УДК 681.511

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.Л. Бунич

Рассматриваются задачи управления многомерными дискретными объектами со стационарными сингулярными возмущениями. Показано, что такие задачи вырождены и приведен метод построения регулятора.

Ключевые слова: вырожденные задачи синтеза, линейные дискретные объекты, нулевая цена управления.

ВВЕДЕНИЕ

Построение высокоточных систем относится к центральным проблемам теории автоматического управления. Классическая задача об абсолютной инвариантности линейных систем с неизмеряемыми возмущениями в классе детектирующих звеньев неразрешима, и усилия специалистов сосредоточились на определении условий приближенной инвариантности по двум направлениям — при ограничениях на класс объектов либо на класс возмущений.

К первому направлению относятся «мееровские структуры», в которых норма реакции на возмущение неограниченно уменьшается с ростом коэффициента усиления [1]. Приближенно инвариантные многомерные системы для минимально-фазовых объектов с ограниченными возмущениями построены в работе [2], где показано, что условие минимально-фазовости близко к необходимому для разрешимости задачи о приближенной инвариантности. Как и в мееровских структурах, недостаток регулятора, непреодолимый в рамках линейных систем, состоит в большом усилении помех при высоких требованиях к точности стабилизации [2, 3].

Начало второму направлению было положено идеей В.С. Кулебакина об аннулирующем возмущение $K(D)$-операторе [4], аналог которого («полином поглощения») впоследствии использовался при синтезе систем с дискретным временем [5]. Дальнейшее продвижение в этом направлении было обусловлено неполнотой априорной информации о спектральном составе возмущений, характерной для большинства приложений.

Простой пример звена задержки с аддитивным стационарным возмущением демонстрирует связь между разрешимостью задачи синтеза высокоточной системы и свойством линейной сингулярности возмущения, полностью определяемым его спектральной функцией. Для линейных стохастических систем со стационарными возмущениями задача построения универсального регулятора решена в работе [6]. В статьях [7, 8] рассмотрена задача синтеза дискретных и непрерывных систем с сингулярными возмущениями специального класса. Методика синтеза основана на аппроксимации физически нереализуемых звеньев реализуемыми фильтрами, возможность которой вытекает из условия сингулярности. Сингулярность возмущения может быть обусловлена наличием лакун, «исчезновением» спектра в некотором диапазоне частот, несовместимым с условиями применимости метода факторизации [9]. Интересно, что пример лакуны приведен автором метода факторизации (при исследовании энцефалограмм было обнаружено «исчезновение спектра» процесса вблизи частоты 9,05 Гц [10]). Сингулярные возмущения представляют также самостоятельный интерес в связи с рядом смежных к теории регулирования проблем безошибочной нелинейной [11] и линейной фильтрации [12].

Таким образом, синтез высокоточных линейных систем естественно связать с априорной информацией о возмущении и использовать эту информацию при построении регулятора, гарантирующего требуемую стоимость управления в установившемся режиме. С другой стороны, в задаче оптимальной стабилизации линейного объекта с несингулярными возмущениями требование линейности допустимых стратегий, вообще говоря, необоснованно и оптимальная стратегия может порождаться нелинейным регулятором [13, 14]. Сложности решения задач нелинейной оптимизации достаточно очевидны, не говоря уже об эффективной реализации оптимальной стратегии. И, напротив, для объектов с лакунарными возмущениями задача синтеза эффективно разрешима и алгоритм построения регулятора допускает простую интерпретацию в частотной области [7, 8].

В настоящей статье результаты работы [7] обобщены на более широкий класс объектов и возмущений, компоненты которых могут иметь различные локализации спектров, а стабилизируемые переменные необязательно совпадают с измеряемыми выходами. В рамках такой постановки задачи может рассматриваться и задача стабилизации неустойчивого по выходу объекта с предписанным уровнем расходов на управление. Показана возможность синтеза высокоточных систем с (необязательно линейно) предсказуемыми возмущениями во временной области. Для негауссовских возмущений обратные связи, вообще говоря, нелинейны, и используются оценки возмущений по наблюдениям на соответствующих тактах.

