УДК 519.8;519.301

МИКРО- И МАКРОМОДЕЛИ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ. Ч. 1. Основы теории

В.В. Бреер, Д.А. Новиков, А.Д. Рогаткин

Рассмотрены два подхода к построению и исследованию моделей социальных сетей: макро- и микроописания. В соответствии с первым из них структура связей в социальной сети усредняется, и поведение агентов рассматривается «в среднем». В рамках второго подхода принимается во внимание структура графа влияний агентов и их индивидуальное принятие решений. Дано сравнение этих двух подходов на примере пороговой модели коллективного поведения с единым относительным порогом.

Ключевые слова: случайный граф, социальная сеть, консенсус, коллективное поведение, пороговая модель.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [16] выделены несколько уровней описания и анализа *социальных сетей* (СС). На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом». Здесь применяются статистические методы, методы семантического анализа и др. Такое агрегированное описание можно условно считать *макромоделью СС*. На втором уровне с помощью аппарата теории графов анализируются структурные свойства СС. Соответствующее детализированное описание будем называть *микромоделью СС*. На третьем уровне моделируется информационное взаимодействие агентов. Здесь спектр возможных моделей наиболее широк — марковские модели (в том числе — модели консенсуса), конечные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и многие другие (см. обзор в книге [10]). На четвертом уровне с помощью аппарата оптимального управления или дискретной оптимизации ставятся и решаются задачи управления. На третьем и четвертом уровнях оперируют, как правило, микромоделями, отражающими взаимодействие отдельных агентов. И, наконец, на пятом уровне для описания взаимодействия субъектов, воздействующих на социальную сеть каждый в своих интересах, как правило, используется аппарат теории игр, в том числе — рефлексивных игр. Здесь СС как объект управления рассматривается, как правило, на макроуровне.

Таким образом, на каждом уровне описания СС имеется большой набор возможных моделей и методов, совокупность которых может рассматриваться как своеобразный конструктор, пользуясь элементами которого исследователь собирает инструмент для решения поставленной перед ним задачи. С одной стороны, возможно адаптированное использование тех или иных известных моделей и методов. С другой стороны, специфика СС как объекта управления заставляет на каждом уровне разрабатывать и развивать свои специфические методы, учитывающие большую размерность объекта управления, его распределенность и неполную наблюдаемость, наличие многих взаимодействующих объектов и субъектов управления, обладающих различными интересами и т. д.

Разнородность (так называемая гетерогенность) описания СС с точки зрения различных интересующих исследователя аспектов ее рассмотрения, с одной стороны, неизбежна как следствие отмеченной выше специфики СС. С другой стороны, хотелось бы уметь преодолевать проблемы больших данных [15]: абстрагироваться — не теряя существенных деталей, переходить от микромоделей к макромоделям, оперирующим агрегированными характеристиками, и формулировать задачи анализа и управления СС в терминах макромоделей. Поэтому в настоящей работе устанавливается связь между микро- и макромоделями СС. Для этого сначала (в § 1) приводится описание одной из наиболее распространенных на сегодня микромоделей СС, а именно — модели М. Де Гроота [27] в терминах графа коммуникаций отдельных агентов [10]. Затем (в § 2) рассматривается переход к макромодели, оперирующей статистическими характеристиками СС. В § 3 связь микро- и макрохарактеристик обсуждается для случая пороговой модели поведения агентов, принимающих решения с учетом других агентов СС. Продолжением настоящей работы, содержащим результаты идентификации описанных моделей и имитационных экспериментов, служит статья [2].

1. МИКРОМОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ — множество *агентов*, входящих в *социальную сеть*, описываемую ориентированным графом $R = (N, E)$, где $E \subseteq N \times N$ — множество дуг. Агенты в сети *влияют* друг на друга — наличие дуги (i, j) от вершины i к вершине j соответствует доверию i-го агента к j-му. Обозначим через $N^{in}(i) = \{j \in N \mid \exists\ (j; i) \in E\}$ множество «*соседей*» — агентов, влияющих на i-го агента, через $N^{out}(i) = \{j \in N \mid \exists\ (i; j) \in E\}$ — множество агентов, на которых влияет i-й агент, $n^{out}(i) = \#\ N^{out}(i)$, $n^{in}(i) = \#\ N^{in}(i)$, где # означает мощность множества.

