УДК 519.83 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2020.3.4

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ПОРОГОВАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВОГО РЫНКА

В.В. Бреер

Аннотация. Рассмотрена теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения агентов, участвующих в купле-продаже одиночного биржевого актива. Агенты разделены на две группы — покупатели и продавцы. Предполагается, что у каждого из агентов существует порог приемлемой ему цены, для покупателя — это верхняя цена, при которой он еще согласен на сделку, а для продавца — это нижняя «комфортная» в том же смысле цена. Учитывается, что агент принимает решение, участвовать ли в сделке, сравнивая свою пороговую цену с рыночной ценой. Предполагается, что на рыночную цену влияют объемы спроса и предложения в соответствии с классическими кривыми спроса и предложения. Построены эмпирические функции распределения ценовых порогов, которые служат для характеризации равновесия Нэша, а также позволяют в перспективе исследовать предельный переход к бесконечному числу агентов. Доказано утверждение о характеризации равновесия Нэша, первая часть которого показывает объемы потенциального спроса и предложения, вторая часть — состояния агентов, исходя из объемов спроса и предложения. Исследованы примеры существования и условия единственности равновесия Нэша. Найдены фокальные точки среди всех равновесий Нэша.

Ключевые слова: теоретико-игровая модель, бинарное пороговое коллективное поведение, биржевой товарный рынок, равновесие Нэша.

ВВЕДЕНИЕ

Упрощенно говоря, главной мотивацией в принятии решения покупателя или продавца совершить сделку служит излишек, представляющий собой разницу между реальной рыночной ценой и пороговой (внутренне комфортной) ценой участника рынка. Для продавца этот порог, например, может обусловливаться себестоимостью актива либо, в случае намерения срочно сбыть актив, — быстротой реализации товара. Для покупателя порог может определяться ограничением денежных ресурсов или полезностью данного актива. Возможны и другие, более сложные стратегии определения «комфортной цены» для участников рынка, но нас будет интересовать этап сделки, когда эта цена каждым уже определена.

Принимая участие в биржевых торгах, участники, как правило заранее определяют цену, по которой они готовы совершить сделку, а также объем (число единиц) товара. Перед покупателями и продавцами стоит бинарный выбор: объявить (действовать) или не объявлять (бездействовать) о своем намерении совершить транзакцию актива — куплю или продажу.

Для описания этого поведения была выбрана теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения. Близки к ней модели бинарного коллективного поведения, а также основанные на аппаратах статистической физики частиц с двумя состояниями [1, 2], случайных разностных схем [3] и пороговой динамики [4, 5]. Теоретико-игровые пороговые модели подобного типа рассмотрены в статье [6].

В предлагаемой математической модели рынка рассматриваются два конечных множества агентов — покупатели и продавцы, каждый из которых принимает бинарное решение участвовать в торгах со своей ценой и объемом или не участвовать. В результе действий агентов объемы спроса и предложения меняют рыночную цену актива в соответствии с законами экономической теории [7]: рост спроса увеличивает цену, а рост предложения ее уменьшает. Далее определяются условия на агентскую пороговую и рыночную цены, при которых для агента обстановка благоприятна. При этом учитываются удельные издержки агентов. Считается что, участие или неучастие одного агента в торгах не сильно влияет на рыночную цену актива.

После определения всех свойств математической модели рынка задается игра в нормальной форме и находится характеризация равновесия Нэша для этой игры. Ометим, что это равновесие не объясняет, сколько сделок реально произойдет в торгах, а лишь определяет объем спроса и предложения. Чему будет равна цена и сколько сделок состоится, зависит от правил, установленных на бирже.

