УДК 519.8

КОНСЕНСУС В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ С ДВУМЯ ЦЕНТРАМИ ВЛИЯНИЯ[1]

В.М. Буре, Е.М. Парилина, А.А. Седаков

Рассмотрена модель динамики мнений в социальной сети, среди участников которой выделены два центра влияния (участники сети могут влиять на мнения друг друга, а динамика мнений участников сети описывается однородной цепью Маркова). Изучен вопрос о существовании консенсуса в сети для двух моделей влияния: когда центры могут напрямую влиять на мнения друг друга и когда не могут. Найдены значения параметров социальной сети, при которых достигается консенсус. Для случаев, когда консенсус не достигается, введено понятие консенсуса большинства, и найдены значения параметров, при которых он достигается. Теоретические результаты проиллюстрированы на численных примерах.

Ключевые слова: модель Де Гроота, влияние, консенсус, динамика мнений.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель динамики мнений участников социальной сети, использующая теорию марковских процессов, была предложена Де Гроотом [1]. В его модели предполагается, что на мнения любого участника могут влиять остальные участники с заданными весами, которые не меняются во времени. Мнение участника о некоторой неизвестной величине в следующий момент времени представляет собой линейную комбинацию всех мнений участников социальной сети в текущий момент. Де Гроот ввел понятие консенсуса и определил достаточные условия его достижения. В работе [2] модель Де Гроота расширяется понятием «мудрого» общества, также изучается вопрос достижения «правды» в случае, когда число участников неограниченно растет. В качестве примера рассматривается сеть, в которой один участник является «центром», а все остальные участники сети симметричны. В этом случае матрица влияния участников друг на друга, задающая динамику мнений, имеет специальный вид. Доказано, что существует матрица предельного влияния, а также получены ее компоненты в явном виде. В работе [3] приводится альтернативная модель формирования мнений, в которой основное предположение заключается в том, что участники сети могут не наблюдать истинных мнений других участников, а наблюдают лишь только те мнения, которые они заявляют. В этой модели считается известным только свое собственное истинное мнение в каждый момент времени. В работе [4] сформулирована модель формирования профиля мнений внутри некоторой социальной группы, например, среди сотрудников некоторой компании по отношению к предложенной руководителем компании инициативе. Модель характеризует взаимное влияние сотрудников друг на друга, а также взаимное влияние руководителя на сотрудников и наоборот. В качестве центра влияния рассматривается руководитель компании.

В работах [5, 6] рассматривается управляемая модель Де Гроота — теоретико-игровая модель информационного противоборства, динамика мнений в которой также задается однородной цепью Маркова. Предполагается, что «центр» может управлять мнением участников сети, т. е. его управление входит в уравнение динамики мнений. Теоретико-игровой подход для моделирования динамики мнений применен также в работе [7]. С целью изучения вопроса сходимости мнений авторы предлагают обратиться к графам для описания структуры взаимодействия участников сети и предполагают, что их мнения меняются, агрегируя мнения всех участников сети. Далее авторами изучается вопрос сходимости мнений. Иерархические структуры взаимодействия участников сети рассматриваются также в работе [8], где среди всех

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-01-31141_мол_а) и Санкт-Петербургского государственного университета (9.38.245.2014).

участников выделяется один центр (главный игрок) на первом уровне, а на втором уровне — остальные симметричные игроки. Для заданной иерархической структуры находятся устойчивые разбиения множества участников.

В настоящей работе изучается социальная сеть, которая содержит два центра, каждый из которых может влиять на всех остальных участников сети. Случай существования двух центров позволяет описывать динамику мнений в социальной сети при наличии как «основной», так и «альтернативной» точках зрения о некоторой величине или событии.

Мы предполагаем, что участники сети, не являющиеся центрами, не влияют друг на друга. Такое допущение, в некоторой степени, ограничивает область применения представленной модели, однако существуют примеры сетей такого типа. В качестве одного из них можно рассмотреть некоторую территорию с удаленными друг от друга населенными пунктами с несколькими центрами влияния. «Обычного» участника сети можно рассмотреть как агрегированного жителя, мнение которого выражает мнение всех жителей этого населенного пункта. Ввиду удаленности населенных пунктов прямое общение их жителей затруднительно, и оно возможно лишь через центры влияния. Другим примером сети может быть трудовой коллектив, часть работников которого не имеет возможности напрямую обмениваться мнениями согласно протоколу трудовых отношений. Такой протокол может содержать запрет на обмен информацией, в том числе и сведений, предоставляемых руководителем (или центром). Руководитель, например, может собирать мнение о каком-либо работнике коллектива, конфиденциально обмениваясь своим мнением с каждым «обычным» участником коллектива.