Степень влияния агентов друг на друга может задаваться матрицей прямого влияния/доверия $A = \|a_{ij}\|$ размерности $n \times n$, где $a_{ij} \ge 0$ обозначает степень *доверия* i-го агента j-му агенту (или, что будем считать эквивалентным, степень влияния j-го агента на i-го агента; $\forall j \notin N^{in}(i)\ a_{ij} = 0$) [11]. Считается, что выполняется *условие нормировки*:

$$\forall i \in N \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му, то это означает: k-й агент косвенно влияет на i-го и т. д., т. е. возможны «цепочки» косвенных (опосредованных) влияний.

Предположим, что у каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец θ^0 размерности n действительно значных неотрицательных начальных мнений. Примерами мнений служат степень готовности проголосовать за того или иного кандидата, приобрести тот или иной товар и т. д. — классификация и многочисленные примеры мнений членов социальных сетей приведены в работе [10]. Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется под влиянием мнений агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать, что мнение i-го агента $\theta_i^k \in \Re^1$ в момент времени k [10, 27]

$$\theta_i^k = \sum_{j \in N} a_{ij}\theta_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, ... \qquad (1)$$

Обозначим через $\theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, ..., \theta_n^k)$ состояние социальной сети в момент времени k.

Предположим, что *достижим консенсус* — в конечном итоге (при многократном обмене мнениями) мнения агентов сходятся к единому результирующему (*итоговому*) вектору мнений $\theta = \lim_{k \to \infty} \theta^k$ (общие необходимые и достаточные условия такой сходимости можно найти в работах [8, 20]). Тогда можно записать соотношение

$$\theta = A^{\infty}\theta^0, \qquad (2)$$

где $A^{\infty} = \lim_{k \to \infty} A^k$. Известно (см. ссылки в книге [10]), что, если достижим консенсус, то строки матрицы A^{∞} одинаковы, соответственно, так как вектор θ в этом случае будет состоять из одинаковых элементов, будем считать это обозначение скаляром. Обозначим i-й элемент произвольной строки этой матрицы через a_i^{∞}, $i \in N$.

В качестве «альтернативы» модели (2) для определения зависимости общего итогового мнения агентов от их начальных мнений возможно использование *репутаций* [9, 10] агентов $\{r_i \in [0; 1]\}_{i \in N}$, где $\sum_{j=1}^{n} r_j = 1$:

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} r_j\theta_j^0.$$

Перейдем теперь от микромодели СС, учитывающей попарное взаимодействие агентов, к ее агрегированному описанию в терминах вероятностных распределений (мнений, репутаций и др.).

2. МАКРОМОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Для заданного графа G можно построить эмпирические вероятностные распределения числа входящих и исходящих дуг. Обозначим их соответственно через $P^{in}(k)$ и $P^{out}(k)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Зная вектор начальных мнений агентов, можно определить эмпирическую функцию распределения этих мнений:

$$F_{\theta^0}(x) = \frac{1}{n}\#\{i \in N \mid \theta_i^0 \le x\}.$$

Соответствующее ей вероятностное распределение обозначим $P_{\theta^0}(x)$.

Макромоделью социальной сети назовем совокупность $\{n, P^{in}(k), P^{out}(k), P_{\theta^0}(x)\}$, причем будем предполагать, что структура СС такова, что достижим консенсус.

Возможны различные способы перехода от микроописания к макрохарактеристикам. В частности, по-разному могут определяться влиятельность и репутация агентов. Так, сегодня известны две основные (наиболее распространенные, базовые) модели влияния и распространения («диффузии») активности — информации, мнений и т. п. — в СС: линейная пороговая модель (Linear Threshold Model — LTM) [33] и модель независимых каскадов (Independent Cascade Model — ICM) [32, 34]. В их рамках рассматриваются две ключевые задачи — максимизация результирующего влияния (при ограниченном бюджете выбрать начальное множество возбуждаемых агентов, при котором результирующее возбуждение будет максимальным) и раннее обнаружение внешних воздействий (при ограниченном бюджете выбрать размещение в сети «детекторов», минимизирующее результирующее влияние внешних воздействий) [12, 17, 26, 34]. Например, в работе [34], основываясь на результатах анализа субмодулярных функций множеств [37], было показано, что задачи выбора множества первоначально возбуждаемых агентов NP-трудны для обеих моделей, и был предложен жадный эвристический $(1 - 1/e)$-оптимальный алгоритм.

