) = \max_g \sum_{i=1}^n K_i(\mu_i^{i*}(g^i)) \quad (25)$$

при распределении фондов $g = (g_1, \dots, g_n)$, удовлетворяющем ограничению (24), где $g^i = (g_1, \dots, g_{i-1})$, $\mu^{i*}(g^i) = (\mu_1^*(g^1), \dots, \mu_i^*(g^i))$, $\mu_i^* = \mu_i^*(g^i)$ — механизм для i -го агента, являющийся решением задачи (21).

Из приведенного выше исследования задачи построения механизмов следует справедливость следующей теоремы, определяющей решение задачи (25).

Теорема 4. Если выполняется гипотеза слабого влияния, то оптимальный механизм для сетевой структуры агентов определяется из решения задачи

$$K(\mu^*(\bar{g}^*)) = \max_g \sum_{i=1}^n \gamma_i^*(\bar{x}^{i*}(\mu_i^{i*}(\bar{g}^i)), g_i), \quad (26)$$

где $\gamma_i^*(\bar{x}^{i*}(\mu_i^{i*}(g^i)), g_i)$ — значения параметра, характеризующего эффективность механизма для i -го агента на множестве M_i при заданном наборе механизмов μ^{i*} и заданных значениях фондов g^{i-1} предшествующих по нумерации агентов при условии выполнения ограничения (24).

Примечание 7. Решение задачи (26), сформулированной в теореме 4, уже не предполагает ее декомпозицию на последовательность задач построения механизмов агентов в порядке их нумерации, как в теореме 2.

Примечание 8. Теорема 4 справедлива для обоих вариантов, когда $\Phi_i^0(\bar{y}^i, r_i) = \max_{x_i \in Y_i(\bar{y}^i, r_i)} \Phi_i(x_i, \bar{y}^i, x_i, r_i)$

либо $\Phi_i^0(\bar{y}^{i-1}, r_i) = 1$.

Примечание 9. При выполнении условий теоремы 4 имеет место инвариантность свойства неманипулируемости относительно изменения таких параметров механизма, как фонды стимулирования агентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим основные результаты:

— поставлены задачи построения оптимальных механизмов (процедур планирования, системы стимулирования, распределения фондов поощрения)



в сетевой структуре активной системы в условиях неполной информированности центра о моделях агентов;

— показано, что оптимальный механизм достаточно искать на множестве МРС-механизмов;

— предложены процедуры построения оптимальных механизмов в сетевой структуре в виде последовательности решения задач согласно нумерации агентов в сети, соответствующей порядку зависимости множеств допустимых состояний агентов от значений входов предшествующих агентов;

— описана задача распределения фонда поощрения агентов в виде оптимизационной задачи на множествах локально оптимальных механизмов для последовательности агентов;

— исследованы свойства монотонной зависимости эффективности оптимальных механизмов от параметров задач.

Представленные результаты могут применяться при построении и анализе систем организационного управления комплексами научно-технических разработок, в мультипроектных системах, для обеспечения функционирования сетевых структур сложных производственных процессов, например, сборочных производств, и разработки механизмов их ресурсного обеспечения.

Дальнейшее развитие результатов видится в направлении разработки механизмов управления в сетевых структурах, для которых неправомерно применение гипотезы о слабом влиянии сообщаемой агентами информации на выделяемые им фонды поощрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 256 с. [Burkov, V.N. Fundamentals of the mathematical theory of active systems. — Moscow: Nauka, 1977. — 256 p. (In Russian)]
2. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. — М.: Наука, 1981. — 384 с. [Burkov, V.N., Kondratiev, V.V. The mechanisms of functioning of organizational systems. — Moscow: Nauka, 1981. — 384 p. (In Russian)]
3. Еналеев А.К. Разработка механизмов стимулирования и управления в двухуровневых активных системах: автореф. дис. канд. техн. наук. — М.: МФТИ, 1980. — 18 с. [Enaleev, A.K. Razrabotka mekhanizmov stimulirovaniya i upravleniya v dvukhurovnevnikh aktivnikh sistemakh: avtoref. dis. kand. tekhn. nauk. — Moscow: MPhTI, 1980. — 18 s. (In Russian)]
4. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. — М.: Наука, 1989. — 245 с. [Burkov, V.N., Danev, B., Enaleev, A.K., et al. Large-scale systems: organizational mechanisms modeling. — Moscow: Nauka, 1989. — 245 p. (In Russian)]
5. Механизмы управления / под ред. Д.А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2011. — 192 с. [Mekhanizmi upravleniya / pod. red. D.A. Novikova. — Moscow: LENAND, 2011. — 192 s. (In Russian)]

6. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. — М.: Физматлит, 2007. — 584 с. [Novikov, D.A. Teoriya upravleniya organizatsionnimi sistemami. — Moscow: Fizmatlit, 2007. — 584 s. (In Russian)]
7. Бурков В.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А. Введение в теорию управления организационными системами: учебник. — М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 264 с. [Burkov, V.N., Korgin, N.A., Novikov, D.A. Vvedeniye v teoriyu upravleniya organizatsionnimi sistemami. — Moscow: Kn. dom «LIBROKOM», 2009. — 264 s. (In Russian)]
8. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. — М.: ИПУ РАН, 2003. — 101 с. [Novikov, D.A. Setevye strukturi i organizatsionniye sistemi. — Moscow: IPU RAN, 2003. — 101 s. (In Russian)]
9. Белов М.В., Новиков Д.А. Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования // Проблемы управления. — 2018. — № 1. — С. 47–57. [Belov, M.V., Novikov, D.A. Setevye aktivnye sistemi: modeli planirovaniya i stimulirovaniya // Problemi upravleniya. — 2018. — No. 1. — S. 47–57. (In Russian)]
10. Еналеев А.К. Оптимальный согласованный механизм в системе с несколькими активными элементами // Проблемы управления. — 2015. — № 3. — С. 20–28. [Enaleev, A.K. Optimal incentive compatible mechanism in a system with several active elements // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 78, no. 1. — P. 146–158.]
11. Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы принятия решений в управлении организационными системами: автореф. дис. д-ра техн. наук. — М.: ИПУ РАН, 2014. — 48 с. [Korgin, N.A. Nemanipuliruyemye mekhanizmi prinyatiya resheniy v upravlenii organizatsionnimi sistemami: avtoref. dis. d-ra tekhn. nauk. — Moscow: IPU RAN, 2014. — 48 s. (In Russian)]
12. Еналеев А.К. Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией // Управление большими системами. — 2010. — № 29. — С. 108–127. [Enaleev, A.K. Optimalniy mekhanizm funktsionirovaniya v aktivnoy sisteme s obmenom informatsiy // Upravleniye bolshimi sistemami. — 2010. — No. 29. — S. 108–127. (In Russian)]
13. Еналеев А.К. Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. — 2011. — № 33. — С. 143–166. [Enaleev, A.K. Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 74, iss. 3. — P. 491–505.]
14. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. — М.: СИНТЕГ, 2001. — 124 с. [Burkov, V.N., Zalozhnev, A.Yu., Novikov, D.A. Teoriya grafov v upravlenii organizatsionnimi sistemami. — Moscow: SINTEG, 2001. — 124 s. (In Russian)]
15. Бурков В.Н., Еналеев А.К. Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 3. — С. 73–80. [Burkov, V.N., Enaleev, A.K. Optimalnost printsipa otkritogo upravleniya. Neobkhodimiye i dostatochniye usloviya dostovernosti informatsii v aktivnikh sistemakh // Avtomatika i telemekhanika. — 1985. — No. 3. — S. 73–80. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 21.01.2018, после доработки 15.09.2018.

Принята к публикации 16. 09.2018.

Еналеев Анвер Касимович — канд. техн. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ anverena@mail.ru.

OPTIMALITY OF THE INCENTIVE COMPATIBLE MECHANISMS IN NETWORK ORGANIZATIONAL STRUCTURES

A.K. Enaleev

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ anverena@mail.ru

Abstract. The paper considers the problems of optimal control mechanisms design for an interconnected agents system provided incomplete awareness conditions of the governing body (center) about the parameters of agents. A directed graph that does not contain contours presents the connections of the agents in this system. Agents have their own goals and transmit information about their parameters to the center. They can intentionally distort data if distortion is beneficial to them. The center controls the behavior of agents. The behavior of agents is to inform the center about their parameters and the choice of their states. The ability of subsequent agents to select their states depends on the state selected by a preceding agent. The given directed graph determines the precedence structure of agents. The center's management consists of choosing a mechanism that includes planning procedures in the form of functions that depend on the information received from the agents and the incentive system. The incentive system consists of the functions of fines for deviating the state of the agent from the plan and the functions of encouraging agents for choosing the state. Optimal mechanisms are designed in accordance with which agents are not interested in manipulating the information communicated to the center and the implementation of plans. Conditions of incentive compatibility are determined that ensure this behavior of agents without decreasing the optimal value of the objective function of the center. The results of the study can be useful in managing the implementation of complex projects or assembly plants.

Keywords: hierarchy, network structure, mechanism design, optimization, coordination, equilibrium, sustainability, non-manipulation.

Funding. The work is performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research and JSC Russian Railways within the framework of the project No. 17-20-05216.



Новая книга



Тертычный-Даури В.Ю. ГАЛАМЕХ: в 6 т.: т. 6. Математическая механика. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2019. — 612 с. — ISBN 978-5-94052-272-0.

Книга состоит из четырех частей. В первую, обзорную, часть вошли главы, посвященные некоторым современным методам решения задачи устойчивости. Во второй и третьей, исследовательских, частях представлены оригинальные результаты по синтезу алгоритмов параметрического регулирования задачи приведения динамических систем в устойчивое состояние, рассмотрены также разнообразные задачи обеспечения условной, оптимальной и стохастической устойчивости динамических систем с помощью надлежащей настройки их параметров; содержатся результаты по выводу аппроксимирующих оценок вариационных и субоптимальных приближений. В приложении, которое составляет четвертую, справочную, часть книги, кратко изложены основы качественной теории устойчивости решений дифференциальных уравнений, важнейшие понятия, теоремы и методы Ляпунова в теории устойчивости, вопросы устойчивости систем автоматического управления и специальные вопросы теории устойчивости.

СОГЛАСОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Ч. 1. Динамическая организационная система в составе одного центра и множества агентов

М.В. Белов

Аннотация. Рассмотрены постановка и вопросы решения задач согласованного управления многоэлементными динамическими организационными/активными системами (ОС) с ограничениями на совместную деятельность их элементов в виде технологических сетей. Рассмотрена ОС, состоящая из одного центра и множества подчиненных ему агентов. Доказаны утверждения о том, что для любой допустимой траектории результатов может быть построена согласованная компенсаторная система стимулирования, которая реализует (как равновесие в доминантных стратегиях) траекторию действий агентов, приводящих к требуемой траектории результатов; декомпозирует задачу управления по агентам и по периодам времени; гарантированно обеспечивает (по всем возможным дальновидностям агентов) минимальные затраты управляющего органа (центра) на реализацию данной траектории результатов. Показано, что в таких системах стимулирования размеры платежей зависят только от соответствующих значений функций затрат, которые, в свою очередь, косвенно учитывают технологические функции, структуру сетей и структуру ОС в целом. Поставлена задача оптимального планирования и указан алгоритм ее решения.

Ключевые слова: стимулирование, многоуровневые динамические активные системы, согласованное управление.

ВВЕДЕНИЕ

Принцип согласованного управления представляет собой один из основных в *теории активных систем* [1–4] и в *теории управления организационными системами* [5], причем для случая полной информированности в активных системах принцип был впервые сформулирован в работах [1, 2], где были получены основополагающие результаты.

Рассмотрим объект управления — иерархию взаимосвязанных *агентов*, которые образуют многоуровневую *организационную систему* (ОС), подсистемы которой также представляют собой ОС, каждая из которых — сложная *сетевая структура* [6–9].

В книге [5] приведен *принцип декомпозиции игры агентов*, в рамках которого управляющий орган — *центр* — всегда может (без потери эффективности)

в детерминированной двухуровневой многоэлементной статической ОС применять систему стимулирования агентов, при которой выбор требуемого для центра действия составляет доминантную стратегию каждого агента. В настоящей работе эта идея, следуя изложению статьи [10] обобщается на случай динамических и многоуровневых детерминированных ОС. В первой части настоящей статьи рассматривается двухуровневая (центр — агенты) многоэлементная динамическая ОС, в которой ограничение на совместную деятельность агентов задано в форме технологической сети (ориентированного графа без контуров). Для этой ОС строится оптимальная относительно затрат центра компенсаторная (основывающаяся на принципе компенсации затрат агентов [5]) система стимулирования, декомпозирующая игру агентов по агентам и периодам. Фактор динамики рассматривается в

смысле многошагового процесса принятия решений, в то время как динамика управляемой организационной системы задается технологией совместной деятельности агентов и специально не исследуется.

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТЕВОЙ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим многоэлементную детерминированную динамическую организационную систему [11] с одним центром и множеством агентов (обозначим через $N = \{1, 2, \dots, n\}$ конечное множество агентов, $n \geq 2$). Определим *технологию* совместной деятельности агентов, которую опишем *сетью* $G = (N, E)$ с правильной нумерацией [12] (которая всегда возможна в графе без контуров), и будем считать, что агенты помечены именно этими номерами. Вершины сети соответствуют действиям агентов, а множество дуг $E \subseteq N \times N$ отражает «технологические» связи между ними. Через $N(i) = \{j \in N | (j, i) \in E\}$ обозначим множество *предшественников* i -го агента в сети G , $i \in N$. Считаем, что сеть имеет множество *входов* $M_0 \subseteq N$ и единственный *выход* — n -ю вершину, отличающуюся тем, что конечной (например, рыночной) ценностью обладает только результат деятельности выхода сети — результат динамической сетевой ОС в целом, который приносит центру доход.

Через M_k обозначим множество вершин, в которые входят дуги только из вершин, принадлежащих множествам $\{M_j, j \in \{1, \dots, k-1\}\}$; число k назовем *рангом* вершины, принадлежащей множеству M_k .

Рассмотрим функционирование данной ОС в течение $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ периодов дискретного времени, где T — *горизонт времени*. В периоде t i -й агент выбирает и реализует свое *действие* (целенаправленную активность), которое характеризуется набором параметров $y_i(t) \in Y_i$, где Y_i — множество возможных значений параметров его действий, включающее в себя в качестве одного из допустимых действий отказ от участия в ОС. Действие i -го агента (вместе с результатами его предшественников) определяет *результат* его деятельности, который, в свою очередь, описывается набором параметров $z_i(t) \in Z_i$, где Z_i — множество возможных значений параметров его результатов. Будем считать, что Y_i и Z_i — подмножества конечномерного евклидова пространства или некоторого конечного множества. В технологических сетях часто множества Y_i и Z_i зависят от выбора действий предшественниками i -го агента, т. е. множества допустимых значений представляют

собой функции от результатов его предшественников $Y_i(\{Z_k; k \in N(i)\})$ (где $N(i)$ — множество предшественников i -го агента), что подробно рассматривается, например, в статье [8]. Однако в данной постановке, как будет видно далее, наличие или отсутствие этих зависимостей не сказывается на полученных результатах, поэтому не будем указывать эти зависимости явно там, где это не приводит к разночтениям.

В пределах каждого периода агенты выбирают и выполняют действия, не вступая в коалиции, в последовательности соответственно номерам в сети G , соблюдая таким образом технологию совместной деятельности. Обозначим через $y_D(t)$ вектор действий агентов с номерами из множества $D \subseteq N$, через $z_D(t)$ — вектор результатов деятельности агентов с номерами из этого множества, через $y_{-i} = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ — вектор действий всех агентов, кроме i -го.

Обозначим $\tilde{W}_i^t$ множество возможных значений действий i -го агента и его предшественников в течение периодов $\overline{1}, t$, заметим $\tilde{W}_i^t \subseteq (Y_i)^t \times \prod_{k \in N(i)} (Z_k)^t$.

Связь результата деятельности агента с его действием и используемыми им в процессе этой деятельности результатами других агентов определяется «*технологической функцией*» $Q_i^t: \tilde{W}_i^t \rightarrow Z_i$, т. е.

$z_i(t) = Q_i^t(y_i[1^*t], z_{N(i)}[1^*t])$ (здесь и далее с помощью нотации $\xi[1^*t]$ обозначим наборы всех значений величины $\xi(\tau)$ (возможно, многомерной) для $\tau = \overline{1}, t$). Для всех $i \in M_0$ имеет место $N(i) = \emptyset$,

поэтому положим $z_i(t) = Q_i^t(y_i[1^*t], z_0[1^*t])$, где z_0 — известный L -мерный вектор «*входов*» сети.

Сетевые структуры ОС исследуются в работах [6–9]; в настоящей статье сеть задает технологические связи между агентами, при этом рассматривается многошаговое выполнение деятельности.

Задачу управления рассмотрим и решим в двух постановках, когда верны предположение П1 или предположение П2.

Предположение П1. Центр наблюдает только значение выхода сети $z_n(t)$, а функции $Q_i^t(\cdot)$ взаимно однозначны относительно действий самого агента и результатов его предшественников в текущем периоде, т. е. при заданных результатах деятельности предшественников агента в текущем периоде $z_{N(i)}(t)$ (и известных $y_i[1^*(t-1)]$ и $z_{N(i)}[1^*(t-1)]$ в предыдущих периодах) текущее действие агента $y_i(t)$ однозначно определяет ре-

зультат его деятельности $z_i(t)$, и наоборот — зная действия $y_i[1*(t-1)]$, результат деятельности агента $z_i(t)$ и результаты его предшественников $z_{N(i)}(t)$, можно однозначно восстановить его действие в текущем периоде.

Предположение П2. Центр в каждом периоде наблюдает фактические действия агентов (в этом периоде).

Обсудим условия, при которых справедливы предположения П1 и П2.

Прежде всего отметим, что предположение П2 достаточно редко выполняется в сложной практической деятельности потому, что наблюдение действий требует от центра временных затрат, сравнимых с собственно выполнением действий. Как правило, временной ресурс управляющего центра существенно более дорогой, чем соответствующий ресурс управляемых агентов, поэтому контроль в той или иной форме обычно осуществляется на основании результатов. Непосредственное наблюдение действий возможно и оправданно в случае достаточно простых и стандартизованных видов деятельности, допускающих бинарное тестирование — выполнены или нет технологические требования.

Предположение П1 характеризует технологическую функцию совместной деятельности агентов, когда действие каждого из них влияет на результат таким образом, что не может быть замещено каким-либо другим, т. е. технология каждого из агентов уникальна в рамках ОС. Уникальность технологии может проявляться, например, в том, что действие каждого агента может реализовываться только при определенных сочетаниях результатов его предшественников (хотя в общем случае наличие связей между агентами не рассматривается как необходимое условие уникальности технологии каждого из них). Под агентами могут пониматься как отдельные индивиды — сотрудники предприятий, так и целые организации. В качестве содержательных примеров можно привести работу сборочного цеха (или его участка) аэрокосмического предприятия или кораблестроительной верфи, сооружение нефтехимического цеха или изготовление деталей, сборку из них некоторого изделия и его наладку.

Технология именно комплексной деятельности характеризуется важной особенностью: каждый агент в своей деятельности использует результаты предшественников, потому его результат является более сложным объектом, чем результаты предшественников (и нижестоящих подсистем) и потому требует более «богатого» описания. Это объясняет рост размерностей множеств возможных значений результатов агентов по сравнению с

результатами предшественников. Принцип усложнения результата противопоставляет данную постановку задачи традиционному подходу к рассмотрению многоуровневых систем [13], предполагающему «агрегирование» результатов предшествующих агентов и нижестоящих подсистем, что не увеличивает сложность (и соответственно размерность вектора характеристик) результата. В случаях, когда действия агентов не усложняют результат, целесообразно пользоваться различными механизмами стимулирования [15], например, «теоремой об идеальном агрегировании».

Практически во всех упомянутых случаях множества значений возможных действий агентов и их результатов целесообразно считать конечными: агенты выполняют « типовые операции », т. е. значения характеристик (возможно, многомерных) их действий и результатов принадлежат конечному числу областей, внутри каждой из которых значения характеристик неразличимы с точки зрения центра.

Рассмотрим i -го агента на промежутке времени $t = \{1, 2, \dots, T\}$ и $N(i)$ — множество его предшественников. Согласно определению технологической функции, приведенному выше, результат $z_i(t)$ действий i -го агента (и его предшественников) зависит от кортежа из $t \times (|N(i)| + 1)$ величин $\{y_i(\tau), z_k(\tau): \tau \in \{1, 2, \dots, t\}, k \in N(i)\}$, причем зависимость от $|N(i)| + 1$ из них — взаимно-однозначная. В случае, когда агенты выполняют « типовые операции », множества Y_i значений их возможных действий конечны с точки зрения центра, тогда и множества Z_i значений возможных результатов также конечны. В этом случае технологическая функция $Q_i^t(\cdot)$ представляет собой некоторое правило нумерации сочетаний $\{y_i(\cdot), z_k(\cdot)\}$, допустимых относительно специфики выполняемых агентами действий.

Будем считать, что выбор действия $y_i(t)$ требует от i -го агента затрат, зависящих в общем случае от действий всех агентов в ОС, $c_i^t(y_N[1*t])$ — неотрицательные функции затрат, $c_i^t(\cdot): \prod_{k \in N} (Y_k)^t \rightarrow \mathbb{R}_+^1$.

Предложенный вид зависимости затрат от предыстории действий агентов также характерен для сложной практической деятельности, примеры которой рассмотрены выше, в частности, (трудо)затраты группы слесарей-сборщиков на линии конечной сборки изделия авиакосмической фирмы зависят от предыстории их действий и действий их смежников¹.

¹ В большинстве традиционных постановок аналогичных задач затраты агента зависят от действий не всех агентов, а только предшественников. Однако зависимость «от всех» — более общая и не сужает получаемые результаты.

Тогда *технология деятельности* i -го агента описывается кортежем $\langle N(i), c_i^t(\cdot), Q_i^t(\cdot), t \in \{1, 2, \dots, T\} \rangle$.

Сеть G и технологические функции $Q_i^t(\cdot)$ для каждой траектории действий $y_N[1*t]$ задают единственную траекторию выхода сети, будем обозначать эту траекторию через $z_n^t(y_N[1*t])$.

Если верно предположение П1, центр может применять $\sigma_i^t(\cdot)$ — неотрицательные функции *стимулирования* i -го агента в периоде t , в качестве аргументов которых выступают значения выхода сети $\sigma_i^t(z_n^t[1*t]): (Z_n^t)^t \rightarrow \mathbb{R}_+^1$. В случае справедливости предположения П2 центр может применять неотрицательные функции стимулирования, в качестве аргументов которых выступают наблюдаемые им действия агентов: $\tilde{\sigma}_i^t(y_N[1*t]): \prod_{k \in N} (Y_k)^t \rightarrow \mathbb{R}_+^1$.

Для того чтобы описать игру агентов, необходимо доопределить порядок функционирования и информированность — кто из них, когда и какие решения (из каких множеств) принимает, и что каждый знает на момент принятия решений. Будем считать, что центр, зная сеть, технологические функции и функции затрат агентов, сначала сообщает им функции стимулирования $\{\sigma_i^t\}$, $t = \overline{1, T}$, на все последующие периоды времени (центр тем самым осуществляет «программное управление»), не имея возможности менять стимулирование в дальнейшем. Сеть, множества допустимых действий, дальновидности, технологические функции и функции затрат всех агентов в каждом периоде представляют собой общее знание для них и центра [5]. Зная текущую историю игры (совокупность выбранных в предыдущих периодах действий всех агентов и результатов их деятельности) и функции стимулирования всех агентов, последние выбирают свои действия в этом периоде однократно, не вступая в коалиции, в последовательности соответственно номерам в сети G , соблюдая таким образом технологию совместной деятельности. Пусть агенты дальновидны. Выбирая действие $y_i(t)$ и прогнозируя свои действия $y_i(\tau)$, $\tau \in \{t+1, \dots, T\}$, i -й агент стремится максимизировать свою целевую функцию

$$F_i(\{\sigma_i^t\}, \tau = \overline{t, T}; y_N[1*T]) = \sum_{\tau=t}^T \delta_i(t, \tau) f_i^t(\sigma_i^t, y_N[1*\tau]), \quad (1)$$

где $\delta_i(\cdot) \geq 0$ — распределение дальновидностей агента, $f_i^t(\cdot)$ — целевая функция агента в периоде t , равная разности между вознаграждением и затратами (получение агентом резервной полезности при отказе от участия в ОС учтено в функциях стимулирования $\{\sigma_i^t\}$ — см. далее соотношения (4) и (7)):

$$f_i^t(\sigma_i^t, y_N[1*t]) = -c_i^t(y_N[1*t]) + \begin{cases} \sigma_i^t(z_n^t(y_N[1*t])), & \text{если верно П1,} \\ \tilde{\sigma}_i^t(y_N[1*t]), & \text{если верно П2,} \end{cases} \\ i \in N, \quad t = \overline{1, T}.$$

Описанную модель — совокупность множества агентов N (с их интересами и предпочтениями), сети G и набора $\{Q_i^t(\cdot)\}$ технологических функций — назовем *динамической сетевой ОС* (ДСОС), которая является динамическим обобщением как модели сетевой активной системы, так и модели «производственных цепочек» на случай сетевой структуры [6].

В данной повторяющейся игре агентов *доминантной стратегией* i -го агента (при системе стимулирования $\{\sigma_N^t\}$, $t = \overline{1, T}$) назовем $y_i^d[1*T]$ траекторию его действий такую, что

$$\forall y_{-i}[1*T] \in \prod_{k \in N; k \neq i} (Y_k)^T; \quad \forall t_1 \in \overline{1, T}; \quad \forall t_2 \in \overline{t_1, T};$$

$$\forall s[t_1*t_2] \in (Y_i)^{t_2-t_1+1}; \quad s[t_1*t_2] \neq y_i^d[t_1*t_2];$$

$$F_i(\{\sigma_N^t\}; \{y_i^d[1*T], y_{-i}[1*T]\}) \geq F_i(\{\sigma_N^t\};$$

$$\{y_i^d[1*(t_1-1)], s[t_1*t_2], y_i^d[(t_2+1)*T], y_{-i}[1*T]\}).$$

Доминантная стратегия $y_i^d[1*T]$ обеспечивает максимум целевой функции i -го агента независимо от выбора других агентов $y_{-i}[1*T]$.

Равновесием в доминантных стратегиях (РДС) называется совокупность доминантных стратегий всех агентов: $y_N^d[1*T] = \{y_1^d[1*T], \dots, y_i^d[1*T], \dots, y_n^d[1*T]\}$.

Сформулируем *задачу стимулирования в ДСОС*. Обозначим через σ_D^t вектор-функцию стимулирования агентов из множества $D \subseteq N$ в периоде времени $t = \overline{1, T}$. Рассмотрим повторяющуюся игру агентов в течение периодов от 1 до T . Обозначим через $E(\{\sigma_D^t\}, \tau = \overline{1, T})$ множество траекторий

действий $y_N[1^*T]$ — множество решений игры агентов (равновесий в любом смысле, например, совершенных по подыграм равновесий), реализуемых системой стимулирования $\{\sigma_N^t\}$.

Предположим, что центр полностью *дальновиден* (степень его дальновидности равна T) [11]. Тогда *целевая функция ДСОС* — критерий эффективности управления (стимулирования) ДСОС — представляет собой разность между доходом центра и его суммарными затратами на стимулирование всех агентов:

$$\Phi(\{\sigma_N^t\}, \tau = \overline{1, T}) = \max_{y_N[1^*T] \in E(\{\sigma_N^t\}, t = \overline{1, T})} \left\{ \sum_{t=1}^T \delta(1, t) \phi(z_n^t(y_N[1^*t])) \right\}, \quad (2)$$

где $\delta(\cdot) \geq 0$ — распределение дальновидностей центра, а функция $\phi(\cdot)$ имеет вид $h'(z_n^t) \geq 0$ — доход центра в периоде t :

$$\phi(z_n^t(y_N[1^*t])) = h'(z_n^t(y_N[1^*t])) - \begin{cases} \sum_{i=1}^n \sigma_i^t(z_n^t(y_N[1^*t])), & \text{если верно П1,} \\ \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^t(y_N[1^*t]), & \text{если верно П2.} \end{cases}$$

Вычисление максимума в формуле (2) по множеству равновесий $E(\cdot)$ соответствует гипотезе благожелательности [5]: из множества равновесий $E(\cdot)$ агенты выберут наиболее выгодное для центра. Если гипотеза благожелательности не соблюдается, следует пользоваться принципом гарантированного результата и брать минимум среди траекторий, принадлежащих множеству равновесий $E(\cdot)$.

Задача управления заключается в построении системы стимулирования $\{\sigma_N^t\}$, имеющей максимальную эффективность, т. е. обеспечивающей максимум целевой функции центра $\Phi(\cdot)$:

$$\Phi(\{\sigma_N^t\}) \rightarrow \max_{\sigma_N^t}. \quad (3)$$

Значение функционала $\Phi(\cdot)$, получаемое в результате решения задачи (3), назовем *эффективностью ДСОС*.

Задача (1)–(3) не тривиальна — «прямой» поиск ее решения не представляется возможным. Поэтому воспользуемся свойствами ДСОС, позволяющими применить общие теоремы о декомпозиции игры агентов [5, 6].

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ИГРЫ АГЕНТОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТЕВОЙ ОС

Исследования реализуемых в повторяющихся играх траекторий действий агентов следуют одной общей идее (см. обзоры результатов по так называемым «народным теоремам» (folk theorem) для повторяющихся игр в нормальной форме [15–18] и для иерархических игр [19–22]), а именно, идее «достаточно сильного» наказания любого агента за любое (даже однократное) отклонение от требуемого от него выбора. Отметим, что на этой же идее основывается *теорема Гермейера* для игр Γ_2 [23], лежащая в основе всех задач стимулирования, начиная, например, с рассмотренной в статье [24]. На этой же идее базируются результаты о декомпозиции игры агентов в работах [5, 6]. Применим ее для ДСОС.

Построим компенсаторную систему стимулирования в ДСОС, оптимальную в смысле затрат центра (минимизирующую его суммарные (по периодам и агентам) затраты на стимулирование агентов — $\sigma_i^t(\cdot)$) в двух постановках, когда верны предположение П1 или предположение П2.

Зафиксируем некоторую желательную для центра траекторию выхода сети $x[1^*t]$, траекторию *планов по результату*, и траекторию *планов по действию* $y_N(x[1^*t])$ — набор векторов действий агентов, приводящих к траектории-выходу $x[1^*t]$.

При справедливости предположения П1 несложно показать, что для любой осуществимой траектории выходов $x[1^*t]$ последовательно по $t = 1, 2, \dots, T$ может быть построена единственная (!) траектория планов по действиям всех агентов $y_N(x[1^*t])$, обеспечивающая данный выход сети $z_n[1^*t] = x[1^*t]$.

Обозначим:

$y_N^n[1^*t]$ — траектория планов по действиям всех агентов (запись $x[1^*t]$ будем опускать там, где это не приводит к неоднозначности);

$y_i^n[1^*t]$ — траектория планов по действию i -го агента;

$y_i^n(t)$ — t -й элемент траектории планов по действию $y_i^n[1^*t]$ i -го агента;

$Z_i^t(y) \subseteq Z_n$ — подмножество множества Z_n возможных выходов сети, каждый элемент которого соответствует выходу $z_n(t)$ при условии, что i -й агент в t -м периоде выбрал действие y , а остальные агенты — любые допустимые для них действия при

любых траекториях действий $y_N[1^*(t-1)]$ всех агентов в течение предыдущих периодов, т. е.

$$Z'_i(y) = \left\{ z_n(\{y, y_{-i}(t), y_N[1^*(t-1)]\}): \right. \\ \left. \forall y_{-i}(t) \in \prod_{k \in N; k \neq i} Y_k; \forall y_N[1^*(t-1)] \in \prod_{k \in N} (Y_k)^{t-1} \right\};$$

$u_i > 0$ — резервная полезность i -го агента (выигрыш агента при отказе от участия в ОС) в течение одного периода.