1. ТИПИЧНОСТЬ ПРЕДСКАЗУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ЦЕНА УПРАВЛЕНИЯ

К сингулярным относятся, например, все процессы с дискретным спектром, а также процессы, спектр которых имеет лакуны (интервалы нулевой спектральной меры). Следующий простой пример демонстрирует связь между наличием лакун и разрешимостью задачи синтеза системы с предписанной стоимостью управления — дисперсией ошибки установившейся реакции.

Принятые обозначения и сокращения:

д. р. ф. — дробно-рациональная функция; п. ф. — передаточная функция; с. в. — случайная величина; с. к. о. — средняя квадратическая ошибка; ∇ — оператор сдвига на один такт назад; $\Re$ — класс п. ф. допустимых регуляторов; $\Im_n$ — кольцо $n \times n$ матричных устойчивых д. р. ф.; $I(K)$ — стоимость управления в системе с регулятором $K \in \Re$; E — математическое ожидание; $adj(A)$ — матрица, присоединенная к квадратной матрице A; W_y, W_u и W_w — п. ф. замкнутой системы от v к y, u и w; W_y^0, W_u^0 и W_w^0 — п. ф. системы с опорным регулятором.

Пример 1. Объект — звено однотактовой задержки $y_t = u_{t-1} + v_t$, где спектр стационарного линейно сингулярного возмущения $v = \{v_t\}_{t \in Z}$ с дискретным временем $t \in Z = \{0, \pm 1, ...\}$ сосредоточен на множестве $\Delta = \{\omega \in [-\pi, \pi]: |\sin\omega/2| \leqslant 1/2\}$, u — управление, y — стабилизируемый выход. Допустимы стабилизирующие обратные связи по выходу, а стоимость управления — дисперсия установившейся реакции замкнутой системы Ey_t^2. Регулятор с п. ф. $K(z) = p_N(zp_N - 1)^{-1}$, где $p_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (1 - z)^k$, допустим, и обеспечивает экспоненциальное по порядку при $N \uparrow \infty$ уменьшение стоимости управления $Ey_t^2 = \int_\Delta |1 - e^{-j\omega} p_N(e^{-j\omega})|^2 dS$, где S — спектральная функция v, при равномерно по N ограниченных расходах на управление $Eu_t^2 = \int_\Delta |p_N(e^{-j\omega})|^2 dS$. ♦

Пример 1 отражает общую ситуацию: вырожденность задачи синтеза (нулевая цена — нижняя граница стоимости) для сингулярных возмущений не зависит от п. ф. объекта по управлению и спектрального состава возмущения с фиксированной дисперсией и локализацией спектра. Для решения задачи синтеза существенно указать лишь лакуну спектра (дополнения $[-\pi, \pi]\backslash\Delta$), причем в силу экспоненциальной сходимости предписанная стоимость обеспечивается регуляторами порядков тем меньших, чем шире лакуна спектра.

Очевидно, сингулярность возмущения несовместима со стандартной методикой построения регуляторов методом факторизации. Естественно возникает вопрос об универсальности такой стандартной процедуры или, в эквивалентной форме, о представительности, «массивности» класса спектральных плотностей линейно регулярных возмущений. При положительном ответе можно было бы обоснованно считать вырожденность задачи синтеза исключительным, «нетипичным» свойством. Однако более подробный анализ опровергает такое предположение.

