УДК 629.7.05

НОВЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИТЕРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О.М. Бударгин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко

Рассмотрена задача анализа управляемости и наблюдаемости большой энергетической системы. Предложены необходимые и достаточные условия полной управляемости и наблюдаемости в форме линейных матричных неравенств. Даны оценки мер управляемости и наблюдаемости и приведен пример анализа управляемости большой энергосистемы.

Ключевые слова: MIMO-система, пространство состояний, управляемость, наблюдаемость, ленточный критерий, линейные матричные неравенства, оценки мер управляемости и наблюдаемости, большая энергосистема.

ВВЕДЕНИЕ

В сложных технических системах, к которым относятся электроэнергетические системы (ЭЭС), понятия управляемости и наблюдаемости имеют различные определения и трактовки. С позиций современной теории управления наиболее близкими понятиями к рассматриваемым в ней понятиям управляемости и наблюдаемости динамических систем являются *режимная управляемость* и *наблюдаемость режима* ЭЭС.

В теории управления понятию управляемости придают либо структурно-качественный, либо количественный смысл. В первом случае интересуются принципиальной возможностью перехода управляемой системы из одного заданного множества состояний в другое заданное множество состояний, как правило, за конечное время. Во втором случае рассматривают те или иные характеристики (меры) переходных процессов при простейших управляющих воздействиях. Очевидно, что управляемость системы зависит от ее структуры, состава органов управления, значений параметров, располагаемой энергии управления и др.

Существует целая группа понятий управляемости, различающихся как условиями перехода системы, так и ограничениями, накладываемыми на управления. При всем многообразии видов и критериев управляемости для линейных динамических систем чаще всего применяются следующие критерии: ранговый критерий управляемости Калмана, модальный критерий (тест) Попова—Белевича—Хотиса, критерий центральных фиксированных мод и ленточный критерий управляемости.

Рассмотрим большую линейную динамическую MIMO-систему (Multi Input Multi Output System)

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния ЭЭС, $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных условий, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор входа, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор выхода, $n \gg 1$. Считается, что r, $m \geq n/2$, т. е. число входов (выходов) системы равно или превосходит половину размерности состояния.

Введем множество собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\lambda(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C}: \det(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = 0,\ i = \overline{1, n}\},$$

определяющее устойчивость системы (1).

Для полностью управляемой MIMO-системы (1) с парой ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) следующие утверждения являются эквивалентными [1—3]:

- матрица-грамиан

$$\boldsymbol{W}_c(t) = \int_0^t e^{A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{A^T\tau}\, d\tau \tag{2}$$

положительно определена при $t > 0$;

- матрица управляемости Калмана

$$(B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B) \tag{3}$$

имеет полный ранг по строкам;
- матрица

$$(\lambda_i I_n - A \,\vdots\, B) \tag{4}$$

имеет полный ранг для всех $\lambda_i \in \Lambda(A)$ (*критерий управляемости Попова—Белевича—Хотиса*);
- пусть $B_L^{\perp}$ — матрица, при которой выполняется равенство $B_L^{\perp}B = 0$ и матрица $(B_L^{\perp T} \,\vdots\, B)$ невырождена, тогда ленточная матрица [4, 5]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1\times n} \\ \hdashline I_n \end{pmatrix} \otimes B_L^{\perp} + \begin{pmatrix} I_n \\ \hdashline \mathbf{0}_{1\times n} \end{pmatrix} \otimes (B_L^{\perp}A) =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} B_L^{\perp}A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline B_L^{\perp} & B_L^{\perp}A & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & B_L^{\perp} & B_L^{\perp}A & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & B_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & B_L^{\perp}A \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & B_L^{\perp} \end{array}\right) \tag{5}$$

имеет полный ранг по строкам (здесь $\otimes$ — символ операции кронекерова произведения);
- собственные значения матрицы $A + BF$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матрицы обратной связи F.

В силу принципа дуальности аналогичные утверждения справедливы для полностью наблюдаемой MIMO-системы (1) с парой (A, C), например:
- матрица наблюдаемости Калмана

$$\begin{pmatrix} C \\ \hdashline CA \\ \hdashline CA^2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг по столбцам;
- матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_i I_n - A \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг для всех $\lambda_i \in \Lambda(A)$ (*критерий наблюдаемости Попова—Белевича—Хотиса*);
- пусть $C_R^{\perp}$ — матрица, при которой выполняется равенство $CC_R^{\perp} = 0$ и матрица $(C_R^{\perp} \,\vdots\, C^T)$ невырождена, тогда ленточная матрица

$$(\mathbf{0}_{n\times 1} \,\vdots\, I_n) \otimes C_R^{\perp} + (I_n \,\vdots\, \mathbf{0}_{n\times 1}) \otimes (AC_R^{\perp}) =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c:c:c:c:c} AC_R^{\perp} & C_R^{\perp} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & AC_R^{\perp} & C_R^{\perp} & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & AC_R^{\perp} & C_R^{\perp} & \dots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & AC_R^{\perp} & C_R^{\perp} \end{array}\right)^T \tag{6}$$

имеет полный ранг по строкам;
- собственные значения матрицы $A + LC$ могут быть заданы произвольным образом и непрерывно зависят от матрицы инъекции входа L.