Сформируем функцию стимулирования для каждого агента $i \in N$ и $t \in \overline{1, T}$, предполагая соблюдение гипотезы доброжелательности:

$$\hat{c}_i^t(z_n[1^*t]) = \begin{cases} c_i^t(y_N(z_n[1^*t])) + u_i, & z_n(t) \in Z'_i(y_i^{\Pi}(t)), \\ 0, & z_n(t) \notin Z'_i(y_i^{\Pi}(t)). \end{cases} \quad (4)$$

С содержательной точки зрения система стимулирования (4) такова, что в каждом периоде каждому агенту гарантируется компенсация его фактических затрат $c_i^t(\cdot)$ и обеспечение резервной полезности u_i в том случае, если он выбрал требуемое от него (плановое) действие $y_i^{\Pi}(t)$ при любой обстановке $y_{-i}(t) = (y_1(t), \dots, y_{i-1}(t), y_{i+1}(t), \dots, y_n(t))$ игры для него в текущем периоде (любых фактических действиях других агентов) и при любой истории игры $y_N[1^*(t-1)]$ (любой траектории действий всех агентов в течение предыдущих периодов). В противном случае стимулирование равно нулю.

Утверждение 1. Если выполнено предположение П1, то система стимулирования (4) реализует траекторию планов по действию $y_N(x[1^*t])$ как РДС игры агентов с минимальными затратами центра на стимулирование. Выигрыши всех агентов в каждом периоде в этом равновесии тождественно равны их резервным полезностям. Затраты центра при этом

$$C(x[1^*T]) = \sum_{t=1}^T \delta(1, t) \sum_{i=1}^n (c_i^t(y_N(x[1^*t])) + u_i). \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный период времени $t \in \overline{1, T}$, зафиксируем произвольный номер агента $i \in N$. Пусть $y_N[1^*(t-1)]$ — некоторая история игры, а $y_{-i}(t)$ — некоторая обстановка игры для этого агента. Рассмотрим все возможные альтернативы поведения i -го агента.

А. Пусть в периоде t агент i выбрал плановое действие $y_i^{\Pi}(t)$. Тогда $y_N[1^*t] = \{y_i^{\Pi}(t), y_{-i}(t), y_N[1^*(t-1)]\}$ и

$z_n(y_N[1^*t]) \in Z'_i(y_i^{\Pi}(t))$. Согласно функции стимулирования (4) значение его целевой функции

$$f_i(\hat{c}_N^t; y_N[1^*t]; t) = \hat{c}_i^t(z_n(y_N[1^*t])) - c_i^t(y_N[1^*t]) = \\ = c_i^t(y_N[1^*t]) + u_i - c_i^t(y_N[1^*t]) = u_i > 0.$$

Б. Пусть в периоде t агент i отказался от участия в ОС, тогда значение его целевой функции $f_i(\hat{c}_N^t; y_N[1^*t]) = u_i > 0$. Отметим существенность того, что последнее неравенство строгое, так как если оба неравенства нестрогие ($u_i \geq 0$ и $c_i^t(\cdot) \geq 0$), то из целевой функции агента — см. далее формулу (6) — следует, что множество РДС содержит не только «стратегии любого агента, состоящие из произвольного сочетания плановых действий и отказа от участия в ОС в каждом периоде», но и, возможно, еще какие-то; поэтому необходимо потребовать, чтобы одно из неравенств было строгим: или $u_i > 0$, или $c_i^t(\cdot) > 0$ (последнее предположение — слишком сильное, так как обычно считается, что при отказе от участия в ОС агент несет нулевые затраты).

В. Пусть в периоде t агент i выбрал действие $s \in Y_i$, отличающееся от планового: $s \neq y_i^{\Pi}(t)$. Тогда история игры такова: $y_N[1^*t] = \{s, y_{-i}(t), y_N[1^*(t-1)]\}$ и $z_n(y_N[1^*t]) \notin Z'_i(y_i^{\Pi}(t))$ (в силу предположения П1). Согласно выражению (4), значение его целевой функции

$$f_i(\hat{c}_N^t; y_N[1^*t]) = \hat{c}_i^t(z_n(y_N[1^*t])) - c_i^t(y_N[1^*t]) = \\ = 0 - c_i^t(y_N[1^*t]) \leq 0.$$

Отметим, что опции А — В для каждого агента и для каждого периода t получены независимо от предыдущих и последующих действий каждого из агентов.

В итоге, целевая функция агента примет вид:

$$F_i(\{\hat{c}_N^t\}; y_N[1^*T]) = \\ = u_i \Delta_i - \sum_{\tau \in \Theta_i} \delta_i(1, \tau) [u_i + c_i^{\tau}(y_N[1^*\tau])], \quad (6)$$

где Θ_i — множество периодов, в которых агент участвовал в ОС, но отклонился от плановой траектории

$$y_i^{\Pi}[1^*T], \text{ а } \Delta_i = \sum_{\tau=1}^T \delta_i(1, \tau).$$

В формуле (6) уменьшаемое $u_i \Delta_i$ не зависит от выбора агента, а так как $c_i^t(\cdot) \geq 0$, $u_i > 0$, $\delta_i(\cdot) \geq 0$, то разность (6) достигает максимума, когда множество $\Theta_i = \emptyset$.

Отсюда следует, что стратегия любого агента, состоящая из произвольного сочетания плановых действий и отказа от участия в ОС в каждом периоде, — доминантная. В частности, траектория выполнения планов по действию представляет собой доминантную стратегию: для нее $\Theta_i = \emptyset$, тогда $F_i(\{\hat{c}_N^t\}; \{y_i^{\Pi}[1^*T]; y_{-i}[1^*T]\}) = u_i \Delta_i$.

Проверим это. Рассмотрим траекторию действий i -го агента, когда на промежутке периодов от первого до t_1 -го (не включая его) он реализовывал плановые действия $y_i^{\Pi}[1^*(t_1-1)]$, на промежутке от t_1 -го до t_2 -го периодов

принимал участие в ОС, но реализовывал некоторые действия $s[t_1^*t_2]$, отличающиеся от плана: $s[t_1^*t_2] \neq y_i^n[t_1^*t_2]$, далее снова следовал плану по действиям $y_i^n[(t_2 + 1)^*T]$.

Значение целевой функции агента при такой траектории действий соотносится с максимальным значением при плановой траектории как

$$F(\{\hat{\sigma}_N^t\}; \{y_i^n[1^*(t_1 - 1)], s[t_1^*t_2], y_i^n[(t_2 + 1)^*T], y_{-i}[1^*T]\}) = u_i\Delta_i - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \delta_i(1, \tau)[u_i + c_i^\tau(\{y_i^n[1^*(t_1 - 1)], s[t_1^*\tau], y_{-i}[1^*\tau]\})] < u_i\Delta_i = F(\{\hat{\sigma}_N^t\}; \{y_i^n[1^*T], y_{-i}[1^*T]\}).$$

Аналогично, отказ i -го агента от участия в ОС на любом промежутке от t_1 -го до t_2 -го периодов не увеличивает значение целевой функции.

Согласно выражению (6), максимальные значения целевой функции i -го агента ($u_i\Delta_i$) не зависят от действий других агентов, поэтому траектория $y_N(x[1^*T])$, когда все агенты следуют планам по действиям в каждом периоде, представляет собой (одно из) РДС. Тогда в предположении выполнения гипотезы доброжелательности все агенты выберут $y_N(x[1^*T])$. Следовательно, система стимулирования (4) реализует плановую траекторию — вектор действий всех агентов $y_N(x[1^*T])$ — как РДС, при этом суммарные затраты центра определяются по формуле (5).

Покажем что система стимулирования (4) обеспечивает затраты центра на минимально возможном уровне (5) среди всех систем стимулирования, реализующих выход сети $x[1^*T]$.

Пусть существует другая система стимулирования $\{\sigma_N^t\}$, реализующая выход сети $x[1^*T]$ и, следовательно, тот же вектор действий агентов $y_N(x[1^*T])$ и характеризующаяся строго меньшими суммарными затратами центра на стимулирование. Тогда найдется по крайней мере один агент $j \in N$, для которого хотя бы в одном периоде $t \in \overline{1, T}$ выполнено $\sigma_j^t(y_N(x[1^*t])) < c_j^t(y_N(x[1^*t])) + u_j$, т. е. значение его целевой функции строго меньше резервной полезности. Но тогда для этого агента в таком периоде целесообразно отказаться от участия в данной системе и получения выигрыша, равного резервной полезности. Получаем противоречие, утверждение 1 доказано. ♦

Содержательно утверждение 1 означает, что компенсаторная система стимулирования (4) реализует траекторию действий агентов (как РДС их игры), приводящих к требуемой траектории результатов сети, декомпозирует задачу по агентам и по периодам и обеспечивает гарантированно (по всем возможным дальновидностям агентов) минимальные затраты центра на реализацию траектории

результатов сети. Система стимулирования (4) при этом такова, что агент получает компенсацию затрат и резервной полезности, если точно следует плану независимо от всех остальных агентов и не получает ничего, отклоняясь от плана. Применяя эту систему стимулирования, центр делает невыгодным для агента даже единичное отклонение от плановой траектории, независимо от дальновидности агента (сколько будущих периодов времени он учитывает, принимая текущее решение). К тому же центр «берет на себя» всю тяжесть решения задачи планирования, в том числе учет взаимовлияния решений, принимаемых в различные периоды с учетом дисконтирования и пр.

Пусть теперь выполнено предположение П2 (центр наблюдает фактические действия агентов в каждом периоде). В этом случае центр может формировать систему стимулирования, пользуясь своей информированностью о действиях агентов, на основе траектории плана по действиям.

Зафиксируем некоторую желательную для центра траекторию *планов по действию* $y_N^n[1^*t]$. Сформируем функцию стимулирования для каждого $i \in N$ и $t \in \overline{1, T}$, предполагая справедливость гипотезы доброжелательности:

$$\hat{\sigma}_i^t(y_N^n[1^*t]) = \begin{cases} c_i^t(y_N^n[1^*t]) + u_i, & y_i(t) = y_i^n(t), \\ 0, & y_i(t) \neq y_i^n(t). \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство утверждения 1 может быть распространено на данный случай с точностью до обозначений, поэтому справедливо

Утверждение 2. Если выполнено предположение П2, то система стимулирования (7) реализует траекторию *планов по действию* $y_N^n[1^*t]$ как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов с минимальными затратами центра на стимулирование. Выигрыши всех агентов в каждом периоде в этом равновесии тождественно равны их резервным полезностям. Затраты центра при этом

$$C(y_N^n[1^*t]) = \sum_{t=1}^T \delta(1, t) \sum_{i=1}^n (c_i^t(y_N^n[1^*t]) + u_i). \quad \diamond \quad (8)$$

Если гипотеза доброжелательности не соблюдается, то следует дополнить функции стимулирования (4) и (7) стимулирующими надбавками $\varepsilon_i > 0$, которые соответствующим образом увеличат затраты центра:

— если выполнено предположение П1, то:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^t(z_n[1^*t]) &= \\ &= \begin{cases} c_i^t(y_N(z_n[1^*t])) + u_i + \varepsilon_i z_n(t) \in Z_i^t(y_i^n(t)), \\ 0, \end{cases} \\ &\quad z_n(t) \notin Z_i^t(y_i^n(t)), \\ C(x[1^*T]) &= \\ &= \sum_{t=1}^T \delta(1, t) \sum_{i=1}^n (c_i^t(y_N^*(x[1^*t])) + u_i + \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (9)$$

— если справедливо предположение П2, то:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^t(y_N^n[1^*t]) &= \begin{cases} c_i^t(y_N[1^*t]) + u_i + \varepsilon_i y_i(t) = y_i^n(t), \\ 0, \end{cases} \\ &\quad y_i(t) \neq y_i^n(t), \\ C(y_N^n[1^*T]) &= \\ &= \sum_{t=1}^T \delta(1, t) \sum_{i=1}^n (c_i^t(y_N^n[1^*t]) + u_i + \varepsilon_i). \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае единственным будет РДС, в котором все агенты в каждом периоде выбирают требуемые от них действия $y_i^n(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что в динамической сетевой организационной системе для любой осуществимой траектории результатов сети $z_n[1^*T]$ может быть построена компенсаторная система стимулирования, определяемая выражением (4) или (7) ((9) или (10)) и утверждениями 1 или 2, которая:

— реализует траекторию действий агентов (как РДС их игры), приводящих к требуемой траектории результатов $z_n[1^*T]$,

— декомпозирует задачу по агентам и по периодам,

— обеспечивает гарантированно (по всем возможным дальновидностям агентов) минимальные затраты центра на реализацию траектории $z_n[1^*T]$, определяемые выражениями (5) или (8).

Важно отметить, что декомпозиция задачи по агентам и периодам не отменяет взаимодействий агентов. При соблюдении предположений П1 или П2 и других условий задачи центру удастся построить такую оптимальную систему стимулирования ((4) или (7), или (9), или (10)), которая обеспечивает равновесие в доминантных стратегиях игры агентов независимо от их взаимосвязей — технологии динамической сетевой организационной системе: структуры сети G и совокупности технологических функций.

Во второй части статьи полученные результаты будут распространены на случай многоуровневых ОС и неопределенных затрат агентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еналеев А.К. Разработка механизмов стимулирования и управления в двухуровневых активных системах: автореф. дис. канд. техн. наук. — М.: МФТИ, 1980. — 18 с. [Enaleev, A.K. Razrabotka mekhanizmov stimulirovaniya i upravleniya v dvukhurovnevnykh aktivnykh sistemakh: avtoref. dis. kand. tekhn. nauk. — М.: МФТИ, 1980. — 18 s. (In Russian)]
2. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В. Двухуровневые активные системы. IV. Цена децентрализации механизмов функционирования // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 6. — С. 110—116. [Burkov, V.N., Enaleev, A.K., Kondrat'ev, V.V. Dvukhurovnevye aktivnye sistemy. IV. Tsena detsentralizatsii mekhanizmov funktsionirovaniya // Avtomatika i telemekhanika. — 1980. — No. 6. — S. 110—116. (In Russian)]
3. Ашимов А.А., Бурков В.Н., Джапаров Б.А., Кондратьев В.В. Согласованное управление активными производственными системами. — М.: Наука, 1986. — 248 с. [Ashimov, A.A., Burkov, V.N., Dzhabarov, B.A., Kondrat'ev, V.V. Soglasovannoe upravlenie aktivnymi proizvodstvennymi sistemami. — М.: Nauka, 1986. — 248 s. (In Russian)]
4. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. — М.: Наука, 1981. — 384 с. [Burkov, V.N., Kondrat'ev, V.V. Mekhanizmy funktsionirovaniya organizatsionnykh sistem. — М.: Nauka, 1981. — 384 s. (In Russian)]
5. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами: 3-е изд. — М.: Физматлит, 2012. — 604 с. [Novikov, D.A. Teoriya upravleniya organizatsionnymi sistemami: 3-e izd. — М.: Fizmatlit, 2012. — 604 s. (In Russian)]
6. Белов М.В., Новиков Д.А. Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования // Проблемы управления. — 2018. — № 1. — С. 54—64. [Belov, M.V., Novikov, D.A. Network Active Systems: Planning and Simulation Models // Control Sciences. — 2018. — No. 1. — P. 54—64. (In Russian)]
7. Еналеев А.К. Модели и методы построения механизмов стимулирования в сетевых организационных структурах / Материалы 11-й Междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2018, Москва). — М.: ИПУ РАН. — 2018. — Т. 1. — С. 150—152. [Enaleev, A.K. Optimal Mechanism at Network Active Systems / 2018 Eleventh International Conference «Management of large-scale system development» (MLSD). — Moscow: IPU RAN. — 2018. — Vol. 1. — P. 150—152. (In Russian)]
8. Еналеев А.К. Оптимальность согласованных механизмов в сетевых организационных структурах // Проблемы управления. — 2020. — № 1. — С. 24—38. [Enaleev, A.K. Optimality of the Incentive Compatible Mechanisms in Network Organizational Structures // Control Sciences. — 2020. — No. 1. — P. 24—38. (In Russian)]
9. Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. — М.: ИПУ РАН, 2003. — 102 с. [Novikov, D.A. Setevye struktury i organizatsionnye sistemy. — М.: IPU RAN, 2003. — 102 s. (In Russian)]
10. Новиков Д.А., Шохина Т.Е. Механизмы стимулирования в динамических активных системах // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 12. — С. 94—104. [Novikov, D.A., Shokhina, T.E. Incentive mechanisms in dynamic active systems // Automation and Remote Control. — 2003. — Vol. 64, no. 12. — P. 1912—1921.]
11. Новиков Д.А. Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. — М.:

- ИПУ РАН, 2002. — 124 с. [Novikov, D.A. Smirnov, I.M., Shokhina, T.E. Mekhanizmy upravleniya dinamicheskimi aktivnymi sistemami. — M.: IPU RAN, 2002. — 124 s. (In Russian)]
12. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. — Тбилиси: ВЦ АН ГССР, 1974. — 232 с. [Burkov, V.N., Gorgidze, I.A., Lovetskii, S.E. Prikladnye zadachi teorii grafov. — Tbilisi: VTs AN GSSR, 1974. — 232 s. (In Russian)]
 13. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. — М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. — 161 с. [Novikov, D.A. Mekhanizmy funktsionirovaniya mnogourovnevnykh organizatsionnykh sistem. — M.: Fond «Problemy upravleniya», 1999. — 161 s. (In Russian)]
 14. Новиков Д.А., Цветков А.В., Агрегирование информации в моделях стимулирования // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 4. — С. 120—127. [Novikov, D.A., Tsvetkov, A.V., Aggregation of information in incentive models // Automation and Remote Control. — 2001. — Vol. 62, no. 4. — P. 617—623.]
 15. Myerson, R. Game Theory: Analysis of Conflict. — London: Harvard University Press, 1997. — 584 p.
 16. Fudenberg, D., Tirole, J. Game Theory. — Cambridge: MIT Press, 1995. — 579 p.
 17. Fudenberg, D., Maskin, E. The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information // Econometrica. — 1986. — Vol. 54 (3). — P. 533—554.
 18. Demeze-Jouatsa, G. A complete folk theorem for finitely repeated games. — Bielefeld: Center for Mathematical Economics, 2018. — 32 p.
 19. Maschler, M., Solan, E., Zamir, S. Game Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013. — 1008 p.
 20. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 89—106. [Gorelov, M.A., Kononenko, A.F. Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, no. 2. — P. 264—277.]
 21. Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А. Равновесие Штакельберга в динамической модели стимулирования с полной информацией // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 4. — С. 152—166. [Rokhlin, D.B., Ugolnitsky, G.A. Stackelberg Equilibrium in a Dynamic Stimulation Model with Complete Information // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 4. — P. 701—712.]
 22. Угольницкий Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. — 938 с. [Ugol'nitskii, G.A. Upravlenie ustoychivym razvitiem aktivnykh sistem. — Rostov-na-Donu: Izdatel'stvo YuFU, 2016. — 938 s. (In Russian)]
 23. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 327 с. [Germeier, Yu.B. Igry s neprotivopolozhnymi interesami. — M.: Nauka, 1976. — 327 s. (In Russian)]
 24. Гермейер Ю.Б., Еreshko Ф.И. Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — № 14. — С. 1437—1450. [Germeier, Yu.B., Ereshko, F.I. Pobochnye platezhi v igrakh s fiksirovannoi posledovatel'nost'yu khodov // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1974. — No. 14. — S. 1437—1450. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.
- Поступила в редакцию 11.02.2019, после доработки 26.09.2019.
Принята к публикации 24.10.2019.
- Белов Михаил Валентинович** — д-р техн. наук, компания ИБС, г. Москва, ✉ mbelov59@mail.ru.

INCENTIVE-COMPATIBLE CONTROL IN DYNAMIC MULTI-AGENT SYSTEMS. Part 1. Contracts in Dynamic System with One Principal and Multiple Agents

M.V. Belov

IBS company, Moscow, Russia
✉ mbelov59@mail.ru

Abstract: The formulation and solution are considered of the problems of coordinated control of multi-element dynamic active systems (AS) with restrictions on the joint activity of their elements in the form of technological networks. An AS is studied consisting of one principal and many agents subordinate to it. It has been proved that for any admissible trajectory of results, a coordinated compensatory incentive system can be constructed that implements (as an equilibrium in dominant strategies) the trajectory of the agents leading to the desired trajectory of results; decomposes the control task by agents and by time periods; provides guaranteed (for all possible far-sighted agents) minimum costs of the governing body of the principal for the implementation of this trajectory of results. It is shown that in such incentive systems, the values of payments depend only on the corresponding values of the cost functions, which, in turn, indirectly take into account the technological functions, network structure and AS structure as a whole. The problem of optimal planning is posed and an algorithm for solving it is indicated.

Keywords: incentive problem, dynamic system with one principal and multiple agents, contract theory.

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ НЕЧИСЛОВОМ ОЦЕНИВАНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЙ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹

В.В. Подиновский

Аннотация. Отмечено, что практические задачи принятия решений часто предполагают учет не полностью выявленных предпочтений, а также неопределенных факторов. Известные подходы к анализу таких задач основаны на введении количественных вероятностей и применении функции полезности. Однако это требует получения достаточно сложной и потому ненадежной и не всегда доступной информации. В настоящей статье предложены методы анализа решений в условиях неопределенности, для реализации которых не требуются функции полезности и количественные вероятности. Они основаны на идеях и результатах теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений в условиях определенности. Учитываются качественная вероятность и порождаемые ею частичные отношения предпочтения и безразличия на множестве стратегий. Рассмотрены вычислительные методы построения таких отношений. Приведены расчетные примеры.

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, неполная информация о предпочтениях и неопределенных факторах, отношения предпочтения, качественная вероятность.

ВВЕДЕНИЕ

Практические задачи принятия решений часто предполагают необходимость учета неопределенных факторов, значения которых заранее точно неизвестны. Основные, наиболее распространенные подходы к анализу таких задач предполагают построение функции полезности, т. е. функции, математическое ожидание которой моделирует предпочтения ЛПР (лица, принимающего решение) на множестве распределений вероятностей на множестве исходов [1–5]. Однако построение функции полезности — проблема весьма сложная и потому не всегда решаемая [6]. И даже само допущение существования функции полезности является достаточно сильным, так как может привести к появлению разного рода «парадоксов» — выводов, не согласующихся со здравым смыслом или очевидно ожидаемых ЛПР результатов [7, 8]. С другой стороны, наличие функции полезности

предполагает, что задано (полностью или хотя бы частично) распределение вероятностей на множестве значений неопределенного фактора. Однако в сложных задачах принятия решений социально-экономического, политического и иного характера объективных вероятностей обычно не существует и приходится обращаться к экспертным оценкам. Но, как известно, количественные оценки весьма сложны для человека, а потому недостаточно надежны и могут содержать явные ошибки [8].

Поэтому теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов анализа решений в условиях неопределенности, для реализации которых не требуются функции полезности и количественные вероятности. Оказывается, что ряд таких методов можно построить на основе результатов теории качественной важности критериев [9, 10], разработанной для анализа многокритериальных задач, так как понятие важности критериев оказывается в некоторых отношениях формально схоже с понятием вероятности. На это обстоятельство ранее уже указывалось в работах [11, 12].

Первые результаты приложения теории важности критериев к задачам принятия решений при

¹ Исследования финансировались в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5–100».

неопределенности были получены в работе [13]. В данной статье, являющейся, по сути, обзорно-исследовательской, подходящие определения и методы теории качественной важности изложены сразу в терминах анализа (однокритериальных) решений при неопределенности. Кроме того, представлены и новые результаты, которые, в свою очередь, приложимы и к многокритериальным задачам. Теоретические положения иллюстрируются простыми расчетными примерами.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ

Далее принята математическая модель ситуации принятия решения в условиях неопределенности в виде

$$\langle \eta, S, \Lambda, \Theta, f, P, R, G \rangle. \quad (1)$$

Здесь:

η — тип постановки задачи (выбрать одну наилучшую стратегию (η_1) или же l лучших (η_l), упорядочить все стратегии по предпочтительности ($\eta_{\rightarrow}$) и др.);

S — множество стратегий (планов, альтернатив, вариантов, действий, решений, ...);

$\Lambda = \{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m\}$ — конечное множество значений неопределенного фактора, $m \geq 2$; его элементы называются «состояниями природы», или элементарными событиями, а его подмножества именуются событиями;

Θ — числовая модель оценивания предпочтительности последствий; она включает в свой состав множество $V \subseteq (-\infty, +\infty)$ числовых оценок последствий; предполагается, что предпочтения возрастают на множестве V , т. е. чем оценка v больше, тем она предпочтительнее; множество V может быть континуальным (например, $V = [v_*, v^*]$ для денежных выигрышей) или дискретным (например, для пятибалльной целочисленной шкалы $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$); если специально не указано иное, то считается, что последствия (выигрыши) оцениваются в порядковой шкале² [14]; но шкала может быть и более совершенной (см. § 5);

f — функция выигрыша (критерий, показатель эффективности или качества и т. п.) — отображе-

ние $S \times \Lambda \rightarrow V$, т. е. $v = f(s, \lambda)$ — оценка последствия применения стратегии s , если реализуется значение неопределенного фактора λ (т. е. V — это область значений функции f); каждая стратегия s характеризуется вектором³ (векторной оценкой последствий) $x = (f(s, \lambda^1), f(s, \lambda^2), \dots, f(s, \lambda^m))$; множество всех векторных оценок x (как достижимых, т. е. соответствующих стратегиям и значениям неопределенного фактора, так и гипотетических) есть $X = V^m$.

P — нечисловая модель вероятностей; она содержит (бинарное) отношение (нестрогого превосходства) вероятности $\succeq$ на множестве $L = 2^\Lambda$ подмножеств множества Λ : запись $A \succeq B$ означает, что событие A не менее вероятно, чем событие B ; свойства отношения $\succeq$ рассматриваются в § 2; кроме этого, модель P может содержать и иные отношения (см. § 6);

R — отношение нестрогого предпочтения ЛПР на множестве X : запись xRu означает, что вектор x не менее предпочтителен, чем вектор u ; оно порождает отношение (строгого) предпочтения P и безразличия (равенства по предпочтительности) I : xPu верно, когда верно xRu и неверно uRx , и xIu верно, когда верно и xRu , и uRx ; запись xPu означает, что вектор x предпочтительнее, чем вектор u , а xIu означает, что векторы x и u безразличны (одинаковы по предпочтительности); иными словами, отношения I и P являются симметричной и асимметричной частями отношения R , т. е. $I = \text{Sym } R = R \cap R^{-1}$, $P = \text{As } R = R \setminus \text{Sym } R$, где R^{-1} — отношение, обратное к отношению R ; предполагается, что отношение R есть квазипорядок (оно рефлексивно: xRx верно для любого $x \in X$, и транзитивно: для любых $x, y, z \in X$ из xRu и yRz следует xRz), но лишь частичный, т. е. не всякие векторы x и y из множества X сравнимы по отношению R : может не выполняться ни xRu , ни uRx ; для квазипорядка R отношение P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно: yPu неверно для любого $y \in Z$, и транзитивно), а отношение I — эквивалентностью (оно симметрично: для любых $x, y \in X$ из xRu следует uRx , рефлексивно и транзитивно); отношения R, P, I порождают на

² Шкала предполагается порядковой в смысле моделирования предпочтений. Однако «естественная» шкала может быть количественной. Так, для денег имеем шкалу отношений; например, можно сказать, что сумма в 20 руб. в 2 раза больше, чем сумма в 10 руб., но при этом нельзя утверждать, что она предпочтительнее в 2 раза.

³ Термин «вектор» употребляется здесь для обозначения упорядоченного набора m чисел, который не рассматривается как элемент векторного пространства Re^m . Более точными были бы термины « m -ка» «кортеж», но они не знакомы широкому кругу читателей литературы по принятию решений и далее не употребляются. Этот упорядоченный набор считается элементом векторного пространства Re^m , когда используется информация об отношении ЛПР к риску (см. § 5 и 6).

множестве стратегий S аналогичные по смыслу отношения R_* , P_* , I_* следующим образом:

$$s'R_*s'' \Leftrightarrow x'Rx'', \quad s'P_*s'' \Leftrightarrow x'Px'', \quad s'I_*s'' \Leftrightarrow x'Ix'',$$

где $x' = (f(s', \lambda^1), f(s', \lambda^2), \dots, f(s', \lambda^m))$ и $x'' = (f(s'', \lambda^1), f(s'', \lambda^2), \dots, f(s'', \lambda^m))$. Именно отношения R_* , P_* , I_* непосредственно применяются для формирования решения анализируемой задачи принятия решения с учетом типа ее постановки; например, если требуется выбрать одну наилучшую (оптимальную) стратегию, то строится множество недоминируемых по отношению P_* стратегий, среди которых (если множество P_* внешне устойчиво) и надлежит выделить наилучшую;

Γ — информация об отношении ЛПР к риску; оно может быть не склонным к риску ($\Gamma = \{\gamma^1\}$), склонным к риску ($\Gamma = \{\gamma^2\}$) или безразличным (нейтральным) к риску ($\Gamma = \{\gamma^3\}$), но такой информации может и не быть ($\Gamma = \emptyset$).

Отношение R заранее неизвестно: его нужно построить на основе модели оценивания предпочтительности последствий Θ , модели вероятностей неопределенного фактора Π и информации об отношении ЛПР к риску Γ . Методы построения этого отношения рассматриваются далее в § 3—7.

2. ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Отношение $\succeq$ порождает отношения превосходства по вероятности $>$ и равновероятности $\sim$: $A > B$ верно, когда верно $A \succeq B$ и неверно $B \succeq A$, и $A \sim B$ верно, когда верно и $A \succeq B$, и $B \succeq A$. Запись $A > B$ означает, что событие A более вероятно, чем событие B , а запись $A \sim B$ означает, что события A и B равновероятны.

Выделим важные частные виды отношения вероятности $\succeq$, которые будут употребляться в дальнейшем.

Полная качественная вероятность. Отношение $\succeq$ называется (полной) качественной (или сравнительной) вероятностью, если оно обладает свойствами (удовлетворяет аксиомам де Финетти (1931 г.)) [15, 16]:

A1. *Сравнимость*: для любых A и B выполнено, по крайней мере, одно из соотношений: $A \succeq B$ или $B \succeq A$;

A2. *Транзитивность*: из соотношений $A \succeq B$ и $B \succeq C$ следует $A \succeq C$;

A3. *Существование*: $\Lambda > \emptyset$ и для любого A выполнено $A \succeq \emptyset$;

A4. *Аддитивность*: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succeq B$ и $A \cup C \succeq B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Отметим, что из аксиом A1 и A2 следует рефлексивность.

Пусть на множестве Λ задана количественная вероятность Pr рядом распределения

$$\text{Pr}(\lambda^1) = p_1, \dots, \text{Pr}(\lambda^m) = p_m,$$

так что вероятность события A

$$\text{Pr}A = \sum_{j: \lambda^j \in A} p_j.$$

Говорят, что количественная вероятность *численно представляет* качественную вероятность, или что количественная вероятность *согласована* с качественной, если выполнено условие: для любых событий A и B

$$A \succeq B \Leftrightarrow \text{Pr}A \geq \text{Pr}B. \quad (2)$$

Если задана количественная вероятность Pr , то порождаемое ею согласно условию (2) отношение $\succeq$ удовлетворяет всем аксиомам A1 — A4, т. е. является полной качественной вероятностью. Оказывается, однако, что предположение о том, что всякую полную качественную вероятность можно представить некоторой количественной, неверно! Контрпример был построен в работе [17]; для удобства читателя он воспроизводится в Приложении 1. В свете этого утверждения становится понятным, что методы, опирающиеся на предположение о существовании количественной вероятности (в том числе методы теории полезности), при наличии качественной вероятности в принципе не применимы.

Частичная качественная вероятность. Отношение $\succeq$ называется *частичной качественной* (или *частичной сравнительной*) вероятностью [18, 19], если оно удовлетворяет аксиомам A2 — A4 и аксиоме

A5. *Рефлексивность*: для любого A выполнено $A \succeq A$.