Типичность определим в категорном смысле Бэра по отношению к естественной L^1-метризации семейства спектральных плотностей из класса $M = \{s \in L^1: 0 \leqslant s \leqslant 1\}$. Введем пространство L_s^2 функций с квадратично интегрируемым модулем по весу $s \in M$ и нормой $\|*\|_s$. Как установлено в работе [12], для некоторого положительного веса $s \in M$ каждая функция $f \in L_s^2$ представима сходящимся по норме $\|*\|_s$ рядом $\sum_{n>0} c_n z^n$, и совокупность M^* таких весов представляет множество $M^* \subset M$ второй категории Бэра. Если $s \in M^*$, то ряд сходится и для функции $f(z) = 1$, поэтому возмущения со спектральной плотностью s сингулярны и свойство вырожденности задачи синтеза типично. Используя анонсированный результат, построим регулятор, обеспечивающий предписанную стоимость управления. Приведем это построение для скалярного объекта $a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t$ с выходом y, управлением u и стационарным центрированным возмущением v со спектральной плотностью $s \in M^*$, взаимно простые полиномы a, b ($a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $b(z) \neq 0$) при $|z| = 1$) известны. Фиксируем некоторый опорный регулятор и п. ф. W_y^0, W_u^0 системы управления с опорным регулятором. Регулятор с п. ф. K_n определим соотношениями $K_n = W_u^n(W_y^n)^{-1}$, $W_y^n = (1 - bf_n)W_y^0$, $W_u^n = W_u^0 - af_nW_y^0$, где $W_{y,u}^n$ — п. ф. замкнутой системы, а f_n — n-я частичная сумма разложения д. р. ф. $b^{-1} \in L_s^2$, $s \in M^*$. Регулятор K_n допустим (стабилизирует объект), а вырожденность задачи синтеза (нулевая цена управления) вытекает из соотношений $\lim\limits_{n\to\infty}\|W_y^n\|_s \leqslant \sup\limits_{|z|=1}|(bW_y^0)(z)|\lim\limits_{n\to\infty}\|b^{-1} - f_n\|_s = 0$, справедливых для любых плотностей $s \in M^*$.

Рассмотрим вопрос об определении нижней границы стоимости (цены) управления, когда проектировщик вместо точно известной спектральной функции возмущения S располагает ее достаточно точной оценкой S^*. Замена $J(S) \to J(S^*)$ (метод подстановки) обоснован в предположении непрерывности функционала $J(S)$. В противном случае метод подстановки искажает цену управления, а реально достижимая стоимость управления выявляется лишь на этапе натурных испытаний.

Определим точность оценки в смысле метрики топологии сходимости по вариации на конусе спектральных функций Q. Используя аффинную параметризацию п. ф. системы управления [14], представим цену управления в форме

$$J(S) = \inf_{f \in \Im}\int_{-\pi}^{\pi}|W_y^0 - bf|^2 dS, \quad S \in Q. \qquad (1)$$

Выражение (1) определяет полунепрерывное сверху отображение J: $Q \to [0, \infty)$. Однако, как видно из следующего примера, свойство полунепрерывности снизу нарушается и применение метода подстановки необоснованно.

Пример 2. Пусть S имеет факторизуемую плотность $s \in M$, а в остальном выполнены условия примера 1. Цена управления $J(S) > 0$ совпадает с с. к. о. оптимального линейного прогноза на такт и определяется формулой Сеге [15]. Так как множество M^* плотно в M, то спектральная плотность $s \in M\backslash M^*$ аппроксимируется по L^1-норме плотностью $s^* \in M^*$ некоторой близкой к S спектральной функции S^* ($S^* \approx S$), для которой $J(S^*) = 0$, т. е. метод подстановки занижает цену управления (по сравнению с истинной при точно известной функции S). ♦

Высокая чувствительность цены управления согласуется с хорошо известным фактом негрубости винеровских регуляторов к вариациям спектрального состава возмущения [16]. На практике проблема чувствительности решается дополнительными ограничениями на класс допустимых регуляторов, что подтверждается высокой долей промышленных регуляторов малых порядков, построенных эмпирически без учета рекомендаций современной теории [17, 18].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи синтеза включает в себя описание класса объектов, допустимых возмущений, допустимых обратных связей и критерия качества.

Линейный объект с дискретным временем t описывается уравнением

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \qquad (2)$$

где стабилизируемый выход y_t, управление u_t и неизмеряемое возмущение v_t имеют одинаковую размерность n, $n \times n$-взаимно простые справа матричные полиномы a и b заданы и удовлетворяют условиям $a(0) = I_n$, $b(0) = 0$, $\det b(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Начальные условия при $t < 0$ представляют собой с. в. с конечными моментами второго порядка.