Исследуются два случая: когда центры непосредственно влияют друг на друга и когда такого влияния нет. Для каждого случая в зависимости от значений параметров модели получены условия существования предельной матрицы влияния, однако оказывается, что консенсус достигается не во всех случаях.

Мы вводим понятие консенсуса большинства, понимая под «большинством» всех участников социальной сети, не являющихся центрами. Необходимость в таком понятии обусловлена тем, что может ставиться не задача достижения согласованности мнений среди всех участников, а задача нахождения условий согласованности мнений лишь большинства. Считается, что консенсус большинства достигается, если для любого начального мнения всех участников предельное мнение участников, кроме центров, совпадает. В работе найдены значения параметров моделей, при которых консенсус не достигается, но достигается консенсус большинства. Дополнительно проведен анализ компонент предельного распределения влияний в случае, когда достигается консенсус, как функций параметров моделей. Также была решена задача нахождения интервала, в котором должно находиться суммарное влияние всех участников сети на центр, чтобы предельное влияние этого центра находилось в заданном промежутке.

Для изучения вопроса существования консенсуса в работе применяется метод исследования степеней матрицы влияния, широко распространенный в теории цепей Маркова и используемый Де Гроотом [1]. Эту задачу можно решать с помощью другого подхода [9]. В нашей работе изучается вопрос достижения консенсуса в социальных сетях определенной структуры с двумя центрами влияния. Влияние агентов сети определяется матрицей, по которой можно сделать выводы о наличии или отсутствии консенсуса или консенсуса большинства. Интересным также представляется вопрос нахождения случаев, когда консенсус не достигается, но достигается консенсус большинства.

Последующее изучение предельных влияний участников сети как функций ее параметров позволяет понять, как необходимо изменить ее параметры, чтобы добиться заданного уровня предельного влияния того или иного участника.

Статья имеет следующую структуру. В § 1 приводится математическая модель на основе модели Де Гроота. В § 2 изучается модель с двумя независимыми центрами, которые не имеют прямого влияния друг на друга. Найдена матрица предельных влияний, отдельно рассмотрены граничные значения параметров, проведен анализ на чувствительность, а также получена интервальная оценка для суммарного влияния участников сети на центр. Модель с зависимыми центрами влияния представлена в § 3. Так же, как и в § 2, проведен аналогичный анализ. Численные примеры, иллюстрирующие теоретические результаты, завершают § 2 и § 3.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конечную группу участников $N = \{1, ..., n\}$, $n > 2$, каждый из которых имеет свое субъективное мнение о некоторой «инициативе». Предположим, что мнение участника $i \in N$ об инициативе в момент времени $k = 0, 1, ...$ может быть выражено величиной $p_i(k)$ из промежутка [0, 1], которое в следующий момент времени формируется с учетом как $p_i(k)$, так и мнений $p_j(k)$ других участников $j \neq i$. Пусть T — квадратная матрица размерности n, каждый элемент которой указывает степень влияния участника j на участника i (или степень доверия участника i участнику j), выраженную вещественным числом $t_{ij} \in [0, 1]$. Такую матрицу назовем матрицей влияния. Матрица T не обязательно симметричная ($t_{ij} \neq t_{ij}$ для некоторых i, j) и допускает одностороннее влияние одного участника из группы на другого ($t_{ij} > 0$, $t_{ji} = 0$), однако рассматриваемая матрица должна быть стохастической, т. е. $\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1$ для любого $i \in N$. Дополнительно предполагается, что степень влияния одного участника на другого не меняется с течением времени.

Вектор мнений всех участников в момент времени k обозначим через $p(k) = (p_1(k), ..., p_n(k))^T$, где $p(0)$ — заданный вектор начальных мнений. Уточненное мнение участника в следующий момент времени определяется согласно правилу:

$$p_i(k + 1) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} p_j(k)$$

или в матричной форме

$$p(k + 1) = Tp(k). \qquad (1)$$

Принимая во внимание вектор начальных мнений, систему (1) можно переписать в виде:

$$p(k) = T^k p(0). \qquad (2)$$

Мы считаем, что участники уточняют свои мнения либо в течение бесконечно долгого периода времени, либо же пока для некоторого k не будет выполняться $p(k + 1) = p(k)$, что означает остановку уточнения мнений участников. В этой связи возникает естественный вопрос о сходимости процесса (2). Рассматриваемый процесс сходится, если $\lim_{k \to \infty} p_i(k) = \bar{p}$ для каждого участника $i \in N$. В этом случае сходимость процесса означает, что мнения всех участников сходятся к одному мнению $\bar{p}$. В работе [1] было введено понятия «консенсуса»: говорят, что достигается консенсус, если существует такое предельное мнение $\bar{p}$ для каждого участника $i \in N$. Будем говорить, что консенсус достигается, если существует такой вектор $s = (s_1, ..., s_n)$, что $\lim_{k \to \infty} (T^k)_{ij} = s_j$ для всех $i, j = 1, ..., n$, где $(T^k)_{ij}$ есть элемент (i, j) матрицы T^k. Когда достигается консенсус, итоговое мнение каждого участника будет $sp(0) = \sum_{j=1}^{n} s_j p_j(0)$, а поскольку сходимость матрицы T^k при $k \to \infty$ не зависит от вектора начальных мнений $p(0)$, то все s_j, $j = 1, ..., n$, также не зависят от $p(0)$. Компоненту s_j вектора s будем называть предельным влиянием участника j.

