УДК 519.854.2:004.023

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ МАРШРУТОМ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА[1]

Е.М. Бронштейн, А.А. Давлетбаев

Рассмотрена задача построения циклического маршрута, по которому можно доставить однородный груз от некоторого множества производителей потребителям с минимальными затратами, используя транспортное средство ограниченной вместимости. Предполагается, что стоимость транспортировки груза между пунктами зависит от времени. Построена соответствующая линейная целочисленная модель. Проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: маршрутизация, нестационарность, линейное целочисленное программирование, метод ветвей и границ.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая задача. Транспортное средство (ТС) должно доставить однородный груз от некоторых производителей потребителям. Процесс погрузки и разгрузки весьма трудоемкий, поэтому в каждом пункте производства (потребления) ТС загружается (разгружается) один раз. В течение одного дня ТС может посетить несколько пунктов, их число находится в заданных пределах. Перевозку необходимо осуществить за заданное число дней. Состояние дорог изменяется, т. е. стоимость проезда между пунктами зависит от времени. В начальный момент ТС находится на базе, на которую должно вернуться по окончании перевозок. Требуется сформировать график перевозок с минимальной суммарной стоимостью.

Впервые оптимизационная задача транспортной логистики VRP (Vehicle Routing Problem) была сформулирована в работе [1]. За прошедшие полвека сформулировано множество подобных задач, в постановке которых отражаются различные ограничения, диктуемые практикой. Классификация таких задач приведена, например, в статье [2]. На сайте [3] аккумулируется информация об этой области исследований. Применяется множество методов решения, как точных, так и эвристических.

Задача, сформулированная в настоящей работе, является синтезом нескольких оптимизационных задач транспортной логистики:

— CVRP (Capacitated VRP), в этих задачах учитываются ограничения на вместимость ТС (см., например, работу [4]);

— MDVRP (Multiple Depot VRP), в отличие от классической задачи предполагается наличие нескольких баз, откуда товар нужно доставить (см., например, работу [5]);

— multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes, в этих задачах предполагается, что ТС может догружаться по пути [6];

— TDVRP (Time Dependent Vehicle Routing Problem) — нестационарные задачи: предполагается, что характеристики транспортировки зависят от времени. Впервые такие задачи поставлены в работе [7], обычно предполагается, что эти параметры сохраняются в течение некоторого времени. Надо построить маршрут, обеспечивающий доставку грузов за минимальное время [8, 9].

Нестационарность в данной работе понимается аналогично нестационарной задаче коммивояжера [10, 11].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Обозначения:

N — число пунктов, занумерованных числами $0, 1, \ldots, N-1$ (база имеет номер 0);

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00005).

a_i — масса груза в пункте производства (в этом случае $a_i > 0$) или потребность в грузе в пункте потребления, равная $|a_i|$ (в этом случае $a_i < 0$); предполагается, что $a_0 \geq 0$, $a_i \neq 0$ при $i = 1, ..., N - 1$; считаем, что выполняется условие баланса (спрос равен предложению)

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i = 0; \tag{1}$$

S — вместимость ТС;

c_{ij}^k, $i, j = 0, ..., N - 1$; $k = 1, ..., N$, — стоимость проезда из i-го пункта в j-й в k-й день;

$K_{\min}$ и $K_{\max}$ — минимальное и максимальное число пунктов, которые можно обслужить за день;

P — число дней, за которое надо произвести доставку.

В качестве неизвестных аналогично работе [12] примем булевы переменные X_{ij}^k, $i, j = 0, ..., N - 1$; $k = 1, ..., N$, равные единице тогда и только тогда, когда при k-м по порядку переезде ТС переезжает из i-го пункта в j-й.

Ограничения:

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad i = 1, ..., N - 1, \tag{2}$$

(из каждого пункта ТС после погрузки или разгрузки выезжает один раз);

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad j = 1, ..., N - 1, \tag{3}$$

(в каждый пункт ТС для погрузки или разгрузки прибывает один раз);

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} X_{ij}^k = 1, \quad k = 1, ..., N, \tag{4}$$

(k-й переезд всего один);

$$\sum_{i=0}^{N-1} X_{i0}^N = 1 \tag{5}$$

(на N-м переезде ТС должно вернуться на базу из какого-нибудь другого пункта);

$$\sum_{j=0}^{N-1} X_{0j}^N = 1 \tag{6}$$

(в первый день ТС выезжает с базы в какой-нибудь другой пункт);

$$\sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k = \sum_{p=0}^{N-1} X_{jp}^{k+1}, \quad j = 0, ..., N - 1, \quad k = 1, ..., N - 1, \tag{7}$$

(из j-го пункта ТС совершит $(k + 1)$-й по порядку переезд тогда и только тогда, когда в k-й переезд в этот пункт ТС прибудет).