1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЫНКА

Пусть агенты играют в «игру на рынке с одним биржевым активом», правила которой заключаются в следующем:

- В игре участвуют два множества агентов: S (*Sellers*) — конечное множество *продавцов* и B (*Buyers*) — конечное множество *покупателей*, их число обозначим через $n_S = |S|$ и $n_B = |B|$ соответственно.
- Покупатель $i \in B$ принимает *бинарное* решение $\omega_i \in \{0, 1\}$ — купить ($\omega_i = 1$) или не купить ($\omega_i = 0$) актив фиксированного количества (объема) $v_i \in \mathbf{Z}^+$ (целое число) по цене за единицу, ***не превышающей порога*** $C_B(i) \in \mathbf{R}^+$. Этот порог может иметь различные причины, зависящие от конкретной содержательной интерпретации математической модели. Так, если мы в качестве этой интерпретации подразумеваем ограничение ресурсов покупателя $i \in B$, намеревающегося совершить покупку, то величина $C_B(i)v_i$ как раз равна этим бюджетным ограничениям. Если же покупатель действует на бирже, намереваясь совершить покупку какого-то актива, то порог возникает вследствие субъективных представлений покупателя о цене $C_B(i)$ актива в будущем. *Объем спроса* покупателей обозначим через $v_B = v_B(\omega_B) = \sum_{i \in B} v_i\omega_i$, где $\omega_B = \{\omega_i\}_{i \in B}$. Объем всего *потенциального* спроса обозначим через $V_B = \sum_{i \in B} v_i$.
- Продавец $j \in S$ принимает *бинарное* решение $\omega_j \in \{0, 1\}$ — продать ($\omega_j = 1$) или не продавать ($\omega_j = 0$) актив *не более* фиксированного количества (объема) $v_j \in Z^+$ (целое число) по цене, ***не ниже порога*** $C_S(j) \in R^+$. Как и в случае с покупателем, порог может иметь различные причины, зависящие от конкретной содержательной интерпретации математической модели. Так если мы в качестве этой интерпретации подразумеваем себестоимость актива, который в количестве $v_j \in R^+$ продавец $j \in S$ намеревается выставить на продажу, то величина $C_S(i)v_i$ равна этой себестоимости. Если же продавец действует на бирже, намереваясь совершить продажу какого-то актива, то порог возникает вследствие субъективных представлений поставщика о цене $C_S(i)$ актива в будущем. *Объем предложения* продавцов обозначим через $v_S = v_S(\omega_S) = \sum_{j \in S} v_j\omega_j$, где $\omega_S = \{\omega_i\}_{i \in S}$. Объем всего *потенциального* предложения обозначим через $V_S = \sum_{j \in S} v_j$.
- Объемы спроса $v_B(\omega_B)$ и предложения $v_S(\omega_S)$ влияют на удельную цену актива $P(v_B(\omega_B), v_S(\omega_S))$, единую для всего рынка. В соответствии с классическими кривыми спроса и предложения (см., например, работу [7]) будем считать, что функция цены $P(\cdot, \cdot)$ не убывает по первому аргументу — объему спроса, и не возрастает по второму — объему предложения.
- Множество $\omega_{-i} = \{\omega_j\}_{j \neq i}$ будем называть *обстановкой* агента $i \in B \cup S$. Обстановку ω_{-i} *покупателя* $i \in B$, для которой

$$C_B(i) - P(v_{B\setminus i}(\omega_{B\setminus i}), v_S(\omega_S)) > 0, \qquad (1)$$

или обстановку ω_{-j} *продавца* $j \in S$, для которой

$$P(v_B(\omega_B), v_{S\setminus j}(\omega_{S\setminus j})) - C_S(j) > 0, \qquad (2)$$

будем называть *благоприятной обстановкой* для покупателя или продавца соответственно. В экономической теории разность в условии (1) называется *излишком потребителя* [7]. Разность в условии (2), следуя этой логике, назовем *излишком продавца*. Эти излишки возникают, как указывалось выше, вследствие бюджетных ограничений, себестоимости актива или представлений участников рынка о будущей цене актива.