Возможно использование одного или нескольких из следующих *предположений.* Первый класс предположений (R.1—R.3) позволяет, зная граф G, тем или иным образом определить репутации агентов (иногда также употребляется термин «влиятельность» агентов).

R.1. Репутация агента в СС пропорциональна числу агентов, на которых он оказывает влияние, т. е.

$$r_i = \frac{n^{out}(i)}{\sum\limits_{j \in N} n^{out}(j)}, \quad i \in N. \tag{3}$$

R.2. Репутация агента в СС, в которой достижим консенсус (см. § 1), определяется тем весом, с которым его начальное мнение входит в итоговое общее мнение, т. е.

$$r_i = a_i^{\infty}, \quad i \in N. \tag{4}$$

R.3. Репутация агента в СС определяется алгоритмом PageRank (см., например, работу [35]), т. е. вектор репутаций удовлетворяет системе уравнений вида

$$r_i = \sum_{j \in N^{in}(i)} \frac{r_j}{n^{out}(j)}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Отметим, что списки подобных предположений открытые — можно использовать и другие предположения, обосновывая их соответствие реальным данным и содержательным интерпретациям.

В математическом смысле класс предположений (R.1—R.3) можно проинтерпретировать следующим образом: репутация (3) пропорциональна степени узла графа G, а вектор репутаций представляет собой эмпирическое вероятностное распределение степеней вершин графа; вектор репутации (4) — инвариантное распределение влияний агентов; в рамах выражения (5) репутация пропорциональна степени узла графа G с учетом «опосредованных» влияний.

Второй класс предположений (I.1, I.2) характеризует независимость микропараметров СС в макростатистическом смысле.

I.1. Репутация агента не зависит от его мнения и наоборот.

I.2. Начальные мнения агентов независимы, и начальное мнение агента i не зависит от $N^{in}(i)$ и $N^{out}(i)$.

Третий класс предположений (A.1—A.3) позволяет, зная граф G и/или репутации агентов, находить матрицу A влияния/доверия.

A.1. Агент i одинаково доверяет всем агентам из множества $N^{in}(i)$, т. е.

$$a_{ij} = \frac{1}{n^{in}(i)}, \quad i \in N, \quad j \in N^{in}(i).$$

A.2. Доверие агента i агенту $j \in N^{in}(i)$ пропорционально репутации последнего, т. е.

$$a_{ij} = \sum_{k \in N^{in}(i)} \frac{r_j}{r_k}, \quad i \in N, \quad j \in N^{in}(i).$$

Таким образом, вводя те или иные предположения об общих свойствах СС, можно устанавливать количественные связи между их микро- и макромоделями.

В заключение краткого обсуждения макромоделей СС отметим, что одним из адекватных математических инструментов их исследования служит теория *случайных графов* (см., например, обзоры [13, 18, 36], монографии [14, 25] и учебник [28]), создателями которой являются П. Эрдош и А. Реньи [31]. Этот инструментарий сегодня успешно применяется не только к социальным, но и к телекоммуникационным, информационным, технологическим, биологическим и другим сетям, сетям научного сотрудничества и др. (см. многочисленные примеры в работах [13, 22, 28, 36]).

Если в графе дуга между любой парой вершин существует или отсутствует с одинаковой (для любых пар) вероятностью (это и подобные свойства могут выводиться из моделирования динамики формирования графа — см. работы [22, 29, 30]), то имеем биномиальное (пуассоновское в предельном случае — при большом числе вершин графа) распределение числа инцидентных дуг. Такие графы называются *экспоненциальными*, или *графами Эрдоша — Реньи*.

Оказывается, что большинство социальных сетей описывается не экспоненциальными, а *степенными «распределениями»* (с тяжелыми хвостами) $P^{in}(k)$ и $P^{out}(k)$ числа инцидентных дуг [22, 23, 24]. Именно этими распределениями ($P^{in}(k) \sim k^{-\gamma}$, где для реальных сетей $1 < \gamma < 4$) мы пользуемся в работе [2]. Имея граф, заданный статистическими характеристиками своих основных параметров, можно в рамках введенных в настоящем параграфе предположений определять макрохарактеристики (вероятностные распределения) влияния, репутации, доверия и т. п.

3. ПОРОГОВАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ

На примере пороговой модели коллективного поведения агентов в СС с теоретической точки зрения рассмотрим эквивалентность микро- и макро-описаний.

Модели динамики мнений агентов в СС (см. § 1) оперируют единственной характеристикой каждого агента — его мнением, а остальные параметры отражают взаимодействие агентов. Так называемые *поведенческие модели СС* богаче — в них, помимо «внутренних» параметров, присутствуют переменные, характеризующие поведение агента — принимаемые им *решения*. Решения эти зависят в общем случае как от внутренних параметров агента (его мнения, индивидуальных характеристик), так и, быть может, от мнений и/или действий других агентов (всех, или соседей, или заданной группы агентов). Рассмотрим в качестве примера поведенческой модели модель порогового поведения (см. описание общих теоретико-игровых подходов к моделированию порогового коллективного поведения в работах [3, 4, 5]).

Пусть социальная сеть состоит из множества *агентов* $N = \{1, 2, ..., n\}$, каждый из которых имеет две альтернативные возможности — *действовать или бездействовать*. Выбор i-го агента обозначим через $x_i \in \{0; 1\}$, где $x_i = 1$ означает, что агент действует, а $x_i = 0$ — бездействует. Пусть на решение агента i влияет множество $D^i = N^{in}(i)$ других агентов — его соседей. Будем считать, что решение агента i действовать или бездействовать зависит от его порога $\theta_i \in [0, 1]$ и доли действующих соседей: если действуют более $\theta_i |D_i|$ влияющих на i-го агента соседей, то он тоже действует.

Будем считать, что мнением отдельного агента является этот индивидуальный порог $\theta_i \in [0, 1]$. Пусть структура социальной сети такова, что достижим консенсус, т. е. согласно соотношению (3) существует единое мнение θ, характеризующее в конечном итоге всех агентов социальной сети, как это описано в § 1. Это единое мнение будем в дальнейшем называть *единым относительным порогом* агентов.

Таким образом, пользуясь подходами теории игр (как это описано в статье [5]), поведение агента на микроуровне можно представить в виде наилучшего ответа (Best Response):

$$x_i = BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, \sum\limits_{j \in D_i} x_j > \theta d_i, \\ 0, \sum\limits_{j \in D_i} x_j \le \theta d_i, \, i \in N, \end{cases} \qquad (6)$$

где $d_i = |D_i|$ число соседей агента $i \in N$. Будем называть модель поведения, которое описывается в виде(11), *микромоделью с единым относительным порогом*.

Перейдем к вероятностному макроописанию модели порогового поведения. Будем считать, что агенты неразличимы, и число соседей агента — это целое случайное число d:$1 \le d \le n - 1$. Мы не рассматриваем сети, в которых нет агентов, не имеющих соседей ($d = 0$), так как в этом случае такие агенты согласно выражению (11) будут всегда бездействовать. Пусть $M(d) = P^{in}(d)$:$\{1, 2, ..., n - 1\} \to$ $\to [0, 1]$ — вероятность того, что число соседей будет равно d. Рассмотрим усредненную динамику взаимодействия агентов в дискретном времени. Пусть на произвольном шаге действует q агентов. Рассчитаем математическое ожидание числа агентов, действующих на следующем шаге, если их поведение описывается наилучшим ответом (11).

Сначала вычислим вероятности G_n событий, заключающихся в том, что ровно *k соседей агента действуют*. Всего существует C_{n-1}^{d} вариантов того, что агент имеет d соседей. Число таких вариантов, что именно среди d соседей данного агента будет ровно $k \le d$ действующих (из q действующих во всей сети агентов) равно C_q^k, а число вариантов того, что среди этих соседей будет $d - k$ из $n - 1 - q$ бездействующих равно C_{n-1-q}^{d-k}. Таким образом, вероятность того, что ровно k из d соседей агента действуют, можно записать в виде гипергеометрического распределения [21]:

$$G_n(q, d, k) = \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}. \qquad (7)$$

Вычислим вероятность P_n того, что агент будет действовать под влиянием q действующих агентов во всей сети. Для того чтобы агент действовал, согласно выражению (6), необходимо, чтобы более чем θd его соседей действовали. Искомая вероятность $P_n = P_n(q, d, \theta)$ представляет собой сумму вероятностей (7) по всем k:$[\theta d] < k \le d$ ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа):

$$P_n(q, d, \theta) = \sum_{k=[\theta d]+1}^{d} G_n(q, d_i, k) = 1 - \sum_{k=0}^{[\theta d]} \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}.$$