Даже если предельная матрица $\bar{T} = \lim_{k \to \infty} T^k$ существует, ее строки могут не совпадать. Это означает, что консенсус не достигается. Однако может возникнуть вопрос о достижимости «согласованного» мнения среди некоторого подмножества группы участников. Обозначим через A такое подмножество. Будем говорить, что достигается консенсус в A, если существует такая предельная матрица $\bar{T}$, что $(\bar{T})_{ij} = s_j^A$ для всех $i \in A$, $j = 1, ..., n$. Когда достигается консенсус в A, итоговое мнение каждого участника из A определяется как $s^A p(0) = \sum_{j=1}^{n} s_j^A p_j(0)$, где $s^A = (s_1^A, ..., s_n^A)$. Компоненту s_j^A вектора s^A будем называть предельным влиянием участника j в группе A.

Утверждение 1 [1, 10]. *Если существует положительное число k_0, для которого все элементы, по крайней мере, одного столбца матрицы T^{k_0} положительны, тогда существует предельная матрица $\bar{T} = \lim_{k \to \infty} T^k$.*

Утверждение 2 [11]. *Если существует положительное число k_0, для которого все элементы матрицы T^{k_0} положительны, тогда существует такая предельная матрица $\bar{T} = \lim_{k \to \infty} T^k$, что $\lim_{k \to \infty} (T^k)_{ij} = s_j$ для всех $i, j = 1, ..., n$, и при этом $\sum_{j=1}^{n} s_j = 1$.*

Консенсус можно найти в явном виде. Неотрицательный вектор s называется вектором стационарного распределения вероятностей, если он является решением уравнения $s = sT$ и при этом $\sum_{j=1}^{n} s_j = 1$.

Утверждение 3 [1]. *Предположим, что консенсус достигается, и величина $sp(0)$ есть итоговое мнение при консенсусе. Тогда вектор s — единственный вектор стационарного распределения вероятностей.*

2. КОНСЕНСУС В СЕТИ С ДВУМЯ ЦЕНТРАМИ, НЕ ВЛИЯЮЩИМИ ДРУГ НА ДРУГА НАПРЯМУЮ

2.1. Предельное влияние участников. Достижимость консенсуса

Предположим, что множество N содержит два центра (участники 1 и 2), не влияющие напрямую друга на друга. Назовем множество участников $\{3, ..., n\}$ большинством и обозначим его через A. Пусть $\delta \in (0, 1)$ представляет собой суммарное влияние участников из A на участника 1, $\sigma \in (0, 1)$ представляет собой суммарное влияние участников из A на участника 2. Отметим, что в рассматриваемой постановке ни один из центров не влияет на другой. Величина $1 - \varepsilon$ представляет собой суммарное влияние центров на любого участника из A, которое распределяется между центрами в соотношении λ и $1 - \lambda$ для $\lambda \in (0, 1)$, $\varepsilon \in [0, 1)$. Дополнительно будем считать, что на мнение любого участника, не являющегося центром, не могут влиять другие участники сети из $N\backslash\{1, 2\}$. В рамках сделанных предположений матрица влияния имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1-\delta & 0 & \frac{\delta}{n-2} \; \dots & \frac{\delta}{n-2} \\ 0 & 1-\sigma & \frac{\sigma}{n-2} \; \dots & \frac{\sigma}{n-2} \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & \varepsilon \; \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \; \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & 0 \; \dots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что достигается «консенсус большинства», если достигается консенсус в группе A.

