

МОДЕЛИ ТОЛЕРАНТНОГО ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ (от Т. Шеллинга — к М. Грановеттеру)

В.В. Бреер

Рассмотрены модели толерантности, берущие начало с работы Т. Шеллинга. Показано, что толерантное пороговое поведение, включая исходную модель Шеллинга, можно свести к модели М. Грановеттера с определенной функцией распределения порогов. Исследована модель, описывающая конкуренцию внутри группы одновременно с абсолютной симпатией к противоположной группе — своего рода «толерантность наоборот». Эти же два типа поведения изучены в непрерывном времени, для которого дополнительно учтены эффекты забывания и запаздывания, приводящие к затухающим и незатухающим колебательным процессам.

Ключевые слова: толерантность, модель ограниченного окружения, модель Шеллинга, модель Грановеттера.

ВВЕДЕНИЕ

Работа Т. Шеллинга [1] дала толчок к исследованию моделей толерантного порогового поведения, таких как модель пространственного соседства (spatial proximity model) и модель ограниченного окружения (bounded-neighborhood model). Несколько лет спустя М. Грановеттер опубликовал работу [2], в которой изучается модель порогового конформного поведения. Это работа также стала классической для развития моделей конформного поведения. Подробное описание этих моделей и их последующего развития можно найти в обзорах [3–5]. Модели Шеллинга используются, например, в изучении поведения этнических групп [6] и сегрегации в районе проживания [7]. Модель порогового поведения Грановеттера используется, например, при описании психологических аспектов принятия решений [8] и поведения толпы [9].

Общим для обеих моделей является понятие социального порогового взаимодействия, которое можно определить следующим образом: — у агента существуют только два выбора: действовать или бездействовать; — социальное взаимодействие означает, что агент, осуществляя свой выбор, учитывает поведение других агентов — так называемое социальное давление; — у агента есть своя инди-

видуальность в виде собственного порога: если социальное давление больше этого порога, то агент действует, иначе — бездействует.

Математические модели социального порогового взаимодействия формулируются либо в виде рекуррентного соотношения для функции распределения порогов в дискретном времени, либо в виде системы дифференциальных уравнений в непрерывном времени, либо в виде теоретико-игровой модели [10, 11]. Здесь мы будем рассматривать только первые две формулировки.

В настоящей статье доказываются эквивалентность модели ограниченного окружения Шеллинга и модели порогового поведения Грановеттера с соответствующей функцией распределения порогов. Кроме того, исследуются свойства положений равновесия для параметрически заданной функции распределения в дискретном и непрерывном времени.

Структура изложения. В § 1 изучается общая модель толерантного порогового поведения (ТПП) двух групп агентов в дискретном времени. Ключевым ее примером служит «модель ограниченного соседства» Шеллинга. После формального описания этой модели доказываются утверждение о том, что она эквивалентна рекуррентной процедуре пороговой модели Грановеттера с конструктивно получаемой функцией распределения порогов. Для классического примера модели ограниченного со-

седства показывается, что ее положения равновесия совпадают с положениями равновесия модели ТПП. Для изучения различных видов равновесия модели ТПП в качестве функции распределения вводится бета-функция, имеющая два параметра. Эти параметры имеют ясные содержательные интерпретации в рамках модели ТПП. В конце § 1 изучается зависимость положений равновесия от еще одного параметра — соотношения количеств агентов в разных группах.

В § 2 изучается динамическая модель внутренне конкурентного порогового поведения (ВКПП) двух групп агентов в дискретном времени. Эта модель является «противоположной» к модели ТПП в том смысле, что агенты проявляют различную степень толерантности по отношению к агентам своей группы, тогда как к чужой группе они проявляют абсолютную симпатию. Как и в модели ТПП, находится эквивалентная модель Грановеттера, для которой изучаются различные виды положения равновесия в зависимости от параметров.

В § 3 обосновывается переход в моделях ТПП и ВКПП к непрерывному времени. Положения равновесия этих моделей в дискретном и непрерывном времени совпадают, тогда как для модели ВКПП устойчивости в дискретном случае нет, а в непрерывном она имеет место. В § 4 изучаются модифицированные модели ВКПП в непрерывном времени, в которых учитываются факторы субъективного восприятия агентов: забывание и запаздывание принятия решения. Для модели ВКПП с забыванием приводится пример параметров, когда ее положение равновесия совпадает с исходной, не модифицированной моделью, но при этом возникает переходный процесс. Для модели ВКПП с запаздыванием субъективные представления агента не совпадают с реальностью и, при определенных значениях параметра, устойчивого равновесия не существует, а наблюдается циклический процесс.

В Заключение подводятся итоги и указываются перспективные направления дальнейших исследований.

1. МОДЕЛЬ ТОЛЕРАНТНОГО ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП АГЕНТОВ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Модель ограниченного соседства (Bounded neighborhood model). Следуя содержательной модели Т. Шеллинга [1], рассмотрим два множества — «зеленых» и «синих»¹ агентов, у которых есть вы-

бор: проживать совместно по соседству (neighborhood) в данном районе или выбрать альтернативные места проживания. Агенты одного и того же цвета *уживаются* (мирно проживают рядом друг с другом) без каких-либо ограничений. К агентам другого «цвета» каждый агент относится с разной степенью *толерантности*, что выражается в терпимости к определенному количеству агентов другого цвета, проживающих в районе.