Порядковая вероятность. Отношение $\succeq$ называется *частичной порядковой* (или *частичной ординальной*) вероятностью, если оно упорядочивает по вероятности лишь отдельные элементарные события и является частичным квазипорядком. Если такое отношение упорядочивает по вероятности все элементарные события, то оно называется (полной) *порядковой* (или *ординальной*) вероятностью. Если перенумеровать элементарные события в порядке невозрастания их вероятности, то (полную) порядковую вероятность можно кратко представить так:

$$\{\lambda^1\} \sim \dots \sim \{\lambda^{i_1}\} > \{\lambda^{i_1+1}\} \sim \dots \\ \dots \sim \{\lambda^{i_2}\} > \dots > \{\lambda^{i_{t-1}+1}\} \sim \dots \sim \{\lambda^{i_t}\} \quad (3)$$

(очевидно, что $i_\tau = m$). Таким образом, элементарные события объединяются в τ групп так, что элементарные события из одной и той же группы равновероятны, а элементарные события из группы с меньшими номерами вероятнее элементарных событий из групп с большими номерами. В интересах дальнейшего изложения обозначим через M_t множество номеров элементарных событий из t -й группы, $t = 1, 2, \dots, \tau$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ

Разберем, как строится отношение R на основе информации о неопределенном факторе — с учетом вероятности $\succeq$. При наличии информации об отношении ЛПР к риску ее также следует учитывать (см. § 4).

Для векторов и матриц одинаковых размерностей введем обозначения:

$$a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$a \geq b \Leftrightarrow (a \geq b, a \neq b); \quad a > b \Leftrightarrow a_i > b_i, \\ i = 1, 2, \dots, n \text{ (здесь } n > 1);$$

$$\|a_{ij}\| \geq \|b_{ij}\| \Leftrightarrow a_{ij} \geq b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\|a_{ij}\| \geq \|b_{ij}\| \Leftrightarrow (\|a_{ij}\| \geq \|b_{ij}\|, \|a_{ij}\| \neq \|b_{ij}\|);$$

$$\|a_{ij}\| > \|b_{ij}\| \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \text{(здесь } m > 1 \text{ или } n > 1).$$

Поскольку с увеличением оценки v на множестве V предпочтения возрастают, то на множестве X оказывается определенным отношение Парето $R^\varnothing$: $xR^\varnothing y \Leftrightarrow x \geq y$. Заметим, что $xP^\varnothing y \Leftrightarrow x \geq y$, а $I^\varnothing$ есть отношение равенства векторов =.

Пусть A и B — два сравнимых по вероятности $\succeq$ события, т. е. верно $A \sim B$, $A > B$ или $B > A$. Без ограничения общности примем, что они несовместны, т. е. $A \cap B = \emptyset$ (в противном случае будем рассматривать события $A \setminus C$ и $B \setminus C$, где $C = A \cap B$). Кроме того, будем полагать, что множества A и B не пусты. Рассмотрим векторную оценку $x^{AB} = (x_1, \dots, x_m)$, в которой все компоненты с номерами i , для которых $\lambda^i \in A$, равны между собой, и все компоненты с номерами j , для которых $\lambda^j \in B$, также равны между собой. Обозначим через $x^{A \leftrightarrow B}$ вектор, полученный из оценки x^{AB} заменой каждой компоненты с номером i , для которого $\lambda^i \in A$, (любой) компонентой с номером j , для которого $\lambda^j \in B$, и каждой компоненты с номером j , для которого $\lambda^j \in B$, (любой) компонентой с номером i , для ко-

торого $\lambda^i \in A$. Например, если $n = 6$ и $A = \{\lambda^1, \lambda^5, \lambda^6\}$, $B = \{\lambda^2, \lambda^3\}$, то для $x^{AB} = (2, 4, 4, 3, 2, 2)$ имеем $x^{A \leftrightarrow B} = (4, 2, 2, 3, 4, 4)$.

Пусть события A и B равновероятны: $A \sim B$. С учетом специфики структуры векторных оценок x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$ для ЛПР они будут одинаковы по предпочтительности, что можно записать так: $x^{AB} I^{A \sim B} x^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, соотношение $A \sim B$ порождает на X рефлексивное и симметричное отношение $I^{A \sim B}$, которое включает в себя все пары векторов вида x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$.

Пусть теперь событие A более вероятно, чем B : $A > B$. Рассмотрим векторную оценку x^{AB} . Пусть в ней (любая) компонента с номером i , для которой $\lambda^i \in A$, больше (любой) компоненты с номером j , для которой $\lambda^j \in B$. Тогда для ЛПР векторная оценка x^{AB} будет более предпочтительна, чем оценка $x^{A \leftrightarrow B}$, что можно записать так: $x^{AB} P^{A > B} x^{A \leftrightarrow B}$. Следовательно, соотношение $A > B$ порождает на Z иррефлексивное отношение $P^{A > B}$, которое включает в себя все пары векторов вида x^{AB} и $x^{A \leftrightarrow B}$, удовлетворяющие указанному условию неравенства.

Соотношение $B > A$ аналогично порождает на множестве Z иррефлексивное отношение $P^{B > A}$.

Поскольку отношение нестрогого предпочтения R на множестве X , которое нужно построить на основе вероятности $\succeq$, должно быть квазипорядком, то его можно представить как наименьший квазипорядок на X , который включает в свой состав отношение Парето $R^\varnothing$ и выше определенные отношения $I^{A \sim B}$ и $P^{A > B}$ для всех пар событий A, B , сравнимых по $\succeq$, т. е. является транзитивным замыканием объединения всех этих отношений. Определенное указанным образом отношение будем обозначать $R^\succeq$. Таким образом, $x R^\succeq y$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка

$$x R^{\pi_1} z^1, z^1 R^{\pi_2} z^2, \dots, z^t R^{\pi_{t+1}} y, \quad (4)$$

где $z^1, z^2, \dots, z^t \in X$ и каждое R^{π_l} , $l = 1, 2, \dots, t + 1$, есть $R^\varnothing$, $I^{A \sim B}$ или $P^{A > B}$.

Данное определение отношения $R^\succeq$ неконструктивно. Поэтому практически важно указать эффективные методы его построения хотя бы для отдельных частных случаев.

Рассмотрим случай, когда множество оценок последствий конечно:

$$V = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}, \text{ где } v^1 < v^2 < \dots < v^n. \quad (5)$$

Тогда множество векторных оценок $X = V^m$ также конечно (в нем будет $N = n^m$ элементов — векторных оценок x). Бинарное отношение ρ на множестве X можно задать квадратной булевой матрицей смежности $B(\rho) = \|b_{ij}(\rho)\|$ порядка N , где

$$b_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x^i, x^j) \in \rho, \\ 0 & \text{при } (x^i, x^j) \notin \rho. \end{cases}$$

Для булевых матриц определены операции: транспонирование T , сложение $+$, поэлементное умножение $*$, умножение $\times$, образование асимметричной разности $\setminus$:

$$\|a_{ij}\| \setminus \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \\ \text{где } c_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_{ij} = 1 \text{ и } b_{ij} = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Операциям над бинарными отношениями — взятия обратного отношения $^{-1}$, пересечения отношений $\cap$, объединения отношений $\cup$, разности отношений $\setminus$, умножения отношений $\circ$ и построения транзитивного замыкания $\hat{\rho}$ соответствуют операции над их матрицами смежности [20]:

$$B(\rho^{-1}) = B(\rho)^T, \quad B(\rho^1 \cap \rho^2) = B(\rho^1) \cap B(\rho^2), \\ B(\rho^1 \cup \rho^2) = B(\rho^1) \cup B(\rho^2), \\ B(\rho^1 \setminus \rho^2) = B(\rho^1) \setminus B(\rho^2), \quad B(\rho^1 \circ \rho^2) = B(\rho^1) \times B(\rho^2), \\ B(\hat{\rho}) = B(\rho) + B^2(\rho) + \dots + B^n(\rho).$$

Поэтому $B(\text{Sym } \rho) = B(\rho) \circ B(\rho)^T$, $B(\text{As } \rho) = B(\rho) \setminus B(\text{Sym } \rho)$. Для построения транзитивного замыкания существуют эффективные алгоритмы [21]. Заметим еще, что

$$\rho^1 \subseteq \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) \leq B(\rho^2), \quad \rho^1 \subset \rho^2 \Leftrightarrow B(\rho^1) < B(\rho^2).$$

Таким образом, с помощью матричных операций можно построить отношение $R^{\lessgtr}$. Современная вычислительная техника позволяет реализовать этот путь при «не очень большой» размерности задачи («не очень больших» числах m и n). Однако этот путь, даже если его удастся реализовать, может оказаться весьма обременительным. Поэтому практически важна разработка эффективных методов построения отношений $R^{\lessgtr}$, не ограниченных размерностью задач, для различных частных видов отношения вероятности $\lessgtr$.

4. СЛУЧАЙ ПОРЯДКОВОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Для описания метода построения отношения $R^{\lessgtr}$, когда вероятность $\lessgtr$ — частичная порядковая, введем в рассмотрение множества (где x, y — произвольные векторные оценки):

$Z^+(y) = \{x \in X \mid \text{существует цепочка (4), в которой нет } R^{\varnothing}\},$

$Z^-(x) = \{y \in X \mid \text{существует цепочка (4), в которой нет } R^{\varnothing}\},$

$Z^{\sim}(x) = \{y \in X \mid \text{существует цепочка (4), в которой все } R^{\pi_i} \text{ суть } I^{A \sim B}\} \cup \{x\}.$

Понятно, что каждое из этих множеств содержит не более чем $m!$ элементов.

Теорема 1 [22]. Для частичной порядковой вероятности $\lessgtr$ справедливы утверждения:

- $xR^{\lessgtr}y$ верно тогда и только тогда, когда существует $z \in Z^+(y)$ такой, что $x \geq z$;
- $xR^{\lessgtr}y$ верно тогда и только тогда, когда существует $z \in Z^-(x)$ такой, что $z \geq y$;
- $xI^{\lessgtr}y$ верно тогда и только тогда, когда $y \in Z^{\sim}(x)$ или, что равносильно, когда $x \in Z^{\sim}(y)$.

Пример 1. Пусть $m = 4$; частичная порядковая вероятность $\lessgtr$ содержит, помимо пар вида (λ^i, λ^j) , еще $\lambda^1 > \lambda^2$ и $\lambda^3 \sim \lambda^4$; $x = (2, 1, 6, 5)$, $y = (1, 2, 4, 6)$. Имеем: $Z^+(y) = \{(1, 2, 4, 6), (2, 1, 4, 6), (1, 2, 6, 4), (2, 1, 6, 4)\}$. Поскольку $z = (2, 1, 6, 4) \in Z^+(y)$ и верно $x \geq z$, то, согласно теореме 1, справедливо $xR^{\lessgtr}y$. Далее, $Z^{\sim}(y) = \{(1, 2, 4, 6), (1, 2, 6, 4)\}$ и $x \notin Z^{\sim}(y)$. Поэтому $xI^{\lessgtr}y$ неверно. В итоге имеем $xP^{\lessgtr}y$. ♦

Теорема 1 прямо указывает на алгоритмический метод построения отношения $R^{\lessgtr}$. Для сравнения двух векторных оценок он эффективен даже при «не очень большом» числе n , но для построения всего отношения R на множество X этот метод может оказаться чрезмерно обременительным. Однако для полной порядковой вероятности, задаваемой выражением (3), существуют аналитические методы построения $R^{\lessgtr}$.

Для произвольных $x, y \in X$ введем в рассмотрение множество чисел, которые являются компонентами вектора x или y :

$$W(x, y) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_m\} \cup \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \dots \cup \{y_m\}.$$

Число q элементов этого множества зависит от x и y . Обозначим эти числа через w^k и перенумеруем их по возрастанию: $w^1 < w^2 < \dots < w^q$. Пусть $h_{ki}(x)$ — число компонент вектора x с номерами i

из групп $M_1, M_2, \dots, M_t$ (см. выражение (3)) таких, что $x_i > w^k$; аналогичный смысл имеет число $h_{kt}(y)$. Введем в рассмотрение $(q-1) \times \tau$ -матрицы $H(x) = \|h_{kt}(x)\|$ и $H(y) = \|h_{kt}(y)\|$.

Теорема 2 [23]. Для (полной) порядковой вероятности соотношение $xR^{\geq}y$ верно тогда и только тогда, когда $H(x) \geq H(y)$; при этом $xP^{\geq}y$, когда $H(x) \geq H(y)$, и $xI^{\geq}y$, когда $H(x) = H(y)$. ♦

Если множество оценок V конечно, то его в теореме 2 можно использовать вместо множества $W(x, y)$.

Пример 2. Пусть $m = 4$; (полную) порядковую вероятность $\succeq$ можно кратко представить в виде $\lambda^1 > \lambda^2 \sim \lambda^3 > \lambda^4$; $x = (4, 5, 2, 1)$, $y = (1, 2, 5, 4)$. Имеем: $\tau = 3$, $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4\}$; $W(x, y) = \{1, 2, 4, 5\}$, $q = 4$ и

$$H(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H(y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку здесь $H(x) \geq H(y)$, то, по теореме 2, верно $xP^{\geq}y$. ♦

Обозначим через $a_{\downarrow} = (a_{[1]}, a_{[2]}, \dots, a_{[n]})$ вектор, образованный из вектора $a = (a_1, \dots, a_n)$ упорядочением его компонент по невозрастанию: $a_{[1]} \geq \dots \geq a_{[n]}$. Под $a_{\downarrow}^{[1,j]}$ будем понимать вектор, составленный из первых j компонент вектора a , т. е. $a_{\downarrow}^{[1,j]} = (a_1, \dots, a_j)$. Запись $a_{\downarrow}^{[1,j]}$ будет обозначать вектор, полученный из вектора $a_{\downarrow}^{[1,j]}$ упорядочением его компонент по невозрастанию. Например, если $a = (3, 4, 1)$, то $a_{\downarrow}^{[1,2]} = (3, 4)$ и $a_{\downarrow}^{[1,1]} = (4, 3)$.

Теорема 3. Для (полной) порядковой вероятности соотношение $xR^{\geq}y$ верно тогда и только тогда, когда $x_{\downarrow}^{[1,t]} \geq y_{\downarrow}^{[1,t]}$, $t = i_1, \dots, i_{\tau}$; при этом $xP^{\geq}y$, когда $x_{\downarrow}^{[1,t]} \geq y_{\downarrow}^{[1,t]}$ хотя бы для одного t , и $xI^{\geq}y$, когда $x_{\downarrow}^{[1,t]} = y_{\downarrow}^{[1,t]}$ для всех $t = i_1, \dots, i_{\tau}$. ♦

Эта теорема (для многокритериальных задач) была представлена в работе [23] без доказательства. В предположении существования функции полезности она была доказана в работе [24], а без такого допущения — в работе [25].

Пример 3. В условиях примера 2:

$$x_{\downarrow}^{[1,1]} = 4, \quad x_{\downarrow}^{[1,3]} = (4, 5, 2), \quad x_{\downarrow}^{[1,4]} = (4, 5, 2, 1);$$

$$x_{\downarrow}^{[1,1]} = 4, \quad x_{\downarrow}^{[1,3]} = (5, 4, 2), \quad x_{\downarrow}^{[1,4]} = (5, 4, 2, 1);$$

$$y_{\downarrow}^{[1,1]} = 1, \quad y_{\downarrow}^{[1,3]} = (1, 2, 5), \quad y_{\downarrow}^{[1,4]} = (1, 2, 5, 4);$$

$$y_{\downarrow}^{[1,1]} = 1, \quad y_{\downarrow}^{[1,3]} = (5, 2, 1), \quad y_{\downarrow}^{[1,4]} = (5, 4, 2, 1).$$

Поскольку здесь $x_{\downarrow}^{[1,1]} > y_{\downarrow}^{[1,1]}$, $x_{\downarrow}^{[1,3]} \geq y_{\downarrow}^{[1,3]}$ и $x_{\downarrow}^{[1,4]} = y_{\downarrow}^{[1,4]}$, то, по теореме 3, верно $xP^{\geq}y$.

5. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ОТНОШЕНИИ ЛПР К РИСКУ

Под лотереей, пользуясь принятой в теории принятия решений при риске терминологией [26], будем понимать случайную величину с конечным числом значений из множества V , вероятности которых известны. Лотерея называется невырожденной, если ни одна из этих вероятностей не равна 1. Здесь примем, что множество оценок V является числовым промежутком, причем «естественная» шкала не менее совершенна, чем шкала отношений⁴ (см. сноску 2 на с. 49).

По определению, ЛПР не склонен (соответственно, склонен, безразличен) к риску, если средний ожидаемый выигрыш любой невырожденной лотереи (т. е. получение наверняка выигрыша, равного математическому ожиданию случайного выигрыша) более предпочтителен (соответственно, менее предпочтителен, безразличен) самой лотереи (т. е. участию в ней) [26].

Для всякого $x \in X$ определяются верхний и нижний срезы отношения R через x :

$$R_+(x) = \{y \in X | yRx\}, \quad R_-(x) = \{y \in X | xRy\}.$$

Квазипорядок R называется вогнутым (соответственно, выпуклым), если верхний (соответственно, нижний) его срез через любой $x \in X$ является выпуклым множеством.

Теорема 4 [13]. Справедливы утверждения:

- для не склонного к риску ЛПР $\{\gamma^1\}$ квазипорядок R является вогнутым;
- для склонного к риску ЛПР $\{\gamma^2\}$ квазипорядок R является выпуклым;
- для безразличного к риску ЛПР $\{\gamma^3\}$ квазипорядок R является и вогнутым, и выпуклым. ♦

Согласно теореме 4 отношение нестрогого предпочтения $R^{\geq 1}$, задаваемое на основе вероятности $\succeq$ для ЛПР, не склонного к риску $\{\gamma^1\}$, определяется как наименьший вогнутый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\geq}$ на множестве X , т. е. должно выполняться $R^{\geq} \subset R^{\geq 1}$ (это влечет $I^{\geq} \subseteq I^{\geq 1}$ и $P^{\geq} \subseteq P^{\geq 1}$). Верхние срезы отношения $R^{\geq 1}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих срезов отношения $R^{\geq}$. Аналогично, отно-

⁴ Так что в этом параграфе элементы множества X — это векторы в пространстве Re^m .

шение нестрогого предпочтения $R^{\succeq 2}$, задаваемое на основе вероятности $\succeq$ для ЛПР, склонного к риску $\{\gamma^2\}$, определяется как наименьший выпуклый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succeq}$ на множестве X . Нижние срезы отношения $R^{\succeq 2}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих нижних срезов отношения $R^{\succeq}$. Наконец, отношение нестрогого предпочтения $R^{\succeq 3}$, задаваемое на основе вероятности $\succeq$ для ЛПР, безразличного к риску $\{\gamma^3\}$, определяется как наименьший одновременно вогнутый и выпуклый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\succeq}$ на множестве X . Верхние и нижние срезы отношения $R^{\succeq 3}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих верхних и нижних срезов отношения $R^{\succeq}$.

Данное определение отношения $R^{\succeq}$ неконструктивно. Однако для случая порядковой вероятности $\succeq$ можно предложить эффективный метод построения этого отношения.

Введем обозначения $\bar{R}_+(x)$, $\bar{R}_-(x)$, $\bar{Z}^+(x)$ и $\bar{Z}^-(x)$ для выпуклых замыканий множеств $R_+(x)$, $R_-(x)$, $Z^+(x)$ и $Z^-(x)$ соответственно. Заметим, что $xR^{\succeq 1}y$ (соответственно, $xR^{\succeq 2}y$; $xR^{\succeq 3}y$), верно тогда и только тогда, когда справедливо $x \in \bar{R}_+(y)$ (соответственно, $y \in \bar{R}_-(x)$; $x \in \bar{R}_+(y)$ или $y \in \bar{R}_-(x)$).

Теорема 5. Для частичной порядковой вероятности $\succeq$ справедливы утверждения:

- $xR^{\succeq 1}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^+(y)$, такой, что $x \geq z$;
- $xR^{\succeq 2}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^-(x)$, такой, что $z \geq y$;
- $xR^{\succeq 3}y$ верно тогда и только тогда, когда существует вектор $z \in \bar{Z}^+(y)$, такой, что $x \geq z$, или когда существует вектор $z \in \bar{Z}^-(x)$, такой, что $z \geq y$. ♦

Доказательство этой теоремы вынесено в Приложение 2. Она указывает эффективный метод проверки справедливости соотношений $xR^{\succeq 1}y$, $xR^{\succeq 2}y$ и $xR^{\succeq 3}y$. Например, для проверки соотношения $xR^{\succeq 1}y$ нужно выяснить, существует ли в выпуклом замыкании $\bar{Z}^+(y)$ множества $Z^+(y)$ вектор z такой, что верно $z \geq x$. А так как множество $Z^+(y)$ содержит конечное число векторов, то последняя задача сводится к проверке совместности системы линейных неравенств и равенств, которую можно осу-

ществить с помощью любой компьютерной системы решения задач линейного программирования.

Пример 4. Пусть $m = 4$; частичная порядковая вероятность $\succ$ содержит, помимо пар вида (λ^i, λ^j) , еще $\lambda^1 \succ \lambda^2$ и $\lambda^3 \sim \lambda^4$; $x = (3, 4, 3, 3)$, $y = (1, 5, 2, 4)$. Имеем: $Z^+(y) = \{(1, 5, 2, 4), (5, 1, 2, 4), (1, 5, 4, 2), (5, 1, 4, 2)\}$. При помощи теоремы 1 нетрудно проверить, что $xR^{\succeq}y$ неверно. Для проверки соотношения $xR^{\succeq 1}y$, согласно первому утверждению теоремы 5, составим систему неравенств:

$$\begin{aligned} 3 &\geq \alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4, & 4 &\geq 5\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 + \alpha_4, \\ 3 &\geq 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, & 3 &\geq 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1, & \alpha_1 &\geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Эта система совместна: например, подходят значения $\alpha_1 = 0,25$; $\alpha_2 = 0,25$; $\alpha_3 = 0,5$; $\alpha_4 = 0$. Следовательно, верно $xR^{\succeq 1}y$. А поскольку одно из четырех записанных выше неравенств выполняется как строгое, то верно $xP^{\succeq 1}y$. Заметим, что в роли вектора z здесь выступил вектор

$$(2, 4, 3, 3) = 0,25 \cdot (1, 5, 2, 4) + 0,25 \cdot (5, 1, 2, 4) + 0,5 \cdot (1, 5, 4, 2) + 0 \cdot (5, 1, 4, 2).$$

6. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ШКАЛЕ ОЦЕНОК ПЕРВОЙ ПОРЯДКОВОЙ МЕТРИКИ

Ранее везде полагалось, что шкала оценок V в модели (1) для предпочтений порядковая. Здесь мы рассмотрим случай, когда эта шкала конечна (причем $n > 2$) и представляет собой шкалу первой порядковой метрики [1], т. е. упорядочены по предпочтительности не только сами оценки v^j (см. выражение (5)), но и их разности. Ограничимся рассмотрением случая, когда эти разности вдоль шкалы оценок V убывают (что соответствует «убыванию предельной ценности»):

$$v^2 - v^1 > v^3 - v^2 > \dots > v^n - v^{n-1}. \quad (6)$$

Далее для простоты записи положим, что $V = \{1, 2, \dots, m\}$. Информацию о наличии шкалы первой порядковой метрики обозначим через Δ . Эта информация задает на множестве X отношения предпочтения:

$$\begin{aligned} xP^{A-B\&\Delta}y^{AB} &\Leftrightarrow [(x = (y^{AB}|y_i + \delta, i: \lambda^i \in A; y_j - \delta, \\ &j: \lambda^j \in B), y_i + \delta \leq y_j - \delta) \vee (x = (y^{AB}|y_j + \delta, \\ &j: \lambda^j \in B; y_i - \delta, i: \lambda^i \in A), y_j + \delta \leq y_i - \delta)], \quad x \in X; \\ xP^{A>B\&\Delta}y^{AB} &\Leftrightarrow (x = (y^{AB}|y_i + \delta, i: \lambda^i \in A; y_j - \delta, \\ &j: \lambda^j \in B), y_i + \delta \leq y_j - \delta), \quad x \in X \end{aligned}$$

(числа δ — натуральные).

Отношение $R^{\geq \Delta}$ определяется как транзитивное замыкание объединения всех отношений $I^{A \sim B}$, $P^{A > B}$, $P^{A \sim B \Delta}$, $P^{A > B \Delta}$ и $R^{\emptyset}$. Таким образом, $xR^{\geq \Delta}y$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка (4), в которой $z^1, z^2, \dots, z^t \in X$ и каждое отношение R^{π_l} , $l = 1, 2, \dots, t$, есть $I^{A \sim B}$, $P^{A > B}$, $P^{A \sim B \Delta}$, $P^{A > B \Delta}$ или $R^{\emptyset}$.

Так как множество оценок V конечно, то отношение $R^{\geq \Delta}$ можно построить с помощью его матричного представления (см. § 3). Для случая (полной) порядковой вероятности $\succeq$ проверку справедливости соотношения $xR^{\geq \Delta}y$ можно провести при помощи алгоритмического метода [27].

Если, помимо информации (6), известно отношение ЛПР к риску, например, что он не склонен к риску $\{\gamma^1\}$, то соответствующее отношение нестрогого предпочтения $R^{\geq \Delta 1}$ определяется как наименьший вогнутый квазипорядок, продолжающий отношение $R^{\geq \Delta}$ на множестве X . Верхние срезы отношения $R^{\geq \Delta 1}$ являются выпуклыми замыканиями соответствующих срезов отношения $R^{\geq \Delta}$.

7. ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ И БЕЗРАЗЛИЧИЯ ПРИ ИНФОРМАЦИИ О СРАВНИТЕЛЬНОЙ СИЛЕ ПРЕВОСХОДСТВА В ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть модель вероятностей P , помимо отношения вероятности $\succeq$, содержит также четырехместные отношения $\triangleright$ и $\approx$, сравнивающие интенсивности превосходства в вероятности одних событий над другими (эти отношения родственны отношениям сравнительного превосходства в важности одних критериев над другими [9]).

Пусть A, B, C, D — четыре попарно несовместных события таких, что $A > B$ и $C > D$, причем превосходство в вероятности события A над событием B больше (или же равно), чем превосходство в вероятности события C над событием D . Последний факт будет обозначать так:

$$[A > B] \triangleright [C > D]$$

(соответственно $[A > B] \approx [C > D]$).

Рассмотрим векторную оценку $x^{AB, CD} = (x_1, \dots, x_m)$, в которой все компоненты с номерами i , для которых λ^i входит в одно и то же множество из A, B, C, D , равны между собой. Под x_{i_A} (соответственно, под $x_{i_B}, x_{i_C}, x_{i_D}$) будем понимать число, равное компоненте x_i вектора $x^{AB, CD}$ при $\lambda^i \in A$ (со-

ответственно, при $\lambda^i \in B, \lambda^i \in C, \lambda^i \in D$). Обозначим через $x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$ вектор, полученный из оценки $x^{AB, CD}$ заменой каждой компоненты с номером i , для которого $\lambda^i \in A$, (любой) компонентой с номером x_{i_B} , и каждой компоненты с номером i , для которого $\lambda^i \in B$, (любой) компонентой с номером x_{i_A} , и аналогично для событий C и D . Например, если $n = 7$ и $A = \{\lambda^1\}$, $B = \{\lambda^3, \lambda^4\}$, $C = \{\lambda^5, \lambda^6\}$, $D = \{\lambda^7\}$, то для $x^{AB, CD} = (2, 3, 4, 4, 1, 1, 5)$ имеем $x_{i_A} = 2$, $x_{i_B} = 4$, $x_{i_C} = 1$, $x_{i_D} = 5$ и $x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D} = (4, 3, 2, 2, 5, 5, 1)$.

Пусть верно $[A > B] \approx [C > D]$. Тогда, с учетом специфики векторных оценок $x^{AB, CD}$ и $x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$, оказываются определенными на множестве X отношения безразличия и предпочтения:

- $x^{A, B, CD} I^{[A > B] \approx [C > D]} x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_A} = x_{i_D} \neq x_{i_B} = x_{i_C}$;
- $x^{A, B, CD} P^{[A > B] \approx [C > D]} x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_B} \geq x_{i_C} > x_{i_D} \geq x_{i_{BA}}$, причем хотя бы одно из двух нестрогих неравенств выполняется как строгое.

Пусть верно $[A > B] \triangleright [C > D]$. Тогда, с учетом специфики векторных оценок $x^{AB, CD}$ и $x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$, оказывается определенным на множестве X отношение предпочтения: $x^{AB, CD} P^{[A > B] \triangleright [C > D]} x^{A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D}$ верно тогда и только тогда, когда $x_{i_B} > x_{i_C} > x_{i_D} > x_{i_{BA}}$.

Отношение нестрогого предпочтения, порожаемое на множестве X вероятностью $\succeq$, дополненной сведениями о равенстве или превосходстве в вероятности одних событий над другими, определяется как транзитивное замыкание объединения $R^{\succeq}$ и отношений всех трех введенных видов.

Иначе говоря, в цепочке (4) каждое R^{π_l} , $l = 1, 2, \dots, t + 1$, есть $R^{\emptyset}$, $I^{A \sim B}$, $P^{A > B}$, $I^{[A > B] \approx [C > D]}$, $P^{[A > B] \approx [C > D]}$ или $P^{[A > B] \triangleright [C > D]}$.

В случае, когда множество оценок V конечно, это отношение можно построить при помощи его матричного представления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы, учитывающие качественную информацию о предпочтениях и вероятностях, позволяют сравнить по предпочтительности не все стратегии и потому часто могут не привести к получению решения требуемого типа (например, выбрать од-

ну наилучшую стратегию). Поэтому, согласно итеративному подходу к анализу задач принятия решений [28], следует учитывать дополнительную, более сильную, но и более сложную информацию. При невозможности получения дополнительной информации стоит подумать о применении согласительных, или суррогатных решений [29].

К сожалению, представленный арсенал различных по эффективности методов анализа задач принятия решений при неопределенности, учитывающих нечисловые оценки предпочтений и вероятностей, явно недостаточен для удовлетворения запросов практики. Поэтому актуальна проблема разработки эффективных методов подобного рода для различных сочетаний видов информации о предпочтениях и вероятностях как в рамках теории принятия решений при неопределенности, так и в рамках теории принятия многокритериальных решений.

В теории важности критериев разработаны также методы анализа решений, основанные на количественных оценках важности и опирающиеся на строгое определение понятия превосходства в важности одних критериев над другими в некоторое число раз [30–33]. Однако рассмотрение вопроса о приложении этих методов к задачам анализа решений при неопределенности выходит за рамки настоящей статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем здесь контрпример из работы [17] в наших обозначениях, для простоты представляя события с помощью мультипликативной записи, состоящей из номеров составляющих их элементарных событий; например, вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать 124 и вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\} \succ \{\lambda^3\}$ соответственно $124 \succ 3$.

Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение вероятности, записанное в виде единой цепочки:

$$\begin{aligned} 12345 &\succ 1345 \succ 1245 \succ 1235 \succ 145 \succ 135 \succ 2345 \succ \\ &\succ 345 \succ 125 \succ 1234 \succ 15 \succ 245 \succ 235 \succ 134 \succ 45 \succ \\ &\succ 124 \succ 35 \succ 123 \succ 25 \succ 14 \succ 13 \succ 234 \succ 5 \succ 34 \succ \\ &\succ 12 \succ 1 \succ 24 \succ 23 \succ 4 \succ 3 \succ 2 \succ \emptyset. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что все аксиомы A1 — A4 выполнены и это отношение вероятности есть полная качественная вероятность.

Предположим, что существуют количественные вероятности p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , которые представляют эту качественную вероятность. Из приведенной цепочки выделим четыре звена:

$$1 \succ 24, \quad 34 \succ 12, \quad 25 \succ 14, \quad 124 \succ 35.$$

Им соответствуют четыре строгих неравенства:

$$\begin{aligned} p_1 &> p_2 + p_4, \quad p_3 + p_4 > p_1 + p_2, \quad p_2 + p_5 > p_1 + p_4, \\ p_1 + p_2 + p_4 &> p_3 + p_5. \end{aligned}$$

Однако система из этих четырех неравенств несовместна. Действительно, сложив их левые и правые части, получим

$$2p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 > 2p_1 + 2p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5,$$

т. е. $0 > 0$. Полученное противоречие доказывает, что предположение о возможности представления рассматриваемой качественной вероятности с помощью количественных вероятностей неверно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 5. Вначале заметим, что точку из выпуклого замыкания объединения конечного числа выпуклых множеств можно представить в виде выпуклой комбинации точек, каждая из которых может принадлежать только к одному из этих множеств. Действительно, пусть в выпуклой комбинации встречается, например, векторная сумма $\alpha_{i'}x_{i'} + \alpha_{i''}x_{i''}$, где $\alpha_{i'}$ и $\alpha_{i''}$ положительны, а точки $x_{i'}$ и $x_{i''}$ принадлежат одному и тому же множеству. Эту сумму можно заменить в выпуклой комбинации на одно слагаемое

$$\alpha_{i'i''}^0 \left(\frac{\alpha_{i'}}{\alpha_{i'i''}^0} x_{i'} + \frac{\alpha_{i''}}{\alpha_{i'i''}^0} x_{i''} \right),$$

где $\alpha_{i'i''}^0 = \alpha_{i'} + \alpha_{i''}$, а вектор, стоящий в скобках, принадлежит тому же множеству.