Вероятность (8) численно равна доле действующих на следующем шаге агентов с числом соседей d. Значит, математическое ожидание доли действующих на следующем шаге агентов

$$F_n(q, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} P_n(q, d, \theta) M(d). \qquad (9)$$

Итак, динамику числа действующих агентов социальной сети можно записать в виде рекуррентной схемы:

$$q_{k+1} = [nF_n(q_k, \theta)]. \qquad (10)$$

Исследуем поведение функции (9) для случая, когда число агентов n достаточно велико. При этом гипергеометрическое распределение (7) может быть приближено биномиальным распределением с вероятностью $p = q/n$ ([21]):

$$G_n(q, d, k)|_{n \gg 1,\, p = q/n} \approx b(p, d, k) = C_d^k p^k (1-p)^{d-k}.$$

Вероятность того, что для d числа соседей агента более, чем их доля θ будет действовать, по аналогии с вероятностью (8),

$$P_n(q, d, \theta)|_{n \gg 1,\, p = q/n} \approx B(p, d, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{[\theta d]} b(p, d, k).$$

Тогда распределение числа действующих агентов (9) и динамику доли (отметим, что именно доли, а не числа) (10) действующих агентов социальной сети соответственно можно записать в виде:

$$F_n^B(p, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} B(p, d, \theta) M(d), \qquad (11)$$

$$p_{k+1} = F_n^B(p_k, \theta). \qquad (12)$$

Будем называть модель поведения, которое описывается в виде (12), *макромоделью с единым относительным порогом.*

Исследования пороговых моделей начались со ставшей классической работы М. Грановеттера [33], которая вкратце состоит в следующем. Все агенты являются соседями друг друга (граф R коммуникаций — полный), при этом число агентов не оговаривается. Каждый агент характеризуется порогом — если доля действующих агентов больше этого порога, то он действует. Причем значение этого порога описывается функцией распределения F. Пусть доля действующих агентов на определенном шаге k равна r_k. Значит, все агенты, пороги которых меньше r_k, а их число по определению равно $F(r_k)$, будут действовать на следующем шаге. Таким образом, справедливо рекуррентное соотношение:

$$r_{k+1} = F(r_k). \qquad (13)$$

Макромодель с единым относительным порогом (12) эквивалентна модели Грановеттера (13) в следующем смысле. Предположим, что известно распределение (11). Тогда можно построить соответствующую модель Грановеттера, приняв $F(p) = F_n^B(p, \theta)$, $p \in [0, 1]$. Обратно, пусть задана модель Грановеттера с функцией распределения порогов F. Решим численно уравнение (11) относительно $M(\cdot)$(поиск решения уравнения типа (11) представляет собой отдельную задачу). Распределение M полностью характеризует макро-модель с единым относительным порогом.