Степень толерантности агента характеризуется *порогом* толерантности к агентам другого цвета. Это пороговое поведение можно описать следующим образом: если *число* агентов другого цвета не превышает этого порога, то его устраивает такое соседство. В противном случае агент выбирает альтернативные места проживания. Построим формальную модель, описывающую динамику долей агентов двух цветов, уживающихся друг с другом. Начнем с простейшего случая — конечного числа агентов, принимающих решения в дискретном времени.

Обозначим конечное множество «зеленых» агентов через G , их количество $n_G = |G|$. Конечное множество «синих» агентов обозначим через B (количество $n_B = |B|$). Будем считать, что $x \in [0, \infty)$ равно отношению числа синих к числу зеленых, уживающихся друг с другом. Пусть $\hat{F}_G: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ и $\hat{F}_B: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ — функции распределения порогов толерантности зеленых и синих агентов соответственно. В момент времени $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $x = x^{(k)} \in [0, \infty)$.

По определению функции распределения, $\hat{F}_G(x^{(k)})$ — это доля зеленых агентов, у которых порог толерантности не превышает $x^{(k)}$. Тогда доля $1 - \hat{F}_G(x^{(k)})$ зеленых агентов будет готова уживаться с синими на следующем шаге. Доля $1 - \hat{F}_B(1/x^{(k)})$ синих агентов также готова терпеть отношение $1/x^{(k)}$ зеленых к синим. Таким образом, на шаге $k + 1$ отношение уживающихся «синих к зеленым»

$$x^{(k+1)} = \frac{n_B \left[1 - \hat{F}_B\left(\frac{1}{x^{(k)}}\right) \right]}{n_G [1 - \hat{F}_G(x^{(k)})]}. \quad (1)$$

Бесконечные интервалы области определения функций распределения не совсем удобны для параметрического анализа рекуррентной процедуры (1), поэтому перейдем к относительным долям проживающих вместе агентов. Для этого сделаем замену переменных, обозначив $y = \frac{1}{1+x} \in [0, 1]$.

¹ В оригинале [1] агенты — белые и черные, что подчеркивало проблематику расовых взаимоотношений в США. Мы будем придерживаться в этом смысле более нейтральной «цветовой» классификации.

Очевидно, что y характеризует долю синих в числе всех уживающихся агентов. Учитывая, что $x = y/(1 - y)$, перепишем рекуррентное соотношение (1) в виде:

$$\frac{y^{(k+1)}}{1 - y^{(k+1)}} = \frac{n_B \left[1 - \hat{F}_B \left(\frac{1 - y^{(k)}}{y^{(k)}} \right) \right]}{n_G \left[1 - \hat{F}_G \left(\frac{y^{(k)}}{1 - y^{(k)}} \right) \right]}. \quad (2)$$

Обозначим $R_{G/B} = \frac{n_G}{n_B}$, $F_G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $F_B: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$F_G(y) = \hat{F}_G \left(\frac{y}{1 - y} \right), \quad F_B(y) = \hat{F}_B \left(\frac{y}{1 - y} \right), \quad (3)$$

$$F_{GB}(y) = \frac{1 - F_B(1 - y)}{R_{G/B}(1 - F_G(y)) + 1 - F_B(1 - y)}. \quad (4)$$

Так как мы перешли от абсолютных значений численностей агентов к их отношениям, то будем считать, что как функция (4), так и ее аргументы могут принимать не только рациональные, но и действительные значения. Это допущение вполне обоснованно для большого количества агентов.

Утверждение 1. Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$x^{(k+1)} = F_{GB}(y^{(k)}), \quad (5)$$

причем, если функция $\hat{F}_B(\cdot)$ непрерывна, то $F_{GB}(\cdot)$ является некоторой функцией распределения. ♦

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Таким образом, модель Шеллинга сведена к модели Грановеттера с функцией распределения порогов $F_{GB}(\cdot)$. Положениями равновесия динамической системы (5) являются точки множества $ES = \{y \in [0, 1] | y = F_{GB}(y)\}$, причем устойчивыми (асимптотически устойчивыми) будут положения равновесия из множества

$$SES = \{y^* \in ES | \forall \varepsilon > 0 \exists K \geq 0: \forall k \geq K \rightarrow |y^{(k)} - y^*| < \varepsilon\}. \quad (5)$$

Покажем, как параметры исходных распределений порогов толерантности влияют на положения равновесия динамической системы (5). Для этого воспользуемся соответствующими диаграммами Ламерея.

Пример 1. Начнем с описанного Шеллингом [1] примера, в котором исследуется случай распределения по-

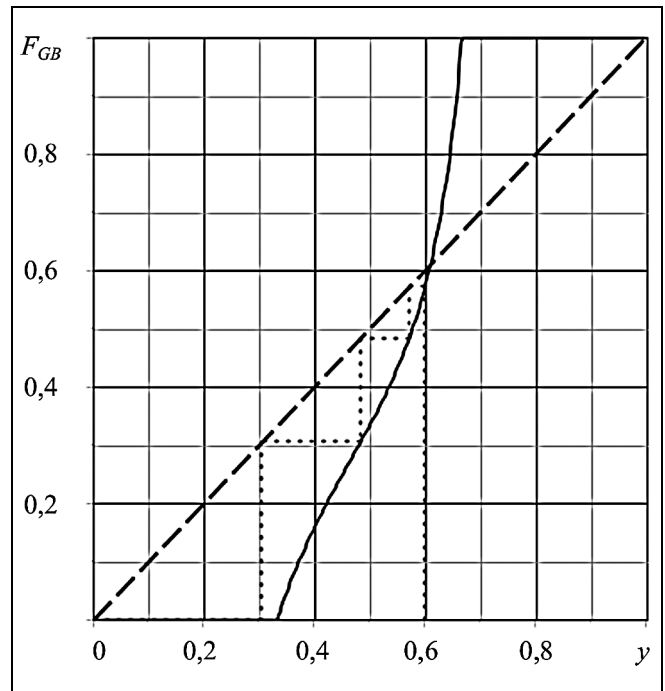


Рис. 1. Диаграмма Ламерея процедуры (5) для функций распределения (7), $y_0 = 0,6$