Учтем еще, что верхний срез отношения $R^{\succ}$ через y , согласно теореме 1, можно представить в виде объединения конечного числа выпуклых множеств: $\bigcup_{z \in Z^+(y)} R_+^{\succ}(z)$.

Поэтому любую точку x из выпуклого замыкания верхнего среза $R^{\succ}(y)$ можно представить в виде выпуклой комбинации точек $u^1, u^2, \dots, u^s$, каждая из которых принадлежит соответствующему множеству $R_+^{\succ}(z^1), R_+^{\succ}(z^2), \dots, R_+^{\succ}(z^s)$, где s — число векторов во множестве $Z^+(y)$:

$$x = \sum_{j=1}^s \alpha_j u^j, \text{ где все } \alpha_j \geq 0 \text{ и } \sum_{j=1}^s \alpha_j = 1.$$

Пусть $w^j = u^j - z^j \geq 0_{(m)}, j = 1, 2, \dots, s$, где $0_{(m)}$ — нулевой m -мерный вектор $(0, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^s \alpha_j (z^j + w^j) = z + \delta,$$

где $z = \sum_{j=1}^s \alpha_j z^j \in \bar{Z}_+(y)$ и $\delta = \sum_{j=1}^s \alpha_j w^j \geq 0_{(m)}$, и $x \geq z$.

Первое утверждение теоремы 5 доказано. Остальные два доказываются аналогично.



ЛИТЕРАТУРА

1. *Fishburn, P.C.* Decision and Value Theory. — New York: Wiley, 1964.
2. *Подinovский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 11. — С. 141—159. [*Podinovskii, V.V.* Decision under multiple estimates for the importance coefficients of criteria and probabilities of values of uncertain factors in the aim function // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, no. 11. — P. 1817—1833.]
3. *Montes, I., Miranda, E., Montes, S.* Stochastic dominance with imprecise information // Computational Statistics and Data Analysis. — 2014. — Vol. 71. — P. 867—885.
4. *Troffaes, M.* Decision making under uncertainty using imprecise probabilities // International Journal of Approximate Reasoning. — 2007. — Vol. 45. — P. 17—29.
5. *Montes, I., Miranda, E., Montes, S.* Decision making with imprecise probabilities and utilities by means of statistical preference and stochastic dominance // European Journal of Operational Research. — 2014. — Vol. 234. — P. 209—220.
6. *Льюс, Р.Д., Райфа, Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор / пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. [*Luce, R.D., Raiffa, H.* Games and Decisions. — New York: Wiley, 1957.]
7. *Schoemaker, P.* The Expected Utility Model: its Variants, Purposes, Evidence and Limitations // Journal of Economic Literature. — 1982. — Vol. 20. — P. 529—563.
8. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений: учеб. — М.: Логос, 2006. [*Larichev, O.I.* Theory and Methods of Decision Making: manual. — Moscow: Logos, 2006. (In Russian)]
9. *Подinovский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / под ред. Н.Н. Моисеева. — М., 1979. — С. 117—145. [*Podinovski, V.V.* Axiomatic Solution of the Problem of Evaluating the Importance of Criteria in Multi-criterial Decision-making Problems. In: N.N. Moiseev (ed.), State-of-the-Art of Operations Research Theory. — Moscow: Nauka, 1979. — P. 117—145. (In Russian)]
10. *Подinovский В.В., Потапов М.А., Нелюбин А.П., Подinovская О.В.* Теория важности критериев: современное состояние и направления дальнейшего ее развития // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ—2014. Москва, 16—19 июня 2014 г. ИПУ РАН [Электронный ресурс]. — М., 2014. — С. 7697—7702. — URL: <http://vspu2014.ipu.ru/node/8581> [*Podinovski, V.V., Potapov, M.A., Nelyubin, A.P., Podinovskaya, O.V.* Criteria Importance Theory: State-of-the-art and Directions of its Further Development. XII All-Russian Meeting on Control Problems VSPU-2014. Moscow, June 16—19, 2014 Institute of Control Science RAS [Electronic resource]. — Moscow, 2014. — P. 7696—7702. URL: <http://vspu2014.ipu.ru/node/8581> (In Russian)]
11. *Подinovский В.В.* Задачи принятия решений при качественном оценивании факторов и предпочтений // Математические методы в социологическом исследовании. — М.: Наука, 1981. — С. 115—125. [*Podinovski, V.V.* Problems of Decision-making under Qualitative Assessment of Factors and Preferences. Mathematical Methods in Sociological Research. — Moscow: Nauka, 1981. — P. 115—125. (In Russian)]
12. *Подinovский В.В.* Задачи принятия решений при качественном оценивании факторов // Методологические проблемы использования математических методов в социологических исследованиях. — М.: ИСИ АН СССР, 1980. — С. 115—125. [*Podinovski, V.V.* Problems of Decision-making under Qualitative Assessment of Factors. Methodological Problems of Using Mathematical Methods in Sociological Research. — Moscow: ISR RAS, 1980. — P. 115—125. (In Russian)]
13. *Podinovski, V.V., Podinovski, Vic.V.* Decision Analysis under Partial Information // Trends in Multicriteria Decision Making / Th.J. Stewart, R.C. Van der Honert (Eds.). Lecture Notes in Economic and Mathematical System. — Berlin: Springer, 1998. — Vol. 465. — P. 77—84.
14. *Пфанцagl И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. [*Pfanzagl, J.* Theory of Measurement. — Berlin: Springer, 1971.]
15. *Fishburn, P.C.* The axioms of subjective probability // Statistical Science. — 1986. — Vol. 1. — P. 335—345.
16. *Наумов Г.Е., Подinovский В.В., Подinovский Вик.В.* Субъективная вероятность: способы представления и методы получения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 94—109. [*Naumov, G.Y., Podinovskii, V.V., Podinovskii, Vic.V.* Subjective Probability: Representation and Derivation Methods // Journal of Computer and System Sciences International. — 1993. — Vol. 31, no. 3. — P. 12—23.]
17. *Kraft, C.H., Pratt, J.W., Seidenberg, A.* Intuitive Probability on Finite Sets // Annals of Mathematical Statistics. — 1959. — Vol. 30. — P. 408—419.
18. *Подinovский, Вик.В.* К вопросу о продолжении частичных бинарных отношений в моделях принятия решений // Вычислительные системы и вопросы принятия решений: сборник / под. ред. Л.Н. Королева, П.С. Краснощекова. — М., МГУ, 1991. — С. 166—168. [*Podinovski, Vic.V.* On the Question of the Extension of Partial Binary Relations in Decision-making Models / Computing Systems and Decision-Making: collection. L.N. Korolev, P.S. Krasnoshekov (eds.). — Moscow: Moscow State University, 1991. — P. 166—168. (In Russian)]
19. *Fishburn, P.C.* Linear Extensions of Additive Partial Orders // Order. — 1997—1998. — Vol. 14. — P. 153—169.
20. *Шпедер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. [*Schreider, Y.A.* Equality, Similarity, Order. — Moscow: Nauka, 1971. (In Russian)]
21. *Warshall, S.* A theorem on Boolean matrices // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1962. — Vol. 9. — P. 11—12.
22. *Подinovский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 11. — С. 118—127. [*Podinovskii, V.V.* Multicriterial Problems with Importance-ordered Criteria // Automation and Remote Control. — 1976. — Vol. 37, no. 11, part 2. — P. 1728—1736.]
23. *Подinovский В.В., Подinovская О.В.* Новые многокритериальные решающие правила в теории важности критериев // Доклады академии наук. — 2013. — Т. 451, № 1. — С. 21—23. [*Podinovski, V.V., Podinovskaya, O.V.* New Multicriterial Decision Rules in Criteria Importance Theory. Doklady Mathematics. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 486—488.]
24. *Podinovski, V.V.* Decision Making under Uncertainty with Unknown Utility Function and Rank-ordered Probabilities // European Journal of Operational Research. — 2014. — Vol. 239. — P. 537—541.
25. *Кривцун И.Л., Подinovский В.В.* Аналитическое решающее правило для задачи выбора при порядковой информации о предпочтениях и неопределенных факторах // Информационные технологии моделирования и управления. — 2016. — № 6. — С. 450—459. [*Krivtun, I.L., Podinovski, V.V.* Analytical Decision Rule for the Problem of Choice under Ordinal Information about Preferences and Uncertain Factors // Information Technologies of Modeling and Control. — 2016. — No. 6. — P. 450—459. (In Russian)]
26. *Райфа Г.* Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. [*Raiffa, H.* Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty. — Addison-Wesley: Reading, MA, 1968.]
27. *Нелюбин А.П., Подinovский В.В.* Алгоритмическое решающее правило, использующее ординальные коэффициенты важности критериев со шкалой первой порядковой метри-

- ки // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — № 1. — С. 43—59. [Nelyubin, A.P., Podinovski, V.V. Algorithmic Decision Rule Using Ordinal Criteria Importance Coefficients with a First Ordinal Metric Scale // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, no. 1. — P. 48—65.]
28. Гафт М.Г., Подиновский В.В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 6. — С. 128—138. [Gaft, M.G., Podinovskii, V.V. Construction of Decision Rules in Decision-making Problems // Automation and Remote Control. — 1981. — Vol. 42. — P. 806—814.]
29. Подиновский В.В. Согласительные решения многокритериальных задач выбора // Проблемы управления. — 2017. — № 2. — С. 17—26. [Podinovski, V.V. Conciliative solutions for Multicriterial Choice Problems // Control Sciences. — 2017. — No. 2. (In Russian)]
30. Подиновский В.В. Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 5. — С. 110—123. [Podinovskii, V.V. Quantitative Importance of Criteria // Automation and Remote Control. — 2000. — Vol. 61, no. 5. Part 2. — P. 817—828.]
31. Podinovski, V.V. The Quantitative Importance of Criteria for MCDA // Journal of Multi-criteria Decision Analysis. — 2002. — Vol. 11. — P. 1—15.
32. Подиновский В.В. Количественная важность критериев с дискретной шкалой первой порядковой метрики // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 8. — С. 196—203. [Podinovskii, V.V. The Quantitative Importance of Criteria with Discrete First-order Metric Scale // Automation and Remote Control. — 2004. — Vol. 65, no. 8. — P. 1348—1354.]
33. Podinovski, V.V. On the Use of Importance information in MCDA Problems with Criteria Measured on the First Ordered Metric Scale // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. — 2009. — Vol. 15. — P. 163—174.

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 19.05.2019, после доработки 5.09.2019.

Принята к публикации 30.09.2019.

Подиновский Владислав Владимирович — д-р техн. наук,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва,
✉ podinovski@mail.ru.

ANALYSIS OF DECISIONS UNDER UNCERTAINTY WITH NON-NUMERIC ASSESSMENT OF PREFERENCES AND PROBABILITIES

V.V. Podinovski

National Research University «Higher School of Economics», Moscow, Russia

✉ podinovski@mail.ru

Abstract. It is shown that practical decision-making problems often involve taking into account preferences not fully identified, as well as uncertain factors. Known approaches to the analysis of such problems are based on introducing of quantitative probabilities and using of utility function. However, this requires obtaining rather complex and therefore unreliable and not always available information. In this paper, such methods are proposed for analyzing decisions under uncertainty, for the implementation of which utility functions and quantitative probabilities are not required. They are based on the ideas and results of the theory of the importance of criteria in multi-criteria problems of decision-making under certainty. Partial preference and indifference relations generated by qualitative probability on a set of strategies are used. Computational methods for constructing such relations are considered. Calculation examples are given.

Keywords: decision-making under uncertainty, incomplete information about preferences and uncertain factors, preference relations, qualitative probability.

Funding. The study has been funded by the Russian Academic Excellence Project «5—100».



ПОПРАВКА

В тираже номера 3, 2019 г. в статье «Стайное управление малыми беспилотными летательными аппаратами в 2D-среде с препятствиями¹» авторов А.Ю. Ефремова, Ю.С. Леговича пропущена сноска к заголовку статьи:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7 (30) «Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации».

РАСШИРЕНИЕ МОДЕЛИ «НАСТУПЛЕНИЕ — ОБОРОНА»

В.В. Шумов

Аннотация. Рассмотрена вероятностная модель боя, основанная на принципах ведения боевых действий и определении боя. Параметр боевого превосходства учитывает моральные и технологические характеристики. Предложена его оценка методом максимального правдоподобия. Сформулирована модель «наступление — оборона», учитывающая двух-эшелонное построение войск (выполнение ближайшей и последующей задач). Найдено решение трех задач, связанных с отысканием: 1) распределения средств по пунктам обороны; 2) количества (доли) средств, выделяемых во второй эшелон (резерв); 3) темпов перемещения подразделений в бою и их потерь. Первая задача решена с помощью обобщенного метода уравнивания Ю.Б. Гермейера. В рамках второй задачи сведение игры к матричной антагонистической позволило найти оптимальные решения по распределению сил сторон между эшелонами. Показано, что решение игры содержательно интерпретируется с точки зрения военной науки (позиционная и мобильная оборона). Для решения третьей задачи учтены данные военной статистики. На конкретных примерах показана применимость представленных моделей при проведении командно-штабных и исследовательских учений.

Ключевые слова: модель боя, модель Гросса, модель Гермейера, эшелонирование войск, оценка параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование боевых действий началось во время первой мировой войны. В 1915 г. М.П. Осипов разработал модель высокоорганизованного боя (модель с переносом огня) [1], а в следующем году Ф. Ланчестером опубликована модель боя без переноса огня (иногда называемая моделью партизанской войны) [2]. В 1921 г. Е. Борель сформулировал игру полковника Блотто — игру двух лиц, в которой игроки однократно, одновременно и независимо (не зная выбора оппонента) распределяют свои ограниченные ресурсы между конечным числом полей сражений или объектов защиты/нападения [3]. Е. Борель и Ж. Вилле вычислили равновесие в смешанных стратегиях в игре полковника Блотто с симметричными игроками при трех полях сражений [4]. В годы второй мировой войны возник научный метод «исследование операций», дающий в распоряжение военного командования или другого исполнительного органа количественные основания для принятия решений по действию войск или других организаций, находящихся под их управлением [5]. Классификация математических моделей военных действий представлена

в работе Д.А. Новикова [6]. К теоретико-игровым моделям боя можно отнести модель «нападение — оборона» Ю.Б. Гермейера [7], являющаяся модификацией модели О. Гросса [8]. В работах [9—11] рассмотрена многоуровневая система обороны при условии, что обороняющиеся располагаются на стационарных пунктах. В органах управления объединений, соединений и частей выполняются оперативно-тактические расчеты, основанные на учете боевого опыта и данных военной статистики [12].

Математические модели применяются в компьютерных имитационных системах военных действий, что позволяет, в частности, решать следующие задачи [13, 14]: сравнительная оценка альтернативных вариантов боевого применения войск (сил); анализ структуры и состава боевых и обеспечивающих формирований, имеющих на вооружении различные образцы вооружений и др.

Анализируя 40-летний опыт моделирования боевых действий, С. Бондер выделил важность искусства превращения проблемы принятия решения в проблему анализа, создания подходящих гипотез [15]. Вторая отмеченная им проблема заключается в том, что государство тратит слишком много ресурсов на разработку технических решений в ущерб повышению квалификации военных

специалистов по анализу исследования операций. Отсюда вытекает важная научная проблема, заключающаяся в разработке моделей, оперирующих ограниченным набором параметров и управляемых переменных и учитывающих основные положения военной науки. Иными словами, модели боевых действий должны обладать свойством ингерентности — согласованности с управленческой (культурной) средой, соответствием взглядам военных теоретиков и практиков на ведение боя, сражения, операции. С другой стороны, согласованность достигается в ходе обучения военных руководителей выполнению оперативно-тактических расчетов с помощью математических моделей и их программных реализаций.

В настоящей работе рассматриваются вероятностная модель боя и расширение теоретико-игровой модели «нападение — оборона» Ю.Б. Гермейера [7], учитывающие действия подвижных вторых эшелонов (резервов) и позволяющие оценить темп наступления и ожидаемые потери сторон. Стиль изложения материала ориентирован как на специалистов по исследованию операций, так и на специалистов в области военной науки и искусства.

1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БОЯ

Пусть имеются две противостоящие друг другу боевые группы. Боевая численность первой группы равна x , второй — y . Обозначим β — параметр боевого превосходства первой стороны над второй. Допустим, что исход боя определяется результатами боестолкновений отдельных боевых единиц сторон, а сами боевые единицы в смысле их боевых возможностей однородны (т. е. каждая боевая единица в равной степени пользуется результатами обеспечения боя, разведки, наведения и др.). Тогда, учитывая классическое определение вероятности, определим вероятность победы в бою первой стороны по формуле [16]:

$$p_x(x, y) = \frac{\beta x}{\beta x + y} = \frac{q}{q + 1}, \quad q = \frac{\beta x}{y},$$

$$p_x(0, 0) = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (1)$$

где q есть соотношение сил сторон (превосходство первой стороны). Параметру β боевого превосходства в оперативно-тактических расчетах соответствует понятие боевого потенциала отдельной боевой единицы (определяемого как совокупность имеющихся средств, а также материальных и духовных возможностей). Боевой потенциал пехотинца (мотострелка) со штатным вооружением обычно принимается за единицу.

Для оценки параметра β боевого превосходства по результатам боевых действий можно воспользоваться функцией правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^m (p_i)^s (1 - p_i)^{1-s} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\beta x_i}{\beta x_i + y_i} \right)^s \left(\frac{y_i}{\beta x_i + y_i} \right)^{1-s},$$

где m — число наблюдений за ходом и результатами боев (объем выборки), p_i — вероятность победы первой стороны в i -м бою (неизвестная величина), s — доля боев, в которых победила первая сторона, $x_i > 0$ — количество боевых единиц первой стороны, участвовавших в i -м бою, $y_i > 0$ — количество боевых единиц второй стороны, участвовавших в i -м бою.

Максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия, получим выражение для вычисления параметра β :

$$\frac{ms}{\beta} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\beta x_i + y_i} = 0.$$

В работе [17] на основе международной базы инцидентов в морском пространстве выполнена оценка параметра боевого превосходства нападающих над экипажами судов, стремящихся отразить их захват.

1.1. Учет морального и технологического факторов в модели боя

Исходя из взглядов военных теоретиков и практиков [18—21], можно выделить два важнейших фактора, определяющих боевую эффективность соединений, частей и подразделений: моральный фактор и его количественный показатель — проценты выдерживаемых кровавых потерь и технологический фактор.

Поскольку боевое превосходство определяется этими двумя факторами, выражение (1) можно переписать в виде:

$$p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_x x}{\alpha \lambda_x x + \lambda_y y}, \quad \beta = \alpha \rho, \quad \rho = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ — параметр технологического превосходства первой стороны, ρ — отношение моральных потенциалов сторон, $0 < \lambda_x < 1$ — доля потерь, выдерживаемая первой стороной, $0 < \lambda_y < 1$ — доля потерь, выдерживаемая второй стороной.

Термин «моральная упругость» войск впервые введен Н.Н. Головиным: «Для сражений второй половины XVIII и всего XIX века пределом наибольшей, моральной упругости войск, после которого они не способны уже к победе, являются кровавые потери в 25 %» [20]. По современным представлениям, небоеспособными признаются соединения, части и подразделения при наличии в них менее 40 % боевого состава [21].

Технологический фактор определяется следующими показателями (вытекают из определения боя — совокупности согласованных по цели, месту и времени ударов, огня и маневра войск для уничтожения (разгрома) противника, отражения его ударов и выполнения других задач [21]):

- опыт и искусство командиров, их способность организовать всестороннее обеспечение боя и согласованные действия подчиненных и приданных сил и средств;

- возможности по разведке противника, своевременному целеуказанию, скрытной, оперативной и устойчивой связи и навигации;

- маневренность сил и средств;

- огневые и ударные возможности сил и средств.

В первом приближении параметр α можно определить с помощью среднего геометрического:

$$\alpha = \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}, \quad \alpha_j = \alpha_j^{(1)} / \alpha_j^{(2)}, \quad j = 1, \dots, 4,$$

где $\alpha_1 > 0$ — параметр превосходства первой стороны в опыте командования и всестороннем обеспечении, $\alpha_2 > 0$ — параметр ее превосходства в средствах разведки, связи и навигации, $\alpha_3 > 0$ — параметр ее превосходства в маневренности, $\alpha_4 > 0$ — параметр ее превосходства в огневых возможностях, $\alpha_j^{(1)}$ и $\alpha_j^{(2)}$ — значения j -го показателя первой и второй сторон.

Частные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ вычисляются как отношения количественных характеристик боевых единиц сторон с учетом противодействия противника. Например, дальности эффективного поражения противника ($\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$) следует вычислять с учетом имеющихся у него средств индивидуальной и коллективной защиты; дальности обнаружения ($\alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_2^{(2)}$) — с учетом возможностей по маскировке (задымлению) и т. д. Поскольку коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ определены через отношения величин, то в качестве допустимого среднего принято среднее геометрическое.

Среднее геометрическое более чувствительно к малым значениям одного из коэффициентов, например, скорости боевого перемещения или дальности обнаружения противника в сложных метеословиях и отражает искусство командиров (командующих) по формированию оптимального состава и вооружения штурмовых, батальонных, ротных групп, способных эффективно решать поставленные боевые задачи. Так, в начале 1942 г. Г.К. Жуков для захвата опорных пунктов противника требовал создавать ударные отряды, вооруженные автоматическим оружием, минометами, отдельными орудиями и включать в их состав саперов, огнеметчиков и танки [22]. Применение штурмовых групп и ударных отрядов позволяет выровнять значения частных коэффициентов, повышая значение параметра технологического превосходства.

Имея выражения для расчета показателей морального ρ и технологического α превосходства, по результатам боевых действий можно верифицировать модель боя, находя статистическую оценку параметра боевого превосходства β .

1.2. Масштабирование вероятностной модели боя

Личный состав объединений, соединений и частей подразделяется на боевой состав и обеспечивающий. Боевой состав предназначен для непосредственного ведения боевых действий. Расчетными единицами боевого состава являются: для тактических расчетов — солдат, пулемет, орудие, танк, самолет, а также организационные подразделения более или менее одинакового состава во всех армиях — пехотный (стрелковый, мотострелковый) батальон, танковый батальон, батарея, эскадрилья, саперная (инженерно-техническая) рота; для оперативно-стратегических расчетов — стрелковые (пехотные), моторизованные, танковые, авиационные дивизии, отдельные артиллерийские полки и инженерно-саперные батальоны; однако и в этом случае учитывается общий численный состав людей и число орудий, танков и самолетов [23].

В табл. 1 указаны силы и средства советских войск к началу операции «Багратион» и их возможности [12; 24, с. 47; 25].

Таблица 1

Состав и возможности советских войск (операция «Багратион»)

Боевой состав	Единиц, тыс.	Боевой потенциал	Произведение (II) × (III)	Образец	Стоимость образца, тыс. руб.	Произведение (II) × (VI)
I	II	III	IV	V	VI	VII
Личный состав	2400	0,1	240	ППШ	0,148	355,2
Орудия и минометы	36,4	8	291,2	45-ти мм пушка	14	509,6
Танки и САУ	5,2	50	260	Т-34	135	702
Боевые самолеты	5,3	60	318	Ил-2	140	742

Заметим, что несмотря на качественную разнородность элементов боевого состава, суммарный боевой потенциал (столбец IV) и суммарная стоимость (столбец VII) этих элементов примерно одинаковы (одного порядка). Тогда количества боевых единиц сторон в выражениях (1) и (2) могут быть определены по формулам:

$$x = J\varphi_x \min_{j=1, \dots, J} c_{xj} n_{xj} k_{xj} + (1 - \varphi_x) \sum_{j=1}^J c_{xj} n_{xj} k_{xj},$$

$$y = J\varphi_y \min_{j=1, \dots, J} c_{yj} n_{yj} k_{yj} + (1 - \varphi_y) \sum_{j=1}^J c_{yj} n_{yj} k_{yj},$$

где $c_{xj}(c_{yj})$ — боевой потенциал (стоимость) боевой единицы j -го типа первой (второй) стороны, $n_{xj}(n_{yj})$ — количество боевых единиц j -го типа первой (второй) стороны, $k_{xj}(k_{yj})$ — коэффициенты технической готовности и материальной обеспеченности боевых единиц j -го типа первой (второй) стороны, J — число типов боевых единиц, $0 \leq \varphi_x \leq 1$ ($0 \leq \varphi_y \leq 1$) — показатель, обеспечивающий применение в бою (сражении) всех типов боевых единиц и учитывающий особенности боя (театра военных действий).

При $\varphi_x = 1$ ($\varphi_y = 1$) обеспечивается «гармоничный» состав группировок, что подтверждается опытом советских стратегических операций 1944—1945 гг. В ходе статистического исследования В.И. Цыгичко и Ф. Стоили выявили важную особенность структур группировок войск сторон. Оказалось, что в среднем по анализируемым операциям пехота, танки, артиллерия и авиация вносили примерно одинаковый вклад в потери сторон, т. е. произведения численностей различных типов оружия на их боевой потенциал практически равны [12].

Таким образом, нами получена простейшая вероятностная модель боя, учитывающая численности сторон, их моральные и технологические характеристики и отвечающая требованиям масштабируемости.

2. МОДЕЛЬ «НАСТУПЛЕНИЕ — ОБОРОНА»

Задача моделирования действий нападения против защиты в военных операциях с критерием эффективности средств нападения поставлена и решена Ю.Б. Гермейером [7]:

$$\sum_{i=1}^n \max(x_i - p_i y_i; 0) \rightarrow \max, \quad x_i \geq 0, y_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = r_x, \quad \sum_{i=1}^n y_i = r_y,$$

где r_x и r_y — число боевых единиц нападения и защиты, n — число пунктов обороны, где возможен ее прорыв, x_i и y_i — число боевых единиц, выделенных нападением и защитой на i -й пункт, p_i — число средств нападения, уничтожаемых одной единицей защиты на i -м пункте. С помощью обобщенного метода уравнивания Ю.Б. Гермейера далее рассмотрим расширение его модели, учитывающее базовые положения военной науки.

Основными видами военных (боевых) действий являются наступление и оборона [21].

На *стратегическом и оперативном уровнях* наступление применяется для разгрома противника и овладения важными районами, рубежами и объектами на его территории (акватории). Оборона применяется, как правило, в неблагоприятно складывающейся обстановке для срыва или отражения наступления (ударов) численно превосходящего противника, уничтожения его сил и средств, удержания важных районов, рубежей и объектов на своей территории (акватории), выигрыша времени и с другими целями [21].

Основной формой *тактических действий* является бой. Наступательный бой применяется в целях разгрома противостоящей тактической группировки войск противника и овладения важным районом (рубежом, объектом) на его территории. Разновидности наступательного боя — прорыв, встречный бой и преследование. Оборонительный бой применяется для срыва или отражения наступления превосходящих сил противника, удержания занимаемых позиций (рубежей), предотвращения прорыва противника к прикрываемым объектам и создания условий для перехода в наступление [21].

Управление действиями наступающих и обороняющихся подразделений в общем случае может сводиться к отысканию:

- распределения средств по пунктам обороны;
- количества (доли) средств, выделяемых во второй эшелон (резерв);
- темпов перемещения подразделений в бою и их потерь;
- размеров по фронту и в глубину районов обороны, направлений маневра;
- способов действий, направленных на разгром противника или его окружение, или занятие важного рубежа (объекта) в глубине обороны;
- способов действий в обороне, при отходе и в окружении;
- способов маскировки и введения противника в заблуждение и др.

Задачи управления боем, в которых определялись бы все указанные элементы законов управления, в литературе не описаны. Далее с помощью вероятностной модели боя рассмотрим частные решения первых трех задач.

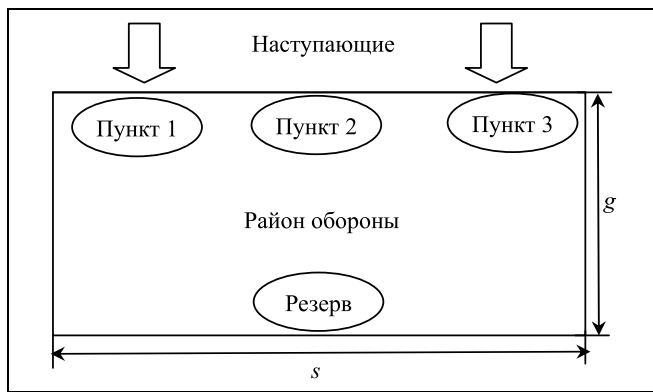


Рис. 1. Условная схема района обороны

Пусть имеется n обороняемых пунктов (районов, участков, направлений) с номерами $i = 1, \dots, n$, где возможен прорыв средствами наступающих (рис. 1). Обозначим R_x и R_y — количества боевых средств в распоряжении наступающих и обороняющихся. Ресурсы R_x и R_y полагаются бесконечно делимыми, что позволит учесть действия своих, приданных и поддерживающих единиц, когда их усилия попеременно направлены на различные пункты и задачи.

Наступающая сторона состоит из войск первого эшелона, имеющего задачу прорыва обороны хотя бы на одном из обороняемых пунктов, и войск второго эшелона, которые вводятся в прорыв с задачей разгрома второго эшелона (резервов) обороны и выхода на назначенный рубеж в глубине обороны. Вектор средств наступления:

$$x = (x_1, \dots, x_n, u) \in X = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i + u = R_x \right\},$$

$$x_i, u \in \mathbb{R},$$

где $x_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу прорыва пункта i ; $u \geq 0$ — количество средств второго эшелона.

Обороняющаяся сторона состоит из войск первого эшелона и резерва (или второго эшелона). Задача первого эшелона заключается в недопущении прорыва пунктов обороны, задача резерва (второго эшелона) — в нанесении контрудара в случае прорыва обороны или удержании второй линии обороны. Вектор средств обороны:

$$y = (y_1, \dots, y_n, w) \in Y = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i + w = R_y \right\},$$

$$y_i, w \in \mathbb{R},$$

где $y_i \geq 0$ — количество средств первого эшелона, имеющих задачу обороны пункта i ; $w \geq 0$ — количество средств резерва, предназначенных для нанесения контрудара в случае прорыва пункта i .

Дополнительно определим подмножества действий первых эшелонов сторон через разность множеств:

$$X \setminus u = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_i = R_x - u \right\},$$

$$Y \setminus w = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n y_i = R_y - w \right\}.$$

Применительно к действиям первых эшелонов векторы средств сторон:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \setminus u, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in Y \setminus w.$$

2.1. Задача управления прорывом (удержанием) пунктов обороны

Рассмотрим постановку частной теоретико-игровой задачи управления прорывом (удержанием) пунктов обороны в условиях, когда стороны принимают решения одновременно (продолжительности тактических циклов действий сторон примерно одинаковы) и для нахождения решения достаточно вычислить равновесие Нэша.

Определим целевую функцию первого эшелона наступающих в виде:

$$f(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i} \right),$$

где β_i — параметр боевого превосходства наступающих на i -м пункте обороны; $x_i \geq 0$ — количество средств наступающих, выделенных для прорыва пункта i ; $y_i \geq 0$ — количество средств, имеющих задачу обороны пункта i .

Так как выигрыш наступающих есть проигрыш обороняющихся, то мы имеем антагонистическую игру. Отметим, что функция $\frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + y_i}$ выпукла по y_i и вогнута по x_i , $i = 1, \dots, n$, а функция $f(x, y)$ выпукла по y (выпуклость поточечного максимума).

Без потери общности положим, что $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ (первый пункт для обороны является слабейшим), чего легко добиться перенумерацией пунктов обороны.