В работе [5] было показано, что условия положения равновесия в модели Грановеттера ($F(x) = x$) эквивалентны условиям равновесия Нэша в микромодели с единым относительным порогом при условии, что граф влияний агентов является полным: $d_i = n - 1$, $\forall i \in N$. Другими словами, имея макромодель порогового поведения агентов в СС, можно легко вычислять ее равновесные состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проблемы установления соответствия между микро- и макромоделями социальных сетей рассматривались с теоретической точки зрения. Возможность идентификации предложенных подходов и вопросы адекватности микро- и макроописаний друг другу «экспериментально» исследуются в работе [2]. Перспективным направлением дальнейших исследований представляется построение и изучение термодинамических и статфизических интерпретаций макромоделей социальных сетей (см. статью [7] и обзор [19]), а также постановка и решение задач управления (например, по аналогии с рассмотренными в работах [1, 10, 17] задачами управления социальными сетями, описываемыми выражениями (1) или (6)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барабанов И.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Динамическая модель информационного управления в социальных сетях // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 11. — С. 172—182.
2. *Батов А.В., Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д.* Микро- и макромодели социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты // Проблемы управления. — 2014. — № 6 (*в печати)*.
3. *Бреер В.В.* Модели конформного поведения. Ч. 1. От философии к математическим моделям // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 2—13.
4. *Бреер В.В.* Модели конформного поведения. Ч. 2. Математические модели // Проблемы управления. — 2014. — № 2. — С. 2—17.
5. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 10. — С. 111—126.
6. *Бреер В.В., Новиков Д.А.* Модели управления толпой // Проблемы управления. — 2012. — № 2. — С. 38—44.
7. *Бреер В.В.* Стохастические модели социальных сетей // Управление большими системами. — 2009. — № 27. — С. 169—204.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988.
9. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели репутации и информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. — 2009. — № 26.1. — С. 209—234.
10. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010. — 244 с.
11. *Губанов Д.А.* Обзор онлайновых систем репутации/доверия // Интернет-конференция по проблемам управления / ИПУ РАН. — М., 2009. — URL: www.mtas.ru/forum (дата обращения: чч.мм.гггг).
12. *Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г.* Акциональная модель влиятельности пользователей в социальной сети // Проблемы управления. — 2014. — № 4. — С. 20—25.
13. *Евин И.А.* Введение с теорию сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 2. — С. 121—141.
14. *Колчин В.Ф.* Случайные графы. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
15. *Новиков Д.А.* Большие данные: от Браге к Ньютону // Проблемы управления. — 2013. — № 6. — С. 15—23.
16. *Новиков Д.А.* Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. — 2012. — № 37. — С. 25—62.
17. *Новиков Д.А.* Модели управления возбуждением сети // Тр. XII Всероссийского совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. — М., 2014.
18. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов и их применения // Тр. МФТИ. — 2010. — Т. 2. — № 4. — С. 130—140.
19. *Словохотов Ю.Л.* Физика и социофизика. Ч. 1—3 // Проблемы управления. — 2012. — № 1. —С. 2—20; № 2. — С. 2—31; № 3. — С. 2—34.
20. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 3. — С. 136—151.
21. *Ширяев А.Н.* Вероятность: учеб. пособие для вузов. — М: Наука, 1989.
22. *Albert R., Barabasi A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. — 2002. — N 74. — P. 47—97.
23. *Barabasi A., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. — 1999. — № 286. — P. 509—512.
24. *Barabasi A.* Scale-free Networks // Scientific American. — 2003. — № 5. — P. 50 — 59.
25. *Bollobas B.* Random Graphs. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001. — 520 p.
26. *Chen N.* On the Approximability of Influence in Social Networks // SIAM J. Discrete Math. — 2009. — Vol. 23. — P. 1400—1415.
27. *De Groot M.* Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Assotiation. — 1974. — N 69. — P. 118—121.
28. *Dorogovtsev S.* Lectures on Complex Networks. — Oxford: Oxford University Press, 2010. — 144 p.
29. *Dorogovtsev S., Mendes J.* Evolution of Networks. — Oxford: Clarendon Press, 2010. — 264 p.
30. *Durett R.* Random Graph Dynamics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 212 p.
31. *Erdos P., Renyi A.* On random graphs // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — N 6. — P. 290—297.
32. *Goldenberg J., Libai B., Muller E.* Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-mouth // Marketing Letters. — 2001. — Vol. 12, N 3. — P. 211—223.
33. *Granovetter M.* Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. — 1978. — Vol. 83, N 6. — P. 1420—1443.
34. *Kempe D., Kleinberg J., Tardos E.* Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // Proc. 9th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining, 2003. — P. 137—146.
35. *Lin Y., Shi X., Wei Y.* On Computing PageRank via Lumping the Google Matrix // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 224, N 2. — P. 702—708.
36. *Newman M.* The Structure and Function of Complex Networks // SIAM Review. — 2003. — Vol. 45, N 2. — P. 167—256.
37. *Nemhauser G., Wolsey L., Fisher M.* An Analysis of the Approximations for Maximizing Submodular Set Functions // Mathematical Programming. — 1978. — Vol. 14. — P. 265—294.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Бреер Владимир Валентинович — бизнес-аналитик,
ЗАО «Авиахэлп Групп», г. Москва, ✉ breer@live.ru,

Новиков Дмитрий Александрович — чл.-корр. РАН,
зам. директора, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-75-69, ✉ novikov@ipu.ru,

Рогаткин Андрей Дмитриевич — мл. науч. сотрудник,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, ✉ andreyrogatkin@gmail.com.