Возмущение $v = \{v_t^k\}_{t \in Z}^{k=1,\,...,\,n}$ — стационарный центрированный процесс с $n \times n$-матричной спектральной функцией S специальной структуры, спектр каждой компоненты которого v_t^k сосредоточен на заданном собственном замкнутом подмножестве $\Delta_k = -\Delta_k$ отрезка $[-\pi, \pi]$ $k = 1, ..., n$. Класс всех таких возмущений v удовлетворяющих дополнительному условию $E\|v_t\|^2 \leqslant \sigma^2$ с фиксированной константой $\sigma > 0$, обозначим L. Здесь и далее для краткости стационарные в широком смысле процессы называются стационарными, а линейно регулярные (линейно сингулярные) процессы — регулярными (сингулярными).

Допустимы любые стабилизирующие объект линейные обратные связи по выходу $\alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t$, $\alpha(0) = I_n$ с $n \times n$-матричными полиномами α и β (обратная связь стабилизирующая, если характеристический полином замкнутой системы $g(z)$ шуровский). Класс допустимых регуляторов обозначим $\Re$.

Стоимость управления в системе с регулятором $K \in \Re$ определяется величиной $I(K) = \|W_y\|_v^2$, где $\|*\|_v$ — норма в гильбертовом пространстве $L^2(S)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi dS\psi^*\right\}$ (функции, различающиеся на множествах нулевой S-меры, отождествляются, tr — след квадратной $n \times n$-матрицы, * — знак эрмитова сопряжения).

Для заданного уровня стоимости управления $d > 0$ необходимо построить регулятор $K = K_d \in \Re$, для которого $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$. Если последнее неравенство разрешимо относительно $K \in \Re$ для любого уровня $d > 0$, то задача синтеза называется вырожденной.

Прокомментируем постановку задачи. Требование одинаковой размерности управления и стабилизируемой переменной естественно: «дефицит размерности управления» ($\dim u < \dim y$) препятствует вырожденности задачи синтеза для объекта общего положения. Очевидно, возмущения $v \in L$ сингулярны и задача линейного прогноза таких возмущений допускает скаляризацию, т. е. может быть решена покомпонентно. В частном случае $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n$ вырожденность поставленной задачи синтеза установлена в работе [7]. Если $L = \{v\}$ (синтез в «условиях полной определенности»), то определение вырожденности согласуется с аналогичным из § 1. Класс L определяется априорной информацией о внешней среде, причем точность локализации спектров возмущений влияет на порядок регулятора, гарантирующего предписанную стоимость управления. Требование $\sup\limits_{v \in L} I(K) < d$ гарантирует робастность регулятора по отношению к вариациям возмущений внутри класса допустимых.

Для возмущений с конечным спектром частот задача синтеза разрешима и в предельном случае $d = 0$ на основе многомерной версии принципа поглощения [5]. Свойство вырожденности можно интерпретировать как приближенную инвариантность системы по отношению к классу возмущений с априорной информацией о локализации их спектров.

3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА

Для допустимого возмущения $v \in L$ замкнутые множества $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k) \subset \Gamma$, $k = 1, ..., n$, не разбивают плоскость, поэтому в силу теоремы Лаврентьева [19] любая непрерывная на множестве Γ_k функция допускает равномерную полиномиальную аппроксимацию. Это утверждение совместно с параметрическим представлением некоторого специального класса систем управления позволяет обосновать вырожденность задачи синтеза методом приближенной динамической компенсации. Суть этого метода сводится к следующему.

Пусть W_y^0 и W_u^0 — пара п. ф. системы с регулятором $K_0 \in \Re$ от v к u и от v к y соответственно. Задача синтеза регулятора для объекта (2) решается в классе систем управления, п. ф. которых W_y и W_u заданы в параметрической форме

$$W_y = W_y^0(I_n - bf), \quad W_u = W_u^0 - (I_n + W_u^0 b)f,$$
$$f \in \Im_n.$$

Каждая такая пара д. р. ф. W_y, $W_u \in \Im_n$ удовлетворяет линейному уравнению $aW_y - bW_u = I_n$ и представляет собой п. ф. системы управления с некоторым регулятором $K \in \Re$, определяемым стандартно [14]. В силу запаздывания в объекте по управлению условие компенсации $W_y \equiv 0$ несовместимо с условием $f \in \Im_n$ и для построения допустимого регулятора естественно вместо точной динамической компенсации использовать приближенную.