Нижняя цена игры прорыва пунктов обороны:

$$\underline{v} = \max_{x \in X \setminus u} \min_{y \in Y \setminus w} f(x, y) =$$

$$= \frac{\beta_1 (R_x - u)}{\beta_1 (R_x - u) + R_y - w} = \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + t_y},$$

$$r_x = R_x - u, \quad r_y = R_y - w,$$

а $x^{(1)} = \{r_x, 0, \dots, 0\}$ есть максиминная стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении удара

всеми силами первого эшелона (концентрированного удара) по слабейшему (первому) пункту.

Для любой стратегии наступающих определим вспомогательную («выравнивающую») стратегию обороняющихся:

$$\bar{y}_i = \frac{\beta_i x_i}{\sum_{j=1}^n \beta_j x_j} r_y, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Тогда } \min_{y \in Y \setminus w} f(x, y) \leq f(x, \bar{y}) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{\beta_i x_i}{\beta_i x_i + \bar{y}_i},$$

$$f(x, \bar{y}) = \max_{i=1, \dots, n} \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j x_j}{\sum_{j=1}^n \beta_j x_j + r_y} \leq \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y}.$$

Таким образом, для любой стратегии x

$$\min_{y \in Y \setminus w} f(x, y) \leq \frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} = \min_{y \in Y \setminus w} f(x^{(1)}, y)$$

и $x^{(1)}$ — максиминная стратегия наступающих.

Верхняя цена игры. Предварительно рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру с диагональной матрицей A , в которой диагональные элементы $a_i > 0$ и предположим, что все элементы оптимальных смешанных стратегий φ^0, π^0 положительны (нет доминируемых стратегий). Тогда по теореме (свойству дополняющей нежесткости) [26, с. 36] получим:

$$A(i, \pi^0) = a_i \pi_i^0 = v, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \pi_i^0 = 1.$$

Решение системы относительно $n + 1$ неизвестных π_i^0, v [26]:

$$\varphi^0 = \pi^0 = v/a_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad v = 1/\sum_{j=1}^n (a_j)^{-1}.$$

Утверждение. В игре прорыва пунктов обороны верхняя цена и минимаксная стратегия обороняющихся

$$\bar{v} = \min_{y \in Y \setminus w} \max_{x \in X \setminus u} f(x, y) = \frac{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j}{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j + r_y}$$

$$\text{и } y^0: y_i^0 = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^n \beta_j} r_y, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть $x^{(i)} = \{0, \dots, \frac{r_x}{i}, 0, \dots, 0\}$

есть стратегия наступающих, заключающаяся в нанесении всеми силами удара по i -му пункту обороны и докажем равенство:

$$\max_{x \in X \setminus u} f(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} f(x^{(i)}, y) \quad \forall y \in Y \setminus w. \quad (3)$$

Представим стратегию x в виде:

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r_x} x^{(i)} = \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{x_i x^{(i)}}{r_x} \right).$$

Тогда целевая функция

$$f(x^{(i)}, y) = \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i} = \left(1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x} \right)^{-1},$$

и равенство (3) выполняется в силу того, что целевая функция $f(x, y)$ является возрастающей по x .

Рассмотрим вспомогательную целевую функцию и заменим переменные

$$g(i, y) = \frac{1}{f(x^{(i)}, y)} = 1 + \frac{y_i}{\beta_i r_x} = g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{\beta_i r_x} \pi_i,$$

где $\pi = y/r_y \in \Pi = \left\{ \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$.

Найдем ее максимин (с учетом выражения (3) и что $a_i = 1/\beta_i$):

$$\max_{\pi \in \Pi} \min_{i=1, \dots, n} g(i, \pi) = 1 + \frac{r_y}{r_x} \max_{\pi \in \Pi} \min_{i=1, \dots, n} \frac{\pi_i}{\beta_i} = 1 + \frac{r_y}{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j}.$$

Обозначим $B = \sum_{j=1}^n \beta_j$. В результате получаем верхнюю цену игры прорыва пунктов обороны

$$\bar{v} = \min_{y \in Y \setminus w} \max_{x \in X \setminus u} f(x, y) = \frac{r_x B}{r_x B + r_y}$$

и оптимальное решение обороняющихся

$$y_i^0 = \frac{v}{a_i} r_y = \frac{\beta_i}{B} r_y, \quad i = 1, \dots, n.$$

Равновесие игры прорыва пунктов обороны в чистых стратегиях при $n > 1$ не существует, поскольку $\underline{v} < \bar{v}$ или

$$\frac{\beta_1 r_x}{\beta_1 r_x + r_y} < \frac{r_x B}{r_x B + r_y}.$$

Решение игры в смешанных стратегиях. В игре прорыва пунктов обороны существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, где y^0 — чистая мини-

максимальная стратегия обороны, а оптимальная смешанная стратегия наступающих имеет вид

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^n \pi_i^0 I_{x^{(i)}}, \quad \pi_i^0 = \frac{\beta_i}{B}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $I_{x^{(i)}}$ — вероятностная мера, сосредоточенная в точке $x^{(i)}$.

Наличие чистой минимаксной стратегии обороняющихся следует из выпуклости целевой функции по y (см. теорему 5.4 в работе [26]). Для смешанной стратегии наступающей стороны проверим выполнение условия:

$$f(\varphi^0, y) \geq \bar{v} \quad \forall y \in Y \setminus w.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} f(\varphi^0, y) &= \sum_{i=1}^n \pi_i^0 f(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x}{\beta_i r_x + y_i} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{B} \times \frac{\beta_i r_x + y_i}{\beta_i r_x} \right)} = \frac{Br_x}{\sum_{i=1}^n (\beta_i r_x + y_i)} = \frac{Br_x}{Br_x + r_y}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались известным неравенством:

$$x_i > 0, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1, \quad \pi_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \frac{\pi_j}{x_i} \geq 1 / \sum_{j=1}^n \pi_j x_j.$$

Таким образом, цена игры при прорыве первого эшелона обороны

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j}{r_x \sum_{j=1}^n \beta_j + r_y}. \quad (4)$$

Пример 1. При исходных данных: $n = 3$, $\beta_1 = 0,7$, $\beta_2 = 0,5$, $\beta_3 = 0,3$, $r_x = 100$, $r_y = 100$ найти вероятность прорыва обороны и оптимальные стратегии сторон. Вероятность прорыва обороны вычисляем по формуле (4):

$$v = \frac{r_x B}{r_x B + r_y} = \frac{100 \cdot 1,5}{100 \cdot 1,5 + 100} = 0,6.$$

Обороняющиеся применяют максиминную стратегию, распределяя ресурс по пунктам обороны:

$$y_1^0 = \frac{\beta_1}{B} r_y = \frac{0,7}{1,5} 100 \approx 46,7, \quad y_2^0 = \frac{\beta_2}{B} r_y = \frac{0,5}{1,5} 100 \approx 33,3,$$

$$y_3^0 = \frac{\beta_3}{B} r_y = \frac{0,3}{1,5} 100 \approx 20,0.$$

Наступающие всеми силами первого эшелона наносят удар по одному из пунктов обороны с вероятностями выбора пунктов:

$$\pi_1^0 = \frac{\beta_1}{B} = \frac{0,7}{1,5} \approx 0,47, \quad \pi_2^0 = \frac{\beta_2}{B} = \frac{0,5}{1,5} \approx 0,33,$$

$$\pi_3^0 = \frac{\beta_3}{B} = \frac{0,3}{1,5} \approx 0,20.$$

Если пункты обороны однородны ($\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n$), то цена игры

$$v = \frac{n \beta r_x}{n \beta r_x + r_y}.$$

Вынужденность обороны непосредственно следует из последнего выражения — с ростом числа пунктов обороны возможности наступающих существенно возрастают. На практике число пунктов не превышает трех—пяти.

2.2. Темп наступления и потери сторон

Важнейшим показателем боя, сражения и операции служит темп наступления (маневра). До начала механизации войск суточный переход подразделений в походном порядке составлял около 32 км нормальным маршем и до 50—60 км форсированным маршем. При движении на автомобилях размер суточного перехода увеличился до 200 км [27].

В табл. 2 и на рис. 2 показана зависимость темпов наступления в тактической глубине от соотношения сил сторон и степени подготовленности обороны противника [28].

В годы корейской войны (1950—1953 гг.) темп наступления дивизий армии США составлял при прорыве обороны 2—3 км/сут, при преследовании — 10—17 км/сут [29]. По взглядам командования НАТО средний темп наступления в тактической зоне должен составлять до 25 км/сут, в оперативной глубине — до 80 км/сут [30].

В общем случае темп наступления при прорыве обороны зависит от характера местности, ее инженерного оборудования, тактических характеристик имеющегося вооружения и др. Названные факторы могут быть учтены в модели боя через показатель технологического превосходства α наступающих (инженерное оборудование местности обычно снижает его значение). Увеличение темпов

Таблица 2

Зависимость темпов осуществления маневра советских войск в наступательном бою в годы Великой Отечественной войны от соотношения в силах и средствах степени подготовленности обороны противника

Соотношение сил и средств по пехоте, артиллерии, танкам (среднее)	Темпы осуществления маневра при различной степени готовности обороны противника, км/ч			
	Оборона не подготовлена	Оборона слабо подготовлена	Оборона подготовлена	Оборона подготовлена полностью
3:1	0,4	0,3	0,2	0,15
4:1	0,55	0,4	0,3	0,2
5:1	0,7	0,5	0,35	0,25
6:1	0,85	0,6	0,4	0,3
7:1	—	0,75	0,5	0,33

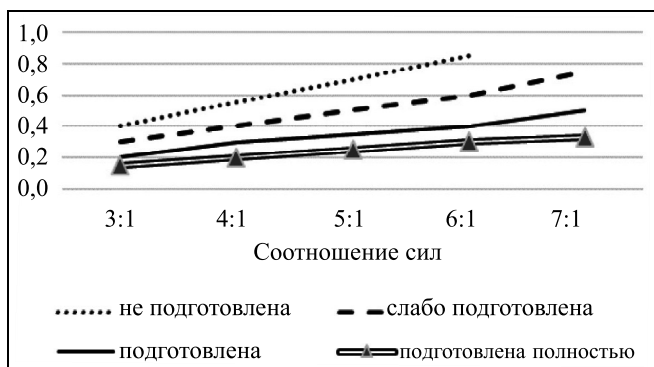


Рис. 2. Зависимость темпа наступления от соотношения сил и подготовки обороны

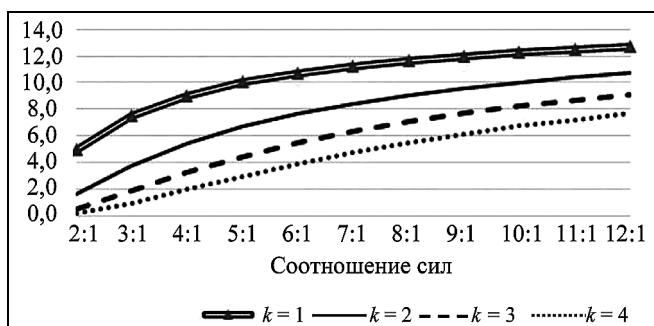


Рис. 3. Зависимость темпа наступления от соотношения сил при различных значениях параметра формы

наступления по сравнению с темпами, характерными для операций Великой Отечественной войны, может быть достигнуто путем применения БТР и БМП, способных вести эффективный огонь на ходу, разведывательно-огневых комплексов, механических средств разминирования и др.

В работе [31, с. 251] предложена формула для расчета темпа W наступления на обороняющуюся сторону:

$$W = \frac{q^2}{q^2 + 1},$$

которую целесообразно модифицировать с учетом данных военной статистики.

Примем допущения:

— при вероятности победы $p_x(x, y) \leq 0,5$ темп наступления равен нулю;

— с увеличением вероятности победы темп наступления приближается к скорости группы в походном порядке с учетом характера местности и препятствий на ней.

Наиболее простое выражение для расчета темпа наступления:

$$W = 2^k W_0 \left(\frac{q}{q+1} - 0,5 \right)^k = W_0 \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^k, \quad q \geq 1, \quad (5)$$

где W_0 — скорость перемещения наступающих в походном порядке с учетом характера местности, q — соотношение сил сторон, k — параметр формы, учитывающий возможности эффективного применения наступающими оружия в движении.

Данные из табл. 2 достаточно хорошо аппроксимируются моделью (5) при $k \approx 3-4$. На рис. 3 при $W_0 = 15$ км/ч показана зависимость темпов наступления от соотношения сил при различных значениях параметра формы k .

Из рисунка видно, что темп наступления можно существенно повысить путем изменения технологии прорыва обороны противника.

Количество обороняющихся, выделяемых в первый эшелон, должно обеспечивать своевременное выдвижение резерва на угрожаемое направление прорыва обороны и его развертывание в боевой порядок. С учетом данного условия обороняющимся назначается район обороны шириной s и глубиной g (см. рис. 1).

Перечислим виды маневра подразделений в бою [32]:

— обход — более глубокий маневр, совершаемый подразделениями для удара по противнику с тыла;

— охват — маневр, осуществляемый подразделениями в целях выхода для удара во фланг противнику;

— отход и смена района — маневр, применяемый в целях вывода своих войск из-под ударов превосходящих сил противника, выигрыша времени и занятия более выгодного рубежа (района).

Исходя из особенностей района обороны, степени его инженерного оборудования, ожидаемого маневра наступающих, обороняющиеся назначают для каждого пункта обороны минимальное число боевых единиц, сковавающих наступающих и вынуждающих их развернуться в боевой порядок.

В табл. 3 представлена зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил [12]. Приведенные в таблице данные достаточно хорошо аппроксимируются выражением $L_x = a_x q^{-c}$, $a_x = 10$, $c = 0,5$, где L_x — среднесуточные потери наступающих в ходе операции; a_x — коэффициент потерь наступающих; c — параметр формы функции потерь.

Соответственно, потери L_y обороняющихся можно описать выражением $L_y = a_y q^{-c}$, где a_y — коэффициент потерь обороняющихся.

Таблица 3

Зависимость суточных потерь наступающей стороны от начального соотношения сил

Начальное соотношение сил	5:1	3:1	1:1
Суточные потери, %	3,5	7	10

Имея выражения для расчета темпа наступления и ожидаемых потерь, можно назначать различные критерии боевых действий, отражающих цели сторон и особенности обстановки.

2.3. Модель «наступление — оборона»

Цель наступления (обороны) определяется при непосредственном планировании и зависит от множества факторов: боевая обстановка на участке ответственности старшего начальника, расположение и маневренность войск и резервов, социальная обстановка, характер местности и т. д.

Каждой возможной цели наступающих и обороняющихся должен быть поставлен в соответствие критерий. Причем в общем случае игра может быть неантагонистической, например, цель наступающих заключается в максимизации минимального значения из двух вероятностей — вероятности прорыва пункта обороны первого эшелона и вероятности отражения атаки резерва и выхода на назначенный рубеж; цель обороняющихся — максимизация суммарного времени обороны на двух рубежах.

Поскольку, зная соотношение сил сторон и выражения для расчета темпа наступления и потерь, достаточно из всего многообразия целевых функций рассмотреть функции

$$F(u, w) = \min \left(\frac{B(R_x - u)}{B(R_x - u) + R_y - w}, \frac{\delta u}{\delta u + w} \right),$$

$$B = \sum_{j=1}^n \beta_j, \quad (6)$$

$$u_{\min} \leq u \leq R_x - u_{\min}, \quad w_{\min} \leq w \leq R_y - w_{\min}, \quad (7)$$

где δ — параметр боевого превосходства второго эшелона наступающих над резервом обороны, $u_{\min} > 0$ ($w_{\min} > 0$) — малое значение боевых единиц первой (второй) стороны. Ограничения (7) отражают невырожденность двухэшелонного построения войск или требование наличия резерва.

Содержательно целевая функция означает, что наступающие стремятся так распределить силы и средства между эшелонами, чтобы обеспечить одинаково успешные и прорыв пунктов обороны (первого эшелона обороны), и отражение атаки резерва обороны (прорыв второго эшелона обороны). Иными словами, и наступающие, и обороняющиеся руководствуются принципом гарантированного результата при распределении ресурсов между эшелонами. Вместе с тем, в выражении (6) вместо минимума в ряде случаев представляется обоснованным взять произведение.

Задача не имеет решения в области чистых стратегий. Учитывая, что увеличение (сокращение) численности эшелона (резерва) происходит порциями, минимально по 5–10 единиц (отделе-

ние, группа), далее рассмотрим матричную антагонистическую игру с целевой функцией наступающих

$$F(u_k, w_k) = \min \left(\frac{B(R_x - u_k)}{B(R_x - u_k) + R_y - w_k}, \frac{\delta u_k}{\delta u_k + w_k} \right),$$

где u_k (w_k) — количество средств второго эшелона наступающих (резерва обороны) при k -й стратегии, $k = 1, \dots, K$.

Для обозначения смешанных стратегий наступающих и обороняющихся будем пользоваться векторами

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K), \quad \sum_{j=1}^K \pi_j = 1, \quad \pi_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K), \quad \sum_{j=1}^K \varphi_j = 1, \quad \varphi_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

Решение матричной игры сводится к паре двойственных задач линейного программирования [26].

Пример 2. При исходных данных $n = 3$, $\beta = 0,7$, $\delta = 1,2$, $R_x = 300$, $R_y = 100$ (трехкратное превосходство наступающих над обороняющимися), $K = 9$ решена матричная антагонистическая игра (матрица игры представлена в табл. 4).

Решение игры представлено в табл. 5.

Наступающим целесообразно с вероятностью 0,66 назначать во второй эшелон 180 боевых единиц из $R_x = 300$, а в оставшихся случаях — 210 единиц ($\pi_6 = 0,66$; $\pi_7 = 0,34$). Соответственно, обороняющимся выгодно в 34 случаях из 100 выделять в резерв (второй эшелон обороны) 10 боевых единиц (позиционная оборона), а в оставшихся случаях — 90 единиц (мобильная оборона), $\varphi_1 = 0,34$, $\varphi_9 = 0,66$. Значения целевой функции $F(u_k, w_k)$, вероят-

Таблица 4

Матрица игры «наступление—оборона»

Число единиц 2-го эшелона	Число боевых единиц, выделенных обороной в резерв								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
30	0,78	0,64	0,55	0,47	0,42	0,38	0,34	0,31	0,29
60	0,85	0,78	0,71	0,64	0,59	0,55	0,51	0,47	0,44
90	0,83	0,84	0,78	0,73	0,68	0,64	0,61	0,57	0,55
120	0,81	0,83	0,83	0,78	0,74	0,71	0,67	0,64	0,62
150	0,78	0,80	0,82	0,82	0,78	0,75	0,72	0,69	0,67
180	0,74	0,76	0,78	0,81	0,81	0,78	0,76	0,73	0,71
210	0,68	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,78	0,76	0,74
240	0,58	0,61	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,78	0,76
270	0,41	0,44	0,47	0,51	0,56	0,61	0,68	0,76	0,78

Решение игры «наступление—оборона»

Число единиц 2-го эшелона, u_k	Число боевых единиц, выделенных обороной в резерв, w_k						Смешанная стратегия наступления
	10			90			
	$F(u_k, w_k)$	v^0	v^R	$F(u_k, w_k)$	v^0	v^R	
180	0,74	0,74	0,96	0,71	0,96	0,71	0,66
210	0,68	0,68	0,96	0,74	0,95	0,74	0,34
Смешанная стратегия обороны		0,34			0,66		—

ности v^0 прорыва пунктов обороны и вероятности v^R выхода на назначенный рубеж показаны в таблице.

Цена игры при этом равна 0,72, ожидаемые вероятности прорыва пунктов обороны и выхода на назначенный рубеж: $p^{(1)} = 0,88$, $p^{(2)} = 0,80$. ♦

Результаты решения задачи имеют содержательную интерпретацию с точки зрения военной науки и военного искусства. В частности, по взглядам командования армии США в зависимости от условий обстановки применяется или мобильная оборона (основные силы и средства выделяются в резерв или второй эшелон), или позиционная, когда основные силы и средства находятся в первом эшелоне.

Если модели боя рассматривать как элемент теории игр, то в них смешанные стратегии вычисляются, а их реализация предполагает применение рулетки, датчика случайных чисел и др. Вместе с тем, военачальники, владеющие искусством подготовки и осуществления боев, сражений и операций, принимая решения, в кратчайшие сроки проигрывают в уме множество возможных действий сторон, учитывают опыт предыдущих действий, стремятся обмануть противника нешаблонными действиями. Оперативно-тактические расчеты и сводки, которые готовит штаб, по меткому выражению К. Клаузевица [18] являются шпагой, а искусство командира есть искусство фехтования в условиях постоянной нехватки времени, данных и непрерывно меняющейся обстановке. Совокупность действий, тактических приемов, развернутая во времени (учет опыта предыдущих боев) и пространстве (учет опыта соседей и др.) образует реализацию, называемую в теории игр смешанными стратегиями.

Применение смешанных стратегий одной из сторон дает ей существенное преимущество. Г.К. Жуков, рассуждая о планировании Варшавско-Познаньской операции, отмечал [33]:

«У меня не было полной гарантии, что нам удастся оперативно-тактическая внезапность, а поэтому я шел на худшее и расчет строил также на худшее. Противник мог определить не только направление нашего удара, но он мог догадаться и о силе этого удара, а это главное. Не

так страшно направление, как важно разгадать силу удара, чтобы своевременно подготовить соответствующие силы для противодействия...

Что противник мог сделать, когда бы он разгадал наш замысел? Он мог оставить в первом эшелоне обороны, т. е. на своем переднем крае, усиленное прикрытие, станковые пулеметы, ручное автоматическое оружие, отдельные пушки и даже поставить танки... Главные же силы он мог держать в 5–6 км от переднего края. Потеряв, наконец, от нашего первого удара 5–6 км территории и заставив нас расстрелять артзапасы, он достиг бы срыва нашей операции. Вы знаете, что для подвоза снарядов для артиллерийской подготовки по условиям коммуникаций требовался один месяц времени... После тщательного и всестороннего изучения обороны противника... решили генеральную атаку сразу не вести, так как не было полной гарантии, что данные, полученные от всех видов разведки за вчерашний день, не могут измениться к началу атаки...

Поэтому после тщательного изучения этих вопросов и обсуждения их с командующими, начальниками родов войск, командирами соединений и со штабными офицерами мы пришли к выводу: лучше пойти на обман во время самой атаки, а для этого должна быть проведена ложная атака, но такая ложная атака, которую противник не распознал бы, что она ложная. Значит, сила артудара, сила атаки не должны вызвать какое-либо подозрение у противника, и если окажется, что противник будет захвачен врасплох, дрогнет и не выдержит этого удара, мы используем этот успех, немедленно перейдем в атаку всеми силами и будем осуществлять свой генеральный план, т. е. будем вести генеральную атаку. Допустим, что противник пошел все же на обман и очистил бы территорию на 3–5 км, дал возможность нашему первому эшелону атаки приблизиться к истинному переднему краю, а там бы его остановил и атака бы захлебнулась. В этом случае максимум через 1–1,5 ч после передачи соответствующих команд и распоряжений мы могли перейти к плану осуществления артподготовки генеральной атаки».

Расчетное число единиц первого эшелона наступающих, равное $300 - 210 = 90$ (см. пример 1 и табл. 4), — это «ложная атака», $300 - 180 = 120$ — «генеральная атака». Стратегия обороны: выделить в первый эшелон 10 или 90 ед. из 100 имеющихся — это попытка ввести наступающих в заблуждение, заставив их попусту израсходовать ресурсы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена вероятностная модель боя, основанная на определении и принципах боя и учитывающая моральные и технологические характеристики сторон конфликта. Моральный фактор характеризуется процентом выдерживаемых кровавых потерь, при котором войска (боевые единицы) еще способны выполнять поставленные задачи. Технологический фактор определяется показателями: опытом и искусством командиров, возможностями по разведке, маневром и огневым поражением противника. Методом максимального правдоподобия найдена оценка параметра боевого превосходства. Рассмотрена задача масштабирования модели боя.

Сформулирована и решена теоретико-игровая задача «наступление — оборона», в которой учитываются действия первых и вторых эшелонов сторон. Задача состоит из подзадачи прорыва обороны первым эшелоном наступающих и подзадачи распределения ресурсов между эшелонами. Найдено решение игры и рассмотрен содержательный пример, отражающий опыт боевых действий в годы Великой Отечественной войны.

Из анализа данных по наступательным операциям Красной Армии 1944—1945 гг. получены зависимости темпа наступления и потерь от начального соотношения сил и средств сторон.

Перспективные направления дальнейших исследований: нахождение равновесия Штакельберга в игре «наступление — оборона», постановка и решение задач информационного и рефлексивного управления боевыми действиями и др. Кроме того, значительный интерес представляет апробация модели на реальных данных военной статистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осинов М.П.* Влияние численности сражающихся сторон на их потери // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59—74; № 7. — С. 25—36; № 8. — С. 31—40; № 9. — С. 25—37. [*Osipov, M.P.* The influence of the number of parties fighting on their losses // *Voennyj sbornik*. — 1915. — No. 6. — P. 59—74; No. 7. — P. 25—36; No. 8. — P. 31—40; No. 9. — P. 25—37. (In Russian)]
2. *Lanchester, F.W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. — London: Constable and Co, Ltd., 1916. — 243 p.
3. *Borel, E.* La théorie du jeu les équations intégrales à noyau symétrique // *Comptes Rendus de l'Académie*. — 1921. — Vol. 173. — P. 1304—1308.
4. *Borel, E., Ville, J.* Application de la théorie des probabilités aux jeux de hasard, original edition by Gauthier-Villars. — Paris, 1938; reprinted in *Theorie mathématique du bridge à la portée de tous*, by E. Borel and A. Cheron, Editions Jacques Gabay. — Paris, 1991.

5. *Morse, P.M., Kimball, G.E.* Methods of Operations Research. — Cambridge, MA: Technology Press of MIT; N.-Y.: John Wiley & Sons, 1951. — 158 p.
6. *Новиков Д.А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 37. — С. 25—62. [*Novikov, D.A.* Hierarchical models of hostilities // *Upravlenie bol'shimi sistemami*. — 2012. — Vyp. 37. — P. 25—62. (In Russian)]
7. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с. [*Germejer, Yu.B.* Introduction to Operations Research Theory. — M.: Nauka, 1971. — 384 p. (In Russian)]
8. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964. — 835 с. [*Karlin, S.* Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. — London—Paris: Pergamon press, 1959.]
9. *ПЕРЕВОЗЧИКОВ А.Г., ЛЕСИК И.А.* Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». — 2013. — № 3 (30). — С. 83—95. [*Perevozchikov, A.G., Lesik, I.A.* The simplest model of a layered air defense system // *Vestnik TvGU. Ser. «Prikladnaya matematika»*. — 2013. — No. 3 (30). — P. 83—95. (In Russian)]
10. *ПЕРЕВОЗЧИКОВ А.Г., РЕШЕТОВ В.Ю., ШАПОВАЛОВ Т.Г.* Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». — 2017. — № 1. — С. 57—69. [*Perevozchikov, A.G., Reshetov, V.Yu., Shapovalov, T.G.* Multilevel generalization of the attack-defense model // *Vestnik TvGU. Ser. «Prikladnaya matematika»*. — 2017. — No. 1. — P. 57—69. (In Russian)]
11. *РЕШЕТОВ В.Ю., ПЕРЕВОЗЧИКОВ А.Г., ЛЕСИК И.А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика. — 2015. — № 49. — С. 80—96. [*Reshetov, V.Yu., Perevozchikov, A.G., Lesik, I.A.* A model for overcoming a multi-level attack defense system // *Prikladnaya matematika i informatika*. — 2015. — No. 49. — P. 80—96. (In Russian)]
12. *Цыгичко В.И., Стоили Ф.* Метод боевых потенциалов: история и настоящее // Военная мысль. — 1997. — № 4. — С. 23—28. [*Cygichko, V.I., Stoili, F.* The method of combat potentials: history and present // *Voennaya mysl'*. — 1997. — No. 4. — P. 23—28. (In Russian)]
13. *Медин А.* Имитационная система JTLS // Зарубежное военное обозрение. — 2010. — № 2. — С. 31—34. [*Medin, A.* JTLS Simulation System // *Zarubezhnoe voennoe obozrenie*. — 2010. — No. 2. — P. 31—34. (In Russian)]
14. *Костяев Н.И., Кучаров В.Н.* Единая система управления в тактическом звене // Армейский сборник. — 2011. — № 3 (202). — С. 18—23. [*Kostyaev, N.I., Kucharov, V.N.* Unified tactical management system // *Armejskij sbornik*. — 2011. — No. 3 (202). — P. 18—23. (In Russian)]
15. *Bonder, S.* Army Operations Research — Historical Perspectives and Lessons Learned // *Operation Research*. — 2002. — Vol. 50, no. 1. — P. 25—34.
16. *Шумов В.В.* Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов // Управление большими системами. — 2019. — Вып. 79. — С. 86—111. [*Shumov, V.V.* Hierarchy of models of hostilities and border conflicts // *Upravlenie bol'shimi sistemami*. — 2019. — Vyp. 79. — P. 86—111. (In Russian)]
17. *Шумов В.В., Цезарь Д.А.* Вероятностная модель борьбы с пиратскими и террористическими актами в морском пространстве // Системы управления и информационные технологии. — 2019. — № 1 (75). — С. 97—100. [*Shumov, V.V., Cezar', D.A.* A probabilistic model for combating pirate and terrorist acts in the sea // *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii*. — 2019. — No. 1 (75). — P. 97—100. (In Russian)]
18. *Клаузевиц К.* О войне. — М.: Госвоениздат, 1934. [*Clausewitz, K.* Vom Krieg. 1832/34.]

19. Головин Н.Н. Исследование боя. Исследование деятельности и свойств человека как бойца. Кн. 2. Статьи и письма. — М.: ВАГШ, 1995. — 303 с. [Golovin, N.N. Battle research. The study of the activities and properties of man as a fighter. Prince 2. Articles and letters. — M.: VAGSH, 1995. — 303 p. (In Russian)]
20. Головин Н.Н. Наука о войне. О социологическом изучении войны. — Париж: Изд-во газеты «Сигнал», 1938. — 242 с. [Golovin, N.N. The science of war. On the sociological study of war. — Parizh: Izd-vo gazety «Signal», 1938. — 242 p. (In Russian)]
21. Война и мир в терминах и определениях: военно-политический словарь / под общ. ред. Д. Рогозина. — М.: ПоРог, 2004. — 334 с. [War and peace in terms and definitions: a military-political dictionary / pod obshch. red. D. Rogozina. — M.: PoRog, 2004. — 334 p. (In Russian)]
22. Исаев А. Георгий Жуков. Последний довод короля. — М.: Яуза, Эксмо, 2006. — 480 с. [Isaev, A. George Zhukov. King's last argument. — M.: Yauza, Eksmo, 2006. — 480 p. (In Russian)]
23. Краткий словарь оперативно-тактических и общевоенных слов (терминов). — М.: Воениздат, 1958. — 323 с. [A brief dictionary of operational-tactical and general words (terms). — M.: Voenizdat, 1958. — 323 p. (In Russian)]
24. История Второй мировой войны 1939—1945. — Т. 9. — М.: Воениздат, 1978. — 574 с. [History of the Second World War 1939—1945. — Vol. 9. — M.: Voenizdat, 1978. — 574 p. (In Russian)]
25. Цена Победы: сколько стоил Т-34, Ил-4 и автомат ППШ. — URL: <https://militaryarms.ru/novosti/cena-pobedy/> (дата обращения: 14.06.2019). [Victory price: how much T-34, Il-4 and PPSH machine cost (In Russian)]
26. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учеб. пособие. — М.: Макс-Пресс, 2005. — 278 с. [Vasin, A.A., Morozov, V.V. Game Theory and Models of Mathematical Economics: A Study Guide. — M.: Maks-Press, 2005. — 278 p. (In Russian)]
27. Гуров С.Г. Боец и отделение на походе. — М.: Воениздат, 1941. — 46 с. [Gurov, S.G. Soldier and squad on a campaign. — M.: Voenizdat, 1941. — 46 p. (In Russian)]
28. Воробьев И.Н., Киселев В.А. Ударом во фланг и тыл учитеся громить врага // Армейский сборник. — Май 2009. — С. 35—38. [Vorob'ev, I.N., Kiselev, V.A. Blow to the flank and rear learn to smash the enemy // Armejskij sbornik. — Maj 2009. — P. 35—38. (In Russian)]
29. Военная история: учебник для вузов МО РФ. — М.: Воениздат, 2006. — 469 с. [Military history: uchebnik dlya vuzov MO RF. — M.: Voenizdat, 2006. — 469 p. (In Russian)]
30. Ахметов Р.Р. Инженерные войска иностранных армий: учебное пособие. — Омск: СибАДИ, 2011. — 102 с. [Ahmetov, R.R. Foreign Army Engineering Troops: Tutorial. — Omsk: SibADI, 2011. — 102 p. (In Russian)]
31. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 264 с. [Krasnoshchekov, P.S., Petrov, A.A. Principles of model building. — M.: Izd-vo MGU, 1983. — 264 p. (In Russian)]
32. Общая тактика: учебник / под общ. ред. Ю.Б. Торгованова: 2-е изд., испр. и доп. — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017. — 346 с. [General tactics: uchebnik / pod obshch. red. YU.B. Torgovanova: 2-e izd., ispr. i dop. — Krasnoyarsk: Sib. feder. un-t, 2017. — 346 p. (In Russian)]
33. Речь Г.К. Жукова на военно-научной конференции, декабрь 1945 г. // Военная мысль. — 1985. — Спец. вып. (февраль). — С. 3, 17—33. [Speech G.K. Zhukov at the military scientific conference, December 1945 // Voennaya mysl'. — 1985. — Spec. vyp. (fevral'). — P. 3, 17—33. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 07.02.2019, после доработки 06.07.2019.
Принята к публикации 02.08.2019.