При использовании упомянутых критериев для больших MIMO-систем ($n \gg 1$) возникают различные проблемы, связанные с устойчивостью вычислительных алгоритмов и неизбежными ошибками [5, 6]. В настоящей работе на основании ленточных критериев предлагаются простые необходимые и достаточные условия (критерии) полной управляемости и наблюдаемости в виде линейных матричных неравенств и в предположении, что число входов и/или выходов MIMO-системы равно или превосходят половину размерности состояния: r, $m \ge n/2$. Такая ситуация характерна для математических моделей нормальных режимов больших электроэнергетических систем в задачах оценивания состояния и анализа статической устойчивости [7], когда число управляемых станций (регулируемых синхронных машин) равно общему числу станций в энергосистеме, а элементами вектора состояния служат фазы векторов напряжения и скольжения генераторов.

На основе полученных условий даются оценки мер управляемости и наблюдаемости. Основные объекты исследований — ленточные матрицы (5) и (6).

1. КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим ленточную матрицу управляемости (5) при условии, что $r \ge n/2$, а матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ имеет полный ранг. Как показано в работе [8], анализ следующих выделенных блоков ленточной матрицы:

$$\begin{pmatrix} B_L^{\perp}A \\ \hdashline B_L^{\perp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n-r)\times n}, \tag{7}$$

где в силу обратимости матрицы $(B_L^{\perp T} \,\vdots\, B)$ $\operatorname{rank} B_L^{\perp} = n - r$ дает возможность обнаружить неуправляемость MIMO-системы (1).

При $r \geq n/2$ число строк блочной матрицы (7) не превосходит числа столбцов. В этом случае для полной управляемости MIMO-системы оказывается необходимым и достаточным, чтобы выполнялось равенство [8]

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{pmatrix} = 2(n - r). \qquad (8)$$

Из равенства (8) следует, что для ответа на вопрос о полной управляемости MIMO-системы необходимо и достаточно исследовать ранг матрицы (7). Эта процедура для больших систем существенно плохо обусловленная [6], поэтому может получен неверный ответ [5].

Без ограничения общности будем считать, что матрица $\boldsymbol{B}_L^{\perp}$ ортогональная, т. е. $\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} = \boldsymbol{I}_{n-r}$.

С алгебраической точки зрения ортогональность матрицы $\boldsymbol{B}_L^{\perp}$ не играет никакой роли, поскольку вместо матрицы $\boldsymbol{B}_L^{\perp T}$ можно использовать псевдообратную матрицу $\boldsymbol{B}_L^{\perp +}$. Однако с вычислительной точки зрения именно ортогональные матрицы вносят минимальные погрешности в дальнейшие вычисления.

Выполним следующее (правое) преобразование матрицы (7):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{pmatrix}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \mid \boldsymbol{B}_L^{\perp T}) =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right). \qquad (9)$$

Как видно, матрица (9) симметрическая, и в силу равенства (8) для полностью управляемой MIMO-системы должна быть строго положительно определенной, т. е.

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right) > 0. \qquad (10)$$

Анализ матрицы (10) показывает, что для выполнения условия строгой положительной определенности необходимо и достаточно выполнения условий леммы Шура [9], которые в данном случае принимают вид

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{B}_L^{\perp T} > 0$$

или

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} > 0. \qquad (11)$$

Таким образом, нами сформулирован

Критерий полной управляемости. *Линейная MIMO-система*

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *— вектор состояния,* $u(t) \in \mathbb{R}^r$ *— вектор входа,* $r \geq n/2$*, полностью управляема тогда и только тогда, когда выполняются эквивалентные условия* (10)*,* (11). ♦

Анализ ранга матрицы (7) размера $2(n - r) \times n$ в сформулированном критерии заменяется анализом на положительную определенность матрицы

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right) \in \mathrm{R}^{2(n-r)\times 2(n-r)}. \qquad (12)$$

Или матрицы

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}. \qquad (13)$$

При этом матрица (13) имеет размер $(n - r)\times(n - r)$, т. е. вдвое меньший, чем матрица (12).