Положим $p = \mathrm{diag}(p_1,..., p_n)$, $q = \det b$, $f = \mathrm{adj}(b)p$, где p_k — равномерная полиномиальная аппроксимация на множества $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k)$ скалярной д. р. ф. q^{-1}, $k = 1,..., n$. (существование которой следует из теоремы Лаврентьева). Так как $\|W_y\|_v^2 \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{|z|=1} \|W_y^0(z)\|^2 E\|(I_n - qp)(\nabla)v_t\|^2$, то в силу аппроксимации $p \approx q^{-1}I_n$ величина в правой части неравенства не превышает предписанного значения $d > 0$ для подходящего полинома $p = p_d$. В системе управления с регулятором $K = K_d \in \Re$ неравенство $\|W_y\|_v^2 < d$ выполняется равномерно по $v \in L$, т. е. задача синтеза вырожденна, что и требовалось доказать.

При одинаковой локализации спектров компонент возмущения на $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n$ возможна более простая схема синтеза с использованием правой взаимно простой факторизации [20] п. ф. объекта по управлению ($BA^{-1} = a^{-1}b$). Пусть $n \times n$ полином $B^{(-1)}$ удовлетворяет неравенству $\|I_n - B(z)B^{(-1)}(z)\| < 1$ при $z \in \exp(j\Delta)$. Тогда регулятор $K \in \Re$ определяется без вычисления п. ф. замкнутой системы [7]:

$$K = (K_0 - AB^{(-1)})(I_n - BB^{(-1)})^{-1}. \qquad (3)$$

Делитель $(I_n - BB^{(-1)})$ в правой части выражения (3) аналогичен полиному поглощения для случая возмущений с конечными спектрами [5]. Последовательная замена $K_0 \Rightarrow K$ позволяет реализовать регулятор как звено, итеративное по структуре и требуемое для достижения предписанного уровня стоимости d, число итераций N имеет логарифмический порядок роста: $N(d) = O(\ln d^{-1})$ при $d \to 0$ [7]. Определяющий темп снижения стоимости управления при $N \uparrow \infty$ показатель экспоненты допускает оценку снизу через трансфинитный диаметр компакта $\exp(j\Delta)$ [21]. Темп снижения цены управления при росте N тем ниже, чем ближе к окружности Γ расположены корни полинома $\det b(z)$.

4. УПРАВЛЕНИЕ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

Техника полиномиальной аппроксимации неустойчивых д. р. ф. применима и при решении более общей задачи стабилизации, включая стабилизацию с предписанным уровнем расходов на управление.

Объект описывается уравнениями

$$a_1(\nabla)_{wt} = b_1(\nabla)v_t + c_1(\nabla)u_t + d(\nabla)y_t,$$
$$a_2(\nabla)y_t = b_2(\nabla)v_t + c_2(\nabla)u_t,$$

где все переменные (возмущение $v \in L$, стабилизируемая переменная w измеряемый без помех выход y и управление u имеют одинаковую размерность n, все матричные полиномы заданы и имеют размерность $n \times n$. По предположению полиномы $\det a_1$ и $\det b_2$ устойчивы, полиномы a_2, c_2 ($a_2(0) = L_n$) взаимно просты справа и выполняется условие $\det(c_1A + dB)(z) \approx 0$ при $z \in \Gamma$, где полиномы A и B определяются правой взаимно простой факторизацией $AB^{-1} = a_2^{-1}c_2$. Класс $\Re$ допустимых регуляторов образован стабилизирующими объект обратными связями по выходу $u = Ky$, стоимость управления $I(K) = \|W_w\|_v^2$. Требуется для произвольно заданного уровня стоимости $d > 0$ построить регулятор $K \in \Re$, удовлетворяющий целевому условию $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$.