Утверждение 4. *При заданной матрице влияния T консенсус достигается, и предельное влияние участника j имеет вид:*

$$s_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda(1-\varepsilon)\sigma}{(1-\varepsilon)[\lambda\sigma + (1-\lambda)\delta] + \sigma\delta}, & j = 1, \\ \dfrac{(1-\lambda)(1-\varepsilon)\delta}{(1-\varepsilon)[\lambda\sigma + (1-\lambda)\delta] + \sigma\delta}, & j = 2, \\ \dfrac{\sigma\delta}{(n-2)[(1-\varepsilon)[\lambda\sigma + (1-\lambda)\delta] + \sigma\delta]}, & j = 3, ..., n. \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство. Для доказательства существования предельной матрицы влияния $\bar{T}$ вычислим матрицу T^2:

$$\begin{pmatrix} (1-\delta)^2 + \lambda(1-\varepsilon)\delta & (1-\lambda)(1-\varepsilon)\delta & \frac{\delta(1-\delta+\varepsilon)}{n-2} & \dots & \frac{\delta(1-\delta+\varepsilon)}{n-2} \\ \lambda(1-\varepsilon)\sigma & (1-\sigma)^2 + (1-\lambda)(1-\varepsilon)\sigma & \frac{\sigma(1-\sigma+\varepsilon)}{n-2} & \dots & \frac{\sigma(1-\sigma+\varepsilon)}{n-2} \\ \lambda(1-\varepsilon)(1-\delta+\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon)(1-\sigma+\varepsilon) & \frac{(1-\varepsilon)[\lambda\delta + (1-\lambda)\sigma]}{n-2} + \varepsilon^2 & \dots & \frac{(1-\varepsilon)[\lambda\delta + (1-\lambda)\sigma]}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon)(1-\delta+\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon)(1-\sigma+\varepsilon) & \frac{(1-\varepsilon)[\lambda\delta + (1-\lambda)\sigma]}{n-2} & \dots & \frac{(1-\varepsilon)[\lambda\delta + (1-\lambda)\sigma]}{n-2} + \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы T^2 заключаем, что все ее столбцы содержат только положительные элементы. Следовательно, согласно утверждениям 1 и 2, существует предельная матрица $\bar{T}$, строки которой одинаковы. Нетрудно показать, что вектор предельных влияний участников s (совпадающий с любой строкой матрицы $\bar{T}$), компоненты которого определяются формулой (3), удовлетворяет системе $s = sT$, и сумма всех его координат равна единице.

2.2. Анализ предельных влияний на чувствительность

Проведем анализ компонент вектора s, определяемых формулой (3). Отметим, что компоненты s_1 и s_2 не зависят от общего числа участников.

Утверждение 5. *Компоненты вектора предельных влияний $s = (s_1, ..., s_n)$ обладают следующими свойствами:*

s_1 — убывающая функция по δ и ε и возрастающая функция по σ и λ;

s_2 — возрастающая функция по δ и убывающая функция по σ, ε и λ;

s_j, $j = 3, ..., n$ — убывающая функция по n и возрастающая функция по δ, σ и ε. При $\delta > \sigma$ предельное влияние участника j — возрастающая функция по λ, а при $\delta < \sigma$ — убывающая по λ. ♦

Утверждение 5 следует из вида предельных влияний (3) как функций параметров δ, σ, ε и λ.

Приведенные в утверждении 5 свойства имеют следующую интерпретацию. С ростом суммарного влияния участников $j \in A$ на первый центр уменьшается предельное влияние s_1 и увеличивается предельное влияние s_2. Чем меньше каждый из участников $j \in A$ влияет на центр, тем больше предельное влияние этого центра. С ростом суммарного влияния участников A на второй центр возрастает предельное влияние s_1 и уменьшается предельное влияние s_2. С ростом влияния первого центра на любого участника из A возрастает его предельное влияние, а с ростом влияния первого центра на любого участника из A уменьшается предельное влияние второго центра.

Чем больше участников в группе, тем меньше предельное влияние участника, не являющегося центром. С увеличением суммарного влияния участников из A на первый или второй центр увеличивается предельное влияние s_j, $j \in A$. Чем меньше каждый из участников $j \in A$ влияет на центры, тем больше его предельное влияние. Если суммарное влияние участников из A на первый центр больше, чем на второй, то с увеличением влияния первого центра на участников из A увеличивается предельное влияние участника из A. Если суммарное влияние участников из A на первый центр меньше, чем на второй, то с увеличением влияния первого центра на участников из A уменьшается предельное влияние участника из A.

2.3. Анализ дополнительных значений параметров социальной сети

Проведем анализ социальной сети при дополнительных значениях ее параметров, не исследованных ранее.

Утверждение 6. *Если* $\varepsilon = 1$ *и* $\delta, \sigma \in [0, 1]$, *то существует предельная матрица* $\bar{T} = \lim\limits_{k \to \infty} T^k$. *В этом случае ни консенсус, ни консенсус большинства не достигаются.*

Доказательство. Существование предельной матрицы $\bar{T}$ следует из вида матрицы T^k:

$$T^k = \begin{pmatrix} (1-\delta)^k & 0 & \frac{1-(1-\delta)^k}{n-2} & \dots & \frac{1-(1-\delta)^k}{n-2} \\ 0 & (1-\sigma)^k & \frac{1-(1-\sigma)^k}{n-2} & \dots & \frac{1-(1-\sigma)^k}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

а сам вид $\bar{T}$ зависит от значений δ и σ. Поскольку все строки с номерами $\{3, ..., n\}$ различны, то ни консенсус, ни консенсус большинства не достигаются.