- Каждый покупатель и продавец (агент) $i \in B \cup S$ при совершении сделки несет *удельные издержки* $\varepsilon_i > 0$, которые *меньше* минимального излишка этого агента при любой *благоприятной обстановке*:

$$\varepsilon_i < \min_{\{\omega_{-i}:\, C_B(i) > P(v_{B\setminus i},\, v_S)\}} [C_B(i) - P(v_{B\setminus i}, v_S)], \quad i \in B, \qquad (3)$$

$$\varepsilon_i < \min_{\{\omega_{-i}:\, P(v_B,\, v_{S\setminus i}) > C_S(i)\}} [P(v_B, v_{S\setminus i}) - C_S(i)], \quad i \in S. \qquad (4)$$

Этими издержками может быть коммиссия на трансакцию, установленная биржей.

- Будем считать, что справедлива *гипотеза слабого влияния* [8, *с. 32*] действий агентов на цену актива:

$$\max_{\omega_{-i}} [P(v_{B\setminus i} + v_i, v_S) - P(v_{B\setminus i}, v_S)] < \varepsilon_i, \quad i \in B, \qquad (5)$$

$$\max_{\omega_{-i}} [P(v_B, v_{S\setminus i}) - P(v_B, v_{S\setminus i} + v_i)] < \varepsilon_i, \quad i \in S, \qquad (6)$$

т. е. максимальная разница между ценами актива при действии или бездействии отдельного игрока (продавца или покупателя) такова, что она меньше удельных издержек этого игрока. Другими словами, игрок слабо влияет на рыночную цену.

Указанные выше ограничения модели вполне подходят для описания биржевых торгов, например, на валютной бирже Forex. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности для других содержательных интерпретаций, будем описывать возникающие эффекты в рамках примера валютной биржи.

2. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ

Цель покупателей на бирже — получение прибыли, поэтому целевую функцию покупателя $i \in B$ запишем в виде:

$$u_i(\omega_i, v_{B\setminus i}, v_S) = (C_B(i) - P(v_{B\setminus i}, v_S) - \varepsilon_i)\omega_i v_i. \quad (7)$$

Получит ли он реально прибыль по окончании сделки, зависит от многих факторов, но его намерение действовать $\omega_i = 1$, а именно купить актив, зависит от того, будет ли положительным значение выражения, стоящего в скобках формулы (7). Как видно из этого определения целевой функции, кроме не сильно измененной в силу гипотезы слабого влияния (5) рыночной цены, на решение покупателя влияет его *оценка будущей цены* $C_B(i)$. На биржевых торгах величина ε_i является комиссией, которая взимается с покупателя за осуществление сделки. Покупатель заранее фиксирует цену $C_B(i)$, а также объем актива v_i, который он намеревается купить. После формирования ордера на покупку запускается тот или иной механизм сделки, определяемый правилами биржевой торговли.

Целевую функцию продавца $i \in S$, по аналогии, запишем в виде:

$$u_i(\omega_i, v_{S\setminus i}, v_B) = (P(v_B, v_{S\setminus i}) - C_S(i) - \varepsilon_i)\omega_i v_i. \quad (8)$$

Рассмотрим игру в нормальной форме $G = (\{0,1\}^{n_S+n_B}, \{u_i\}_{i \in S \cup B}, S \cup B)$. Будем считать, что агенты информированы об игре G и ведут себя так, чтобы максимизировать свои целевые функции. Определение равновесия Нэша $\omega^* \in \{0, 1\}^{n_W+n_B}$ в игре G имеет вид:

$$u_i(\omega_i^*, v_{B\setminus i}^*, v_S^*) \ge u_i(1 - \omega_i^*, v_{B\setminus i}^*, v_S^*), \quad \forall i \in B, \quad (9)$$

$$u_i(\omega_i^*, v_{S\setminus i}^*, v_B^*) \ge u_i(1 - \omega_i^*, v_{S\setminus i}^*, v_B^*), \quad \forall i \in S, \quad (10)$$

где $v_{S\setminus i}^*$, v_B^* и $v_{B\setminus i}^*$, v_S^* — объемы соответствующих спроса и предложения при ситуации $\omega^* \in \{0, 1\}^{n_W+n_B}$.