рогов отношения «чужие к своим» в окрестности проживания в виде

$$\hat{F}_G(x) = \hat{F}_B(x) = \begin{cases} 0,5x, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases} \quad (6)$$

В работе [1, с. 169] графически были найдены три положения равновесия — 0 (устойчивое), ∞ (устойчивое) и $x \approx 1,5$ (неустойчивое). Преобразовав функцию (6) в соответствии с выражением (3), получим:

$$F_G(y) = F_B(y) = \begin{cases} \frac{y}{2(1-y)}, & y \leq \frac{2}{3}, \\ 1, & y > \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (5) выражение (7) и $R_{G/B} = 2$, получим диаграмму Ламерея, изображенную на рис. 1. Видно, что существуют два устойчивых положения равновесия — 0 и 1, что соответствует 0 и ∞ для функций распределения (6), и одно неустойчивое положение равновесия $y \approx 0,61$, что соответствует $x \approx 1,5$. Таким образом, модели с параметрами [1, с. 169] и (5) совпадают (дают одинаковые результаты). ♦

Рекуррентная процедура (5) позволяет проводить качественный и количественный анализ равновесий для более общих видов функции распределения, чем описанные в работе [1]. Для иллюстрации различных случаев равновесия удобно использовать двухпараметрическую функцию, на-

Таблица 1

Различные виды распределения порогов толерантности

α, β	График $B(\cdot; \alpha, \beta)$	Описание распределения порогов толерантности группы
$\alpha < 1$ $\beta > 1$		Пороги сосредоточены в области малых значений. Низкая толерантность группы, т. е. <i>не-приянь</i> к чужим (ксенофобия)
$\alpha > 1$ $\beta > 1$		Пороги сосредоточены в средней области значений. Средняя толерантность группы, т. е. <i>настороженность</i> к чужим
$\alpha < 1$ $\beta < 1$		Пороги сосредоточены в области малых и больших значений. Смешанная толерантность, т. е. группа <i>расколота</i> на две подгруппы, одна из которых <i>симпатизирует</i> чужим, а другая испытывает к ним <i>неприянь</i>
$\alpha > 1$ $\beta < 1$		Пороги сосредоточены в области больших значений. Высокая толерантность группы, т. е. <i>симпатия</i> к чужим

пример, — бета-распределение, задаваемое соотношением:

$$B(x; \alpha, \beta) = \frac{\int_0^x y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy}{\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy},$$

где $\alpha > 0, \beta > 0$. (8)

В табл. 1 приведены графики бета-распределения при различных значениях параметров, а также соответствующие интерпретации порогов толерантности произвольной группы агентов.

В табл. 2 приведены графики функции $F_{G/B}(\cdot)$ для различных пар характерных значений параметров (α_G, β_G) и (α_B, β_B) , где в качестве функций распределения порогов взято бета-распределение (8) и $R_{G/B} = 0,5$. Устойчивые положения равновесия изображены крупными точками, а примеры диаграмм Ламерея (для определенных начальных условий) — пунктирной линией.

Если разделить табл. 2 на четыре квадранта (см. жирные линии) и пронумеровать их, двигаясь из правого верхнего против часовой стрелки, то можно увидеть следующие закономерности.

1. В квадранте II существуют два крайних положения равновесия (0 или 1). Это соответствует

Графики функции $F_{GB}(\cdot)$ и положения равновесия для различных значений параметров

Таблица 2

$R_{G/B} = 0,5$	$\alpha_B < 1, \beta_B > 1$	$\alpha_B > 1, \beta_B > 1$	$\alpha_B < 1, \beta_B < 1$	$\alpha_B > 1, \beta_B < 1$
$\alpha_G < 1$ $\beta_G > 1$				
$\alpha_G > 1$ $\beta_G > 1$				
$\alpha_G < 1$ $\beta_G < 1$				
$\alpha_G > 1$ $\beta_G < 1$				

случаю, когда коэффициент β для обеих групп агентов больше единицы, т. е. (согласно табл. 1 в группах существует низкая или средняя толерантности). То, к какому положению равновесия сойдется процесс, зависит от начальных условий.

2. В квадранте I устойчиво положение равновесия 1, т. е. зеленые не уживаются с синими и выбирают альтернативные места проживания. В данном случае зеленые относятся к синим с настороженностью или неприязнью ($\beta_G > 1$), а синие — частично или полностью им симпатизируют ($\beta_B > 1$). Число положений равновесия и их координаты в нижних двух графиках этого квадранта зависят от $R_{G/B}$. Эти случаи мы рассмотрим в § 4.

3. В квадранте III левые два графика соответствуют единственному положению равновесия 0. Этот случай симметричен случаю, рассмотренному в § 1.

4. Устойчивые положения равновесия, когда по соседству живут агенты разных цветов, сосредоточены в четвертом квадранте, т. е. это имеет место, когда обе группы расколоты или симпатизируют друг другу (см. табл. 1).