Шумов Владислав Вячеславович — д-р техн. наук, доцент,
Международная академия информатизации, г. Москва,
✉ v.v.shumov@yandex.ru.

Международная академия информатизации, г. Москва.

EXPANSION OF THE «ATTACK — DEFENSE» MODEL

V.V. Shumov

International Informatization Academy, Moscow, Russia

✉ v.v.shumov@yandex.ru

Abstract. A probabilistic model of combat based on the principles of warfare and the definition of combat is considered. The parameter of combat superiority takes into account the moral and technological characteristics. Its estimation by the maximum likelihood method is proposed. The «attack-defense» model is formulated, taking into account the two-tier formation of troops (implementation of the next and subsequent tasks). The solution of three problems connected with search is found: 1) distribution of means between the points of defense; 2) quantity (share) of the means allocated in the second echelon (reserve); 3) the rate of movement of units in battle and their losses. The first problem is solved using the Y.B. Germeyer's generalized principle of equalization. Within the second problem reducing the game to an antagonistic matrix type allowed us to find optimal solutions for the distribution of forces of the parties between the echelons. It is shown that the decision of the game has a meaningful interpretation from the military science point of view (positional and mobile defense). To solve the third problem, military statistics data were used. The applicability of the presented models during command-staff and experimental exercises is shown on concrete examples.

Keywords: model of battle, Gross' model, Germeyer's model, echelonment of troops, assessment of parameters.

УПРАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ В МАШИНОСТРОЕНИИ¹

В.Б. Мелехин, В.М. Хачумов

Аннотация. Рассмотрены и решены основные проблемы, связанные с эффективной реализацией технологических процессов в машиностроении в условиях неопределенности. Предложен интегральный критерий оценки эффективности текущего состояния технологических процессов, позволяющий свести решение многокритериальной задачи выбора эффективных управляющих воздействий к однокритериальной оптимизационной задаче при наличии как максимизируемых, так и минимизируемых показателей эффективности. Приведен способ, основанный на применении нечеткой логики для обработки экспертных данных, позволяющий сформировать в виде графика лингвистической функции многофакторную аналитическую зависимость между показателями эффективности реализуемого технологического процесса и параметрами состояния, обеспечивающими требуемое его течение в изменяющихся условиях функционирования. Разработан метод выбора на альтернативной основе наиболее эффективных управляющих воздействий при возникновении проблемных ситуаций в процессе реализации сложного технологического процесса в результате влияния на него различных возмущающих факторов окружающей среды. Принятие решений в предложенном методе выбора базируется на композиции соответствий, позволяющих установить закономерную связь между возмущающими факторами нестабильной окружающей среды и управляющими воздействиями, обеспечивающими эффективное течение сложного технологического процесса. В целом получены инструментальные средства управления по отклонению и возмущению, позволяющие обеспечить эффективную реализацию сложных технологических процессов механической обработки деталей в машиностроении в нестабильных условиях окружающей среды.

Ключевые слова: технологический процесс, показатели эффективности, возмущающие факторы, параметры управления, эффективные управления.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор управляющих воздействий (УВ) на альтернативной основе по степени их влияния на эффективность текущего состояния сложного технологического процесса (ТП) механической обработки деталей и входящих в него технологических операций в условиях недоброкачественной неопределенности — одна из актуальных проблем машиностроения [1—3]. Например, когда коррелятор ситуационной системы управления ТП выявляет

для исполнения несколько логико-трансформационных правил вывода и возникает необходимость в выборе наилучшего из них на основе результатов предварительной обработки данных в экстраполяторе для принятия однозначного решения [4].

Отметим, что задача выбора в стабильных условиях функционирования, как правило, решается тривиально на основе заданных критериев оценки эффективности альтернативных УВ в тех или иных проблемных ситуациях на объекте управления (ОУ) при заданных ограничениях [5]. В условиях же с высокой динамикой и непредсказуемостью протекающих в окружающей среде (ОС) процессов, решение задачи альтернативного выбора сводится, как правило, к принятию непрограмми-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-29-12839 офи_м.

руемых управленческих решений. Однако в настоящее время практически отсутствует общая эффективная теория принятия непрограммируемых решений в условиях недоброкачественной неопределенности [5–7]. Другими словами, в условиях, когда различные факторы, входящие в задачу, представляют собой случайные величины, вероятностные характеристики которых априори не известны и не могут быть найдены путем планирования эксперимента, а для получения сведений, необходимых для принятия решений, обрабатываются экспертные данные. По этой причине в настоящее время в процессе управления сложными ТП, выбор УВ в условиях неопределенности осуществляется автоматизированным образом и сводится к определению оператором-технологом эффективных управляющих воздействий, обеспечивающих заданный режим реализации технологического процесса [8, 9]. К эффективным отечественным разработкам, связанным с построением автоматизированных систем управления производственными процессами, можно отнести исследования [8–10]. Помимо методов управления в работе [10] также предложены методы построения визуальных анализаторов, обеспечивающих возможность интеллектуальной поддержки принимаемых операторами технологических установок решений, и обоснован ряд перспективных подходов к созданию эффективных систем интеллектуального автоматического управления ТП, основанных на обработке экспертных данных. Однако решить все проблемы, связанные с организацией принятия решений в процессе выбора УВ в условиях недоброкачественной неопределенности, в перечисленных работах не удалось.

Отметим, что в последнее время для принятия решений в условиях недоброкачественной неопределенности широкое распространение получила обработка экспертных данных с помощью математического аппарата нечетких множеств, который в системах управления сложными объектами позволяет:

- получить на основе лингвистических переменных (ЛП) [11] качественные и количественные значения отдельных показателей текущего состояния ТП и сформировать на этой основе нечеткие алгоритмы управления процессом их регулирования [12];
- построить математические модели в виде нечетко или интервально заданной зависимости между отдельными показателями, определяющими состояние ТП с учетом их взаимного влияния друг на друга [13];
- сформировать математические модели в виде уравнений, в том числе и в виде эмпирических математических моделей ТП с нечетко заданными коэффициентами [14].

Отметим также, что математические модели с нечетко заданными коэффициентами, с одной стороны, вроде бы увеличивают свободу выбора, но, с другой стороны, при автоматическом выборе УВ не позволяют обеспечить однозначное решение задачи выбора. Другими словами, они не снимают полностью проблем, связанных с неопределенностью влияния ОС на сложные объекты управления. Кроме того, формируемые на их основе нечеткие алгоритмы часто не позволяют решать задачи управления ТП с требуемой точностью. В этой связи, для эффективного решения задачи автоматического выбора УВ на множестве заданных альтернатив в условиях недоброкачественной неопределенности, возникает необходимость в построении многопараметрических эмпирических моделей ОУ с четко заданными коэффициентами, опираясь на ту же обработку экспертных данных с помощью математического аппарата нечетких множеств. Такой подход позволяет обеспечить однозначный выбор эффективных управляющих воздействий на альтернативной основе, например, по степени их влияния на эффективность реализации ТП в нестабильных условиях ОС.

В общем случае эффективность сложных ТП, как правило, определяется множеством взаимосвязанных между собой технико-экономических показателей, зависящих от их параметров состояния, оцениваемых системой контроля технологических процессов в четком виде [15]. В этой связи для обеспечения высокой оперативности принимаемых решений также возникает необходимость в построении на основе экспертных данных математических моделей исследуемого процесса, с учетом происходящих в ОС изменений, в виде системы уравнений с четко заданными коэффициентами.

В настоящей работе предлагаются один из подходов к построению многофакторных эмпирических математических моделей для принятия непрограммируемых управленческих решений и метод выбора на альтернативной основе эффективных УВ в условиях недоброкачественной неопределенности, основанный на:

- обработке экспертных данных и накопленного опыта управления с помощью математического аппарата нечетких множеств;
- разработке многофакторной многокритериальной эмпирической математической модели эффективности состояния ТП в виде системы уравнений, состоящей из графиков лингвистических функций (ЛФ) [16], имеющих четко заданные коэффициенты при параметрах состояния ОУ;
- построении метода выбора на альтернативной основе наиболее эффективных УВ, с предварительной экстраполяцией их влияния на повышение эффективности процесса реализации ТП, например, с требуемой точностью обработки деталей.

Это позволяет эффективным образом реализовать автоматическое регулирование процесса реализации ТП на нижнем уровне многоуровневой ситуационной системы управления сложными технологическими процессами в машиностроении [17] на основе данных, поступающих на ее вход из системы контроля динамики протекающих на ОУ процессов [18].

1. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ СОСТОЯНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В нестабильной ОС, как отмечено выше, для оценки эффективности текущего состояния ТП целесообразно воспользоваться системой технико-экономических показателей, зависящих от ситуации, возникшей на ОУ. Кроме того, следует учитывать, что на каждый показатель эффективности ТП интегрально влияет достаточно большое число параметров его состояния и различных возмущающих факторов ОС. Поэтому определение степени дифференциального влияния различных УВ на каждый показатель эффективности в процессе принятия решений представляет собой достаточно сложную задачу, требующую предварительного анализа поведения различных параметров состояния ТП при их взаимном влиянии друг на друга и под воздействием различного вида возмущений.

При этом следует учитывать, что УВ $U = \{U_Z\}$, $Z = 1, 2, \dots, m$, например, проведение технического обслуживания оборудования, замена режущего инструмента, изменение технологического маршрута обработки деталей и др., как правило, опосредованно влияют на показатели эффективности ТП $\Theta = \{\Theta_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, например, средняя выработка в отчетном периоде, точность обработки деталей и др., где m и n — соответственно общее число управленческих воздействий обрабатываемых системой управления и показателей эффективности, характеризующих ТП. Влияние УВ $U_Z \in U$ на ТП проявляется путем изменения в результате их обработки параметров его состояния (управления) $F = \{F_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m_1$, например, уровня изношенности режущего инструмента, технического состояния оборудования и др., где m_1 — общее число параметров состояния ТП, от которых зависят значения показателей его эффективности $\Theta_k \in \Theta$.

Помимо этого, в процессе выбора следует учитывать повторяемость m_z возникновения проблемных ситуаций по истечении времени после обработки каждого альтернативного УВ $U_Z \in U$ в от-

четном периоде, а также затраты W_Z и время T_Z , связанные с подготовкой и реализацией альтернативных управленческих воздействий (мероприятий). Необходимо отметить, что время T_Z , связанное с подготовкой и реализацией альтернативных УВ, целесообразно учитывать при определении такого параметра состояния ТП, как время простоев по причине неисправности технологического оборудования.

Для оценки влияния различных параметров состояния ТП $F_j \in F$ и такой характеристики обрабатываемых УВ, как стоимость их реализации $F_Z = m_Z W_Z$, на показатели эффективности $\Theta_k \in \Theta$ отдельных технологических операций или технологического процесса в целом в нестабильных условиях ОС, возникает необходимость в разработке многофакторной многокритериальной регрессионной модели. Например, для линейных ОУ с учетом обрабатываемого УВ $U_Z \in U$ такая модель будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\Theta_1^Z &= a_1^1 F_1^1 + a_2^1 F_2^1 + \dots + a_{n_1}^1 F_{n_1}^1 - F_Z; \\ \Theta_2^Z &= a_1^2 F_1^2 + a_2^2 F_2^2 + \dots + a_{n_2}^2 F_{n_2}^2 - F_Z; \\ &\dots \\ \Theta_n^Z &= a_1^n F_1^n + a_2^n F_2^n + \dots + a_{n_n}^n F_{n_n}^n - F_Z, \quad (1)\end{aligned}$$

где, например, $a_j^k, j = 1, 2, \dots, n_k$ — коэффициенты, определяющие влияние j -го параметра состояния $F_j^k \in F$ ТП на показатель его эффективности Θ_k^Z ; $n_2, n_3, \dots, n_n$ — число параметров состояния соответственно влияющих на значения показателей эффективности $\Theta_1^Z, \Theta_2^Z, \dots, \Theta_n^Z$; F_Z — стоимость реализации УВ U_Z .

В общем случае в модели (1) на различные показатели эффективности могут влиять как одни и те же, так и различные параметры состояния $F_j \in F$ ТП. Так, например, выполнение условия $F_1^1 = F_1^2$ необязательно.

Учитывая, что может потребоваться как снижение, стабилизация, так и рост значений анализируемых показателей эффективности $\Theta_k \in \Theta$, все основные параметры состояния $F_j \in F$, от которых зависят их значения, целесообразно разбить на три группы F_1, F_2 и F_3 ; $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = F$:

— параметры состояния ТП $F_1 = \{F_{j_1}\}$, $j_1 = 1, 2, \dots, m_2$, требующие реализации УВ $U_1 = \{U_{Z_1}\}$, $Z_1 = 1, 2, \dots, m_3$, обеспечивающих максимально до-

пустимый рост их значений и соответствующий этому прирост оценок определенных показателей эффективности $\Theta_k(\max) \in \Theta$ с учетом ограничений, например, средней выработки технологической линии;

— параметры состояния ТП $F_2 = \{F_{j_2}\}$, $j_2 = 1, 2, \dots, m_4$, требующие реализации УВ $U_2 = \{U_{Z_2}\}$, $Z_2 = 1, 2, \dots, m_5$, обеспечивающих стабилизацию заданных значений C_k определенных показателей эффективности $\Theta_k(\text{cons}) \in \Theta$ с учетом ограничений и допущений, например, точность обработки деталей. Другими словами, для заданных значений $\Theta_k(\text{zad})$ данного вида показателей по абсолютной величине должно выполняться условие $|\Theta_k(\text{zad}) - \Theta_k(\text{fak})| \leq \varepsilon_k$, где $\Theta_k(\text{fak})$ — фактическое значение показателя эффективности Θ_k ; ε_k — допустимая погрешность изменения k показателя эффективности;

— параметры состояния ТП $F_3 = \{F_{j_3}\}$, $j_3 = 1, 2, \dots, m_6$, требующие выполнения УВ $U_3 = \{U_{Z_3}\}$, $Z_3 = 1, 2, \dots, m_7$, обеспечивающих максимально допустимое снижение их значений, которое сопровождается снижением определенных показателей эффективности $\Theta_k(\min) \in \Theta$ с учетом ограничений, например, себестоимость обработки одной детали на технологической линии без потери качества.

Таким образом, возникает необходимость в интегральном критерии оценки эффективности Θ^* текущих состояний ТП, переход которых от одного состояния к другому осуществляется под воздействием различных УВ. В общем случае такой критерий имеет вид:

$$\Theta^* = \left(\sum_{k=1}^b \gamma_k \Theta_k(\max) - \sum_{k=d+1}^n \gamma_k \Theta_{k_1}(\min) \right) \Rightarrow \max, \quad (2)$$

при ограничениях в виде равенств: $\Theta_k(\text{cons}) = C_k \pm \varepsilon$, $k = b+1, b+2, \dots, d$, где $\Theta_k(\max)$, $\Theta_k(\min)$, $\Theta_k(\text{cons})$ — показатели эффективности ТП, подлежащие соответственно максимизации, минимизации и стабилизации; γ_k — коэффициенты значимости показателей эффективности ТП, определяемые экспертным путем; b — число показателей эффективности ТП, подлежащих максимизации; $b+1, b+2, \dots, d$ — число показателей ТП, требующих стабилизации их заданных значений C_k ; $d+1, d+2, \dots, n$ — число показателей эффективности ТП, подлежащих минимизации. Как правило, коэффициенты значимости γ_k должны удовлетворять условиям: $0 \leq \gamma_k \leq 1$, $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$, [6].

В общем случае ЛФ, позволяющие формализовать как в нечеткой форме, так и аналитическом четком виде характер влияния параметров состояния на показатели эффективности ТП, определяются пятеркой

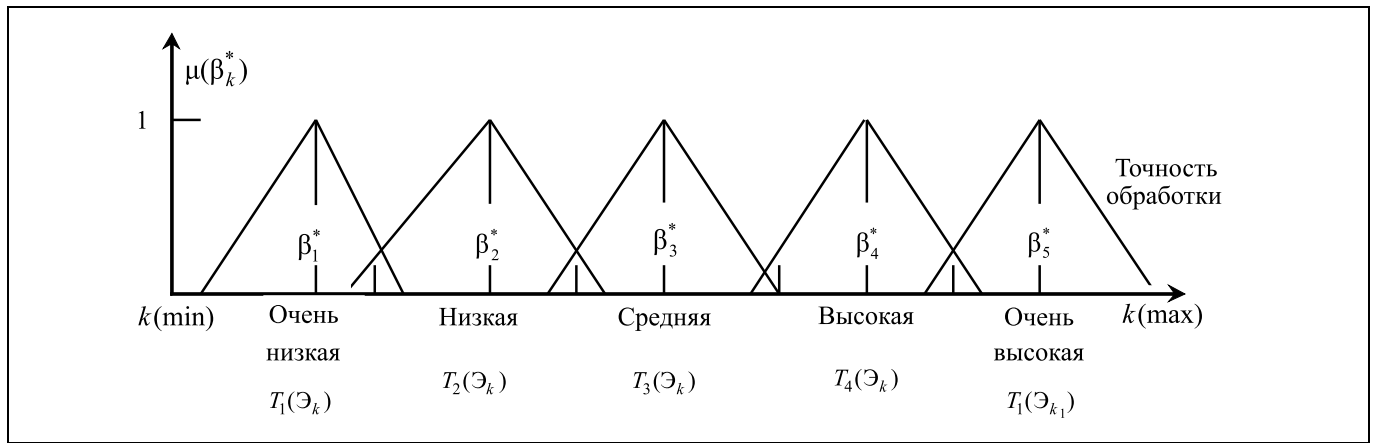
$$\text{ЛФ} = (H, \text{ЛП}_3, \{\text{ЛП}_{j_4 \text{HЗ}}, j_4 = 1, 2, \dots, m_8\}, M, \Psi),$$

где H — название ЛФ; ЛП_3 — зависимая лингвистическая переменная, которая определяется соответствующим ЛФ показателем эффективности $\Theta_k \in \Theta$; $\text{ЛП}_{j_4 \text{HЗ}}$ — независимая ЛП, определяемая параметром j_4 состояния ТП; M — матрица ЛФ, которая описывает соответствие между нечеткими значениями показателя эффективности и влияющих на него параметрами состояния ТП, найденными путем опроса экспертов; Ψ — график ЛФ или аналитическая зависимость между значениями соответствующего этой функции показателя эффективности Θ_k и параметрами состояния ТП $F_{j_4} \in F$.

Для построения ЛФ вначале формируются лингвистические переменные с соответствующими названиями. Например, ЛП_k для показателя эффективности Θ_k , характеризующего точность механической обработки деталей, будет представлять собой четверку

$$\text{ЛП}_k = (H_k, T_k, K_k, \beta_k^*),$$

где H_k — название ЛП_k «Точность механической обработки деталей»; T_k — терм «множество ЛП_k » или множество ее нечетких значений, которым соответствуют термы $T_k = \{\text{«Очень низкая} - T_1(\Theta_k)\text{», «Низкая} - T_2(\Theta_k)\text{», «Средняя} - T_3(\Theta_k)\text{», «Высокая} - T_4(\Theta_k)\text{», «Очень высокая точность механической обработки деталей} - T_5(\Theta_k)\text{»}\}$; K_k — множество базовых значений ЛП_k , $K_k \in [k_k(\min), k_k(\max)]$, которое, как правило, ограничено снизу и сверху (см. рисунок). Например, для ЛП_k , соответствующей показателю эффективности Θ_k «Точность механической обработки деталей», данные ограничения соответственно определяются заданными допусками на механическую обработку деталей и износом режущего инструмента. По значениям базовых множеств формируются шкалы нечетких и количественных значений соответствующих им ЛП, на которых по экспертным данным определяются граничные значения термов и образующие их нечеткие множества (см. рисунок); β_k^* — базовая переменная ЛП_k или количественное текущее значение точности механической обработки изготавливаемой детали.



Шкала лингвистической переменной «Точность механической обработки деталей»: $\mu(\beta_k^*)$ — степень принадлежности значения β_k^* базовой переменной $ЛП_k$ к нечеткому множеству, определяемому термом, в интервал численных значений которого оно попадает

Приведем метод, позволяющий сформировать эмпирическую модель (1) показателей эффективности ТП в виде графиков соответствующих им лингвистических функций.

Входные переменные: множество используемых в формируемой модели показателей эффективности $\Theta_k \in \Theta$, $k = 1, 2, \dots, n$, и параметров состояния $F_{j_4}(k) \in F$, $j_4 = 1, 2, \dots, m_8(k)$.

Промежуточные переменные: соответствия нечетких и количественных значений заданных показателей эффективности $\Theta_k \in \Theta$ и параметров состояния $F_j \in F$, полученные экспертным путем.

Выходные переменные: количественные, четкие значения коэффициентов $a_{j_4}^k$ и аналитические выражения графиков Ψ_k ЛФ $_k$ биективно соответствующих показателям эффективности $\Theta_k \in \Theta$ ТП.

Метод

Шаг 1. Начало: принять $k = 1$.

Шаг 2. Установить параметры состояния ТП $F_{j_4}(k) \in F$, влияющие на показатель эффективности $\Theta_k \in \Theta$ и структуру связи между ними. Пусть структура данной связи определяется структурой уравнений линейной многофакторной модели (1).

Шаг 3. Построить для каждого установленного параметра состояния ТП $F_{j_4}(k) \in F$ шкалу значений соответствующей ему $ЛП_{j_4}(k)$ с названием «Параметр состояния ТП $F_{j_4}(k_1)$ ».

Шаг 4. Сформировать для показателя эффективности $\Theta_k \in \Theta$ шкалу значений соответствующей ему $ЛП_k$ с названием «Показатель эффективности Θ_k ».

Шаг 5. Построить по данным, полученным экспертным путем, матрицу ЛФ $_k$, для которой роль зависимой лингвистической переменной играет $ЛП_{k_1}$, а роль независимых лингвистических переменных исполняют $ЛП_{j_4}(k)$, соответствующие влияющим на показатель эффективности Θ_k параметрам состояния ТП $F_{j_4}(k) \in F$.

Пусть, например, для показателя эффективности Θ_k «Точность механической обработки деталей» по экспертным данным построена матрица M_k , отражающая влияние на него параметров состояния $F_{j_4}(k) \in F$: состояние режущего инструмента, скорость вращения заготовки, материал, форма, размеры заготовки и др. (табл. 1), где $m_8(k)$ — число параметров состояния ТП, влияющих на показатель эффективности Θ_k .

В табл. 1, например, столбец, соответствующий терму $T_3(\Theta_k)$ означает, что среднему значению показателя эффективности Θ_k эксперты в соответствие поставили большое значение $T_5(F_1)$ параметра состояния F_1 , среднее значение $T_3(F_1)$ параметра состояния $F_2, \dots$, среднее значение $T_3(F_{m_8(k)})$ параметра состояния $F_{m_8(k)}$.

Шаг 6. Определить значения базовой переменной $\beta_k(T_i(\Theta_k))$, $i = 1, 2, \dots, 5$, $ЛП_k$ и базовых переменных $x(T_i(F_{j_4}(k)))$ $ЛП_{j_4}(k)$ по проекциям из максимумов функций принадлежности нечетких множеств, соответствующих термам зависимой $\Theta_k \in \Theta$ и независимых $F_{j_4}(k) \in F$ переменных ЛФ $_k$, на базовую шкалу их численных значений (см. рису-

Таблица 1

Соответствие между нечеткими значениями показателя эффективности $\mathfrak{Z}_k$ и параметрами состояния $F_{j_4} \in F$, установленное экспертным путем

$T_i(F_{j_4})/T_i(\mathfrak{Z}_k)$	$T_1(\mathfrak{Z}_k)$	$T_2(\mathfrak{Z}_k)$	$T_3(\mathfrak{Z}_k)$	$T_4(\mathfrak{Z}_k)$	$T_5(\mathfrak{Z}_k)$
$T_i(F_1)$	$T_5(F_1)$	$T_5(F_1)$	$T_5(F_1)$	$T_5(F_1)$	$T_5(F_1)$
$T_i(F_2)$	$T_2(F_2)$	$T_2(F_2)$	$T_3(F_2)$	$T_3(F_2)$	$T_4(F_2)$
...					
$T_i(F_{m_8(k)})$	$T_5(F_{m_8(k)})$	$T_4(F_{m_8(k)})$	$T_3(F_{m_8(k)})$	$T_3(F_{m_8(k)})$	$T_2(F_{m_8(k)})$

нок). Используя полученные таким образом данные, построить таблицу соответствий между численными значениями зависимой и независимых лингвистических переменных ЛФ_k. Например, для показателя эффективности $\mathfrak{Z}_k$ «Точность механической обработки деталей» справедлива табл. 2, определяющая соответствие между его количественными значениями $\beta_k^*(i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, и количественными значениями $x_{j_4 i}^*$, $j_4 = 1, 2, \dots, m_8(k)$, параметров состояния $F_{j_4}(k) \in F$ ТП, найденными по нечетким их значениям, приведенным в табл. 1.

В табл. 2: β_i^* — количественная оценка показателя эффективности $\mathfrak{Z}_k$, найденная по терму $T_i(\mathfrak{Z}_k)$ соответствующей ему ЛП_k; $x_{j_4 i}^*$ — количественная оценка показателя состояния ТП $F_{j_4}(k)$, найденная по терму $T_i(F_{j_4}(k))$ соответствующей ему ЛП_{j₄}(k). Например, количественному значению показателя эффективности $\mathfrak{Z}_k$, найденному по максимуму функции принадлежности нечеткого множества, определяющего интервал численных значений терма $T_i(\mathfrak{Z}_k)$, соответствуют численные значения параметров состояния ТП x_{13}^* , x_{22}^* , ..., $x_{n_2(k)5}^*$, найденные по соответствующим им термам ЛП_{j₄}(k) (см. табл. 1).

Шаг 7. Обработать данные, полученные в таблице соответствий количественных значений зависимых и независимых ЛП (см. табл. 2), посредством многофакторного регрессионного анализа [19, 20], и таким образом определить коэффициенты $a_{j_4}^k$ графика Ψ_k ЛФ_k, биективно соответствующего показателю эффективности $\mathfrak{Z}_k \in \mathfrak{Z}$ ТП.

Шаг 8. Построить аналитическое выражение графика Ψ_k ЛФ_k: $\mathfrak{Z}_k = a_1^k F_1(k) + a_2^k F_2(k) + \dots + a_{m_8(k)}^k F_{m_8(k)}$.

Шаг 9. Проверить условие $k = n$: если условие выполняется, то перейти к шагу 10; в противном случае, $k = k + 1$, перейти к шагу 2.

Шаг 10. Конец.

Получаемые таким способом аналитические зависимости графиков ЛФ_k служат в качестве уравнений эмпирической модели (1) и позволяют на основе факторного анализа методом цепной подстановки [19, 20] установить характер автономного влияния различных параметров состояния $F_{j_4}(k) \in F$ на показатели $\mathfrak{Z}_k \in \mathfrak{Z}$, определяющие эффективность текущего состояния ТП. В свою очередь, это позволяет для различных показателей эффективности определить наиболее чувствительные в смысле их регулирования параметры состояния ТП.

Корректировка же эмпирической модели (1) с учетом стоимостных характеристик F_z альтернативных управлений обеспечивает возможность выбора на альтернативной основе наиболее эффективных УВ, обеспечивающих необходимые изме-

Таблица 2

Соответствие между количественными значениями $\beta_k^*(T_i(\mathfrak{Z}_k))$ показателя эффективности $\mathfrak{Z}_k$ и количественными значениями $x(T_i(F_{j_4}(k)))$, влияющих на него параметров состояния $F_{j_4} \in F$

$x(T_i(F_{j_4}(k)))/\beta_k^* T_i(\mathfrak{Z}_k)$	β_1^*	β_2^*	β_3^*	β_4^*	β_5^*
$x(T_i(F_1(k)))$	x_{13}^*	x_{14}^*	x_{15}^*	x_{15}^*	x_{15}^*
$x(T_i(F_2(k)))$	x_{22}^*	x_{22}^*	x_{23}^*	x_{23}^*	x_{23}^*
...					
$x(T_i(F_{m_8(k)}(k)))$	$x_{m_8(k)5}^*$	$x_{m_8(k)4}^*$	$x_{m_8(k)3}^*$	$x_{m_8(k)3}^*$	$x_{m_8(k)2}^*$

нения параметров состояния $F_j \in F$ для перевода ТП в требуемое состояние с учетом текущих условий ОС.

Отметим, что для каждого терма зависимых и независимых лингвистических переменных могут быть построены встроенные ЛП или нечеткие переменные второго порядка. Например, на основе терма «Очень низкая точность» зависимой ЛП с названием «Точность механической обработки деталей» строится встроенная лингвистическая переменная, определяемая термами: «самая низкая из очень низких точностей», «низкая из очень низких точностей», «средняя из очень низких точностей», «высокая из очень низких точностей» и «очень высокая точность из очень низких точностей механической обработки деталей». Это позволяет уточнить значения и повысить значимость коэффициентов эмпирической модели и на этой основе обеспечить достаточно высокую точность решаемых задач управления.

2. МЕТОД ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ УПРАВЛЕНИЙ НА СОСТОЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ВЫБОРА НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для принятия эффективных решений в условиях неопределенности в первую очередь требуется сформировать множество альтернативных УВ, позволяющих устранить возникшую на ОУ проблемную ситуацию с различным уровнем эффективности. Для построения данного множества можно воспользоваться следующими инструментальными средствами.

В общем случае управление УТП складывается из следующих УВ: $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, как правило, опосредованно влияющих на различные показатели эффективности $\Theta_k \in \Theta$ путем регулирования текущих значений непосредственно влияющих на них параметров его состояния: $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.

Для различных по назначению параметров состояния ТП может выполняться условие $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$.

Опираясь на накопленный опыт операторов-технологов и данные, полученные экспертным путем, для построения множества альтернативных УВ определяются три отношения: $G_1 \subseteq F_1 \times U_1$, $G_2 \subseteq F_2 \times U_2$ и $G_3 \subseteq F_3 \times U_3$, где $\times$ — декартово произведение множеств. Каждая пара $\langle F_{j_1}, U_{Z_1} \rangle \in G_1$ включает такое УВ U_{Z_1} , выполнение которого позволяет получить положительное приращение ΔF_{j_1} параметра состояния ТП $F_{j_1} \in F_1$ с учетом задан-

ных ограничений, рост значений которого позитивно влияет на эффективность его текущего состояния. В свою очередь, каждая пара $\langle F_{j_2}, U_{Z_2} \rangle \in G_2$ позволяет обеспечить требуемое значение параметра состояния $F_{j_2} \pm \varepsilon$, $F_{j_2} \in F_2$ при определенном его отклонении от этого значения. А каждая пара $\langle F_{j_3}, U_{Z_3} \rangle \in G_3$ включает такое УВ U_{Z_3} , реализация которого позволяет получить допустимое отрицательное приращение $-\Delta F_{j_3}$ параметра состояния ТП $F_{j_3} \in F_3$ с учетом имеющихся ограничений, снижение значений которого также позитивно влияет на эффективность его текущего состояния.