Утверждение 7. *Если* $\varepsilon = 0$ *и* $\delta = \sigma = 1$, *то предельной матрицы* $\bar{T}$ *не существует. В этом случае ни консенсус, ни консенсус большинства не достигаются.*

Доказательство. Заметим, что нечетная степень матрицы T имеет вид

$$T^{2l+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-2} \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, ...,$$

а ее четная степень имеет вид

$$T^{2l} = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-2} \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, ...$$

Следовательно, не существует предельной матрицы $\bar{T}$, а это, в свою очередь, влечет недостижимость ни консенсуса, ни консенсуса большинства.

Утверждение 8. *Если* $\delta = \sigma = 0$, *то консенсус не достигается, но достигается консенсус большинства. Предельная матрица влияний существует, она зависит только от* λ *и имеет вид:*

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Доказательство. При $\delta = \sigma = 0$ матрица влияния T имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & 0 & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Сначала покажем, что k-я степень матрицы T имеет вид:

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda(1-\varepsilon)\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i & (1-\lambda)(1-\varepsilon)\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i & \varepsilon^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon)\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i & (1-\lambda)(1-\varepsilon)\sum\limits_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i & 0 & \dots & \varepsilon^k \end{pmatrix}.$$

Доказательство проведем по индукции с базой $k = 1$. Найдем элементы $(T^{k+1})_{i1}$ и $(T^{k+1})_{i2}$ для $i = 3, ..., n$ матрицы T^{k+1}:

$$(T^{k+1})_{i1} = \lambda(1-\varepsilon)\left[1 + \varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i\right] = \lambda(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i,$$

$$(T^{k+1})_{i2} = (1-\lambda)(1-\varepsilon)\left[1 + \varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon^i\right] = (1-\lambda)(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i.$$

Остальные элементы матрицы T^{k+1} найти не представляет сложности. Поскольку $\varepsilon < 1$, то существует предельная матрица $\lim\limits_{k \to \infty} T^k$, которая совпадает с матрицей (4). ♦

Легко показать, что в случае, когда $\delta = \sigma = 1$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, консенсус достигается, и предельное влияние участников сети можно найти по формуле (3). При равенстве нулю параметра σ предельная матрица существует, но вторая строка в матрице предельных влияний — (0, 1, 0, ..., 0), а строки {3, ..., n} совпадают. Это позволяет утверждать, что консенсус не достигается, но консенсус большинства достигается. Аналогично, если $\delta = 0$, то предельная матрица существует, но первая строка в матрице предельных влияний — (1, 0, 0, ..., 0), а строки {3, ..., n} совпадают. Это также позволяет утверждать, что консенсус не достигается, но консенсус большинства достижим.

2.4. Интервальная оценка предельного влияния

Пусть значения σ, ε и λ зафиксированы. Выясним, в каком промежутке должно находиться δ (суммарное влияние участников {3, ..., n} на участника 1), чтобы его предельное влияние s_1, определяемое выражением (3), находилось в заданном промежутке $[\theta_1, \theta_2]$. Нетрудно убедиться, что для этого достаточно, чтобы

$$\frac{\lambda(1-\varepsilon)\sigma}{(1-\lambda)(1-\varepsilon)+\sigma}\left[\frac{1}{\theta_2}-1\right] \le \delta \le \le \frac{\lambda(1-\varepsilon)\sigma}{(1-\lambda)(1-\varepsilon)+\sigma}\left[\frac{1}{\theta_1}-1\right].$$

Аналогичным образом, для фиксированных значений δ, ε и λ можно найти промежуток для σ (суммарное влияние участников {3, ..., n} на участника 2), чтобы его предельное влияние s_2, определяемое выражением (3), находилось в заданном промежутке $[\theta_1, \theta_2]$. Для этого достаточно, чтобы

$$\frac{(1-\lambda)(1-\varepsilon)\delta}{\lambda(1-\varepsilon)+\delta}\left[\frac{1}{\theta_2}-1\right] \le \sigma \le \le \frac{(1-\lambda)(1-\varepsilon)\delta}{\lambda(1-\varepsilon)+\delta}\left[\frac{1}{\theta_1}-1\right]. \quad (5)$$

Пример 1. Рассмотрим группу из $n = 10$ участников, начальные мнения которых $p(0)$ = (1; 0; 0,9; 0,9; 0,75; 0,75; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1). Параметры модели: $\delta = 0,3$; $\sigma = 0,2$; $\varepsilon = 0,05$; $\lambda = 0,75$. Используя формулы (3), получим вектор предельных влияний s = (0,5205; 0,2603; 0,0274; 0,0274; 0,0274; 0,0274; 0,0274; 0,0274; 0,0274; 0,0274), а итоговое мнение при консенсусе $sp(0) = 0,6548$.