5. Два правых графика квадранта III также имеют внутреннее положение устойчивого равновесия. Но возникновение этого положения равновесия зависит от параметра $R_{G/B}$, т. е. соотношения общего числа агентов из разных групп. Зависимость положений равновесия $y: F_{GB}(y) = y$ от этого параметра для правого верхнего графика квадранта III иллюстрирует рис. 2. Как видно, для $R_{G/B} \geq 1$ существует одно устойчивое положение равновесия 0, т. е. в районе остаются только зеленые агенты. Для других значений $R_{G/B}$ положений равновесия будет больше. Так же будут зависеть от параметра $R_{G/B}$ положения устойчивого равновесия для двух нижних графиков квадранта I.

На рис. 2 изображен график двумерной поверхности $F_{GB}(\cdot)$, зависящей от относительного числа синих агентов y и отношения количеств зеленых к синим $R = R_{G/B}$. Эту поверхность пересекает диагональ, выделенная более светлым оттенком серого. На рисунке видно геометрическое место точек пересечения функции $F_{GB}(\cdot)$ с диагональю, для каждого фиксированного $R_{G/B}$. Если $R_{G/B} < 1$, то существует четыре положения равновесия динамической системы, при $R_{G/B} = 1$ — три, а при $R_{G/B} > 1$ — два. Устойчивость этих положений равновесия будет определяться, каким образом линия $F_{GB}(\cdot)$ пересекает диагональ: если сверху-вниз, то положение устойчиво, а если снизу-вверх, то неустойчиво.

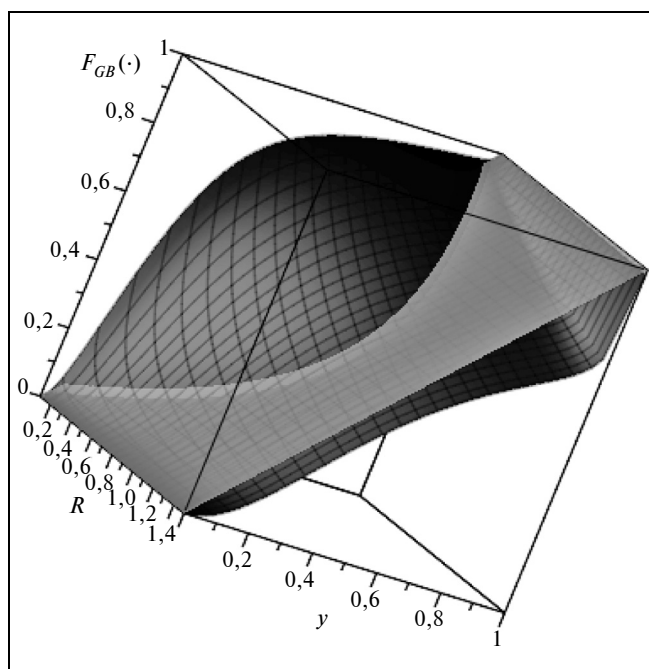


Рис. 2. График функции $F_{GB}(\cdot)$ в зависимости от y и параметра $R = R_{G/B}$

В данной модели мы рассмотрели динамику поведения, когда агенты настроены с разной степенью толерантности по отношению к членам чужой группы, причем «своих» они воспринимают абсолютно дружелюбно. Но может существовать и обратная ситуация, к изучению которой мы переходим.

2. МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕ КОНКУРЕНТНОГО ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП АГЕНТОВ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим теперь противоположную, в некотором смысле, модель, когда «толерантность» проявляется по отношению к своему цвету. Здесь базовым примером может быть следующая «экономическая» интерпретация. Предположим, что цвета характеризуют группы производителей, причем производители одного цвета выпускают замещающие типы продукции, т. е. являются конкурентами. Агенты другого цвета являются потребителями их продукции. Соответственно, каждый производитель может «терпеть» не более определенного числа конкурентов, иначе, ожидая перепроизводства, он уходит на другой рынок. Потребители также терпят определенное число других потребителей, и в случае ожидаемого дефицита уходят на другие рынки.

Сохраняя ранее принятые обозначения для множеств агентов, пусть $\hat{Q}_G : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ и $\hat{Q}_B : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ — функции распределения порогов толерантности зеленых и синих агентов по отношению к членам своих групп (агентов своего цвета) соответственно. Пусть $x \in [0, \infty)$ равно отношению числа синих к числу зеленых агентов на рынке.

По определению функции распределения $\hat{Q}_G(1/x^{(k)})$ — это доля зеленых агентов, у которых порог терпимости не превышает $1/x^{(k)}$. Тогда доля $1 - \hat{Q}_G(1/x^{(k)})$ зеленых агентов будет готова уживаться между собой на следующем шаге. Доля $1 - \hat{Q}_B(x^{(k)})$ синих агентов также готова терпеть отношение $x^{(k)}$ синих к зеленым. Таким образом, на шаге $k + 1$ отношение уживающихся «синих к зеленым»

$$x^{(k+1)} = \frac{n_B[1 - \hat{Q}_G(1/x^{(k)})]}{n_W[1 - \hat{Q}_B(x^{(k)})]}.$$

Обозначив $y = \frac{x}{1+x} \in [0, 1]$ и делая замену переменных

$$Q_G(y) = \hat{Q}_G\left(\frac{y}{1-y}\right), \quad Q_B(y) = \hat{Q}_B\left(\frac{y}{1-y}\right),$$

$$Q_{GB}(y) = \frac{1 - Q_B(y)}{R_{G/B}(1 - Q_G(1-y)) + 1 - Q_B(y)}, \quad (9)$$

можно доказать (аналогично доказательству утверждения 1), что $Q_{G/B}$ — невозрастающая функция и

$$y^{(k+1)} = Q_{GB}(y^{(k)}). \quad (10)$$

В табл. 3 приведены графики функции $Q_{G/B}(\cdot)$ для различных пар параметров (α_G, β_G) , (α_B, β_B) соответствующих функций (8) распределения порогов групп зеленых и синих агентов и $R_{G/B} = 2$, которые подставляются в формулу (10).