Предложение 1. *Любое решение системы* (2)—(7) *порождает цикл, содержащий все вершины по одному разу (гамильтонов цикл), в котором k есть номер дуги в порядке прохождения.*

Доказательство. Из условия (5) следует, что существует единственный пункт $i_1 \neq 0$, для которого $X_{0i_1}^1 = 1$. Пусть по индукции построена цепь $(0, i_1, ..., i_k)$ такая, что $X_{i_{s-1}i_s}^s = 1$, $s = 1, ..., k < N$, $i_0 = 0$. Из условия (2) и равенства $X_{i_{k-1}i_k}^k = 1$ следует, что $\sum_{i=0}^{N-1} X_{ii_k}^k = 1$. Из равенства (6) $\sum_{p=0}^{N-1} X_{i_kp}^{k+1} = 1$, т. е. существует единственный пункт i_{k+1}, для которого $X_{i_ki_{k+1}}^{k+1} = 1$. Проверим, что $i_{k+1} \notin \{i_1, ..., i_k\}$. Если бы выполнялось обратное, то существовал бы пункт i_s, $s < k + 1$, для которого $X_{i_si_{k+1}}^s = 1$. Но это противоречит условию (2). Таким образом строится цепь $(0, i_1, ..., i_{N-1})$, которая содержит все пункты. В силу условий (4) и (2) $X_{i_{N-1}0}^N = 1$. Тем самым, построен цикл с нужными свойствами. ♦

Следующее ограничение отражает недопустимость переполнения ТС и неотрицательность загрузки ТС на каждом шаге:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^k a_i \leq S, \quad p = 1, ..., N - 1. \tag{8}$$

В общем случае система (2)—(8) несовместна. Можно найти величину $S_{\min}$ — минимальную допустимую вместимость ТС — как решение линейной частично целочисленной задачи (2)—(7) с целевой функцией $S \to \min$ (для этого можно воспользоваться и более простой задачей, см. работу [13]). Справедливо

Предложение 2 [13]. *Если* $S \geq 2\max\{|a_i|\}$, *то система* (2)—(8) *совместна, т. е.* $S_{\min} \leq 2\max\{|a_i|\}$.

Доказательство. Докажем, что всегда, пока не весь груз доставлен потребителям, найдется пункт производства, из которого ТС может вывезти груз, или пункт потребления, в который ТС может груз завезти. В первый день, поскольку $a_0 \leq S$, груз из базы вывезти можно. Пусть в некоторый день загрузка ТС равна b. Возможны три ситуации.

а) $b \le S/2$, и груз вывезен из всех пунктов производства; в силу условия (1) потребность в каждом из оставшихся пунктов потребления не превосходит b, т. е. маршрут можно продолжить;

б) $b \le S/2$, и груз не вывезен из всех пунктов производства. В этом случае $S - b \ge S/2 \ge \max\{|a_i|\}$, т. е. груз можно вывезти из любого оставшегося с грузом пункта производства;

в) $b \ge S/2$: аналогично случаю б), груз можно завезти в любой пункт потребления. Предложение доказано. ♦

Далее определим отображение $\varphi:\{1, ..., N\} \to \{1, ..., P\}$, которое каждому переезду сопоставляет порядковый номер дня, в который этот переезд осуществляется. Эта функция неубывающая, причем $K_{\min} \le |\varphi^{-1}(s)| \le K_{\max}$, $s = 1, ..., P$. Целевой функцией служит общая стоимость перевозок:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^{k}\, c_{ij}^{\varphi(k)} \to \min. \tag{8}$$

Легко проверить, что для допустимости задачи (1)—(9) необходимо и достаточно совместное выполнение условий $S \ge S_{\min}$, $PK_{\min} \le N \le PK_{\max}$.

Частным случаем поставленной задачи (при $a_0 = N - 1$, $a_1 = ... = a_{N-1} = -1$, c_{ij}^{k} не зависит от k, $P = N$, $K_{\min} = K_{\max} = 1$) является классическая задача коммивояжера, которая относится к классу NP-трудных. Задача (2)—(8), таким образом, относится к тому же классу.