Определим, например, каким должно быть значение σ, чтобы для фиксированных значений δ, ε и λ предельное влияние s_2 находилось в промежутке [0,5; 0,99]. Подставляя значения $\theta_1 = 0,5$, $\theta_1 = 0,99$ в формулу (5), получим $0,0007 \le \sigma \le 0,0704$.

3. КОНСЕНСУС В СЕТИ С ДВУМЯ ЦЕНТРАМИ, ВЛИЯЮЩИМИ ДРУГ НА ДРУГА НАПРЯМУЮ

3.1. Предельное влияние участников. Достижимость консенсуса

Рассмотрим предыдущую модель в предположении, что первый и второй центры теперь могут влиять на мнения друг друга. Пусть величины $\delta_1, \sigma_1 \in (0, 1)$ показывают степень влияния участников из A на первый и второй центры, величина $\delta_2 \in (0, 1)$ показывает степень влияния второго центра на первый, а величина $\sigma_2 \in (0, 1)$ показывает степень влияния первого центра на второй. Дополнительно накладываются ограничения $\delta_1 + \delta_2 < 1$ и $\sigma_1 + \sigma_2 < 1$. Величины ε, λ имеют ту же интерпретацию. Здесь так же, как и в § 2, мы считаем, что на мнение любого участника из A не могут влиять другие участники сети из этого множества. Матрица влияния в этом случае принимает вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1-\delta_1-\delta_2 & \delta_2 & \frac{\delta_1}{n-2} & \cdots & \frac{\delta_1}{n-2} \\ \sigma_2 & 1-\sigma_1-\sigma_2 & \frac{\sigma_1}{n-2} & \cdots & \frac{\sigma_1}{n-2} \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(1-\varepsilon) & (1-\lambda)(1-\varepsilon) & 0 & \cdots & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Утверждение 9. *При заданной матрице влияния T консенсус достигается, и предельное влияние участника j имеет вид:*

$$s_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\varepsilon)\times}{(1-\varepsilon)[\lambda\sigma_1+(1-\lambda)\delta_1+\sigma_2+\delta_2]+} \to \\ \to \dfrac{\times(\lambda\sigma_1+\sigma_2)}{+(\delta_1+\delta_2)(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_2\delta_2}, \ j = 1, \\ \dfrac{(1-\varepsilon)\times}{(1-\varepsilon)[\lambda\sigma_1+(1-\lambda)\delta_1+\sigma_2+\delta_2]+} \to \\ \to \dfrac{\times[(1-\lambda)\delta_1+\delta_2]}{+(\delta_1+\delta_2)(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_2\delta_2}, \ j = 2, \\ \dfrac{(\delta_1+\delta_2)(\sigma_1+\sigma_2)-}{(n-2)[(1-\varepsilon)[\lambda\sigma_1+(1-\lambda)\delta_1+\sigma_2+\delta_2]+} \to \\ \to \dfrac{-\sigma_2\delta_2}{+(\delta_1+\delta_2)(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_2\delta_2]}, \ j = 3, ..., n. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Для доказательства существования предельной матрицы влияния $\bar{T}$ достаточно заметить, что матрица T^2 содержит только положительные элементы (ее вид мы не приводим из-за громоздкости). Следовательно, согласно утверждениям 1 и 2 существует предельная матрица $\bar{T}$, строки которой одинаковы. Нетрудно показать, что вектор предельных влияний участников s (совпадающий с любой строкой матрицы $\bar{T}$), компоненты которого определяются формулой (6), удовлетворяет системе $s = sT$, и сумма всех его координат равна единице. ♦

Рассматриваемая модель обобщает предыдущую: при подстановке значений $\delta_2 = \sigma_2 = 0$ предельные влияния (3) и (6) совпадают. Кроме этого, выражения для s_1 и s_2 также не зависят от общего числа участников.

3.2 Анализ предельных влияний на чувствительность

Проведем анализ компонент вектора s, определяемых формулой (6).