При потере MIMO-системой (1) свойства полной управляемости матрицы (12) и (13) также теряют свойство строгой положительной определенности, т. е. для не полностью управляемой MIMO-системы будут иметь место эквивалентные условия

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right) \geq 0, \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \geq 0. \qquad (15)$$

Другими словами, для не полностью управляемой MIMO-системы матрицы (12) и (13) становятся положительно *полуопределенными.*

Таким образом, предложенный критерий полной управляемости при числе входов (выходов) системы равном или превосходящем половину размерности состояния n позволяет свести задачу анализа управляемости к задаче на собственные значения симметрической матрицы размера $(n - r)\times(n - r)$. Эта задача имеет существенно меньшую сложность по сравнению с ранее приведенными критериями.

Сделаем необходимые пояснения, рассматривая в качестве примера линейную модель реальной большой MIMO-системы — объединенной энергосистемы Центра (ОЭС Центра) в нормальном (доаварийном) режиме. Эта модель включает в себя 129 генераторов (станций) и имеет размерности $n = 258$, $r = 129$[1] [7]. В этом случае:

[1] В состав энергосистемы входят $n/2$ регулируемых станций.

- размер матрицы управляемости Калмана (3) 258×16770;
- размер прямоугольного матричного пучка (4) 258×387;
- ленточная матрица (5) содержит 129 подматриц (7) размера 258×258.

Отметим также, что матрица $\boldsymbol{A}$ рассматриваемой модели энергосистемы является гурвицевой, имеет как сильно разреженные так и сильно плотные подматрицы и, кроме того, плохо масштабирована [6]. Определитель этой матрицы превосходит число 10^{258}.

Построение матрицы Калмана (3) размера 258×16770 требует возведения матрицы $\boldsymbol{A}$, определитель которой, напомним, больше 10^{258}, в степень от 2 до 129. Очевидно, что данный критерий в рассматриваемом случае неработоспособен.

Анализ конечных собственных значений прямоугольного матричного пучка (4) размера 258×387 затруднен из-за плохой разработанности вычислительных процедур обобщенной задачи на собственные значения [6].

В силу достаточно больших размеров матрицы (5) ленточный критерий управляемости в прямом виде также не может быть применен.

В предложенном в настоящей работе критерии используется квадратная симметрическая матрица (11), размер которой 129×129, т. е. *вдвое меньшие*, чем даже у матрицы (7). При этом ее определенность может проверяться путем решения стандартной (и наиболее легкой) задачи на собственные значения симметрической матрицы.

Обратимся далее к ленточной матрице наблюдаемости (6) при $m \geq n/2$. Считается, что матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет полный ранг. Выполняя дуальные преобразования к преобразованиям, примененным в данном параграфе, получим

Критерий полной наблюдаемости. *Линейная MIMO-система*

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t), \quad y(t) = \boldsymbol{C}x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор выхода, $m \geq n/2$, полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняются эквивалентные условия

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp} & \boldsymbol{C}_L^{\perp T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}_R^{\perp} \\ \hdashline \boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right) > 0, \qquad (16)$$

$$\boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{C}_R^{\perp}\,\boldsymbol{C}_R^{\perp T})\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp} > 0. \qquad (17)$$

2. ОЦЕНКА МЕР УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

При количественной оценке управляемости (наблюдаемости) MIMO-систем, т. е. при выборе меры управляемости, формулируется следующий вопрос: когда состояние $x^a(t_0) = x_0^a$ лучше управляемо (наблюдаемо), чем некоторое другое состояние $x^b(t_0) = x_0^b$?

Традиционно считается, что анализ управляемости с помощью алгебраических критериев носит чисто качественный характер. При этом имеется в виду исследование ранга различных матричных конструкций (например, матрицы Калмана (3) или пучка матриц (4)). Так, Р. Калман предлагал получать количественную информацию об управляемости системы, вычисляя определители всевозможных квадратных матриц, «вырезанных» из матрицы управляемости (3) [10]. В другом подходе количественные характеристики (меры) управляемости рассматриваются в отношении матрицы-грамиана (2) [5]. Этот подход состоит в вычислении минимального сингулярного числа $\sigma_{\min}$ матрицы (2), которое устанавливает наименьшее «расстояние до границы», где система теряет свойство полной управляемости [11]. Известны и другие подходы, например, на основе понятия псевдоспектра матрицы [12].

В данном параграфе даются оценки мер управляемости и наблюдаемости большой MIMO-системы на основе полученных условий в виде неравенств (10), (11) и (16), (17).

Напомним, что минимальное сингулярное число строго положительно определенной матрицы $\boldsymbol{M}$ равно ее минимальному собственному значению [6]:

$$\sigma_{\min}(\boldsymbol{M}) = \lambda_{\min}(\boldsymbol{M}) > 0, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T > 0.$$

Кроме того [6],

$$\sigma_{\min}(\boldsymbol{M}) = \lambda_{\min}(\boldsymbol{M}) = 0, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^T \geq 0. \qquad (18)$$

Другими словами, у положительно полуопределенной матрицы минимальное сингулярное число равно нулю.