Введем обозначения:

$\Phi_B(x) = \sum_{i \in B} v_i \chi\{C_B(i) > x\}$ — для объема спроса покупателей B, которые имеют ценовые пороги больше x (где χ — индикатор множества), и

$\Phi_S(x) = \sum_{i \in S} v_i \chi\{C_S(i) < x\}$ — для объема предложения продавцов S, которые имеют ценовые пороги меньше x.

Функция $\Phi_S(\cdot)/V_S$ — эмпирическая функция распределения ценовых порогов продавцов с поправкой на доли объема предложения. Аналогично, функция $1 - \Phi_B(\cdot)/V_B$ — эмпирическая функция распределения ценовых порогов покупателей с поправкой на доли объема спроса. Эти функции при соответствующем предельном переходе по числу игроков могут сходиться к некоторым распределениям, в этом случае можно ставить задачу типа закона больших чисел, центральной предельной теоремы и больших уклонений. В этой работе мы остановимся на теоретико-игровой модели с конечным числом игроков.

Имеет место следующая характеризация равновесия Нэша рассматриваемой игры G.

Утверждение. *Пусть пара чисел* v_B^*, v_S^* *— решение системы уравнений*

$$\begin{cases} v_B^* = \Phi_B(P(v_B^*, v_S^*)) \\ v_S^* = \Phi_S(P(v_B^*, v_S^*)) \end{cases}, \quad (11)$$

и ситуация $\omega^* = \omega_S^* \times \omega_B^* \in \{0, 1\}^{|S|} \times \{0, 1\}^{|B|}$ *удовлетворяет условиям:*

$$\omega_B^* : \omega_i^* = \chi\{C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*)\}, \quad \forall i \in B, \quad (12)$$

$$\omega_S^* : \omega_i^* = \chi\{C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*)\}, \quad \forall i \in S. \quad (13)$$

Тогда она является равновесием Нэша (9), (10) *игры G с объемами спроса* v_B^* *покупателей и предложения* v_S^* *продавцов.*

Обратно, пусть ситуация $\omega^* = \omega_S^* \times \omega_B^* \in \{0, 1\}^{|S|} \times \{0, 1\}^{|B|}$*, в которой объемы активов продавцов и покупателей равны соответственно* v_S^* *и* v_B^**, является равновесием Нэша* (9), (10) *игры G. Тогда для нее выполнены условия* (11), (12) *и* (13). ♦

Доказательство утверждения см. в Приложении.

Как видно из увеждения, при равновесии Нэша может возникнуть избыточный (неудовлетворенный) спрос при $v_B^* > v_S^*$ в условии (11) или избыточное предложение (при $v_B^* < v_S^*$). Таким образом равновесие Нэша в этой игре не приводит к классическому рыночному равновесию равенства величин спроса и предложения. Так как возможно купить только тот объем, который выставлен на

Пример равновесия Нэша при $n_B = 9$, $n_B = 7$, $P(i, j) = 5$

$\omega_i,\ i \in B$	$C_B(i) = i - 1$	$i \in B$	$P(i, j) = \max(i, n_S - j)$	j	$C_S(n_B + j) = j - 1$	$\omega_{n_B + j},\ n_B + j \in S$
0	0	1	6	1	0	1
0	1	2	5	2	1	1
0	2	3	4	3	2	1
0	3	4	4	4	3	1
0	4	5	$\boxed{5}$	5	4	1
0	5	6	6	6	5	0
1	6	7	7	$7 = n_S$	6	0
1	7	8				0
1	8	$9 = n_B$				0

продажу (и продать только тот объем, который купят), то в реальности при неудовлетворенном спросе будет совершено сделок на сумму $P(v_B^*,\ v_S^*)\,v_S^*$ (это соответствует понятию *объем торговли* (Trade Volume) в аналитике биржевых торгов). Остальная часть сделок $P(v_B^*,\ v_S^*)(v_B^* - v_S^*)$ останется незакрытыми, что соответствует понятию *открытого интереса* (Open Interest) в аналитике биржевых торгов. При избыточном предложении ($v_B^* < v_S^*$) можно рассуждать аналогично, получив незакрытую часть сделок $P(v_B^*,\ v_S^*)(v_S^* - v_B^*)$.