Утверждение 10. *Компоненты вектора предельных влияний $s = (s_1, ..., s_n)$ обладают следующими свойствами:*

s_1 — убывающая функция по δ_1, δ_2 и ε и возрастающая функция по σ_2 и λ; s_1 — возрастающая функция по σ_1, если $\sigma_2 < \lambda(1 - \varepsilon)$ и убывающая функция по σ_1, если $\sigma_2 > \lambda(1 - \varepsilon)$;

s_2 — убывающая функция по σ_1, σ_2, ε и λ и возрастающая функция по δ_2; s_2 — возрастающая функция по δ_1, если $\delta_2 < (1 - \lambda)(1 - \varepsilon)$, и убывающая функция по δ_1, если $\delta_2 > (1 - \lambda)(1 - \varepsilon)$;

s_j — убывающая функция по n и возрастающая функция по δ_1, σ_1 и ε для всех $j \in A$; s_j — возрастающая функция по δ_2 и убывающая по σ_2 и λ, если $\sigma_1 > \delta_1$; s_j — убывающая функция по δ_2 и возрастающая по σ_2 и λ, если $\sigma_1 < \delta_1$.

Утверждение 10 следует из вида выражений предельных влияний (6) как функций параметров δ_1, δ_2, σ_1, σ_2, ε, λ.

Приведенные в утверждении 10 свойства имеют следующую интерпретацию. При увеличении влияния второго центра на первый уменьшается предельное влияние s_1 и увеличивается предельное влияние s_2. При увеличении суммарного влияния участников из A на первый центр уменьшается предельное влияние s_1. При увеличении суммарного влияния участников из A на второй центр уменьшается предельное влияние s_2. При увеличении влияния первого центра на второй увеличивается предельное влияние s_1 и уменьшается предельное влияние s_2. При уменьшении влияния центров на участников из A уменьшаются предельные влияния центров s_1 и s_2. Если влияние первого центра на второй больше, чем влияние на участника из A, то предельное влияние s_1 уменьшается с ростом суммарного влияния участников из A на второй центр. Если же влияние первого центра на второй меньше, чем влияние на участника из A, то предельное влияние s_1 возрастает с ростом суммарного влияния участников из A на второй центр. Если влияние второго центра на первый меньше, чем на любого участника из A, то предельное влияние s_2 возрастает с ростом суммарного влияния участников из A на первый центр. Если же влияние второго центра на первый больше, чем на любого участника из A, то предельное влияние s_2 убывает с ростом суммарного влияния участников из A на первый центр.

Рассмотрим поведение компоненты s_j, $j \in A$, при изменении параметров модели. Предельное влияние s_j уменьшается с ростом общего числа участников сети. При увеличении суммарного влияния участников из A как на первый, так и на второй центр предельное влияние s_j увеличивается. При уменьшении влияния центров на участников из A увеличивается предельное влияние s_j. В случае, когда влияние участника из A на второй центр больше, чем на первый, предельное влияние s_j возрастает с ростом влияния второго центра на первый и убывает с ростом влияния первого на второй. В случае, когда влияние участника из A на второй центр меньше, чем на первый, предельное влияние s_j убывает с ростом влияния второго центра на первый и возрастает с ростом влияния первого на второй.

Стоит отметить появление нового эффекта при рассмотрении возможностей влияния одного центра на другой: поведение предельного влияния центра теперь зависит от соотношения между уровнями влияния альтернативного центра и участника из A на этот центр. Дополнительно, поведение предельного влияния участника из A теперь зависит от соотношения между уровнями влияния центров на этого участника.

3.3. Интервальная оценка предельного влияния

Пусть значения σ_1, σ_2, ε и λ зафиксированы. Выясним, в какой области должны находиться δ_1 и δ_2 (влияния участников 2, ..., n на участника 1), чтобы его предельное влияние s_1, определяемое выражением (6), находилось в заданном промежутке $[\theta_1, \theta_2]$. Нетрудно убедиться, что для этого достаточно, чтобы

$$(1 - \varepsilon)(\lambda\sigma_1 + \sigma_2)[1/\theta_2 - 1] \le \zeta_1\delta_1 + \zeta_2\delta_2 \le (1 - \varepsilon)(\lambda\sigma_1 + \sigma_2)[1/\theta_1 - 1], \quad (7)$$

где $\zeta_1 = (1 - \lambda)(1 - \varepsilon) + \sigma_1 + \sigma_2$, $\zeta_2 = 1 - \varepsilon + \sigma_1$.

Аналогичным образом для фиксированных значений δ_1, δ_2, ε и λ можно найти область для σ_1 и σ_2 (влияния участников 1, 3, ..., n на участника 2), чтобы его предельное влияние s_2, определяемое выражением (6), находилось в заданном промежутке $[\theta_1, \theta_2]$. Для этого достаточно, чтобы