При исследовании разрешимости задачи предположим без ограничения общности изложения $a_1 = I_n$. Фиксируем некоторый опорный регулятор $K_0 \in \Re$ и тройку п. ф. замкнутой системы $\{W_w^0, W_y^0, W_u^0\}$. Решение определим в классе систем с параметрическим представлением п. ф.

$$W_w = W_w^0 - (c_1A + dB)f, \quad W_u = W_w^0 - Af,$$
$$W_y = W_y^0 - Bf, \quad f \in \Im_n. \qquad (4)$$

При $b_1 = c_1 = 0$, $d = b_2 = I_n$ задача рассматривалась в § 3, а при $b_1 = d = 0$, $c_1 = I_n$ получаем практически важную задачу стабилизации при малых расходах на управление (такая задача содержательна при неустойчивом полиноме $\det a_2$).

Если отказаться от требования допустимости регулятора, то решение получается непосредственно из условия компенсации $W_w \equiv 0$, эквивалентного в силу первого из уравнений (4) уравнению $(c_1A + dB)f = W_w^0$ относительно д. р. ф. f. Положим $p = \mathrm{diag}(p_1, ..., p_n)$, $q = \det(c_1A + dB)$, $f = [\mathrm{adj}(c_1A + dB)]\,W_w^0\,p$, где p_k — равномерная на $\Gamma_k = \exp(j\Delta_k)$ полиномиальная аппроксимация д. р. ф. q^{-1}, $k = 1, ..., n$. Искомый регулятор $K \in \Re$ получаем левой факторизацией д. р. ф. $W_u W_y^{-1}$, где $W_{y,u}$ определяются из соотношений (4). В силу выбора $f \in \Im_n$ получим: $W_w = W_w^0(I_n - qp) \approx 0$, где приближенное равенство понимается в смысле $L^2(S)$-нормы. Таким образом, для заданного уровня $d > 0$ выполняется целевое неравенство $\sup\limits_{v \in L} I(K) \leqslant d$, что и требовалось доказать.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Естественно предположить, что возможность синтеза высокоточной системы управления объектом (2) обусловлена именно предсказуемостью (сингулярностью) возмущения и требование линейности прогноза (линейной сингулярности возмущения) несущественно. Методика построения регулятора, обеспечивающего предписанную стоимость управления, сводится к следующему. Расширим класс допустимых стратегий управления в предположении наблюдаемости возмущения в прошлом, настоящем и будущем. Такой методический прием расширения применялся для решения линейно-квадратичной задачи синтеза и возмущений авторегрессия — скользящее среднее, когда закон регулирования получают из комбинированного заменой возмущений их оптимальными оценками по наблюдениям на соответствующих тактах [14]. Если же процесс v предсказуем, то сужение класса стратегий при переходе от комбинированного закона с упреждением по возмущению к обратной связи по выходу не снижает стоимости управления. Для негауссовских возмущений такой прием замены возмущений их оптимальными оценками приводит, вообще говоря, к некоторой нелинейной стратегии. Перейдем к описанию алгоритма синтеза.

По предположению возмущение v в объекте (2) представляет собой центрированный стационарный в узком смысле сингулярный процесс с конечными моментами второго порядка. Начальные данные нулевые ($y_t = u_t = 0$ при $t < 0$). Объект (2) стабилизируется некоторым опорным регулятором $\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t$, $\alpha(0) = I_n$ (характеристический полином замкнутой системы $g = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$ устойчив), и выполняется частотное условие $\det b(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Введем стационарный процесс ξ — реакцию (некаузального) фильтра с частотной характеристикой $b^{-1}(e^{-j\omega})$ на стационарный процесс v и построим комбинированную систему с законом управления $\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t - \alpha_0(\nabla)\xi_t$. Замкнутая система имеет стационарное решение ($y_t = 0$, $u_t = -\xi_t$) и в силу устойчивости полинома g независимо от начальных данных для любого решения этой системы (y_t, u_t) справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} E\|y_t\|^2 = 0. \tag{5}$$

Заменим с. в. ξ_t ее оценкой $\xi_t^N = E(\xi_t | y_{t-N-n}^t, u_{t-N-n}^{t-1})$ при $t > N + n$, $\xi_t^N = 0$ при $t \leqslant N + n$, где $y_{t-N-n}^t = (y_t, ..., y_{t-N-n})$, $u_{t-N-n}^{t-1} = (u_{t-1}, ..., u_{t-N-n})$, $N \gg 1$. Закон управления определим нелинейной обратной связью по выходу

$$\alpha_0(\nabla)u_t = \beta_0(\nabla)y_t - \alpha_0(\nabla)\xi_t^N. \tag{6}$$

Замена $\xi_t \Rightarrow \xi_t^N$ обосновывается следующей леммой, доказанной в Приложении.