Существование и единственность равновесия Нэша. Если все пороги покупателей находятся левее всех порогов поставщиков, то единственным равновесием Нэша (нулевым) будет ситуация, когда все агенты бездействуют. Действительно, ни для какого игрока, будь то покупатель или продавец, не будет существовать *благоприятной обстановки*. Для существования ненулевого равновесия Нэша необходимо (но не достаточно) чтобы хотя бы один порог продавца был больше порога покупателя.

Пусть объемы у каждого покупателя и у каждого продавца единичны $v_i = 1,\ i \in B,\ v_j = 1, j \in S$. Тогда функция цены будет зависить от числа действующих игроков. Упорядочим пороги покупателей $\{C_B(i)\}_{i \in B}$ и продавцов $\{C_S(i)\}_{i \in S}$ по возрастанию вдоль оси $\mathbf{R}^+$. Будем считать, что не существует покупателей с порогом меньше минимального порога продавцов $C_S(n_S)$, а также не существует продавцов с порогом больше максимального порога покупателей $C_B(n_B)$. Их всегда можно не учитывать, так как эти покупатели и продавцы будут бездействовать при любой обстановке.

Обозначим через $P(i, j)$ функцию цены для каких-то натуральных чисел $0 \le i \le n_B$ и $0 \le j \le n_S$. Согласно утверждению, выполнение условия $C_B(i) > P(i, j) > C_S(j)$ эквивалентно равновесию Нэша. В силу упорядоченности индекса игроков по возрастанию порогов, все покупатели с индексами $i' \in B : i' \le i$ и продавцы $j' \in S : j' \ge j$ будут действовать. Остальные — бездействовать.

В качестве примера рассмотрим такие параметры игры: $\{C_B(i) = i - 1\}_{1 \le i \le n_B}$, $\{C_S(n_B + j) = j - 1\}_{1 \le j \le n_S}$, $P(i, j) = \max(i, n_S - j)$. Пример равновесия Нэша в этой игре с параметрами $n_B = 9$, $n_B = 7$, $P(i, j) = 5$ представлен в таблице (в ней ячейка для рыночной цены $P(i, j) = 5$ выделена полужирным). Легко заметить, что равновесие Нэша будет существовать для любого значения рыночной цены, а всего в такой игре будет $\min(n_B, n_S)$ равновесий Нэша, поэтому единственности, в общем, нет.

Если же мы будем выбирать из существующих равновесий Нэша те, которые минимизируют либо избыточный спрос, либо избыточное предложение, то тем самым мы, с одной стороны, выделим фокальные точки среди равновесий Нэша, а, с другой, приблизим игру к описанию классического рыночного равновесия. Так, например, для игры, представленной в таблице, такое равновесие будет при рыночной цене, равной четырем. Тогда будет равное число покупателей и продавцов (по четыре), участвующих в сделке. Формальное описание таких фокальных точек представляет интерес для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена теоретико-игровая модель бинарного порогового коллективного поведения игроков — продавцов и покупателей — на биржевом рынке. Найденная характеризация равновесия Нэша в этой игре позволяет определить уровни потенциальных спроса и предложения, а через них и состояния игроков. Модель описывает намерения игроков, но состоятся ли сделки, зависит от правил определения рыночной цены на конкретной бирже, а также от определения очередности сделок на ней.