Элементы полученных выше отношений G_1 , G_2 и G_3 для принятия решений удобно представить соответственно в виде продукций:

$$D_{Z_1} : (F_{j_1} \otimes U_{Z_1}) \rightarrow (F_{j_1} + \Delta F_{j_1}),$$

$$D_{Z_2} : (F_{j_2} \otimes U_{Z_2}) \rightarrow (F_{j_2} \pm \Delta F_{j_2}), \quad (3)$$

$$D_{Z_3} : (F_{j_3} \otimes U_{Z_3}) \rightarrow (F_{j_3} - \Delta F_{j_3}),$$

означающих, например, что если отработать УВ U_{Z_1} , то параметр состояния ТП F_{j_1} получит положительное приращение, равное ΔF_{j_1} , где знак $\otimes$ означает обработку УВ U_{Z_1} .

Это позволяет по первым одинаковым проекциям отношений $G_1 - G_3$ построить множества $D_{j_1} = \{D_{Z_1}(j_1)\}$, $j_1 = 1, 2, \dots, m_2$, $D_{j_2} = \{D_{Z_2}(j_2)\}$, $j_2 = 1, 2, \dots, m_4$, и $D_{j_3} = \{D_{Z_3}(j_3)\}$, $j_3 = 1, 2, \dots, m_6$, которые определяются УВ $U_{Z_1}(j_1)$, $U_{Z_2}(j_2)$, $U_{Z_3}(j_3)$, позволяющими регулировать значения отдельных параметров состояния ТП, соответственно $F_{j_1} \in F_1$, $F_{j_2} \in F_2$ и $F_{j_3} \in F_3$. Таким образом, для каждого отдельного параметра состояния F_{j_1} , F_{j_2} и F_{j_3} на основе продукций (3), входящих соответственно во множества D_{j_1} , D_{j_2} и D_{j_3} , можно сформировать определяющие их множества троек вида:

$$D_{Z_1}^* = \{\langle U_{Z_1} : F_{j_1}, F_{j_1} + \Delta F_{j_1} \rangle\}, \quad j_1 = 1, 2, \dots, m_2;$$

$$D_{Z_2}^* = \{\langle U_{Z_2} : F_{j_2}, F_{j_2} \pm \Delta F_{j_2} \rangle\},$$

$$j_2 = 1, 2, \dots, m_4; \quad (4)$$

$$D_{Z_3}^* = \{\langle U_{Z_3} : F_{j_3}, F_{j_3} - \Delta F_{j_3} \rangle\}, \quad j_3 = 1, 2, \dots, m_6,$$

которые характеризуют значения отдельных параметров состояния ТП $F_{j_1} \in D_{Z_1}^*$, $F_{j_2} \in D_{Z_2}^*$ и $F_{j_3} \in D_{Z_3}^*$ до и после отработки соответствующих им УВ $U_{Z_1} \in D_{Z_1}^*$, $U_{Z_2} \in D_{Z_2}^*$ и $U_{Z_3} \in D_{Z_3}^*$.

Сформированные на основе продукций (3) и троек (4) логико-трансформационные правила вывода обеспечивают возможность построения на ситуационной основе множества альтернативных управлений, позволяющих с различным уровнем эффективности устранить сложившуюся на ТП проблемную ситуацию. Под проблемной ситуацией в этом случае следует понимать вектор отклонений параметров состояния ТП F_{j_1} , F_{j_2} и F_{j_3} от требуемых на текущий момент времени их значений. Это, в свою очередь, позволяет согласно критерию выбора (2) выявить наиболее эффективные УВ путем решения соответствующей оптимизационной задачи.

Необходимо отметить, что таким же способом можно выявить множество альтернативных УВ $U^* = \{U_{j_5}(F_j)\}$, $j_5 = 1, 2, \dots, m_9$, которые обеспечивают возможность регулирования различных параметров состояния ТП $F_j \in F$ при их отклонении, возникающем в результате влияния различных возмущающих факторов $p_{j_6} \in P$, $P = \{p_{j_6}\}$, $j_6 = 1, 2, \dots, m_{10}$, внешней составляющей ОС. Для этого строится соответствие $G_4 \subseteq F \times U^*$, первая проекция которого определяется различными параметрами состояния ТП $F_j \in F$, а вторая — биективно соответствующими им УВ $U_{j_5}(F_j) \in U^*$.

Далее, если на основе экспертных данных установить соответствие между возмущающими факторами ОС $p_{j_6} \in P$ и соответствующими им эффективными УВ $U_{j_5}(F_j) \in U^*$, то можно определить согласно критерию (2) эффективность их реализации при наблюдении в окружающей среде различных возмущающих факторов до начала выполнения текущей технологической операции. Это позволяет организовать эффективное упреждающее регулирование процесса реализации ТП по возмущению. Для решения данной задачи, на основании экспертных данных и накопленного опыта управления, формируется соответствие $G_5 \subseteq P \times F$, каждый элемент которого определяется следующим образом. Если для пары $\langle p_{j_6} \in P, D_j \in F \rangle$ выполняется условие $F_j \& p_{j_6} \rightarrow F_j \pm \Delta F_j$ (эта запись означает, что появление в ОС возмущающего фактора $p_{j_6} \in P$ сопровождается либо снижением значения параметра состояния ТП F_j на величину, равную

$-\Delta F_j$, либо его ростом на величину, равную $+\Delta F_j$), то пара $\langle p_{j_6}, F_j \rangle \in G_5$.

Выполнение же операции композиции $\oplus$ соответствий G_4 и G_5 позволяет получить соответствие $G_6 = G_4 \oplus G_5$, $G_6 \subseteq P \times U^*$, состоящее из множества пар $\langle p_{j_6}, U_{j_5}(F_j) \rangle$. На основе таких пар формируются логико-трансформационные решающие правила, обеспечивающие выбор УВ, позволяющих регулировать процесс реализации ТП по возмущению. В общем случае каждое такое решающее правило имеет следующее содержание: *если в окружающей среде ТП наблюдается возмущающий фактор $p_{j_6} \in P$, то в ответ на его влияние на параметр состояния F_j целесообразно выполнить УВ $U_{j_5}(F_j) \in U^*$, позволяющее либо полностью устранить, либо снизить последствия такого негативного воздействия этого фактора на технологический процесс.*

Таким образом, предложенные инструментальные средства позволяют выбирать наиболее эффективные УВ и переводить на этой основе ТП в требуемое состояние в нестабильных условиях ОС.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим пример, показывающий, что предложенные инструментальные средства позволяют строить эмпирические зависимости показателей эффективности $\mathcal{E}_k \in \mathcal{E}$ от различных параметров состояния ТП $F_j \in F$ и выбирать на этой основе УВ $U_Z \in U$, обеспечивающие наиболее эффективную их реализацию в изменяющихся условиях ОС.

Пусть технологический процесс, связанный с механической обработкой деталей реализуется на гибкой автоматической линии, эффективность функционирования которой определяется показателями $\mathcal{E}_1$ — выработкой в течение отчетного периода и $\mathcal{E}_2$ — точностью механической обработки деталей. Первый показатель подлежит максимизации, а второй — стабилизации.

Шкала ЛП₁ показателя эффективности $\mathcal{E}_1$ изменяется от 0 до m^* , где m^* — выработка, соответствующая идеальному состоянию технологического оборудования, а также режущего инструмента при очень высокой квалификации обслуживающего персонала. Данная шкала разбивается на интервалы, определяемые словесными значениями или термами: «очень низкая», «низкая», «средняя», «высокая» и «очень высокая выработка», границы которых устанавливаются на основе экспертных данных.

В качестве основных параметров состояния ТП, влияющих на показатель эффективности Θ_1 могут выступать:

F_1^1 — показатель, определяющий техническое состояние технологического оборудования, который определяется ЛП с таким же названием; шкала данной ЛП изменяется от 0 до 1, что соответственно определяется неисправным и идеальным состояниями технологического оборудования, и разбивается на интервалы, определяемые термами: «очень сильный износ», «сильный износ», «средний износ», «слабый износ» и «очень слабый износ оборудования»;

F_2^1 — показатель, характеризующий износ режущего инструмента на различных станках с ЧПУ, от которого зависит число проходов необходимых для снятия определенного слоя металла с заготовки; этот показатель определяется одноименной с ним лингвистической переменной, шкала которой изменяется в пределах $[0, 1]$ и разбивается на интервалы согласно термам: «очень сильный износ», «сильный износ», «средний износ», «слабый износ» и «износ инструмента практически отсутствует»;

F_3^1 — показатель, характеризующий среднюю выработку в денежном выражении технологической линии в единицу времени отчетного периода, который выражается термами одноименной лингвистической переменной: «очень низкая», «низкая», «средняя», «высокая» и «очень высокая выработка»;

F_4^1 — показатель, определяющий квалификацию технического персонала, занимающегося ремонтом технологического оборудования, который определяется термами одноименной с ним лингвистической переменной: «очень низкая», «низкая», «средняя», «высокая» и «очень высокая квалификация»; для данной ЛП определяется биективно соответствующая ей лингвистическая переменная с названием «Время ремонта оборудования», которая задается термами: «очень короткие сроки», «короткие сроки», «средние сроки», «длинные сроки» и «очень длинные сроки ремонта».

Полученные таким образом ЛП позволяют построить эмпирическую зависимость между значениями зависимой переменной Θ_1 соответствующей

ЛФ₁ и значениями ее независимых переменных $F_{j_4}^1$, $j_4 = 1, 2, \dots, 4$, вида $\Theta_1 = a_1^1 F_1^1 + a_2^1 F_2^1 + a_3^1 F_3^1 + a_4^1 F_4^1$. Для этого на основе экспертных данных в соответствии с нечеткими значениями ЛП соответствующих показателям Θ_1 и $F_{j_4}^1$ заполняется табл. 1. Затем по нечетким значениям перемен-

ных, приведенным в табл. 1, формируется табл. 2, определяющая соответствие между их количественными значениями. После этого путем решения матричного уравнения вида $A = (M^T M)^{-1} (M^T \Theta_1^*)$, полученного по данным табл. 2, определяются коэффициенты $a_{j_4}^1$ строящейся регрессионной модели, где A — вектор-столбец коэффициентов регрессионной модели, M — матрица значений независимых переменных ЛФ₁, M^T — транспонированная матрица M , $(M^T M)^{-1}$ — обратная матрица произведения матриц M^T и M ; Θ_1^* — вектор-столбец полученных значений анализируемого показателя эффективности Θ_1 .

После построения полученная линейная регрессионная модель $\Theta_1 = f(F_1^1, \dots, F_4^1)$ проверяется на адекватность по критерию Фишера и на значимость коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента [19, 20]. Если в результате проверки модель оказывается неадекватной либо незначимой, то следует переход к построению модели нелинейного вида.

Шкала ЛП₂ для показателя эффективности Θ_2 изменяется в пределах от 0 до m^{**} , где m^{**} — максимальная точность механической обработки деталей, которую можно получить, исходя из технического состояния оборудования и режущего инструмента на исследуемой технологической линии. В общем случае в качестве основных параметров состояния $F_{j_4}^2 \in F$, влияющих на данный показатель

эффективности, целесообразно принять F_1^2 — техническое состояние технологического оборудования, F_2^2 — износ режущего инструмента и F_3^2 — технологическая эффективность оснастки для закрепления и позиционирования деталей при обработке на технологическом оборудовании, для которой соответствующая ЛП определяется на интервале от 0 до 1. Нижняя граница данного интервала соответствует случаю, когда оснастка не приспособлена к требованиям технологического оборудования, а верхняя — полностью удовлетворяет его требованиям и параметрам выполняемых технологических операций.

После построения по описанному принципу эмпирической зависимости $\Theta_2 = a_1^2 F_1^2 + a_2^2 F_2^2 + a_3^2 F_3^2$ интегральный критерий выбора Θ^* на альтернативной основе наиболее эффективного УВ в текущей ситуации ОС будет иметь вид: $\Theta^* = \Theta_1 = a_1^1 F_1 + a_2^1 F_2 + a_3^1 F_3 + a_4^1 F_4 - F_Z \Rightarrow \max$, при ог-

раничении $\Theta_2 = a_1^2 F_1^2 + a_2^2 F_2^2 + a_3^2 F_3^2 = C_2 \pm \varepsilon$, где F_z — затраты связанные с отработкой Z альтернативного управления U_z , C_2 — требуемая точность обработки деталей.

Допустим, в ОС сложилась проблемная ситуация, характеризующаяся очень низкой выработкой на технологической линии из-за частых простоев, связанных с поломкой сильно изношенного технологического оборудования. Тогда, согласно данной проблемной ситуации, формируется множество альтернативных УВ, включающее в себя: U_1 — провести ремонт вышедшего из строя технологического оборудования с общими затратами в течение отчетного периода, равными $m_1^* W_1$, где m_1^* , W_1 — соответственно среднее число выходов из строя технологической линии в течение отчетного периода и средняя стоимость одного ремонта; U_2 — выполнить капитальный ремонт наиболее часто выходящего из строя оборудования технологической линии, требующий затрат W_2 ; U_3 — провести замену часто выходящего из строя технологического оборудования, приводящую к затратам W_3 .

Наиболее эффективное УВ в полученном множестве альтернатив в сложившейся проблемной ситуации на ТП определяется по максимуму принятого критерия выбора. Для этого в данный критерий подставляются значения параметров состояния, которые можно получить в результате отработки различных управлений и стоимость их реализации. Например, отработка управления U_1 позволяет обеспечить минимум параметра состояния ТП F_1 , а отработка управления U_3 — максимум этого параметра.

Таким образом, приведенный пример показывает работоспособность предложенных инструментальных средств, позволяющих определять на альтернативной основе наиболее эффективные УВ в различных проблемных ситуациях ОС в условиях неопределенности.

Отметим, что предложенные инструментальные средства без принципиальных изменений позволяют эффективным образом организовать принятие управленческих решений и выбор на альтернативной основе УВ в процессе управления различными сложными объектами. Например, для планирования целенаправленного поведения интеллектуального робота, когда на альтернативной основе возникает необходимость выбора наиболее эффективного действия с целью перевода определенного объекта ОС в требуемое состояние. Другими словами, когда возникает необходимость вы-

бора на альтернативной основе действия, обеспечивающего максимальный уровень достижения поставленной цели [21].

В качестве другого примера можно рассмотреть управление финансовой устойчивостью машиностроительных предприятий, требуемый уровень которой, как правило, достигается путем проведения организационно-технических и организационно-экономических мероприятий, обеспечивающих максимизацию, например, коэффициентов финансовой безопасности и прочности, играющих роль показателей эффективности [22], и др.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные выводы.

Предложен один из подходов к решению задачи выбора на альтернативной основе управляющих воздействий на процесс реализации технологического процесса в условиях недоброкачественной неопределенности. В качестве основного критерия выбора рассмотрено влияние управляющих воздействий на эффективность получаемого в результате их отработки состояния сложного технологического процесса. Данный критерий строится путем обработки экспертных данных на основе лингвистических функций, позволяющих сформировать многофакторную эмпирическую модель эффективности различных состояний технологического процесса с четко заданными коэффициентами и таким образом обеспечивающих требуемую точность и однозначность решения задачи выбора в различных проблемных ситуациях, возникающих на технологической линии в результате возмущений нестабильной окружающей среды.

Разработанные инструментальные средства управления текущим состоянием технологического процесса по отклонению и возмущению позволяют обеспечить эффективную реализацию сложных технологических процессов механической обработки деталей в машиностроении в нестабильных условиях окружающей среды при недоброкачественной неопределенности протекающих в ней случайных процессов.

Предложенные инструментальные средства, обеспечивающие эффективное управление технологическим процессом в нестабильных условиях функционирования, изложены в общем виде и достаточно действенны в различных предметных областях, что позволяет организовать эффективное управление поведением различных сложных объектов управления в нестабильных условиях недоброкачественной неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев Г.А., Барбашов Н.Н., Терентьева А.Д. Статистические методы управления технологическими процессами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2016. — № 12. — С. 58–63. [Timofeev, G.A., Barbashov, N.N., Terentyeva, A.D. Statistical Methods of Control of Technological Processes // Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building. — 2016. — No. 12. — P. 58–63. (In Russian)]
2. Мелехин В.Б., Хачумов В.М. Интеллектуальная система автоматического проектирования технологических маршрутов обработки деталей в машиностроении. // Автоматизация в промышленности. — 2018. — № 9. — С. 13–20. [Melekhin, V.B., Khachumov, V.M. Intellectuall'naya sistema avtomaticheskogo proektirovaniya tekhnologicheskikh marshrutov obrabotki detalei v mashinostroenii. // Avtomatizatsiya v promyshlennosti. — 2018. — No. 9. — S. 13–20. (In Russian)]
3. Bogle, I.D.L., Zilinskas, J. Methods in Optimal Design and Operations. — World Scientific Pub Co Inc., 2006. — 236 p.
4. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. — М.: Наука, 1986. — 288 с. [Pospelov, D.A. Situatsionnoe upravlenie: teoriya i praktika. — M.: Nauka, 1986. — 288 s. (In Russian)]
5. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.В. Теория выбора и принятия решений. — М.: Наука, 1982. — 328 с. [Makarov, I.M., Vinogradskaya, T.M., Rubchinskii, A.A., Sokolov, V.V. Teoriya vybora i prinyatiya reshenii. — M.: Nauka, 1982. — 328 s. (In Russian)]
6. Трофимов В.В., Трофимова А.А. Методы принятия управленческих решений. — М.: Юрайт, 2013. — 336 с. [Trofimov, V.V., Trofimova, A.A. Metody prinyatiya upravlencheskikh reshenii. — M.: Yurait, 2013. — 336 s. (In Russian)]
7. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980. — 208 с. [Venttsel', E.S. Issledovanie operatsii: zadachi, printsipy, metodologiya. — M.: Nauka, 1980. — 208 s. (In Russian)]
8. Ицкович Э.Л. Методы комплексной автоматизации производства предприятий технологических отраслей. — М.: КРАСАНД, 2013. — 232 с. [Itskovich, E.L. Metody kompleksnoi avtomatizatsii proizvodstva predpriyatii tekhnologicheskikh otraslei. — M.: KRASAND, 2013. — 232 s. (In Russian)]
9. Фельдштейн Е.Э., Корневич М.А. Автоматизация производственных процессов в машиностроении. — Вологда: Инфра — Инженерия, 2016. — 246 с. [Fel'dshtein, E.E., Kornevich, M.A. Avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov v mashinostroenii. — Vologda: Infra — Inzheneriya, 2016. — 246 s. (In Russian)]
10. Бахтадзе Н.Н., Лотоцкий В.А. Современные методы управления производственными процессами // Проблемы управления. — 2009. — № 3.1. — С. 56–63. [Bahtadze, N.N., Lototsky, V.A. Contemporary methods of production process control // Control Sciences. — 2009. — No. 3.1. — P. 56–63. (In Russian)]
11. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение для принятия приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 168 с. [Zade, L. Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primeneniye dlya priblizhennykh reshenii. — M.: Mir, 1976. — 168 s. (In Russian)]
12. Борисов А.Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с. [Borisov, A.N. Obrabotka nechetkoi informatsii v sistemakh prinyatiya reshenii. — M.: Radio i svyaz', 1989. — 304 s. (In Russian)]
13. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление: пер. с англ. 2-е изд. — М.: БИНОМ, 2013. — 798 с. [Piegat, A. Fuzzy Modeling and Control. — Heidelberg: Physica-Verlag, 2003. — 728 p.]
14. Darwish, A., Poleshchuk, O., Komarov, E. A New Fuzzy Linear Regression Model for a Special Case of Interval Type — 2 Fuzzy Sets Applied // Mathematics and Information Sciences. — 2016. — Vol. 10, iss. 3. — P. 1209–1214.
15. Технология технического контроля в машиностроении: справочное пособие / под общ. ред. В.Н. Чупырина. — М.: Изд-во стандартов, 1990. — 400 с. [Tekhnologiya tekhnicheskogo kontrolya v mashinostroenii: spravochnoe posobie / pod obshch. red. V.N. Chupyrina. — M.: Izd-vo standartov, 1990. — 400 s. (In Russian)]
16. Абдурагимов Т.Т., Мелехин В.Б., Хачумов В.М. Информационно-аналитическая модель нечеткого ПИД регулятора // Вестник Дагестанского гос. техн. ун-та. Технические науки. — 2017. — Т. 44, № 1. — С. 48–60. [Abduragimov, T.T., Melekhin, V.B., Hachumov, V.M. Information-analytical model for a fuzzy proportionalintegral-derivative controller // Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences. — 2017. — Vol. 44, — no. 1. — P. 48–60. (In Russian)]
17. Мелехин В.Б., Хачумов В.М. Многоуровневая ситуационная модель управления технологическими процессами обработки деталей в машиностроении // Проблемы управления. — 2019. — № 1. — С. 73–82. [Melekhin, V.B., Khachumov, V.M. Multi-level model of situational management of technological processes of machining // Control Sciences. — 2019. — No. 1. — P. 73–82. (In Russian)]
18. Мелехин В.Б., Хачумов В.М. Динамическая модель представления знаний в интеллектуальных системах контроля сложных технологических процессов // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2017. — № 2. — С. 31–43. [Melekhin, V.B., Khachumov, V.M. Dynamic model of knowledge representation in intelligent control systems of complex technological processes // Artificial Intelligence and Decision Making. — 2017. — No. 2. — P. 31–43. (In Russian)]
19. Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. — М.: Книга по требованию, 2012. — 145 с. [Louli, D., Maksvell, A. Faktornyi analiz kak statisticheskii metod. — M.: Kniga po trebovaniyu, 2012. — 145 s. (In Russian)]
20. Овсянников Г.Н. Факторный анализ в доступном изложении. Изучение многопараметрических систем и процессов. — М.: Либроком, 2013. — 176 с. [Ovsyannikov, G.N. Faktornyi analiz v dostupnom izlozhenii. Izuchenie mnogoparametricheskikh sistem i protsessov. — M.: Librokom, 2013. — 176 s. (In Russian)]
21. Берштейн Л.С., Мелехин В.Б. Планирование поведения интеллектуального робота. — М.: Энергоатомиздат, 1994. — 240 с. [Bershtein, L.S., Melekhin, V.B. Planirovanie povedeniya intellektual'nogo robota. — M.: Energoatomizdat, 1994. — 240 s. (In Russian)]
22. Игнатов А.В. Анализ финансового состояния предприятия // Финансовый менеджмент. — 2015. — № 4. — С. 3–20. [Ignatov, A.V. Analiz finansovogo sostoyaniya predpriyatiya // Finansovyi menedzhment. — 2015. — No. 4. — S. 3–20. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 14.01.2019, после доработки 12.08.2019.
Принята к публикации 30.09.2019.

Мелехин Владимир Борисович — д-р техн. наук, Дагестанский государственный технический университет, Дагестанский государственный университет народного хозяйства, г. Махачкала, ✉ pashka1602@rambler.ru,

Хачумов Вячеслав Михайлович — д-р техн. наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва; Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, ✉ vmh48@mail.ru.

CONTROL OF EFFECTIVE IMPLEMENTATION OF TECHNOLOGICAL PROCESSES FOR MECHANICAL PROCESSING OF PARTS IN MECHANICAL ENGINEERING

V.B. Melekhin^{1,2,#}, V.M. Khachumov^{3,4}

¹ Daghestan State Technical University, Makhachkala, Russia

² Daghestan State University of National Economy, Makhachkala, Russia

³ Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,

⁴ Program Systems Institute of Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky, Russia

#✉ pashka1602@rambler.ru

Abstract. The main problems concerning effective implementation of technological processes in mechanical engineering under uncertainty are considered and solved. An integral criterion for efficiency estimation of the present state of technological processes is proposed, which allows reducing the solution of the multiobjective problem of choosing effective control actions to a single-objective optimization problem with both maximized and minimized efficiency indicators available. A method based on the use of fuzzy logic for processing expert data is presented, which makes it possible to form a multivariate analytical dependency between the efficiency indicators of the implemented technological process and the state parameters in the form of a linguistic function graph that ensures its required flow under changing operating conditions. A selection method is developed on an alternative basis of the most effective control actions in case of problem situations during the implementation of a complex technological process as a result of the influence of various disturbing environmental factors. In the selection method proposed, decision-making is based on a composition of correspondences that make it possible to relate disturbing factors of an unstable environment with control actions that ensure the efficient flow of a complex technological process. In general, control tools for deviation and disturbance compensation were obtained, which ensure the effective implementation of complex technological processes of machining parts in mechanical engineering in unstable environmental conditions.

Keywords: technological process, efficiency indicators, disturbing factors, control parameters, effective control.

Funding. The work is performed with financial support of Russian Foundation of Basic Research (grant No. 16-29-12839 ofi_m).



XV КОНФЕРЕНЦИЯ ПЯТНИЦКОГО — 2020

Глубокоуважаемые коллеги!

Приглашаем Вас принять участие в XV международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» («Конференция Пятницкого»), 3—5 июня 2020 г.

Конференцию организует и проводит Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН) при информационной поддержке IEEE (Russia section).

Основные научные направления Конференции:

- Общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения
- Общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний
- Методы функций Ляпунова
- Гладкая и негладкая динамика
- Вопросы управляемости и наблюдаемости
- Проблемы робастного управления
- Управление в механических и электромеханических системах
- Управление роботами и мехатронными системами
- Колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах
- Устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями

Подробная информация о конференции размещена на странице <https://stab20.ipu.ru/ru>

УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ОТ ОДИНОЧНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ НА ЗАДАННОЙ СКОРОСТИ¹

А.А. Галяев, П.В. Лысенко, В.П. Яхно

Аннотация. Рассмотрено планирование оптимального маршрута движения подвижного объекта в задаче уклонения от обнаружения одиночным сенсором на плоскости на постоянной скорости с целью минимизации интегрального уровня полезного сигнала, приходящего на наблюдателя. Показано, что различные механизмы обнаружения подвижного объекта могут быть приведены к общей математической формализации, а именно к исследованию задачи обнаружения по различным типам сигнала и малом отношении сигнал/помеха. В результате исследования решение двухточечной вариационной задачи с интегральным ограничением сведена к решению трех типов систем алгебраических интегральных уравнений, в которые входят нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а тип системы определяется различными начальными условиями и значениями интегрального ограничения. Для каждой из систем, описанных в работе, реализована численная процедура ее решения.

Ключевые слова: поиск подвижного объекта, планирование маршрута движения, оптимальный закон уклонения от обнаружения.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи планирования маршрута движения подвижного объекта (ПО) при уклонении от обнаружения в конфликтной среде вызывают большой интерес в связи с расширяющейся областью применения различного рода беспилотных летательных и подводных аппаратов. Термин «конфликтная среда» употребляется для описания взаимодействия подвижного объекта со средой, в которой он движется, другими подвижными объектами и внешними ограничениями, а также как реакция ПО на переменные внешние условия. Математические модели, применяемые для решения задачи об оптимизации закона уклонения ПО, определяются объемом текущей информации о характеристиках информационных полей, создаваемых объектом при своем движении, динамическими возможностями ПО, а также вектором допустимых

управлений. Успешность выполнения миссии ПО (в рассматриваемом случае — уклонения от обнаружения) оценивается значением некоторого функционала (критерия оптимальности), минимизация которого является основной задачей системы управления.

Классические критерии оптимальности связаны с минимизацией расхода энергоресурса, времени (задачи быстрогодействия) или промаха [1]. В последнее время проявляется интерес к нетрадиционным критериям, таким как повышение скрытности движения (при движении в конфликтной среде с учетом карты потенциальных рисков-угроз) [2–5]. Одной из моделей, описывающей поиск подвижного объекта в заданном районе, служит модель случайного поиска [6, 7]. При решении задачи планирования маршрута перемещения объекта из фиксированной начальной точки в фиксированную конечную точку минимизируется интегральный уровень полезного сигнала, по которому оценивается успешность решения задачи уклонения от обнаружения. Вектор скорости ПО играет роль вектора управления.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 7.

Особенность рассматриваемой задачи планирования маршрута движения подвижного объекта заключается в том, что мгновенный уровень сигнала I , пришедшего на вход наблюдателя или сенсора, зависит от текущего расстояния D до уклоняющегося объекта, а для некоторых типов полей он еще зависит и от модуля мгновенной скорости v объекта. Для описания подобной зависимости используются степенной моделью $I \sim v^m/D^k$ [3].

Значение показателя степени k характеризует физическое поле, по признакам которого осуществляется обнаружение [8]. Значения $k = 1, 2, 3, 4$ могут быть интерпретированы в рамках соответствующих физических моделей. Значение $k = 1$ описывает процесс затухания волн на поверхности жидкости и соответствует убыванию уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в мелком море. Убывание уровня интенсивности первичного гидроакустического поля в глубоком море, отвечающее пассивному режиму обнаружения, а также убывание уровня интенсивности теплового поля и первичного электромагнитного поля при их распространении соответствует значению $k = 2$. Значение $k = 3$ описывает убывание уровня напряженности магнитного поля. В свою очередь, значение $k = 4$ соответствует убыванию уровня интенсивности вторичного электромагнитного и гидроакустического полей (активный режим обнаружения). Показатель степени m в числителе дроби определяет зависимость уровня интенсивности излучаемого сигнала от скорости движения объекта. Например, подобная зависимость присуща сигналам, отвечающим первичному гидроакустическому полю [9].

В работе рассматриваются модели движения на плоскости на постоянной скорости ($v = \text{const}$). Цель работы — построение оптимальной траектории движения ПО при заданных ограничениях на модуль скорости в процессе уклонения от одиночного наблюдателя и исследование особенностей полученного решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что на плоскости расположены два объекта — одиночный неподвижный наблюдатель (сенсор) в начале координат и управляемый ПО в точке с текущими координатами $(x(t), y(t))$, где t — текущее время. Пусть выполнено $k = 2$, $m = 2$, что соответствует наблюдению за ПО, например, по сигналам электромагнитного поля. Координаты начальной и конечной точек маршрута заданы в неподвижной декартовой системе координат, начало которой совпадает с позицией наблюдателя. Требуется найти траекторию движения

ПО и закон изменения ориентации его вектора скорости, доставляющие минимум функционалу [3]

$$R(\dot{x}(\cdot), \dot{y}(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)) = \int_0^T \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{x^2(t) + y^2(t)} dt \rightarrow \min_{(\dot{x}(\cdot), \dot{y}(\cdot), x(\cdot), y(\cdot))}. \quad (1)$$

Граничные условия заданы в виде

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(0) = y_A, \quad y(T) = y_B,$$

где $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ — начальная и конечная точки маршрута. Величина T (время движения по траектории) задана, на модуль скорости ПО v наложено ограничение

$$v^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \text{const}.$$

В рамках приведенной выше физической интерпретации числитель дроби в функционале (1) есть величина, пропорциональная мгновенному уровню излучаемого объектом сигнала в предположении о том, что имеет место степенная зависимость этого уровня от модуля текущей скорости объекта.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

Согласно работе [10] карта распределения уровней рисков определяет функцию риска, заданную в полярных координатах $(r(t), \varphi(t))$ как $\Gamma(x, y) = 1/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — радиус-вектор. Перед планированием миссии стоит задача минимизации интегрального риска при движении подвижного объекта.

Предположим, что движение объекта происходит от точки A к точке B по некоторой траектории l с постоянным модулем скорости v . Тогда вместо функционала (1) подвергаем исследованию функционал вида

$$R(r(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_l v/r^2 dl \rightarrow \min_l, \quad (2)$$

при наличии ограничения на длину траектории

$$\int_l dl \leq vT, \quad (3)$$

где $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ — элемент длины траектории.

В задаче (2), (3) в отличие от задачи (1) ищется оптимальная траектория l как функция полярных координат (r, φ) , в которой зависимость от текущего времени отсутствует.