В § 2 описано приведение задачи к линейной булевой форме. При этом размерность задачи возрастает.

2. ЛИНЕЙНАЯ БУЛЕВА МОДЕЛЬ

Введем булевы переменные y^{ks}, $k = 1, ..., N$; $s = 1, ..., P$, равные единице тогда и только тогда, когда в s-й день осуществляется k-й переезд. Ограничения на эти переменные имеют вид:

$$\sum_{s=1}^{P} y^{ks} = 1, \quad k = 1, ..., N, \tag{10}$$

(каждый отрезок пути проезжается в некоторый день);

$$K_{\min} \le \sum_{k=1}^{N} y^{ks} \le K_{\max}, \quad s = 1, ..., P, \tag{11}$$

(ограничения на число отрезков пути, проезжаемых за один день);

$$y^{ks} + y^{(k+1)t} - 1 \le [s \le t], \quad s, t = 1, ..., P; \quad k = 1, ..., N - 1, \tag{12}$$

(если k-й отрезок пути проезжается в s-й день, а $(k + 1)$-й — в t-й, то $s \le t$. Здесь $[L]$ — булево числовое значение логической функции L).

Целевая функция примет вид:

$$\sum_{s=1}^{P}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} x_{ij}^{k} y^{ks} c_{ij}^{s} \to \min. \tag{13}$$

Для исключения квадратичной нелинейности в целевой функции введем еще одно семейство булевых переменных $z_{ij}^{ks} = x_{ij}^{k} y^{ks}$, $i, j = 0, ..., N - 1$; $k = 1, ..., N$; $s = 1, ..., P$.

Они задаются линейными ограничениями:

$$z_{ij}^{ks} \ge x_{ij}^{k} + y^{ks} - 1, \quad z_{ij}^{ks} \le x_{ij}^{k}, \; z_{ij}^{ks} \le y^{ks},$$
$$i, j = 0, ..., N - 1; \; k = 1, ..., N; \; s = 1, ..., P). \tag{14}$$

Целевая функция (13) принимает вид:

$$\sum_{s=1}^{P}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} z_{ij}^{ks}\, c_{ij}^{s} \to \min. \tag{15}$$

Окончательно получаем следующую задачу. Найти булевы переменные z_{ij}^{ks}, x_{ij}^{k}, y^{ks}, $i, j = 0, ..., N - 1$; $s = 1, ..., P$; $k = 1, ..., N - 1$, удовлетворяющие условиям (2)—(7), (9)—(12), (14), при которых достигается минимум целевой функции (15).

Число переменных и ограничений имеет порядок $O(N^3P)$. Полиномиальность числа ограничений существенна для использования стандартных решателей.

В частном случае допустимости посещения ежедневно только одного пункта для погрузки или разгрузки (т. е. при $P = N$, $K_{\min} = K_{\max} = 1$) постановка задачи упрощается. Отпадает необходимость введения переменных y^{ks}.

Задача принимает следующий вид. Найти булевы переменные X_{ij}^{k}, $i, j = 0, ..., N - 1$; $k = 1, ..., N$, удовлетворяющие условиям (2)—(7), при которых минимальна функция

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1} X_{ij}^{k}\, c_{ij}^{k} \to \min.$$

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычисления проводились в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.2, установленном на компьютере с процессором Intel Core (тактовая частота 3,1 ГГц, ОЗУ 4 Гб).

Задача решалась двумя методами, реализованными в пакете:

— динамического поиска;

— ветвей и отсечений.

Первый метод — это «ноу-хау» фирмы IBM, никакие подробности не разглашаются. Применяемый в пакете метод ветвей и отсечений основан на непрерывных релаксациях.

При организации процесса вычислений задача модифицировалась для исключения из рассмотрения заведомо нулевых переменных X_{ii}^k, $i = 0, ..., N - 1$; $k = 1, ..., N$. Для этого вводились булевы переменные трех видов: $(X')_i = X_{0i}^1$, $i = 1, ..., N - 1$,

$$(X'')_{ij}^k = \begin{cases} X_{i(j+1)}^k & \text{при } i \le j, \\ X_{ij}^k & \text{при } i > j, \end{cases} \quad i = 1, ..., N - 1;$$

$$j = 1, ..., N - 2; \quad k = 2, ..., N - 1,$$

$$(X''')_i = X_{i0}^N, \quad i = 1, ..., N - 1.$$

Например, для перестановки (2, 4, 3, 1, 0) при $N = 4$ равны единице следующие из введенных переменных: $(X')_2$, $(X'')_{23}^1$, $(X'')_{43}^2$, $(X'')_{31}^3$, $(X''')_1$.