Представляется перспективным расширить эту модель, чтобы она позволила определить реальную рыночную цену, объем спроса и предложения, исходя из общих правил работы товарных бирж. По-видимому, для этого необходимо перейти к стохастической макромодели и применить методы, аналогичные методам статистической физики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. *Достаточность.* В силу условия (12) и определения функции $\Phi_B(\cdot)$ справедливо равенство:

$$\sum_{i\in B} v_i\omega_i^* = \sum_{i\in B} v_i\chi\{C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*)\} = \Phi_B(P(v_B^*, v_S^*)),$$

значит в силу (11) выполнено равенство $v_B^* = \sum_{i\in B} v_i\omega_i^*$, что является объемом спроса в ситуации ω^*.

Аналогично, в силу условия (13) и согласно определению функции $\Phi_S(\cdot)$ справедливо

$$\sum_{i\in S} v_i\omega_i^* = \sum_{i\in S} v_i\chi\{C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*)\} = \Phi_S(P(v_B^*, v_S^*)),$$

т. е. согласно системе уравнений (11) выполнено равенство $v_S^* = \sum_{i\in S} v_i\omega_i^*$, что является объемом предложения в ситуации ω^* поставщиками S.

Докажем, что состояние ω^*, подчиняющееся выражениям (11), (12) и (13), является равновесием Нэша (9), (10). Пусть $i \in B$ таково, что $\omega_i^* = 1$, тогда из условия (12) следует, что

$$C_B(i) > P(v_B^*, v_S^*). \tag{14}$$

Согласно неравенству (14) и *неубыванию* цены $P(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу $C_B(i) > P(v_B^* - v_i, v_S^*)$. Кроме того, учитывая что $v_{B\backslash i}^* = v_B^* - v_i$, из определения целевой функции (7) и свойства (3) следует неравенство

$$u_i(1, v_{B\backslash i}^*, v_S^*) = (C_B(i) - P(v_{B\backslash i}^*, v_S^*) - \varepsilon_i)v_i > 0 = \\ = u_i(0, v_{B\backslash i}^*, v_S^*),$$

т. е. для $\omega_i^* = 1$ выполнено неравенство Нэша для покупателя $i \in B$.

Если $\omega_i^* = 0$, $i \in B$, то из условия (12) следует, что

$$C_B(i) \le P(v_B^*, v_S^*). \tag{15}$$

Значит, согласно определению целевой функции (7), неравенствам (15) и $\varepsilon_i > 0$ с учетом $v_{B\backslash i}^* = v_B^*$ выполнено неравенство

$$u_i(0, v_{B\backslash i}^*, v_S^*) = 0 \ge (C_B(i) - P(v_B^*, v_S^*))v_i > \\ > (C_{B\backslash i}(i) - P(v_{B\backslash i}^*, v_S^*) - \varepsilon_i)v_i = u_i(1, v_{B\backslash i}^*, v_S^*),$$

т. е. для $\omega_i^* = 0$ выполнено неравенство Нэша для покупателя $i \in B$.

Таким образом, для любого покупателя $i \in B$ значение ω_i^*, определяемое условием (12), *не уменьшает* значения его целевой функции.

Аналогично это можно показать и для множества продавцов S. Так, пусть $i \in S$ таково, что $\omega_i^* = 1$, тогда из условия (13) следует, что

$$C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*), \tag{16}$$

т. е. согласно неравенству (16) и *невозрастанию* цены $P(\cdot,\cdot)$ по второму аргументу $C_S(i) < P(v_B^*, v_S^*) \le P(v_B^*, v_S^* - v_i)$. В силу определения целевой функции (8) и свойства (4), с учетом $v_{S\backslash i}^* = v_S^* - v_i$, выполнено неравенство

$$u_i(1, v_B^*, v_{S\backslash i}^*) = (P(v_B^*, v_{S\backslash i}^*) - C_B(i) - \varepsilon_i)v_i > 0 = \\ = u_i(0, v_B^*, v_{S\backslash i}^*).$$

Поэтому при $\omega_i^* = 1$ выполнено равновесие Нэша для поставщика $i \in S$.