В полярных координатах функционал (3) и задача оптимизации принимают вид

$$R(r(\cdot)) = \int_{\varphi A}^{\varphi B} \frac{v}{r^2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \rightarrow \min_l, \quad (4)$$

где r' — производная r по φ . Получили задачу вариационного исчисления с интегральным ограничением

$$\int_{\varphi A}^{\varphi B} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \leq vT.$$

Чтобы применить принцип максимума [11], нужно проверить соответствие подынтегральной функции его условиям. Совершим замену переменной $z = \ln r$, $z \in (-\infty, +\infty)$, так как $r \in (0, +\infty)$. Тогда функционал (4) перепишется в виде

$$R(z(\cdot)) = \int_{\varphi A}^{\varphi B} \exp(-z) \sqrt{1 + z'^2} d\varphi \quad (5)$$

при ограничении

$$\int_{\varphi A}^{\varphi B} \exp(z) \sqrt{1 + z'^2} d\varphi \leq vT.$$

Подынтегральное выражение в формуле (5) — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные по своим аргументам (z , z'). Поэтому для задачи вариационного исчисления вида (4) необходимо выполнены уравнения Эйлера, которые запишем в переменных (z , φ),

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{(\exp(-z) + \lambda \exp(z))z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) - \frac{d}{dz} ((\exp(-z) + \lambda \exp(z)) \sqrt{1 + z'^2}) = 0, \quad (6)$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторая константа.

Поскольку функционал задачи явно не зависит от переменной φ , то для уравнений Эйлера (6) существует первый интеграл вида

$$C_1 = -z' \left(\frac{(\exp(-z) + \lambda \exp(z))z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) + ((\exp(-z) + \lambda \exp(z)) \sqrt{1 + z'^2}) = \frac{\exp(-z) + \lambda \exp(z)}{\sqrt{1 + z'^2}}, \quad (7)$$

где $C_1 > 0$ — константа.

Обозначим $C = 1/C_1$. Интегрирование уравнения (7) дает квадратуру

$$\varphi - \varphi_A = \int_{z_A}^z \frac{dz}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}}. \quad (8)$$

Уравнение (8) задает зависимость $\varphi(z)$ и определяет траекторию движения ПО, вышедшую из точки A . Из уравнения (8) и активного ограничения в выражении (5) следует, что для определения констант C и λ нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_A, \\ \int_{z_A}^{z_B} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{C}. \end{cases} \quad (9)$$

Однако эта система справедлива только до момента выполнения условия

$$\frac{dz}{d\varphi} = 0, \quad (10)$$

т. е. пока функция $z(\varphi)$ строго монотонна. Поэтому расширим систему (9), сделав следующие предположения. Пусть для некоторой точки Q с координатами (φ_Q, z_Q) выполнено условие (10), тогда от точки A до точки Q ПО движется в течение интервала времени T_1 , а от точки Q до точки B — в течение интервала времени T_2

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_Q - \varphi_A, \\ \int_{z_B}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_Q, \\ C(\exp(-z_Q) + \lambda \exp(z_Q)) = 1, \\ \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT_1}{C}, \\ \int_{z_B}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2 (\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT_2}{C}, \\ T_1 + T_2 = T. \end{cases} \quad (11)$$

В системе (11) первое и второе уравнения отвечают граничным условиям при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно, третье уравнение определяет условие (10),

выполненное в точке Q , четвертое и пятое уравнения определяют ограничения на длину траектории при движении ПО от точки A к точке Q и от точки Q к точке B соответственно и последнее шестое уравнение определяет условие на полное время движения. Складывая первое и второе, четвертое и пятое уравнения с учетом шестого из системы (11), получаем редуцированную систему

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz + \\ + \int_{z_B}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \varphi_B - \varphi_A, \\ C(\exp(-z_Q) + \lambda \exp(z_Q)) = 1, \\ \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz + \\ + \int_{z_B}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{C}. \end{cases} \quad (12)$$

Систему уравнений (12) можно упростить в случае равенства $r_A = r_B$ или, что то же самое, $z_A = z_B$. В этом случае выполнено равенство $\varphi_Q = (\varphi_B + \varphi_A)/2$. Тогда получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{2}, \\ \int_{z_A}^{z_Q} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \frac{vT}{2C}. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь требуется найти тройку значений (λ, C, z_Q) — решение системы алгебраических и интегральных уравнений (13). Заметим, что несобственные интегралы в системе (13) сходятся. Действительно, первый интеграл — это эллиптический интеграл Лежандра первого рода, а второй — сумма двух эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода. Данный факт устанавливают следующие леммы.

Лемма 1. *Левая часть первого интеграла в системе уравнений (13)*

$$\begin{aligned} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \\ = \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_A, k) &= \int_0^{\xi_A} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\lambda/k}, \\ \xi_A &= ar_A. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Известно, что нормальный эллиптический интеграл первого рода задается первым выражением в формулах (14). Совершив линейную замену $\xi = a\eta$, приведем интеграл к виду

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} = a \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - a^2 \eta^2)(1 - k^2 a^2 \eta^2)}}. \quad (15)$$

Первый интеграл в системе уравнений (13) при интегрировании по координате r принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{z_A}^{z_Q} \frac{dz}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} = \\ = \int_{r_A}^{r_Q} \frac{dr}{\sqrt{C^2(1 + \lambda r^2)^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая знаменатели в правых частях выражений (15) и (16), получаем систему уравнений для нахождения пары (a, k) :

$$\begin{cases} k^2 a^4 = \lambda^2, \\ a^2(1 + k^2) = \frac{1}{C^2} - 2\lambda. \end{cases} \quad (17)$$

Поскольку λ и k положительны, то, выразив a^2 из первого уравнения (17) и подставив во второе, получаем квадратное уравнение относительно k вида

$$\lambda k^2 - \left(\frac{1}{C^2} - 2\lambda \right) k + \lambda = 0.$$

Заметим, что $0 < k < 1$, и выберем наименьший положительный корень этого уравнения

$$k = \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}.$$

Далее находим выражение для a , а также, сравнивая постоянные множители, стоящие под интегралами в правых частях (15) и (16), определяем равенство $\eta = r$ и выражаем ξ через r . В заключение заметим, что в точке Q вследствие равенства нулю знаменателей в правых частях выражений (15) и (16) выполнено $\xi_Q = 1$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ является решением уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta}, \Rightarrow \theta = \frac{k}{(k+1)^2},$$

где k — решение уравнения

$$\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{2(k+1)}.$$

Лемма 2. Левая часть второго интеграла в системе уравнений (13)

$$\begin{aligned} & \int_{z_A}^{z_0} \frac{\exp(z)(\exp(-z) + \lambda \exp(z))}{\sqrt{C^2(\exp(-z) + \lambda \exp(z))^2 - 1}} dz = \\ & = \left(1 + \frac{\lambda}{k^2 a^2}\right) \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC} - \\ & - \frac{\lambda}{k^2 a^2} \frac{\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)}{aC}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\xi, k) &= \int_0^\xi \frac{\sqrt{1 - k^2 \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\lambda/k}, \\ \xi_A &= ar_A. \diamond \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{E}(\xi, k)$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 2. Пусть $\lambda C^2 = \theta$, тогда θ — решение уравнения

$$k = \frac{1 - 2\theta - \sqrt{1 - 4\theta}}{2\theta},$$

где k в свою очередь есть решение уравнения

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{k}\right)(\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \\ & - \frac{1}{k}(\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{vT}{2}. \end{aligned}$$

Следствия 1 и 2, а также систему уравнений (13) можно записать совместно.

Следствие 3. Чтобы найти четверку значений $(\lambda, \theta, \xi_A, k)$, являющуюся решением системы урав-

нений (13), нужно совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{2(k+1)}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)(\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \\ - \frac{1}{k}(\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} \frac{vT}{2}, \\ \theta = \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A = \xi_A. \end{cases} \quad (18)$$

Следствие 4. Чтобы найти пять неизвестных $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющихся решением системы (12), нужно совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) + \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_B, k) = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)(2\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) - \tilde{F}(\xi_B, k)) - \\ - \frac{1}{k}(2\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k) - \tilde{E}(\xi_B, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} vT, \\ \theta = \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A = \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B = \xi_B, \diamond \end{cases} \quad (19)$$

Следствие 5. Чтобы найти пять неизвестных $(\lambda, \theta, \xi_A, \xi_B, k)$, являющихся решением системы уравнений (9) в случае $r_B > r_A$, нужно совместно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{F}(\xi_B, k) - \tilde{F}(\xi_A, k) = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{k+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)(\tilde{F}(\xi_B, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)) - \\ - \frac{1}{k}(\tilde{E}(\xi_B, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)) = \sqrt{\frac{\lambda}{k}} vT, \\ \theta = \frac{k}{(k+1)^2}, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_A = \xi_A, \\ \sqrt{\frac{\lambda}{k}} r_B = \xi_B, \diamond \end{cases} \quad (20)$$

Следствия 3–5 описывают все возможные ситуации, возникающие при построении оптимальной траектории движения, кроме случая неактивного ограничения на длину траектории, когда оптимальной траекторией движения служит дуга окружности, описанной вокруг треугольника OAB , где точка O — начало координат [3]. Решения систем (18)–(20) определяют оптимальные значения (λ, C) , требующиеся для подстановки в уравнение движения (7). Действительно, в следствиях 3 и 4 рассмотрены симметричный и несимметричный случаи краевых условий, когда, стартуя из точки A , объект движется до точки Q , в которой по траектории выполняется условие $\frac{dz}{d\varphi} = 0$. Далее объект

движется от точки Q до точки B . Следствие 5 позволяет найти оптимальные параметры траектории движения объекта при отсутствии на ней точки Q . Оптимальный закон изменения вектора скорости определяется касательной к траектории движения и имеет вид

$$v_x(\varphi) = \frac{z'(\varphi)\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{z'(\varphi)^2 + 1}} v,$$

$$v_y(\varphi) = \frac{z'(\varphi)\sin\varphi + \cos\varphi}{\sqrt{z'(\varphi)^2 + 1}} v.$$

3. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем вышеприведенные выводы результатами компьютерного моделирования. Средствами языка «Python» был разработан программный модуль,

позволяющий перебором по (λ, k) для заданных граничных условий находить четверку значений (λ, C, ξ_A, k) , строить оптимальную траекторию и вычислять значение функционала.

На рис. 1 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями системы (13) для случая симметричных граничных условий. Штриховой линией показан отрезок AB . Сплошной линией показаны траектории движения, на которых отмечена точка Q . Начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ$, $r_A = 2,5$, конечной точке — $\varphi_B = 90^\circ$, $r_B = 2,5$. На рис. 1, *a* длина траектории $L = vT = 4$, оптимальные параметры $C = 1,386$, $\lambda = 0,1293$, $\theta = 0,2484$, $k = 0,8514$, $\xi_A = \xi_B = 0,9743$, на рис. 1, *б* — $L = vT = 5$, $C = 2,8593$, $\lambda = 0,0126$, $\theta = 0,1032$, $k = 0,1322$, $\xi_A = \xi_B = 0,7722$.

Значения критерия качества на оптимальной траектории $R_{\text{opt}} = 0,6179$ (рис. 1, *a*), $R_{\text{opt}} = 0,5687$ (рис. 1, *б*). При отсутствии ограничения на длину траектории $R_{\text{opt}} = d_{AB}/r_A r_B = \sqrt{2}/2,5 = 0,5657$ [3]. Здесь d_{AB} — расстояние между точками A и B . В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > 2,5\pi\sqrt{2}/2 \cong 5,5536$. Значение критерия при наличии ограничения ухудшается менее чем на 10 %.

На рис. 2 показаны траектории движения подвижного объекта на плоскости из точки A в точку B , которые являются решениями системы (12). Программный модуль, разработанный для симметричных граничных условий, был преобразован для случая несимметричных условий. На рис. 2 начальной точке маршрута движения подвижного объекта соответствуют координаты $\varphi_A = 0^\circ$, $r_A = 2,5$, конечной точке — $\varphi_B = 135^\circ$, $r_B = \sqrt{2}/2$. На

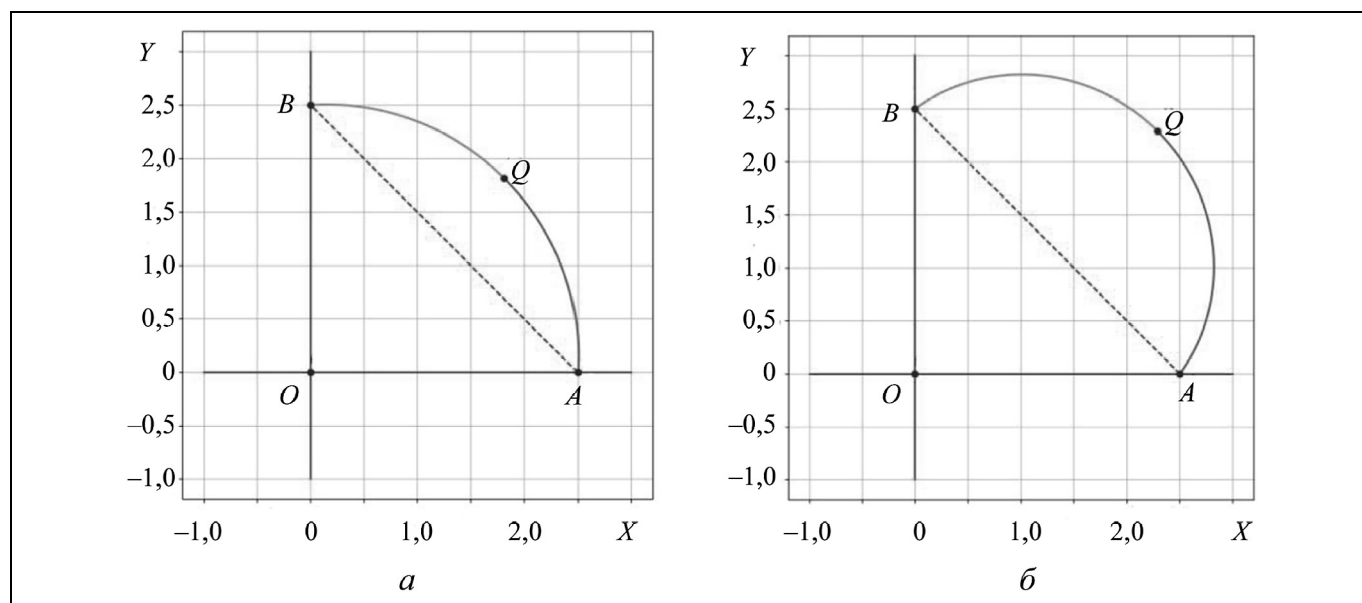


Рис. 1. Траектории движения подвижного объекта, полученные при решении системы (13): *a* — при $vT = 4$; *б* — при $vT = 5$

рис. 2, а длина траектории $L = vT = 7$, оптимальные параметры $C = 1,8154$, $\lambda = 0,0735$, $\theta = 0,2421$, $k = 0,6984$, $\xi_A = 0,8108$, $\xi_B = 0,9174$, на рис. 3, б — $L = vT = 16$, $C = 6,755$, $\lambda = 0,002$, $\theta = 0,0079$, $k = 0,0081$, $\xi_A = 0,3671$, $\xi_B = 0,4154$.

Значения критерия качества на оптимальной траектории $R_{\text{opt}} = 0,8151$ (рис. 2, а), $R_{\text{opt}} = 0,6964$. При отсутствии

ограничения на длину траектории $R_{\text{opt}} = d_{AB}/r_A r_B = 0,696$. Значение критерия при наличии ограничения ухудшается менее чем на 20 %. В этом случае ограничение на длину траектории становится неактивным, если $vT > 16,04$. Оптимальная траектория в этом случае представляет собой окружность, описанную вокруг треугольника OAB . Оптимальные скоростные режимы приведены на рис. 3 и 4.

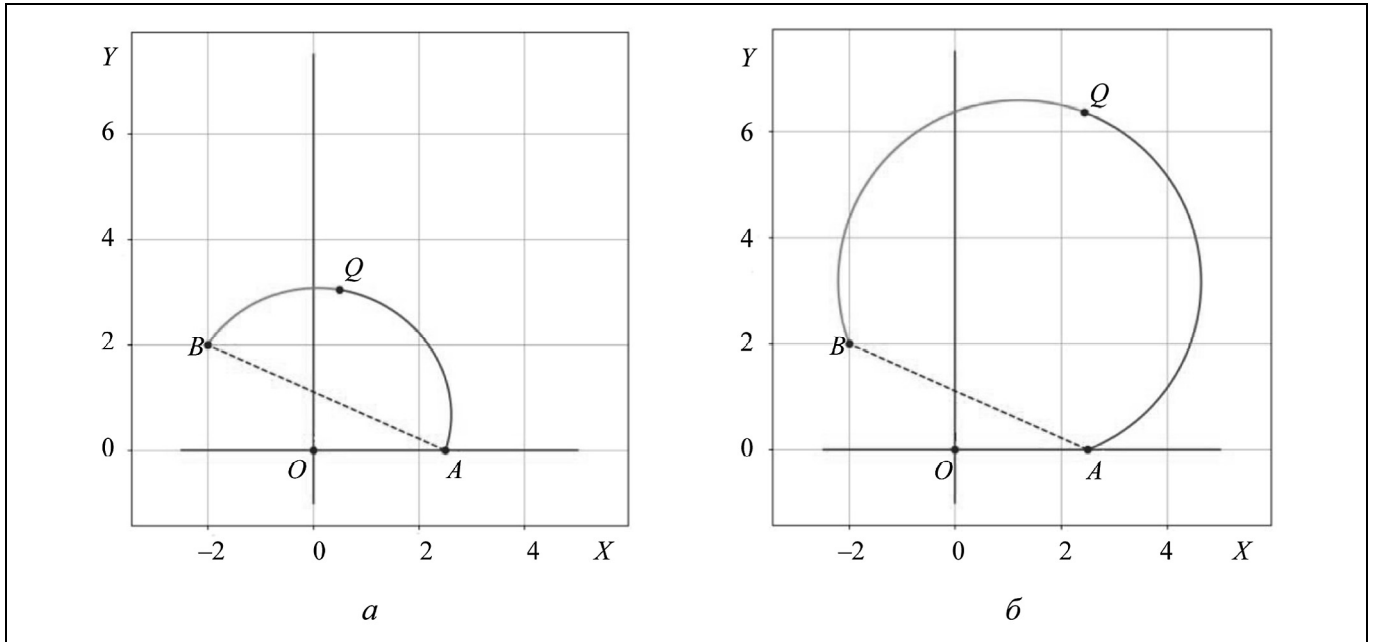


Рис. 2. Траектории движения подвижного объекта, полученные при решении системы (12): а — при $vT = 7$; б — при $vT = 16$

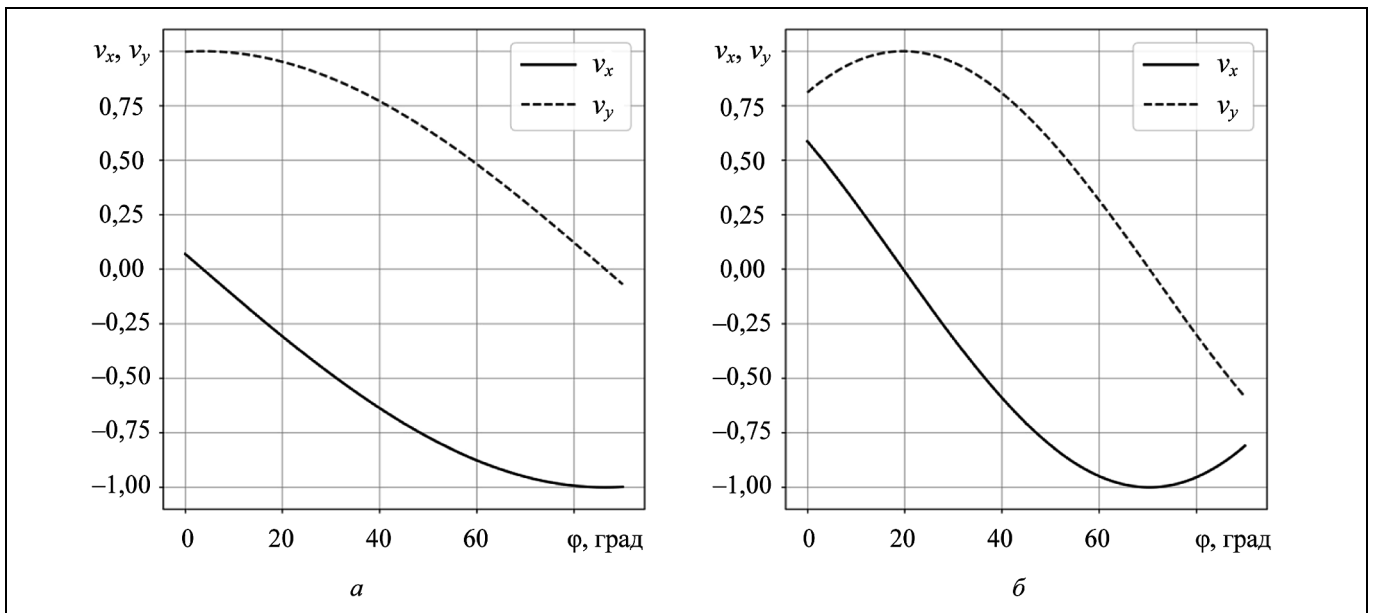


Рис. 3. Оптимальные значения проекций скорости подвижного объекта, полученные при решении системы (13): а — при $vT = 4$; б — при $vT = 5$

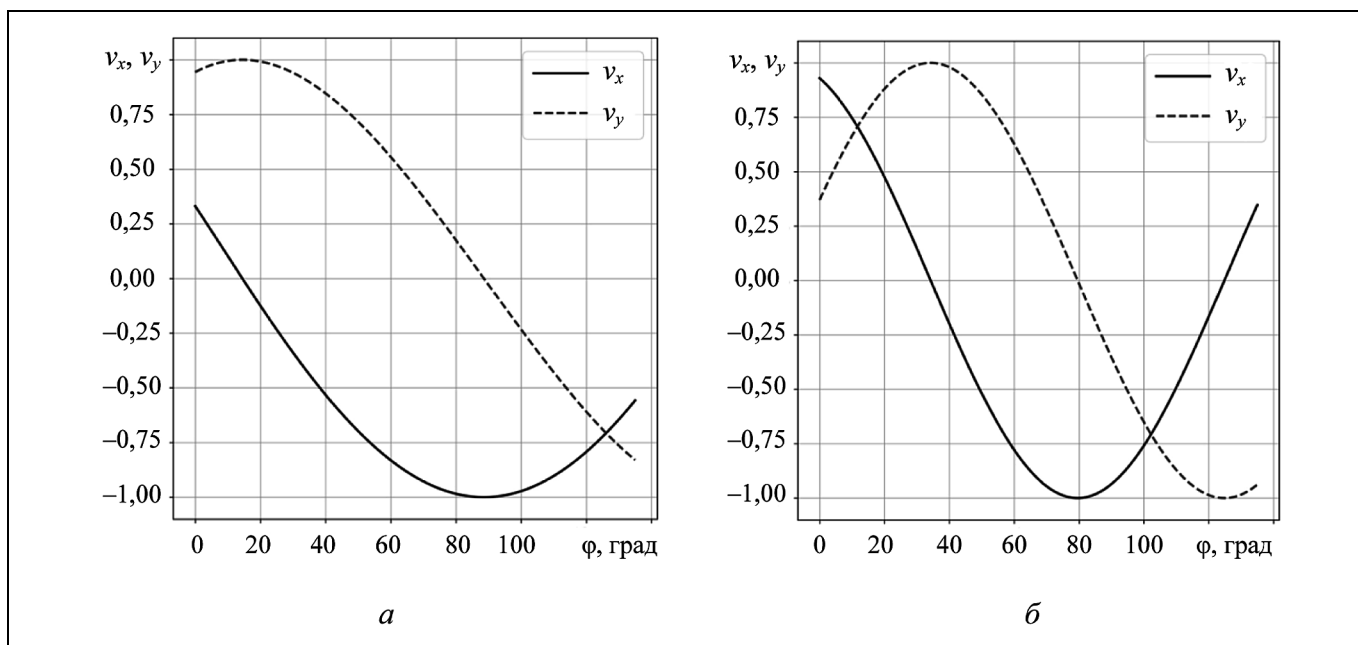


Рис. 4. Оптимальные значения проекций скорости подвижного объекта, полученные при решении системы (12): а — при $vT = 7$; б — при $vT = 16$

Примеры показывают, что длина траектории является существенным фактором, который может быть учтен в постановке и соответственно в решении задачи планирования траектории подвижного объекта. В примерах проиллюстрировано, что оптимизация траектории с учетом ограничения на ее длину приводит к незначительному увеличению критерия при том, что длина траектории движения может быть существенно уменьшена, что в свою очередь приводит к экономии энергетических ресурсов при выполнении миссии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены задачи планирования траектории движения подвижного объекта на постоянной скорости на плоскости в случае, когда карта рисков угроз формируется одиночным сенсором. В результате формализации интегрального критерия исследована вариационная постановка задачи оптимизации при наличии ограничения на длину траектории. Двухточечная вариационная задача сведена к решению системы алгебраических и интегральных уравнений, в которые входят нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а для ее численного решения разработаны программные модули, позволяющие находить решения для различных начальных и конечных условий, а также произвольных ограничений на длину траектории. Результаты решения снабжены примерами и иллюстрациями. Полученные решения сравнены с известными решениями при отсутствии ограничений на длину маршрута. Также

показано, что движение на оптимальной траектории увеличивает значение интегрального критерия не более чем на 20 % по сравнению с оптимальным решением при отсутствии ограничения на длину. Дальнейшая работа будет посвящена решению задачи планирования маршрута движения подвижного объекта при интервальном ограничении на его модуль скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев К.В., Рубинович Е.Я. Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 1. — С. 134—162. [Andreev, K.V., Rubinovich, E.Ya. // Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 1. — P. 106—129.]
2. Dogan, A., Zengin, U. Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map // Journal of Guidance, Control and Dynamics. — 2006. — Vol. 29, no. 4. — P. 723—732.
3. Галаяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 4. — С. 52—62. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Optimization of a mobile object evasion laws from detection // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2012. — Vol. 73, no. 4 — P. 560—569.]
4. Галаяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 73—88. [Galyaev, A.A., Maslov, E.P. Optimization of the Law of Moving Object Evasion from Detection under Con-

- straints // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73, no. 6. — P. 992–1004.]
5. *Галеев А.А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 6. — С. 28–37. [*Galyaev, A.A.* Evasion on Plane from a Single Mobile Observer in the Conflict Environment // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 6. — P. 1017–1024.]
 6. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. — М.: Советское радио, 1977. [*Abchuk, V.A., Suzdal, V.G.* Search of Objects. — M.: Sovetskoe Radio, 1977. (In Russian)]
 7. *Галеев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П., Абрамянц Т.Г.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения системой наблюдателей: сенсор — маневренное средство // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 8. — С. 113–126. [*Galyaev, A.A., Maslov, E.P., Yakhno, V.P., Abramyan, T.G.* Evasion of a Moving Object from Detection by a System of Observers: Sensor — Maneuvering Search Means // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 8. — P. 1449–1459.]
 8. *Zabarankin, M., Uryasev, S., Murphey, R.* Aircraft Routing under the Risk of Detection // Naval Research Logistics. — 2006. — Vol. 53, no. 8. — P. 728–747.
 9. *Урик З.* Основы гидроакустики. — Л.: Судостроение, 1978. — 445 с. [*Urik, Z.* Basics of Hydroacoustics. — L.: Sudostroenie, 1978. — 445 s. (In Russian)]
 10. *Галеев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П.* Задача планирования оптимального движения объекта через район случайного поиска // Проблемы управления. — 2017. — № 5. — С. 77–83. [*Galyaev, A.A., Lysenko, P.V., Yakhno, V.P.* Optimal Path Planning for an Object in a Random Search Region // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 11. — P. 2080–2089.]
 11. *Гирсанов И.В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. — 2003. — 120 с. [*Girsanov, I.V.* Lectures on Mathematical Theory of Extreme Problems. — Izhevsk: Regular and Chaotic dynamics, 2003. — 120 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

*Поступила в редакцию 20.07.2018, после доработки 3.09.2018.
Принята к публикации 1.10.2018.*

Галеев Андрей Алексеевич — чл.-корр. РАН, д-р техн. наук,
✉ galyaev@ipu.ru,

Лысенко Павел Владимирович — мл. науч. сотрудник,

Яхно Виктор Павлович — канд. техн. наук,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва.

MOVING OBJECT EVASION FROM SINGLE DETECTOR AT GIVEN SPEED

A.A. Galyaev[#], P.V. Lysenko, V.P. Yakhno

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[#]✉ galyaev@ipu.ru

Abstract. Within the problem of evasion from detection by a single sensor on a plane at a constant speed the problem is considered of planning the optimal route of a moving object in order to minimize the integral level of the useful signal coming to the observer. It is shown that the various mechanisms of detection of a moving object can be reduced to a general mathematical formalization, namely to the study of the detection problem for different types of signal and a small signal/noise ratio. The study of the two-point variational problem with an integral constraint reduces to solving three types of systems of algebraic-integral equations, which include elliptic integrals of Legendre of the first and second kind, and the system type is determined by different initial conditions and values of the integral constraints. For each of the systems described in the paper, a numerical procedure for its solution is implemented.

Keywords: search for a moving object, route planning, optimal law of evasion from detection.

Funding. The work is performed with partial financial support of No. 7 Program of Presidium of Russian Academy of Sciences.



Конгресс WOSC2020

Всемирная организация систем и кибернетики (World Organisation of Systems & Cybernetics, WOSC) будет проводить свой 18-й конгресс (WOSC2020) в Москве с 16 по 18 сентября 2020 г.). Помимо заявленных общих направлений на Конгрессе запланированы специализированные секции **кибернетики и междисциплинарных приложений физики**, заседания которых будут проходить в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

Подробности см. на сайте <https://www.wosc2020.org>



ПЕРЕЧЕНЬ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ В АСПИРАНТУРЕ ИПУ РАН

Направление подготовки:

09.06.01 — «Информатика и вычислительная техника»

Специальности:

- 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям) — по техническим наукам;
- 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации) — по физико-математическим наукам;
- 05.13.05 — Элементы и устройства вычислительной техники и систем управления — по техническим наукам;
- 05.13.06 — Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (по отраслям) — по техническим наукам;
- 05.13.10 — Управление в социальных и экономических системах — по техническим наукам;
- 05.13.11 — Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей — по техническим наукам;
- 05.13.12 — Системы автоматизации проектирования (по отраслям) — по техническим наукам;
- 05.13.15 — Вычислительные машины, комплексы и компьютерные сети;
- 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ — по техническим наукам.

Направление подготовки:

38.06.01 — «Экономика»

Специальности:

- 08.00.05 — Экономика и управление народным хозяйством (по отраслям и сферам деятельности в том числе управление инновациями);
- 08.00.13 — Математические и инструментальные методы экономики.

Направление подготовки:

01.06.01 — «Математика и механика»

Специальность:

- 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Более подробную информацию см. на сайте <https://www.ipu.ru/>



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
**ИНСТИТУТ
ПРОБЛЕМ
УПРАВЛЕНИЯ**
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**MLSD
2020**



**ТРИНАДЦАТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«УПРАВЛЕНИЕ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ»
28—30 СЕНТЯБРЯ 2020 г.**

Направления и темы заседаний

- Проблемы управления развитием крупномасштабных систем, включая ТНК, госхолдинги и госкорпорации
- Методы и инструментальные средства управления инвестиционными проектами и программами
- Управление развитием цифровой экономики. Проектные офисы и ситуационные и прогнозно-аналитические центры, институты развития крупномасштабных систем
- Имитация и оптимизация в задачах управления развитием крупномасштабных систем
- Нелинейные процессы и вычислительные методы в задачах управления крупномасштабными системами
- Управление развитием банковских и финансовых систем
- Управление топливно-энергетическими, инфраструктурными и другими системами
- Управление транспортными системами
- Управление развитием авиационно-космических и других крупномасштабных организационно-технических комплексов
- Управление развитием региональных, городских и муниципальных систем
- Управление объектами атомной энергетики и другими объектами повышенной опасности
- Информационное и программное обеспечение систем управления крупномасштабными производствами
- Методология, методы и программно-алгоритмическое обеспечение обработки и интеллектуального анализа больших массивов информации
- Мониторинг на основе разновидностей Интернета вещей в управлении развитием крупномасштабных систем
- Управление развитием крупномасштабных систем здравоохранения, медико-биологических систем и технологий
- Управление развитием социальных систем

Подробности см. на сайте <http://mlsd2020.ipu.ru/>