Лемма. *Если возмущение v сингулярно, то* $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E\|\xi_t - \xi_t^N\|^2 = 0$. ♦

В силу устойчивости полинома g из приведенной леммы вытекают соотношения $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E \times \|y_t - y_t^N\|^2 = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \sup \limsup\limits_{t\to\infty} E\|u_t - u_t^N\|^2 < \infty$ для решения (y_t^N, u_t^N) замкнутой системы (2), (6), и с учетом равенства (5) получим $\lim\limits_{N\to\infty} J_N = 0$, где $J_N = \limsup\limits_{t\to\infty} E\|y_t^N\|^2$.

Для заданного уровня стоимости управления $d > 0$ регулятор (5) достаточно большой глубины памяти $T = T(N)$ (при $N > N_d \gg 1$) гарантирует выполнение целевого неравенства $J_N < d$ при ограниченных расходах на управление $\sup\limits_N \limsup\limits_{t\to\infty} E\|u_t^N\|^2 < \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод приближенной динамической компенсации для линейных дискретных объектов с предсказуемыми (сингулярными) возмущениями. Возможность синтеза высокоточной системы обусловлена эквивалентностью канала измерения сингулярных возмущений их прогнозу относительно прошлых наблюдений «вход — выход» на соответствующих тактах. Предписанная стоимость управления (в смысле среднеквадратической нормы установившейся реакции) гарантируется в классе допустимых регуляторов, глубина памяти которых растет с ужесточением требований к точности стабилизации.

Результаты работы допускают обобщение на задачи с более сложными целями, например, стабилизации части регулируемых переменных при ограничениях на расходы по некоторым каналам управления. Алгоритмом синтеза можно воспользоваться, например, для компенсации гармонического возмущения, частота которого локализована в априорно заданном диапазоне.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Пусть F_{Nt} = σ-алгебра, порожденная системой с. в. (y_{t-N-n}^t, u_{t-N-n}^{t-1}), и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k v_{t+k}$ — представление процесса ξ сходящимся п. н. (почти наверное) и в среднем квадратическом рядом, где $\{\gamma_k\}_{k\in Z}$ — $n \times n$ матричные коэффициенты ряда Фурье для д. р. ф. $b^{-1}(z)$. Утверждение леммы можно представить в виде $\lim\limits_{N\to\infty} \limsup\limits_{t\to\infty} E\|\xi_t - E(\xi_t|F_{Nt})\|^2 = 0$. С учетом экспоненциальной сходимости $\|\gamma_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ при $k \to \infty$ достаточно доказать следующее предельное равенство:

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \tau_{Ntk} = 0, \quad \tau_{Ntk} = E\|v_{t+k} - E(v_{t+k}|F_{Nt})\|^2. \tag{П1}$$

Последовательность $\{\tau_{Ntk}\}_{N \in Z^+}$, $Z^+ = \{1, 2, ...\}$ монотонно не возрастает при $N \uparrow \infty$, поэтому $\limsup_{N \to \infty} \limsup_{t \to \infty} \tau_{Ntk} \leqslant \limsup_{t \to \infty} \tau_{Mtk}$ для любых $M \in Z^+$, и при нарушении равенства (П1) имеем: $\limsup_{t \to \infty} \tau_{Mtk} \geqslant c_k$ с некоторой константой $c_k > 0$. В силу уравнения объекта (2) при $t > M + n$ справедливы включения $G_{Mt} = \sigma\{v^t_{t-M}\} \subset F_{Mt}$, поэтому $\limsup_{t \to \infty} E\|v_{t+k} - E(v_{t+k}|G_{Mt})\|^2 \geqslant \limsup_{t \to \infty} \tau_{Mtk} \geqslant c_k$. Процесс v стационарен, поэтому величины под знаком предела в левой части последнего неравенства не зависят от t, и $E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 \geqslant c_k$, где $\mu_{tkM} = E(v_{t+k}|G_{Mt})$, $M \in Z^+$. После перехода к пределу при $M \uparrow \infty$ получим неравенство

$$\limsup_{M \to \infty} E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 > 0. \qquad (П2)$$