Разбивая, как и табл. 2, таблицу 3 на квадранты, можно отметить следующее.

1. Параметры в квадранте II соответствуют неприязни как внутри группы покупателей $\beta_G > 1$,

Таблица 3

Графики функции $Q_{GB}(\cdot)$ и положения равновесия для различных значений параметров

$R_{G/B} = 2$	$\alpha_B < 1, \beta_B > 1$	$\alpha_B > 1, \beta_B > 1$	$\alpha_B < 1, \beta_B < 1$	$\alpha_B > 1, \beta_B < 1$
$\alpha_G < 1$ $\beta_G > 1$				
$\alpha_G > 1$ $\beta_G > 1$		II		I
$\alpha_G < 1$ $\beta_G < 1$		III		IV
$\alpha_G > 1$ $\beta_G < 1$				

так и производителей $\beta_B > 1$, что может иметь место в ситуации повышенных рисков ожиданий. Оказывается, что в этом случае равновесие неустойчиво, и процесс (13) переходит в цикл.

2. Так же есть две пары значений параметров, когда существует циклическое решение — это левые два графика квадранта I. Но, как и в случае п. 5 (см. § 1, пояснения к табл. 2), такое поведение зависит от соотношения числа синих и зеленых агентов $R_{G/B}$. При других значениях этого параметра цикла может и не быть, как видно из симметричных двух правых графиков квадранта III, где в указанном случае преобладания производителей над покупателями ($R_{G/B} = 2$) и терпимости производителей к конкуренции ($\beta_G < 1$), равновесие устойчиво.

3. В квадранте IV равновесие устанавливается относительно быстро (мало шагов диаграммы Ламерея). Это объясняется низким уровнем неприязни внутри групп покупателей и продавцов $\beta_G < 1$ и $\beta_B < 1$, который в свою очередь является следствием их уверенности в дальнейшем продолжении бизнеса (низкие рискованные ожидания).

Мы рассмотрели случай, когда все агенты *одновременно* в каждый момент времени принимают решение. Если же решения принимаются не одновременно, то полезно рассмотреть модель в непрерывном времени, к чему мы и переходим.

3. МОДЕЛИ ДВУХ ГРУПП АГЕНТОВ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим модель, когда изменения действий агентов происходит не одновременно. Так, пусть в момент времени величина $y_n^{(k)}$ есть доля действующих на шаге k синих агентов относительно всего количества агентов $n = n_G + n_B$. На следующем шаге $k + 1$ доля *намеревающихся* действовать равна $F_{GB}(y_n^{(k)}) - y_n^{(k)}$ для модели ТПП и $Q_{GB}(y_n^{(k)}) - y_n^{(k)}$ для модели ВКПП. Но они реализуют свое намерение не одновременно, а в среднем один агент исполняет свое намерение на интервале времени $[k, k + 1]$. Тогда можно записать

$$y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)} = \frac{1}{n} [F_{GB}(y_n^{(k)}) - y_n^{(k)}],$$

$$y_n^{(0)} = y_0 \in [0, 1],$$

$$y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)} = \frac{1}{n} [Q_{GB}(y_n^{(k)}) - y_n^{(k)}],$$

$$y_n^{(0)} = y_0 \in [0, 1],$$

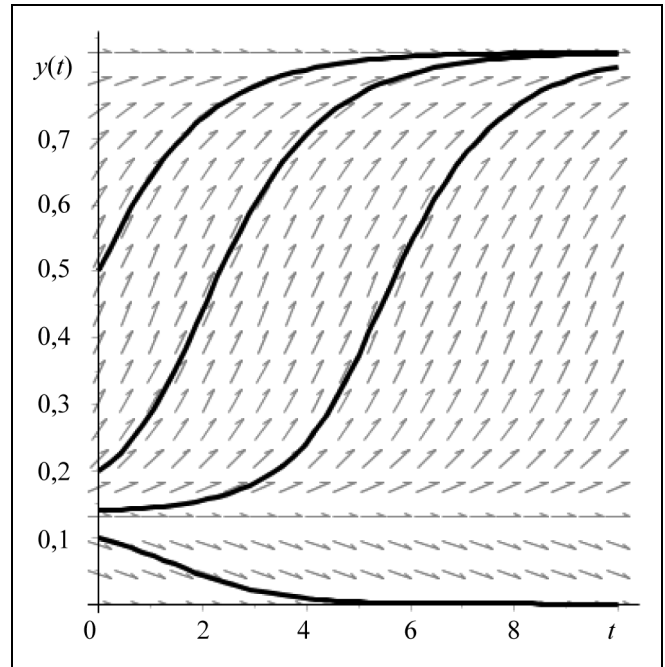


Рис. 3. Фазовый портрет модели ТПП для $\alpha_G < 1$, $\beta_G < 1$ и $\alpha_B > 1$, $\beta_B > 1$

где F_{GB} и Q_{GB} определяются выражениями (4) и (9) соответственно.