Соответственно вводились булевы переменные $(Z')_i$, $(Z'')_{ij}^k$, $(Z''')_i$ и модифицировались ограничения.

Исследовалась зависимость среднего времени решения задачи, числа итераций и числа ветвлений от параметров задачи. Исходные данные генерировались с помощью датчика псевдослучайных чисел.

Массы грузов $a_1 - a_{N-1}$ генерировались целыми из отрезка [−20; 20], значение a_0 определялось из условия (1), нули исключались. Если оказывалось, что $a_0 < 0$, то все значения умножались на (−1).

Величины c_{ij}^k при $i \ne j$ генерировались целыми из отрезка [1; 20].

В соответствии с предложением 2, вместимость S принималась равной $2\max\{|a_i|\}$.

Для каждого числа пунктов генерировались 10 примеров.

1. Исследовалась зависимость характеристик решения от $K_{\max}$ при $K_{\min} = 0$, допустимое число дней P принималось равным N. Для каждого набора па-

Таблица 1

Характеристики решения в зависимости от изменения $K_{\max}$ при различных N

$K_{\max}$	N				
	5	6	7	8	9
1	1,5/0/0,38	16/0/0,52	48/0/1	105/1/1,73	215/4,6/3,2
	1,5/0/0,38	16/0/0,56	48/0/1	102/0/1,66	190/3,4/3,5
2	132/7/0,60	$3,3 \cdot 10^3$/220/1,4	$1,5 \cdot 10^4$/650/5,4	$8,7 \cdot 10^4$/$2,7 \cdot 10^3$/16	$5,2 \cdot 10^5$/$1,0 \cdot 10^4$/133
	84/9/0,66	$2,5 \cdot 10^3$/193/1,7	$1,2 \cdot 10^4$/608/3,8	$8,1 \cdot 10^4$/$3,0 \cdot 10^3$/13	$7,2 \cdot 10^5$/$2,1 \cdot 10^4$/103
3	158/10/0,53	$3,8 \cdot 10^3$/259/1,6	$1,7 \cdot 10^4$/706/4,6	$1,3 \cdot 10^5$/$4,6 \cdot 10^4$/22	$7,1 \cdot 10^5$/$1,4 \cdot 10^4$/221
	142/6/0,70	$3,8 \cdot 10^3$/287/1,8	$1,3 \cdot 10^4$/764/4,0	$9,8 \cdot 10^4$/$3,5 \cdot 10^4$/14	$8,0 \cdot 10^5$/$2,1 \cdot 10^4$/121
4	140/7/0,64	$4,4 \cdot 10^3$/298/1,4	$2,0 \cdot 10^4$/821/6,2	$1,4 \cdot 10^5$/$4,5 \cdot 10^3$/21	$7,8 \cdot 10^5$/$1,5 \cdot 10^4$/286
	120/4/0,66	$3,4 \cdot 10^3$/256/1,8	$1,2 \cdot 10^3$/648/3,7	$1,0 \cdot 10^5$/$3,8 \cdot 10^3$/16	$9,3 \cdot 10^5$/$2,5 \cdot 10^4$/153
5	145/6/0,58	$4,2 \cdot 10^3$/275/1,5	$2,1 \cdot 10^4$/877/7,2	$1,2 \cdot 10^5$/$4,0 \cdot 10^3$/25	$8,1 \cdot 10^5$/$1,5 \cdot 10^4$/311
	11/2/0,67	$3,3 \cdot 10^3$/248/1,9	$1,3 \cdot 10^3$/737/4,0	$9,8 \cdot 10^4$/3, $\cdot 10^3$/15	$8,8 \cdot 10^5$/$2,2 \cdot 10^4$/147
6	—	$5,0 \cdot 10^3$/317/1,5	$2,3 \cdot 10^4$/879/7,2	$1,2 \cdot 10^5$/$3,8 \cdot 10^3$/25	$8,2 \cdot 10^5$/$2,3 \cdot 10^4$/345
		$2,8 \cdot 10^3$/203/1,7	$1,4 \cdot 10^4$/743/4,3	$1,4 \cdot 10^5$/$4,7 \cdot 10^3$/20	$8,3 \cdot 10^5$/$2,2 \cdot 10^4$/136
7	—	—	$1,8 \cdot 10^4$/724/4,8	$1,2 \cdot 10^5$/$4,3 \cdot 10^3$/29	$9,0 \cdot 10^5$/$1,4 \cdot 10^4$/412
			$1,4 \cdot 10^4$/764/4,6	$1,4 \cdot 10^5$/$4,5 \cdot 10^4$/21	$9,3 \cdot 10^5$/$2,4 \cdot 10^4$/181
8	—	—	—	$1,2 \cdot 10^5$/$4,0 \cdot 10^3$/27	$8,8 \cdot 10^5$/$1,4 \cdot 10^4$/370
				$1,2 \cdot 10^5$/$4,2 \cdot 10^3$/19	$1,1 \cdot 10^6$/$2,7 \cdot 10^4$/210
9	—	—	—	—	$9,2 \cdot 10^5$/$1,6 \cdot 10^4$/410
					$1,1 \cdot 10^6$/$2,7 \cdot 10^4$/202