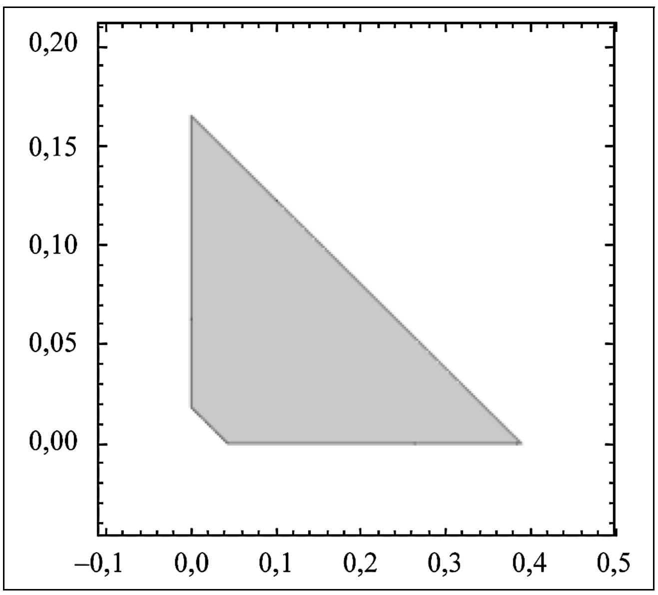
$$(1 - \varepsilon)[(1 - \lambda)\delta_1 + \delta_2][1/\theta_2 - 1] \le \zeta'_1\sigma_1 + \zeta'_2\sigma_2 \le (1 - \varepsilon)[(1 - \lambda)\delta_1 + \delta_2][1/\theta_1 - 1],$$

где $\zeta'_1 = \lambda(1 - \varepsilon) + \delta_1 + \delta_2$, $\zeta'_2 = 1 - \varepsilon + \delta_1$.

Пример 2. Рассмотрим группу из 10 участников, начальные мнения которых p(0) = (1; 0; 0,9; 0,9; 0,75; 0,75; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1). Параметры модели $\delta_1 = 0{,}3$; $\delta_2 = 0{,}15$; $\sigma_1 = 0{,}2$; $\sigma_2 = 0{,}05$; $\varepsilon = 0{,}05$; $\lambda = 0{,}75$. Используя формулы (6), получим вектор предельных влияний:

s = (0,3735; 0,4201; 0,0258; 0,0258; 0,0258; 0,0258; 0,0258; 0,0258; 0,0258; 0,0258), а итоговое мнение при консенсусе $sp(0) = 0{,}4999$.

Определим, например, как должны меняться δ_1 и δ_2, чтобы для фиксированных значений σ_1, σ_2, ε и λ предельное влияние s_1 находилось в промежутке [0,5; 0,9]. Подставляя значения $\theta_1 = 0{,}5$; $\theta_2 = 0{,}9$ в формулу (7), получим $0{,}0211 \le 0{,}4875\delta_1 + 1{,}15\delta_2 \le 0{,}19$. Графическое решение данного неравенства приведено на рисунке.



Область изменения δ_1 и δ_2, при которых $s_1 \in$ [0,5; 0,9]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рассмотренной модели социальной сети с двумя центрами влияния найдены условия достижимости консенсуса при динамике мнений, которая задается линейной стационарной системой. В случаях, когда консенсус не достигается, найдены схожие условия достижения консенсуса большинства. В явном виде получены предельные влияния участников социальной сети, по которым рассчитано итоговое мнение сети при консенсусе или итоговое мнение большинства. Найдены значения параметров социальной сети, когда ни консенсус, ни консенсус большинства не достигаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *DeGroot M.H.* Reaching a Consensus // Journal of the American Statistical Association. — 1974. — Vol. 69, N 345. — P. 118—121.
2. *Golub B., Jackson M.O.* Naive Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds // American Economic Journal: Microeconomics. — 2010. — Vol. 2, N 1. — P. 112—149.
3. *Buechel B., Hellmann T., Klöbner S.* Opinion dynamics and wisdom under conformity // Journal of Economic Dynamics & Control. — 2015. — Vol. 52. — P. 240—257.
4. *Буре В.М., Екимов А.В., Свиркин М.В.* Имитационная модель формирования профиля мнений внутри коллектива // Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. — 2014. — № 3. — С. 93—98.
5. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 28—35.
6. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
7. *Grabisch M., Rusinowska A.* A model of influence based on aggregation functions // Mathematical Social Sciences. — 2013. — Vol. 66. — P. 316—330.
8. *Parilina E., Sedakov A.* Stable cooperation in graph-restricted games // Contributions to Game Theory and Management. — 2014. — Vol. 7. — P. 271—281.
9. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Об асимптотике в моделях консенсуса // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 43. — С. 55—77.
10. *Doob J.L.* Stochastic Processes. — N.-Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1990. — 664 p.
11. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Буре Владимир Мансурович — д-р техн. наук, профессор, ✉ v.bure@spbu.ru,

Парилина Елена Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент, ✉ e.parilina@spbu.ru,

Седаков Артем Александрович — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель, ✉ a.sedakov@spbu.ru,

Санкт-Петербургский государственный университет.