Для большого числа агентов $n \gg 1$ получаем модели в непрерывном времени $t \in [0, \infty)$ (это можно показать строго, но здесь мы не будем приводить доказательства):

$$\dot{y} = F_{GB}(y) - y, \quad y_0 \in [0, 1], \quad (11)$$

$$\dot{y} = Q_{GB}(y) - y, \quad y_0 \in [0, 1]. \quad (12)$$

Для моделей ТПП и ВКПП в дискретном (5), (10) и непрерывном (11), (12) времени положения равновесия совпадают, так как и в том, и в другом случае они определяются уравнением $F_{GB}(y) = y$ (для модели ВКПП $Q_{GB}(y) = y$).

Пример 2. Для модели ТПП с бета-распределениями (8) $\alpha_G < 1$, $\beta_G < 1$ и $\alpha_B > 1$, $\beta_B > 1$ эскиз фазового портрета представлен на рис. 3. Жирные линии соответствуют траекториям модели ТПП с различными начальными условиями. Как видно из этого рисунка, положения равновесия совпадают с равновесиями системы в дискретном времени (см. табл. 2).

Для модели ВКПП условия устойчивости равновесий отличаются в случае дискретного и непрерывного времени при одних и тех же параметрах ($\alpha_G > 1$, $\beta_G > 1$ и $\alpha_B < 1$, $\beta_B < 1$). Это видно из рис. 4 и 5. Например, на рис. 4 диаграмма Ламерея показывает, что равновесие циклично, тогда как на рис. 5 линии фазового портрета

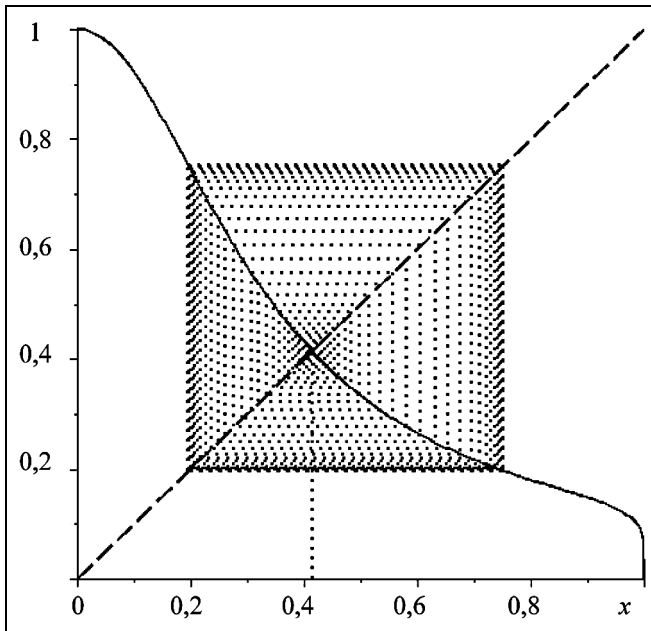


Рис. 4. Цикл модели ВКПП в дискретном времени

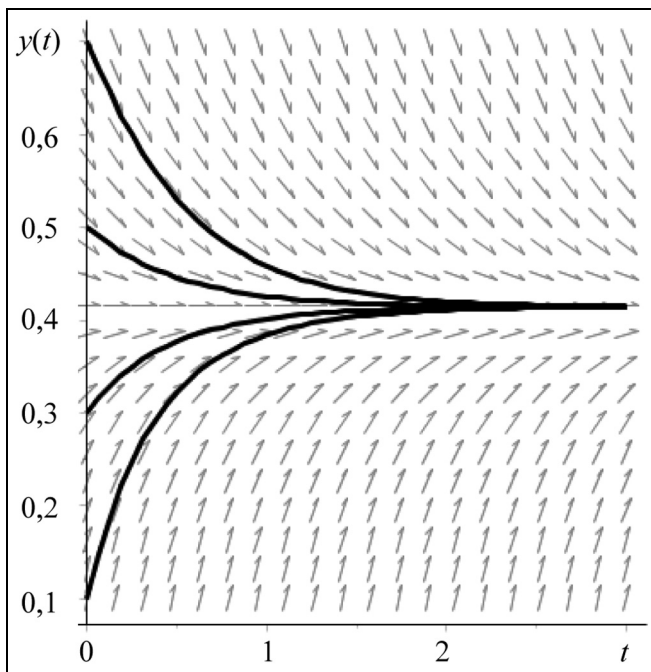


Рис. 5. Устойчивость модели ВКПП в непрерывном времени

сходятся к единственному положению равновесия (жирными линиями изображены несколько траекторий с соответствующими начальными условиями). ♦

Рассмотрим теперь варианты модели ВКПП, когда агенты воспринимают долю действующих субъективно.

4. МОДЕЛЬ ВНУТРЕННЕ КОНКУРЕНТНОГО ПОРОГОВОГО ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ С СУБЪЕКТИВНЫМ ВОСПРИЯТИЕМ

Модифицируем модель ВКПП (12), добавив фактор субъективности восприятия агентами доли соседствующих синих агентов. Так, пусть доля y_t синих агентов воспринимается всеми (и синими, и зелеными) агентами усредненной за все предшествующее время:

$$z_t = \int_0^t h(t-s)y(s)ds / \int_0^t h(t-s)ds, \quad (13)$$

где $h(\cdot)$ — некоторая функция усреднения, например, учитывающая забывание $h(s) = e^{-\alpha s}$ (α — коэффициент забывания) или выделяющая в предыстории определенный момент времени (запаздывание реакции) $h(s) = se^{-\alpha s}$. Если агенты действуют с учетом субъективно воспринимаемой доли агентов (13), то модель (12) следует переписать в виде

$$\dot{Y}_t = Q_{GB}(z_t) - Y_t, \quad Y_0 \in [0, 1], \quad (14)$$

где z_t определяется формулой (13), а Y_t — решение уравнения (14).