Вернемся к условиям (14) и (15). Их выполнение свидетельствует о неполной управляемости MIMO-системы и согласно выражению (18) означает, что минимальные сингулярные числа матриц (14) и (15) равны нулю:

$$\sigma_{\min}\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_L^{\perp T} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T} & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{array}\right) =$$

$$= \sigma_{\min}(\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_{n-r} - \boldsymbol{B}_L^{\perp T}\,\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T}) = 0.$$

Таким образом, определяя минимальное сингулярное число матрицы (14) или (15), можно оценить расстояние до границы потери MIMO-системой полной управляемости.

Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении минимальных сингулярных чисел матриц

$$\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp} & \boldsymbol{C}_L^{\perp T}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}_R^{\perp} \\ \hdashline \boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp} & \boldsymbol{I}_{n-m} \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{C}_R^{\perp T}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{C}_R^{\perp}\boldsymbol{C}_R^{\perp T})\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^{\perp},$$

фигурирующих соответственно в неравенствах (16) и (17). Вычисляя минимальное сингулярное число матрицы (16) или (17), можно найти оценку расстояния до границы потери MIMO-системой полной наблюдаемости.

Как и в случае матрицы управляемости Калмана (3), количество нулевых сингулярных чисел рассматриваемых матриц определяет число неуправляемых состояний MIMO-системы.

Обратимся к упоминавшейся MIMO-системе, представляющей собой модель большой энергосистемы. Здесь число обусловленности матрицы $\boldsymbol{A}$ относительно невелико:

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = 3{,}798 \cdot 10^3.$$

В силу гурвицевости матрицы $\boldsymbol{A}$ матрицу-грамиан (2) можно вычислить путем решения алгебраического уравнения Ляпунова

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{W}_c + \boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_c + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = 0.$$

Воспользовавшись для решения данного уравнения средой MATLAB, получим:

$$\sigma_{\min}(\boldsymbol{W}_c) = 9{,}103 \cdot 10^{-5}, \qquad (19)$$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{W}_c) = 1{,}7193 \cdot 10^6.$$

При такой плохой обусловленности «доверять» вычисленной мере (19) практически нельзя. Одновременно с этим имеем

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T}) = 142{,}3779,$$

т. е. введенная выше матрица существенно лучше обусловлена. Конечно, в силу различной природы этих критериев смысл определяемых ими численных характеристик также различен, но «субъективно» доверие такой мере управляемости, как

$$\sigma_{\min}(\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}_L^{\perp T}\boldsymbol{B}_L^{\perp})\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}_L^{\perp T}) = 1{,}5377 \cdot 10^4,$$

выше.

Отметим, что управляемость энергосистемы в рассматриваемом режиме, как показала практика, действительно высока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема анализа управляемости и наблюдаемости больших MIMO-систем с числом входов и выходов не меньших, чем половина размерности пространства состояний $n/2$. Предложены новые необходимые и достаточные условия (критерии) полной управляемости и наблюдаемости, заключающиеся в требовании строгой положительной определенности симметрических матриц размера не больше, чем $n/2 \times n/2$. На основе этих критериев обоснованы оценки расстояний до границы потери MIMO-системой полной управляемости и наблюдаемости. Иллюстрирующие примеры содержат анализ линейной модели реальной энергосистемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhou K.* Essentials of robust control. Upper Saddle River. — New Jersey: Prentice Hall, 1998.
2. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 304 с.
3. *Мисриханов М.Ш.* Классические и новые методы анализа многомерных динамических систем. — М.: Энергоатомиздат, 2004. — 566 с.
4. *Мисриханов М.Ш.* Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 12. — С. 93—104.
5. *Мисриханов М.Ш.* Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. — М.: Наука, 2007. — 284 с.
6. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. — М.: Мир, 2001. — 430 с.
7. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Матричная сигнум-функция в задачах анализа и синтеза линейных систем // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 2. — С. 26—51.
8. *Зыбин Е.Ю, Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Рекурсивные тесты на управляемость и наблюдаемость больших динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 5. — С. 119—132.
9. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.* An unified algebraic approach to linear control design. — London: Taylor & Francis Ltd., 1998. — 285 p.
10. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
11. *Голован А.А., Парусников Н.А.* О связи понятия стохастической оцениваемости с сингулярными разложениями матриц // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 2. — С. 45—50.
12. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетических системах // Там же. — 2006. — № 5. — С. 24—47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Бударгин Олег Михайлович — канд. экон. наук, председатель правления, 8-800-200-18-81, ✉ info@fsk-ees.ru,

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, зам. председателя правления, ☎ (495) 962-85-85, ✉ Misrikhanov-MS@fsk-ees.ru,

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, начальник сектора, ☎ (495) 962-81-82, ✉ rvn@mes-centra.ru,

ОАО «Федеральная Сетевая Компания ЕЭС», г. Москва.