Таблица 2

Характеристики решения в зависимости от изменения K_{min} при различных N

N	K_{min}		
	0	1	2
5	41/0/0,43	18/0/0,47	6/0/0,41
	36/0/0,48	14/0/0,46	6/0/0,44
6	$1,2 \cdot 10^3$/83/0,91	279/15/0,80	21/0/0,52
	981/65/1,19	254/6/1,01	21/0/0,52
7	$3,3 \cdot 10^3$/122/2,18	$1,1 \cdot 10^3$/57/1,55	90/1/0,86
	$3,1 \cdot 10^3$/107/3,02	695/15/1,80	93/0/0,85
8	$2,9 \cdot 10^4$/682/6,61	$1,0 \cdot 10^4$/525/4,73	99/2/1,80
	$3,3 \cdot 10^4$/$1,3 \cdot 10^3$/7,10	$1,0 \cdot 10^4$/478/4,42	95/2/1,82
9	$1,2 \cdot 10^5$/$2,0 \cdot 10^3$/23,10	$6,9 \cdot 10^4$/$1,5 \cdot 10^3$/15,33	$4,2 \cdot 10^3$/278/3,07
	$1,9 \cdot 10^5$/$5,4 \cdot 10^3$/25,23	$1,0 \cdot 10^5$/$3,1 \cdot 10^3$/14,66	$1,0 \cdot 10^3$/19/3,44

раметров N, K_{max} генерировалось по 10 примеров. Результаты эксперимента отражены в табл. 1, в ячейках приведены последовательно среднее число итераций, среднее число ветвей в дереве решений и среднее время выполнения (в секундах). Значения в верхних строках ячеек относятся к методу динамического поиска, в нижних — ветвей и отсечений.

Из табл. 1 видно, что в среднем время решения задачи, число итераций и число ветвей в дереве решений быстро возрастают с увеличением N. Поведение трех перечисленных показателей при изменении K_{max} не имеет ярко выраженной тенденции. При $N = 5$, 6 существенной разницы в среднем времени выполнения задачи двумя методами не наблюдается; при больших N более эффективным оказался метод ветвей и отсечений.

2. Исследовалась зависимость параметров решения от K_{min}. При этом принималось $K_{max} = P = [N/2]$. Соответственно, $K_{min} \le 2$ (табл. 2). Здесь также в ячейках приведены последовательно среднее число итераций, среднее число ветвей в дереве решений и среднее время выполнения (в секундах), верхние строки относятся к методу динамического поиска, нижние — ветвей и отсечений.

Вывод: время выполнения, число итераций и число ветвлений с увеличением N возрастают, а с увеличением K_{min} уменьшаются; оба метода одинаково эффективные. Отметим, что влияние роста K_{min} на вычислительные характеристики задачи вполне естественное: с ростом K_{min} сужается диапазон возможных значений числа пунктов, посещаемых в течение дня, это приводит к сокращению переборных процедур.

3. Отдельно исследовался случай $K_{min} = K_{max} = 1$ при $P = N$. Содержательно это означает, что ежедневно ТС должно посетить в точности один пункт. Из табл. 3 видно, что для числа пунктов от 5 до 15 существенной разницы во времени выполнения задачи двумя методами не наблюдается; для остальных N более эффективным оказался метод ветвей и отсечений.