Если $\omega_i^* = 0$, $i \in S$, то из условия (13) следует, что

$$C_S(i) \ge P(v_B^*, v_S^*). \tag{17}$$

Согласно определению целевой функции (8), неравенствам (17) и $\varepsilon_i > 0$, учитывая, что $v_{S\backslash i}^* = v_S^*$, выполнено неравенство

$$u_i(0, v_B^*, v_{S\backslash i}^*) = 0 \ge (P(v_B^*, v_{S\backslash i}^*) - C_S(i))v_i > \\ > (P(v_B^*, v_{S\backslash i}^*) - C_S(i) - \varepsilon_i)v_i = u_i(1, v_B^*, v_{S\backslash i}^*),$$

в силу которого действие $\omega_i^* = 0$ выгодно для поставщика $i \in S$. Таким образом, для любого поставщика $i \in S$ значение ω_i^*, определяемое условием (13), *не уменьшает* значения его целевой функции, т. е. состояние ω^* является равновесием Нэша (9) и (10). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $v_B^* = \sum_{i\in B} v_i\omega_i^*$, $v_S^* = \sum_{i\in S} v_i\omega_i^*$ — соответственно объемы спроса и предложения в ситуации равновесия Нэша (9), (10).

Докажем, что из выражения (9) следует условие (12). Предположим, что условие (12) не выполнено, т. е. $\exists i_0 \in B$: $\omega_{i_0}^* = \chi\{C_B(i_0) \le P(v_B^*, v_S^*)\}$. Но тогда, если $\omega_{i_0}^* = 1$, то $C_B(i_0) \le P(v_B^*, v_S^*)$. Так как $v_B^* = v_{B\backslash i_0}^* + v_{i_0}$ и справедливо выражение (5), выполнено неравенство

$$u_{i_0}(1, v_{B\backslash i_0}^*, v_S^*) = (C_B(i_0) - P(v_{B\backslash i_0}^*, v_S^*) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} < \\ < (C_B(i_0) - P(v_B^*, v_S^*))v_{i_0} \le 0 = u_{i_0}(0, v_{B\backslash i_0}^*, v_S^*),$$

т. е. $\omega_{i_0}^* = 1$ не соответствует равновесию Нэша, так как при $\omega_{i_0}^* = 0$ целевая функция (7) имеет строго большее значение.

Если же $\omega_{i_0}^* = 0$, то, в силу предположения, что условие (12) не выполнено, справедливо $C_B(i_0) > P(v_B^*, v_S^*)$. Так как $v_{B\backslash i_0}^* = v_B^*$ и, значит, в силу неравенства (3) выполнено:

$$u_{i_0}(0, v_{B\backslash i_0}^*, v_S^*) = 0 < (C_B(i_0) - P(v_B^*, v_S^*) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} = \\ = u_{i_0}(1, v_{B\backslash i_0}^*, v_S^*),$$

т. е. $\omega^*_{i_0} = 0$ не соответствует равновесию Нэша. Согласно принципу «от противного» из выражения (9) следует условие (12).

Докажем, что из выражения (10) следует условие (13). Предположим, что условие (13) не выполнено, т. е. $\exists i_0 \in S$: $\omega^*_{i_0} = \chi\{C_S(i_0) \geq P(v^*_B,\ v^*_S)\}$. Но тогда, если $\omega^*_{i_0} = 1$, то $C_S(i_0) \geq P(v^*_B,\ v^*_S)$. Поскольку $v^*_S = v^*_{S\backslash i_0} + v_{i_0}$, то с учетом выражения (6), выполнено неравенство

$$u_{i_0}(1,\ v^*_B,\ v^*_{S\backslash i_0}) = (P(v^*_B,\ v^*_{S\backslash i_0}) - C_S(i_0) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} < \\ < (P(v^*_B,\ v^*_S) - C_S(i_0))v_{i_0} \leq 0 = u_{i_0}(0,\ v^*_B,\ v^*_{S\backslash i_0}).$$

Если же $\omega^*_{i_0} = 0$, то $C_S(i_0) < P(v^*_B,\ v^*_S)$. Так как $v^*_{B\backslash i_0} = v^*_B$ и, значит, в силу (4) выполнено неравенство:

$$u_{i_0}(0,\ v^*_{B\backslash i_0},\ v^*_S) = 0 < (P(v^*_B,\ v^*_S) - C_S(i_0) - \varepsilon_{i_0})v_{i_0} = \\ = u_{i_0}(1,\ v^*_{B\backslash i_0},\ v^*_S).$$

Согласно принципу «от противного» из выражения (9) следует условие (12).