Утверждение 2. Для $h(s) = e^{-\alpha s}$ интегро-дифференциальную систему уравнений (13), (14) можно свести к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{Y}_t = Q_{GB}(z_t) - Y_t, & Y_0 \in [0, 1], \\ \dot{z}_t = \frac{\alpha Y_t - e^{-\alpha t} z_t}{1 - e^{-\alpha t}} - \alpha z_t, & z_0 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для тех же параметров функции (9) ($\alpha_G > 1$, $\beta_G > 1$ и $\alpha_B < 1$, $\beta_B < 1$), график которой изображен на рис. 5, для $y(0) = Y(0) = 0,2$ на рис. 6 изображены траектории решения уравнения (12) и системы (15) ($\alpha = 0,5$).

Из рис. 6 видно, что траектория $Y(t)$ решения системы (15) вначале растет быстрее «объективной» траектории (12), что объясняется малой долей, воспринимаемой на начальном этапе (линия $z(t)$). Но через некоторое время все процессы сходятся к одному и тому же значению. Это не имеет места, когда мы рассматриваем процесс «с запаздыванием».

Утверждение 3. Для $h(s) = se^{-\alpha s}$ интегро-дифференциальную систему уравнений (13), (14) можно свести к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{Y}_t = Q_{GB}(w_t) - Y_t, Y_0 \in [0, 1], \\ \dot{z}_t = \frac{\alpha Y_t - e^{-\alpha t} z_t}{1 - e^{-\alpha t}} - \alpha z_t, z_0 = 0, \\ \dot{w}_t = z_t \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} - \alpha w_t \frac{1 - e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}}, w_0 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Траектории (верхние линии соответствуют w , а нижние — Y) и фазовые портреты системы (16) (для Y, w) изображены в табл. 4 для различных коэффициентов α .

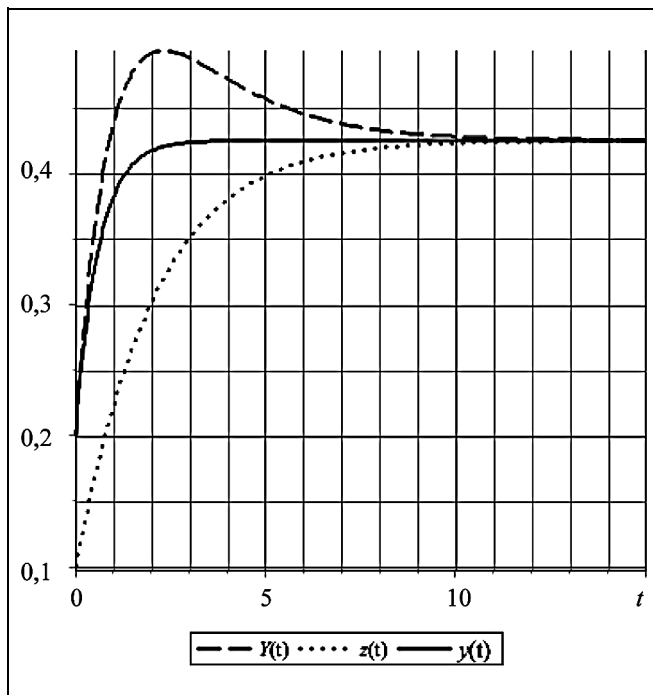
Пользуясь таблицей 4 для анализа процесса с запаздыванием, можно отметить следующие закономерности.

- Для значений коэффициента забывания $\alpha = 0,7$ и $\alpha = 0,5$ происходит циклический процесс, сходящийся к равновесию. Это видно и из траекторий, и из фазовых портретов. Но, в отличие от модели с забыванием, равновесие наступает для разных значений Y и w — реальной и кажущейся долей действующих агентов.
- Для значения коэффициента забывания $\alpha = 0,2$, как видно из фазового портрета, циклический

Таблица 4

Траектории и фазовые портреты системы (16)

	Траектории системы (16)	Фазовый портрет системы (16)
$\alpha = 0,7$		
$\alpha = 0,5$		
$\alpha = 0,2$		

Рис. 6. Траектории моделей (12) и (15) при $y(0) = Y(0) = 0,2$

процесс не затухает и положение равновесия не достигается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе доказана эквивалентность модели ограниченного окружения Шеллинга и модели порогового поведения Грановеттера с некоторой функцией распределения. Введена классификация видов положений равновесия в зависимости от параметров соответствующей динамической системы.

Исследованы характерные свойства положений равновесия для системы с различными значениями параметров, которые содержательно интерпретируемы в рамках соответствующих моделей. Для моделей в дискретном и непрерывном времени эти свойства положений равновесия оказались различными. Показано, что модели внутренне конкурентного порогового поведения в дискретном и непрерывном времени отличаются друг от друга — в первой возможны циклы, а во второй при тех же значениях параметров циклов не наблюдается. Кроме того, в непрерывные модели можно добав-

лять функции забывания и запаздывания, что приводит к колебаниям в первые моменты времени, а также к различным значениям кажущихся и реальных долей действующих агентов.