Процесс $\mu = \{\mu_{tkM}, G_{Mt}\}_{M \in Z^+}$ — мартингал Леви, удовлетворяющий неравенству

$$\sup_{M \in Z^+} E\|\mu_{tkM}\|^2 \leqslant E\|v_t\|^2, \qquad (П3)$$

поэтому $\mu_{tkM} \xrightarrow{M \to \infty} \mu_{tk\infty} = E(v_{t+k}|G_{\infty t})$ при $M \to \infty$ п. н., где $G_{\infty t} = \sigma(\bigcup_{M \in Z^+} G_{Mt})$. Но $v_{t+k} = E(v_{t+k}|G_{\infty t})$ п. н. в силу сингулярности процесса v, поэтому $\mu_{tkM} \xrightarrow{M \to \infty} v_{t+k}$ при $M \to \infty$ п. н. Субмартингал $\{\|\mu_{tkM}\|, G_{Mt}\}_{M \in Z^+}$ удовлетворяет неравенству (П3), поэтому [22] $\lim_{M \to \infty} \|\mu_{tlM}\|$ существует в L^2, откуда $\lim_{M \to \infty} E\|v_{t+k} - \mu_{tkM}\|^2 = 0$ вопреки неравенству (П2), т. е. предположение $c_k > 0$ приводит к противоречию, и равенство (П1), а вместе с ним и утверждение леммы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мееров М.В.* Синтез систем автоматического регулирования высокой точности. — М.: Наука, 1967. — 434 с.
2. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Синтез регуляторов, обеспечивающих инвариантность системы управления / В кн.: «70 лет теории инвариантности». — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 256 с.
3. *Неймарк Ю.И.* Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 10. — С. 48—56.
4. *Кулебакин В.С.* Операторное *K*(*D*)-изображение функций и его практическое применение // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. — 1958. — Вып. 433.
5. *Цыпкин Я.З.* Скользящая аппроксимация и принцип поглощения // Докл. РАН. — 1997. — Т. 357, № 6. — С. 750—752.
6. *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в стохастических задачах оптимального управления линейными стационарными объектами // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 6. — С. 170—182.
7. *Бунич А.Л.* Вырожденные задачи синтеза системы управления линейным дискретным объектом // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 11. — С. 35—45.
8. *Бунич А.Л.* Высокоточные системы управления с сингулярными возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 7. — С. 3—17.
9. *Rosenblatt M., Lii K.S.* Estimation and Deconvolution When the Transfer Function Has Zeros // J. Theor. Probab. — Vol. 1, N 1. — 1988. — P. 93—113.
10. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном мире и машине. — М.: Сов. радио, 1968. — 268 с.
11. *Пинскер М.С., Прелов В.В.* О безошибочной фильтрации некоторых стационарных процессов // Усп. матем. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 2 (314). — С. 109—118.
12. *Олевский А.М.* Представление функций экспонентами с положительными частотами // Усп. матем. наук. — 2004. — Т. 59, вып. 1 (355). — С. 169—178.
13. *Казаринов Ю.Ф.* Нелинейный оптимальный регулятор в стохастических системах с линейным объектом // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 1. — С. 56—64.
14. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 336 с.
15. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
16. *Zhou K., Doyl J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. — N.-Y.: Prentice Hall, 1996.
17. *Красовский А.А.* Исторический обзор и современное состояние фундаментальной прикладной науки управления на примере самоорганизующихся регуляторов // Междунар. конф. по проблемам управления / Ин-т пробл. управл. — М., 1999. — С. 4—23.
18. *Qine S.J., Badgwell T.A.* A survey of industrial model predictive control technology // Contr. Engineering Practice. — 2002. — N 11. — P. 733—764.
19. *Суетин П.К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984. — С. 49.
20. *Kailath T.* Linear Systems. — NJ: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1980.
21. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 556 с.
22. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005. — С. 124.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Бунич Александр Львович — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-87-59, ✉ bunfone@ipu.ru.