Из выполнения условий (12) и (13) и по определению функций $\Phi_B(\cdot)$ и $\Phi_S(\cdot)$, как это было проделано вначале доказательства, следует система уравнений (11). Необходимость доказана. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kristoufek, L., Vosvrda, M.* Herding, Minority Game, Market Clearing and Efficient Markets in a Simple Spin Model Framework // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. — 2018. — Vol. 54. — P. 148—155.
2. *Wang, J., Deng, S.* Fluctuations of Interface Statistical Physics Models Applied to a Stock Market Model // Nonlinear Analysis:Real World Applications. — 2008. — Vol. 9. — P. 718—723.
3. *Nyberg, H.* Forecasting the Direction of the US Stock Market with Dynamic Binary Probit Models // International Journal of Forecasting. — 2011. — Vol. 27. — P. 561—578.
4. *Sato, A.-H., Takayasu, H.* Dynamic Numerical Models of Stock Market Price: from Microscopic Determinism to Macroscopic Randomness // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — February 1998. — Vol. 250, iss. 1—4, 15. — P. 231—252.
5. *Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T., Hamada, K.* Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements — the Case of Market Price // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — June 1992. — Vol. 184, iss. 1. — P. 127—134. DOI: 10.1016/0378-4371(92)90161-I
6. *Бреер В.В.* Теоретико-игровые модели конформного поведения // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 10. — С. 111—126. [*Breer, V.V.* Game-theoretic models of collective conformity behavior. — Automation & Remote Control. — 2012. — Vol. 73. — P. 1680—1692.]
7. *Курс* экономической теории / под ред. А.Н. Чепурина, Е.А. Киселевой. — Киров: АСА, 2006. — 832 с. [*Kurs* ekonomicheskoi teorii / M.N. Chepurin, E.A. Kisileva (eds). — Kirov: ASA, 2006. — 832 s. (In Russian)]
8. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 255 с. [*Burkov, V.N.* Osnovy matematicheskoi teorii aktivnykh sistem. — M.: Nauka, 1977. — 255 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 16.03.2020, после доработки 26.03.2020. Принята к публикации 28.03.2020.

Бреер Владимир Валентинович — канд. техн. наук,
✉ breer@live.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

GAME-THEORETIC THRESHOLD MODEL OF THE STOCK MARKET

V.V. Breer

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
✉ breer@live.ru

Abstract. The game-theoretic model of the binary threshold collective behavior of agents who participate in the sale and purchase of a single exchange asset is considered. The agents were divided into two groups — buyers and sellers. It was assumed that for each of the agents, a threshold of acceptable price exists; for the buyer — it is the upper price at which he still agrees to make the transaction, and for the seller — it is the lower «comfortable» price. It was taken into account that the agent decides whether to participate in the transaction by comparing his threshold price with the market price. It was assumed that the market price is affected by the volumes of supply and demand in accordance with the classic supply and demand curves. Empirical distribution functions of price thresholds are constructed, which are used to characterize Nash equilibrium, and also allow to study the limit transition to an infinite number of agents in the future. A theorem on the characterization of Nash equilibrium is proved, the first part of which shows the volumes of potential supply and demand. The second part of this characterization presents the state of agents based on the volumes of supply and demand. We studied examples of the existence and uniqueness conditions for Nash equilibrium. Focal points are found among all Nash equilibria.

Keywords: game-theoretic model, binary threshold collective behavior, exchange commodity market, Nash equilibrium.