Перспективными направления дальнейших исследований: изучение эквивалентности моделей типа Шеллинга и Грановеттера в теоретико-игровой форме, формальный переход между моделями в дискретном и непрерывном времени, а также исследования различных типов равновесий для рефлексивного поведения агентов. Кроме того, значительный интерес представляет апробация предложенных моделей толерантного порогового поведения на реальных социологических данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. По определению (3) $F_G(y^{(k)}) = \hat{F}_G\left(\frac{y^{(k)}}{1-y^{(k)}}\right)$, поэтому из соотношения (2) следует

$$y^{(k+1)} = \frac{1 - \hat{F}_B\left(\frac{1-y^{(k)}}{y^{(k)}}\right)}{R_{G/B}(1 - F_G(y^{(k)})) + 1 - \hat{F}_B\left(\frac{1-y^{(k)}}{y^{(k)}}\right)}. \quad (17)$$

Пусть $\varphi: R \rightarrow R$ — функция такая, что

$$F_B(\varphi(y)) = \hat{F}_B\left(\frac{1-y}{y}\right). \quad (18)$$

По определению (3) $F_B(\varphi(y)) = \hat{F}_B\left(\frac{\varphi(y)}{1-\varphi(y)}\right)$, поэтому из выражения (18) следует, что $\frac{\varphi(y)}{1-\varphi(y)} = \frac{1-y}{y}$. Решая последнее уравнение относительно φ , получим

$$\varphi(y) = 1 - y. \quad (19)$$

Рекуррентное соотношение (5) следует из выражений (17)–(19).

Докажем, что правая часть соотношения (5) есть некоторая функция распределения.

Из свойств функций распределения $\hat{F}_G(\cdot)$ и $\hat{F}_B(\cdot)$ следует, что $F_{GB}(0+) = 0$, $F_{GB}(1-) = 1$. Из непрерывности $\hat{F}_B(\cdot)$ и того, что $\hat{F}_G(\cdot)$ является функцией распределения, следует, что $F_{GB}(\cdot)$ непрерывна справа и имеет предел слева.

Осталось показать, что функция $F_{GB}(\cdot)$ не убывает. Пусть $y_1 < y_2$, тогда необходимо доказать, что $F_{GB}(y_2) - F_{GB}(y_1) \geq 0$. Так как знаменатель функции $F_{GB}(\cdot)$ неот-

рицательное число для любого y , то остается доказать неравенство:

$$[1 - F_B(1 - y_2)][R_{G/B}(1 - F_G(y_1)) + 1 - F_B(1 - y_1)] - [1 - F_B(1 - y_1)][R_{G/B}(1 - F_G(y_2)) + 1 - F_B(1 - y_2)] \geq 0. \quad (20)$$

Так как $1 - F_G(y_1)$ — убывающая функция y , то, после замены y_1 на y_2 в этой функции для первого слагаемого неравенства (20), справедливо неравенство:

$$[1 - F_B(1 - y_2)][R_{G/B}(1 - F_G(y_1)) + 1 - F_B(1 - y_1)] - [1 - F_B(1 - y_1)][R_{G/B}(1 - F_G(y_2)) + 1 - F_B(1 - y_2)] \geq [1 - F_B(1 - y_2)][R_{G/B}(1 - F_G(y_2)) + 1 - F_B(1 - y_1)] - [1 - F_B(1 - y_1)][R_{G/B}(1 - F_G(y_2)) + 1 - F_B(1 - y_2)] = R_{G/B}(1 - F_G(y_2))[F_B(1 - y_1) - F_B(1 - y_2)] \geq 0$$

из которого следует неравенство (20).

ЛИТЕРАТУРА

- Schelling T. Dynamic Models of Segregation // Journal of Mathematical Sociology. — 1971. — Т. 1. — С. 143–186.
- Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // AJS. — 1978. — Vol. 83, N 6. — P. 1420–1443.
- Бреер В.В. Модели конформного поведения. Ч. 1. От философии к математическим моделям // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 2–13.
- Бреер В.В. Модели конформного поведения. Ч. 2. Математические модели // Проблемы управления. — 2014. — № 2. — С. 2–17.
- Словохотов Ю.Л. Физика и социопизика // Проблемы управления. — 2012. — Ч. 1. — № 1. — С. 2–20; Ч. 2. — № 2. — С. 2–31; Ч. 3. — № 3. — С. 2–34.
- Hatna E., Benenson I. The Schelling Model of Ethnic Residential Dynamics: Beyond the Integrated — Segregated Dichotomy of Patterns // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. — 2012. — Vol. 15, iss. 1. — URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/15/1/6.html> (дата обращения: 26.11.2015).
- Dokumaci E., Sandholm W. Schelling Redux: An Evolutionary Dynamic Model of Residential Segregation. — University of Wisconsin, June, 2007. — P. 1–37. — URL: <http://www.ssc.wisc.edu/~whs/research/schelling.pdf> (дата обращения: 26.11.2015).
- Li Z., Tang X. A Study of Collective Action Threshold Model Based on Utility and Psychological Theories // Lecture Notes in Computer Science. — 2012. — Vol. 7669. — P. 474–482.
- Kimmel M.S. Revolution, a Sociological Interpretation — Philadelphia: Temple University Press, 1990. — 252 p.
- Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного поведения // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 10. — С. 111–126.
- Кузнецов О.П. Сложные сети и распространение активности // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 12. — С. 3–26.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Бреер Владимир Валентинович — канд. техн. наук, бизнес-аналитик, ЗАО «Авиахэлп Групп», г. Москва, breer@live.ru.