Отмечается сильная зависимость эффективности решения от параметров конкретной задачи. Разница между максимальными и минимальными

Таблица 3

Характеристики решения в зависимости от изменения N

N	Характеристики решения
5	2/0/0,31
	2/0/0,30
10	639/16/1,09
	574/18/1,17
15	$2,0 \cdot 10^4$/475/6,74
	$2,2 \cdot 10^4$/610/6,11
20	$2,5 \cdot 10^5$/$4,3 \cdot 10^3$/59,17
	$2,7 \cdot 10^5$/$5,1 \cdot 10^3$/47,87
21	$5,8 \cdot 10^5$/$8,8 \cdot 10^3$/225,99
	$7,5 \cdot 10^5$/$1,3 \cdot 10^4$/149,64
22	$6,9 \cdot 10^5$/$9,0 \cdot 10^3$/182,91
	$8,7 \cdot 10^5$/$1,4 \cdot 10^4$/169,21
23	$1,2 \cdot 10^6$/$1,4 \cdot 10^4$/834,25
	$1,8 \cdot 10^6$/$2,9 \cdot 10^4$/516,92

значениями характеристик решений имеет значительный разброс при одной и той же размерности. Так, минимальное время решения при $N = 23$ меньше максимального при $N = 20$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована нестационарная задача доставки однородного груза от семейства производителей потребителям с ограничениями на число посещений пунктов потребления в один день. Построена соответствующая линейная целочисленная модель.

Проведен сравнительный анализ эффективности решения задачи двумя методами, реализованными в пакете IBM ILOG CPLEX Optimization studio 12.2. Дальнейшие направления исследований связаны с разработкой эффективных эвристических методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dantzig G.B., Ramser R.H.* The Truck Dispatching Problem // Management Science. — 1959. — N 6. — P. 80—91.
2. *Бронштейн Е.М., Заико Т.А.* Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 10. — С. 133—147.
3. *URL:* http://neo.lcc.uma.es/vrp/ (дата обращения: 07.01.2014).
4. *Ralphs T.K., Kopman L., Pulleyblank W.R., Trotter L.E. Jr.* On the Capacitated Vehicle Routing Problem // Math. Program., Ser. B. — 2003. — Vol. 94. — P. 343—359.
5. *Laporte G., Nobert Y., Taillefer S.* Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems // Transportation Science. — 1988. — Vol. 22. — P. 161—172.
6. *Crevier B., Cordeau J.-F., Laporte G.* The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes // European Journal of Operational Research. — 2007. — Vol. 176. — P. 756—773.
7. *Malandraky C., Daskin M.S.* Time Dependent Vehicle Routing Problems: Formulations, Properties and Heuristic Algorithms // Transportation Science. — 1992. — Vol. 26. — P. 185—200.
8. *Ichoua S., Gendreau M., Potvin J.-Y.* Vehicle Dispatching With Time-Dependent Travel Times // European Journal of Operational Research. — 2003. — Vol. 144. — P. 379—396.
9. *Stegers E.* A Solution Method for Vehicle Routing Problems with Time-Dependent Travel Times. — Delft: Delft University of Technology, 2009. — 83 p.
10. *Picard J.-C., Queyranne M.* The time-dependent traveling salesman problem and its application to the tardiness problem in one-machine scheduling // Operations Research. — 1978. — Vol. 26. — N 1. — P. 86—110.
11. *Gouveia L., Vob S.* A classification of formulations for the (time-dependent) traveling salesman problem // European Journal of Operational Research. — 1995. — Vol. 83. — P. 69—82.
12. *Picard J.C., Queyranne M.* The time-dependent travelling salesman problem and its application to the tardiness in one-machine scheduling // Operations Research. — 1978. — Vol. 26. — P. 86— 110.
13. *Бронштейн Е.М., Гиндуллин Р.В.* Об одном классе задач маршрутизации // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 6. — С.123—132.

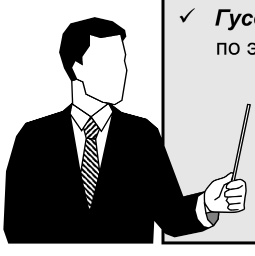
Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Бронштейн Ефим Михайлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, ☎ (347) 273-79-67, ✉ bro-efim@yandex.ru,

Давлетбаев Арвид Артурович — аспирант, ✉ Arvid_NF@mail.ru,

Уфимский государственный авиационный технический университет.

Содержание сборника "Управление большими системами", 2014, вып. 47



Тексты статей доступны на сайте http://ubs.mtas.ru/